



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 76 за 2023 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**А.С. Щербаков, В.А. Фролов,  
В.А. Галактионов**

**Темпоральный алгоритм  
излучательности для 3D-сцен  
произвольной детализации**

Статья доступна по лицензии  
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Щербаков А.С., Фролов В.А., Галактионов В.А. Темпоральный алгоритм излучательности для 3D-сцен произвольной детализации // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2023. № 76. 19 с.  
<https://doi.org/10.20948/prepr-2023-76>  
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2023-76>

О р д е н а Л е н и н а  
И Н С Т И Т У Т П Р И К Л А Д Н О Й М А Т Е М А Т И К И  
и м е н и М . В . К е л д ы ш а  
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

А.С. Щербаков, В.А. Фролов, В.А. Галактионов

Т е м п о р а л ь н ы й а л г о р и т м  
и з л у ч а т е л ь н о с т и д л я 3 D - с ц е н  
п р о и з в о л ь н о й д е т а л и з а ц и и

Москва — 2023

*А.С. Щербаков, В.А. Фролов, В.А. Галактионов*

### **Темпоральный алгоритм излучательности для 3D-сцен произвольной детализации**

В данной работе предлагается алгоритм расчёта глобального освещения методом излучательности, позволяющий добиться высокой производительности для большого количества полигонов, участвующих в расчётах. Двумя ключевыми идеями предлагаемого подхода являются создание прокси-геометрии на основе виртуальных площадок, ориентированных по осям координат, и метод темпорального обновления излучательности, использующий интерпретацию форм-факторов с точки зрения вероятностей. Комбинация предложенных методов позволяет получить быстрое обновление глобального освещения для источников света, меняющих свое положение, с качеством изображения, близким к классическому методу излучательности.

**Ключевые слова:** глобальное освещение, метод излучательности, упрощение геометрии.

*A.S. Shcherbakov, V.A. Frolov, V.A. Galaktionov*

### **Temporal radiosity method for 3D-scenes of arbitrary detailization**

In this paper, we propose an approach for calculating global illumination by the radiosity method that allows achieving high performance for a large number of patches involved in the calculations. Two key ideas of the proposed approach are the creation of proxy geometry based on axis-aligned virtual patches and the method of temporal radiosity, which uses the interpretation of form-factors in terms of probabilities. The combination of the proposed methods makes it possible to obtain a rapid update of global illumination for light sources changing their positions with image quality close to the naive radiosity method.

**Key words:** global illumination, radiosity method, geometry simplification.

# 1 Введение

Метод излучательности для вычисления глобального освещения широко используется в приложениях компьютерной графики реального времени, поскольку он создает изображения с высококачественным освещением и использует предварительную обработку сцены для более быстрой работы. Однако у него есть два основных недостатка: сложность вычислений имеет квадратичную зависимость от количества полигонов в сцене и требует упрощенной геометрии, к которой применяется метод. В данной статье мы предлагаем темпоральный алгоритм для метода излучательности, который позволяет добиться высокой скорости обновления глобального освещения за счет распределения вычислений между кадрами без потери качества изображения. Такой подход снижает сложность метода излучательности с  $O(N^2)$  до  $O(Nk)$ , где  $N$  — количество полигонов, а  $k$  — параметр алгоритма, который на практике выбирается порядка 10 – 100. Таким образом,  $k \ll N$  для большинства современных сцен. Кроме того, в этой работе рассматривается вопрос автоматического упрощения геометрии для более эффективного выполнения метода излучательности.

## 2 Предыдущие работы

На практике наиболее точное решение проблемы глобального освещения достигается с помощью неинтерактивных методов, таких как трассировка путей [22] и фотонные карты [19]. Несмотря на развитие этих методов и высокую скорость сходимости [33], их производительность все еще недостаточна для полноценного использования в приложениях реального времени. На практике для глобального освещения [31] используются упрощенные варианты трассировки путей с использованием аппаратного ускорения трассировки путей. Для уменьшения количества требуемых трассируемых лучей используются методы шумоподавления [26] и репроецирования результата предыдущего кадра [28]. Методы репроецирования широко используются в различных алгоритмах компьютерной графики, таких как временное сглаживание [28], временное суперразрешение [1], отражения в пространстве экрана [43], Ground Truth Ambient Occlusion [20] и т. д.

Число полигонов в современных сценах достигает десятков миллионов, поэтому методы глобального освещения используют квантование пространства, чтобы уменьшить объём обрабатываемых данных. Например, метод Instant Radiosity [24] генерирует набор вторичных источников света, отражения которых должны представлять собой вторичное освещение всей доступной геометрии. Однако этот метод требует большого объема памяти для карт теней [34] каждого вторичного источника света. Метод Reflective Shadow Map [10] также использует идею вторичных источников света, но не требует карт теней, что

приводит к снижению точности из-за отсутствия информации об окклюзии.

Многие методы разбивают пространство на однородные части, например воксели. Таким образом, Light Propagation Volumes [23] генерирует трехмерную сетку, на основе которой рассчитывается освещение, но этот подход менее точен, чем другие современные методы. Трассировка воксельных конусов [9] вокселизует геометрию и использует полученную аппроксимацию сцены для трассировки конусов в ней. Такой подход позволяет получать более высокое качество освещения, но он имеет высокую сложность вычислений, пропорциональную количеству пикселей экрана. Это делает данный метод неприменимым для современных экранов с разрешением 4К или 8К. Также широко используются методы, основанные на полях облученности [18, 27]. Они строят регулярные сетки и рассчитывают освещенность для каждой ячейки. Метод поля освещенности имеет довольно большое количество артефактов из-за того, что все освещение рассчитывается на довольно грубой воксельной сетке. Исправить эти артефакты можно с помощью трассировки лучей, требующей значительных вычислительных затрат в случае программной реализации, или аппаратной поддержки, которая имеется не на всех современных видеокартах. Все эти методы полностью динамические; то есть все необходимые расчеты выполняются в момент визуализации кадра.

Некоторые методы рассчитывают локальное освещение, используя только информацию экрана, например G-буфер. Таким образом, методы GТАО [20] и SSDO [15] используют данные окружающей геометрии каждого пикселя для аппроксимации освещения. Однако точность этих методов ограничена, и они не могут служить полным решением проблемы глобального освещения.

Существует также ряд методов, использующих предварительную обработку сцены, которые переносят свою вычислительную сложность в некоторый набор данных, который затем используется для более быстрой визуализации. К таким методам относятся нейронные сети [13, 35]), которые, несмотря на использование этапа предварительной обработки, все же недостаточно быстры по сравнению с другими подходами. Метод излучательности [41] вычисляет форм-факторы, которые затем используются при визуализации сцены. Для обновления освещения необходимо посчитать начальную излучательность на полигонах сцены и полученный вектор умножить на матрицу форм-факторов. Таким образом получается одиночный отскок света. Последующие отражения рассчитываются аналогично. Существуют расширения алгоритма излучательности, которые поддерживают одно умножение матрицы на вектор для получения освещения с множественным отражением [38].

Основной проблемой метода излучательности является квадратичная зависимость сложности метода от количества полигонов, участвующих в передаче света. На практике используется упрощенный аналог 3D-сцены, для которого количество вычислений методом излучательности будет на несколько порядков меньше. Упрощенная геометрия создается вручную [29, 32] или автоматически

с помощью таких методов, как вокселизация сцены.

Реализация излучательности [14] на практике требует упрощенной геометрии, поскольку ее сложность как для памяти, так и для вычислений составляет  $O(N^2)$ . Иерархическая версия [8, 16] и прогрессивное уточнение [5, 6] амортизируют проблему за счет рендеринга промежуточных результатов, но не решают ее.

Метод Монте-Карло излучательности (Monte-Carlo Radiosity, MCR) [2, 7, 36, 40] позволяет избежать явных форм-факторов, заменяя итеративное решение уравнения моделированием случайного блуждания по методу Монте-Карло, что приводит к значительному уменьшению требований к памяти. С теоретической точки зрения, MCR можно рассматривать как приложение (или частный случай) рандомизированной линейной алгебры к проблеме излучательности [12].

Анимированные сцены требуют принятия во внимание еще одного измерения – времени, поэтому существуют пространственно-временные подходы для вычисления излучательности [11, 30]. Комбинация Монте-Карло излучательности и темпорального повторного использования освещения была предложена в [3, 4]. Все четыре подхода предполагают, что движение известно заранее, что является существенным недостатком для рендеринга в реальном времени.

Ранее подход кластеризации активно использовался в излучательности [2, 17, 42, 45] для снижения сложности вычислений. Хотя кластеризация предлагает теоретическое решение за счет уменьшения асимптотической сложности алгоритма, ее практическое использование вызывает множество трудностей и может привести к артефактам изображения или неожиданному поведению [17]. Требование выполнять кластеризацию параллельно и в режиме реального времени накладывает дополнительные ограничения на то, какой алгоритм кластеризации может быть использован.

Существует несколько подходов к методу излучательности для вычисления на графических процессорах. Некоторые из них [37, 38] ускоряют метод, но не решают проблему асимптотики  $O(N^2)$ . Хорошо известный подход [8] также пытается решить проблему сложности вычислений, однако он требует значительного времени для сходимости и приводит к появлению видимых артефактов по мере продвижения сходимости. Подход [21] использует аппаратную ускоренную трассировку лучей, поддерживаемую современными графическими процессорами. Несмотря на аппаратное ускорение, метод неприменим для реального времени из-за значительных затрат времени.

В данной работе развиваются идеи MCR [2, 7, 36] добавлением темпорального подхода к распределению сложности вычислений и параллельного выполнения на графическом процессоре. В отличие от предыдущих работ [3, 4] предложенное решение предполагает полностью динамические источники света для каждого кадра и выполняет обновление глобального освещения в режиме реального времени.

## 3 Предложенный метод

Предложенный метод состоит из двух логических частей:

1. Автоматическое упрощение геометрии на основе метода виртуальных патчей.
2. Темпоральная излучательность — метод быстрого обновления глобального освещения.

### 3.1 Виртуальные площадки, ориентированные по осям координат

Данный подход основан на методе виртуальных патчей [39].

Сцена (рис. 1) разбивается на воксели (допускаются и другие варианты разделения) (рис. 2). Размер вокселя — это параметр алгоритма, который может быть настроен пользователем.



Рис. 1. Сцена с финальным освещением.

На гранях вокселей генерируются квазислучайные точки (рис. 3). Из этих точек внутри вокселей трассируются лучи перпендикулярно граням до тех пор, пока они не пересекутся с геометрией (рис. 4).

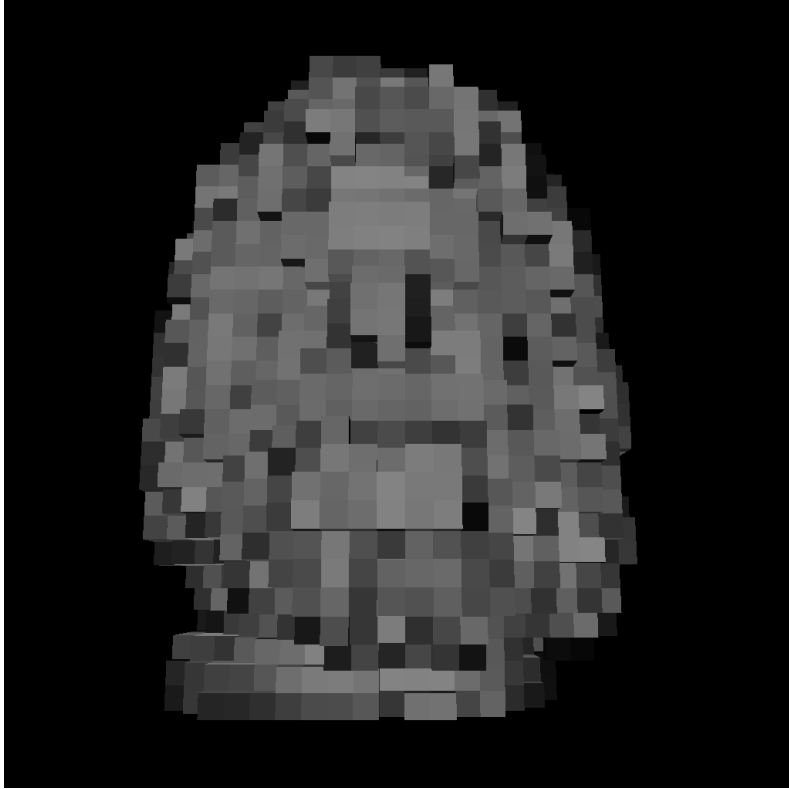


Рис. 2. Вокселизированная сцена.

Точка пересечения используется для создания виртуальной площадки. Виртуальная площадка — это набор нормали  $\vec{n}$ , цвета  $c$ , площади  $A$  и форм-факторов  $F$  для этой площадки и остальных виртуальных площадок. Первоначально для пар точек рассчитываются форм-факторы, поэтому уравнение

$$F_{ij} = \frac{1}{A_i} \int_{x \in P_i} \int_{y \in P_j} \frac{\cos\theta \cos\theta'}{\pi r^2} V(x, y) dy dx, \quad (1)$$

которое обычно рассчитывается методом Монте-Карло для полигонов  $P_i$  и  $P_j$ , упрощается до

$$F_{ij} = A_j \frac{\cos\theta \cos\theta'}{\pi r^2} V(x, y). \quad (2)$$

Поскольку используется одна точка,  $dy$  и  $dx$  становятся  $A_j$  и  $A_i$ . Множители  $A_i$  и  $\frac{1}{A_i}$  сокращаются.

Затем, в отличие от оригинальной статьи, вместо кластеризации виртуальных площадок с некоторым ранее неизвестным количеством базовых направлений мы преобразуем  $i$ -ю площадку в виртуальные площадки (от 1-й до 3-х), выровненные по осям координат. Таким образом, каждая из этих площадок принадлежит одному из 6 направлений — по 2 направления на каждую ось. Исходные форм-факторы  $F_{ij}$ , цвет  $c_i$  и площадь  $A_i$  преобразуются следующим образом:



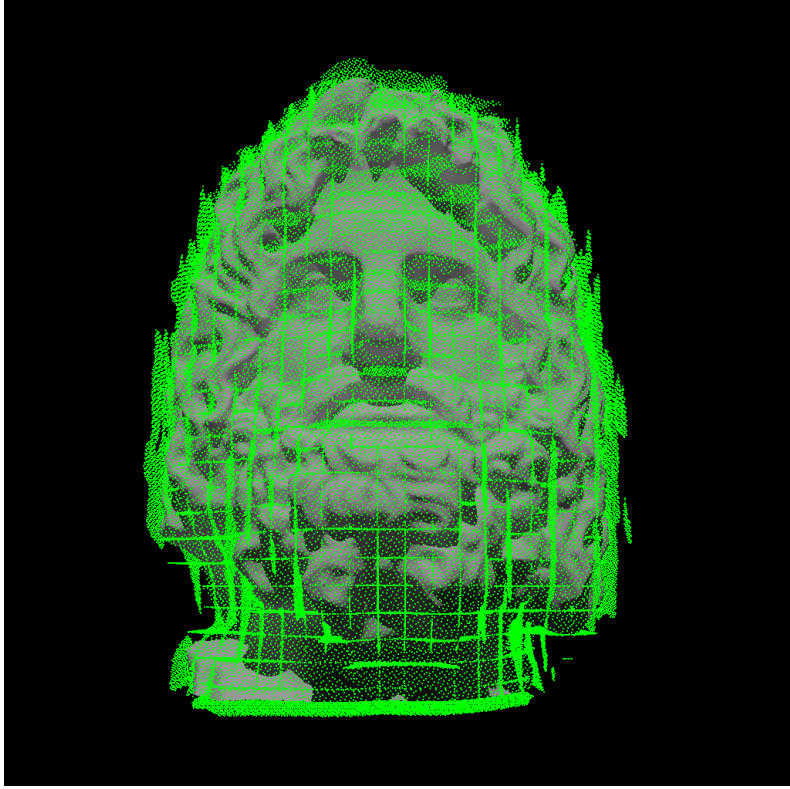


Рис. 3. Квазислучайные точки на гранях вокселей.

$$F_{i_h j} = F_{ij} \cdot (\vec{n}, \vec{axis}_h), \quad \forall j = \overline{1, N}, \quad (3)$$

$$c_{i_h} = c_i \cdot (\vec{n}, \vec{axis}_h), \quad (4)$$

$$A_{i_h} = A_i \cdot (\vec{n}, \vec{axis}_h), \quad (5)$$

где  $\vec{axis}_h$  — один из базисных векторов положительного или отрицательного направления. Далее мы суммируем цвета, области и форм-факторы, соответствующие виртуальным площадкам с одинаковой ориентацией, помещенным в один и тот же воксель в соответствии с методом, описанным в [41]:

$$F_{i_h j} = \frac{\sum_{i=1}^N F_{i_h j} A_{i_h}}{\sum_{i=1}^N A_{i_h}}, \quad \forall j = \overline{1, N} \quad (6)$$

$$c_{i_h} = \frac{\sum_{i=1}^N c_{i_h} A_{i_h}}{\sum_{i=1}^N A_{i_h}}, \quad (7)$$

$$A_{i_h} = \sum_{i=1}^N A_{i_h}. \quad (8)$$

После расчета излучательности мы получаем сцену с повоксельным освещением (рис. 5). Чтобы добиться плавного освещения, мы применяем модифи-

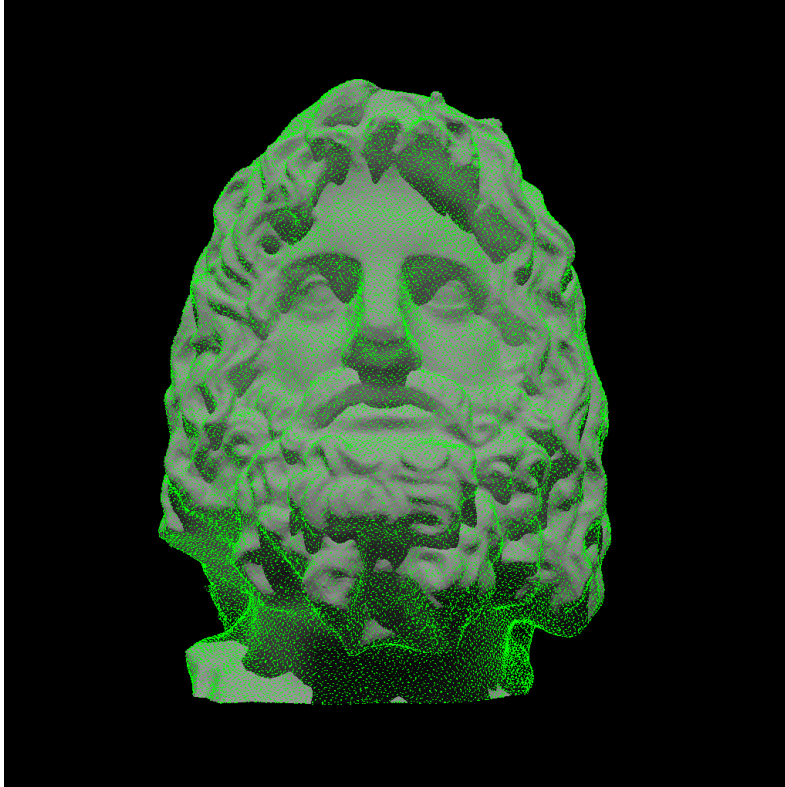


Рис. 4. Точки на поверхностях сцены используются для инициализации виртуальных площадок.

цированную трилинейную фильтрацию в сетке вокселей (рис. 6). Некоторые воксели пусты, поэтому исключаем их и их веса из итоговой формулы:

$$L = \frac{\sum_{i \in M} L_i w_i}{\sum_{i \in M} w_i}, \quad (9)$$

где  $M$  – множество непустых вокселей в области  $2 \times 2 \times 2$ , используемых для фильтрации,  $L_i$  – освещение  $i$ -го вокселя,  $w_i$  – трилинейный вес  $i$ -го вокселя.

Такой подход позволяет сделать виртуальную прокси-геометрию для метода излучательности, которая не имеет представления в 3D-пространстве, но содержит все необходимые данные для расчета освещения с меньшим количеством вычислений и последующего его переноса на исходную 3D-сцену.

### 3.2 Темпоральная излучательность

Каждая строка матрицы форм-факторов  $F_i$  обладает следующим свойством:

$$\sum_{j=1}^N F_{ij} \leq 1, \forall i = \overline{1, N} \quad (10)$$

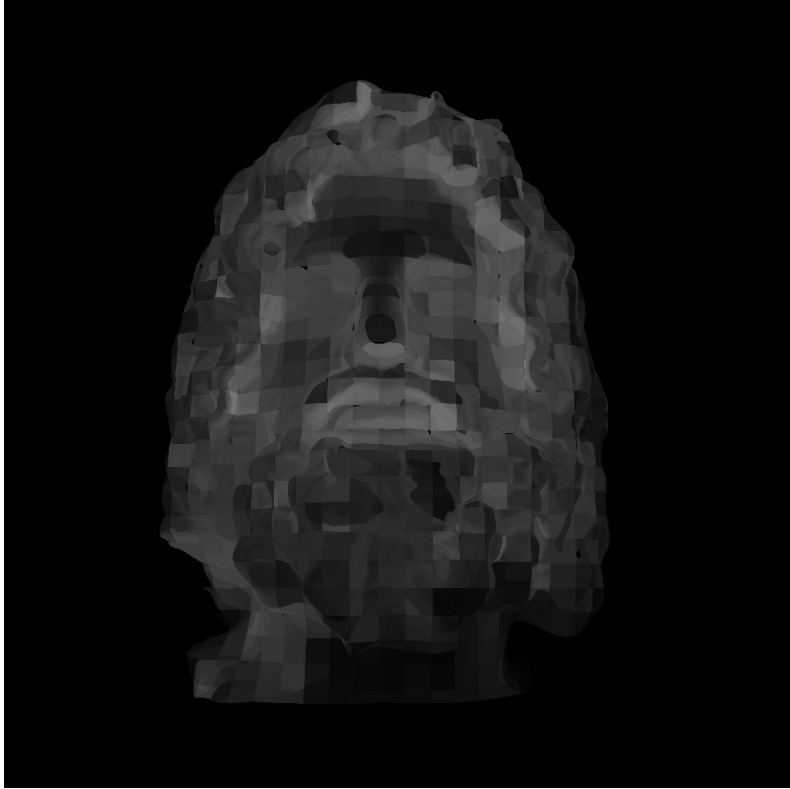


Рис. 5. Вторичное освещение, вычисленное для виртуальных площадок в вокселях.

Сумма может быть меньше 1, поскольку в некоторых сценах свет может покинуть сцену, и эта часть света больше не будет отражаться ни от какой поверхности.

При расчете освещения для площадки эта строка используется следующим образом:

$$B_i = \sum_{j=1}^N F_{ij} E_j, \forall i = \overline{1, N}. \quad (11)$$

Расширим вектор форм-факторов значением  $F_0$ , которое соответствует свету, покинувшему сцену. Вектор освещения  $E$  расширяется значением  $E_0 = 0$  при отсутствии освещения за пределами сцены или каким-либо другим значением, взятым, например, из сферических гармоник, рассчитанных из амбиентного освещения неба. Тогда получим следующие уравнения:

$$\sum_{j=0}^N F_{ij} = 1, \forall i = \overline{1, N}, \quad (12)$$

$$B_i = \sum_{j=0}^N F_{ij} E_j, \forall i = \overline{1, N}. \quad (13)$$

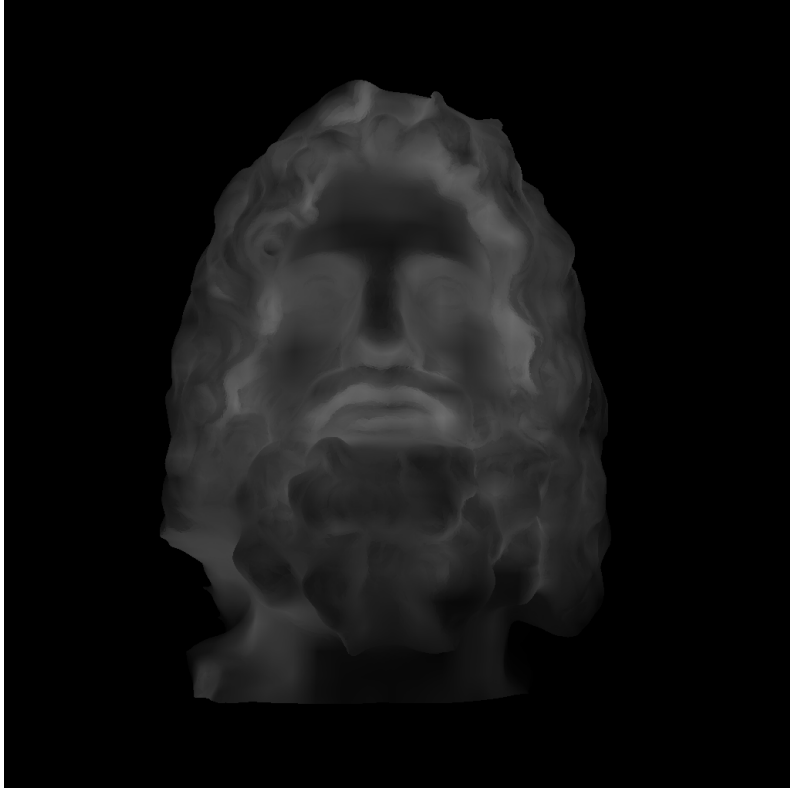


Рис. 6. Вторичное освещение после интерполяции.

Исходя из этих выражений, мы можем переформулировать расчет освещенности как расчет математического ожидания случайной величины  $E$  с плотностью вероятности  $F_i$ .

$$B_i = \mathbb{E} E, \text{ для плотности вероятности } F_i. \quad (14)$$

Такая интерпретация позволяет составить корректный темпоральный алгоритм без видимых темпоральных артефактов.

Полагая, что время каждого кадра примерно одинаково, получаем, что необходимо получить случайно выбранные значения с плотностью вероятности  $F_i$  из равномерного распределения (покадровая выборка). Для этого строится алиас-таблица [44] на основе вектора  $F_i$ . Все эти действия выполняются на этапе подготовки сцены. При визуализации выполняются следующие действия:

1. Расчет прямого освещения для виртуальных площадок. Инициализируется вектор  $E$ .
2. В вычислительном шейдере  $k$  значений (индексы элементов вектора света  $E$ ) выбираются из алиас-таблицы, где  $k$  — параметр алгоритма, настраиваемый пользователем.
3. По полученным индексам считываются соответствующие значения вектора  $E$ .

4. Рассчитывается среднее значение излучательности  $B_i$ .
5. Полученное значение  $B_i$  смешивается со значением  $B_i$  для предыдущего кадра.
6. В шейдере, который рассчитывает финальное освещение геометрии, считывается вектор  $B_i$ , и полученные данные используются в качестве второго освещения.

Таким образом, вместо алгоритма умножения матрицы на вектор сложности  $O(N^2)$  предлагается алгоритм сложности  $O(Nk)$ , где  $k \ll N$ . В тестовых сценах параметр  $k$  выбирался в диапазоне от 10 до 100.

## 4 Детали реализации

### 4.1 Вес для смешивания освещения

Из-за большой неоднородности значений вектора  $E$  вес для смешивания должен быть выше, чем в других временных алгоритмах. В тестовых сценах типичное значение веса составляло 0,998. Таким образом, метод не может мгновенно реагировать на изменение условий освещения; вместо этого оно будет плавно обновляться без видимого шума. Такое поведение вполне подходит для сцен, освещенных солнцем или стационарными источниками света.

### 4.2 Многократные отражения

Для поддержки множественных отражений света (отскоков) требуется дополнительный шаг алгоритма. После вычисления вектора  $E$  к нему добавляется вектор  $B$  для предыдущего кадра. Таким образом добавляется запаздывание второго и последующих отражений, слабо заметное на фоне отставания значений первого светового отражения.

### 4.3 Поточковая загрузка форм-факторов

Для больших сцен расчет освещения для всей геометрии может быть непрактичным. В этом случае форм-факторы могут храниться в видеопамяти только для полигонов в некоторой окрестности камеры, аналогично [37]. Этот подход неприменим для алиас-таблиц, поскольку при их частичной загрузке в видеопамять плотность вероятности  $F_i$  может быть некорректной. В этом случае предлагается хранить немодифицированные значения форм-факторов на диске или в оперативной памяти и загружать необходимую их часть в видеопамять. Для полученной подстроки можно легко вычислить  $F_0$  в реальном

времени с помощью параллельной редукции и построения алиас-таблиц, используя метод, описанный в [25].

## 5 Сравнение

Предлагаемый метод существенно превосходит по скорости классический метод излучательности (табл. 1). Для тестов производительности использовалась видеокарта Nvidia RTX 3060.

Количество полигонов	Излучательность, мсек	Предложенный метод, мсек
1736	0.34	0.02
5485	2.94	0.04
8786	7.34	0.06
10422	12.01	0.08

Табл. 1. Сравнение производительности

При этом качество полученного освещения незначительно отличается от классического метода излучательности по сравнению с эталоном, полученным методом трассировки пути (рис. 7, 8).

## 6 Заключение

В данной работе предлагается два расширения метода излучательности: виртуальные площадки, ориентированные по осям координат, и темпоральная излучательность, которые в совокупности обеспечивают решение проблемы глобального освещения для приложений реального времени. Такое решение подходит для динамических источников света, которые плавно перемещаются. Адаптация этого метода для поддержки резко меняющихся условий освещения открывает обширное поле для будущих исследований. Метод виртуальных площадок, ориентированных по осям координат, может быть использован для сцен различной детализации. Основной проблемой предлагаемого метода является требование выбора веса для смешивания освещения между кадрами. Это значение мы можем получить на основе значений матрицы форм-факторов и цветов патчей. Эта задача также является одним из направлений для будущих исследований.

Предложенные подходы могут быть использованы в различных графических приложениях, где важно высокое качество освещения статической геометрии. Поскольку для вторичного освещения существует задержка, основным вариантом использования темпоральной излучательности — это сцены, освещенные солнцем или статическим освещением.



Рис. 7. Освещение, рассчитанное методом излучательности. (MSE: 0.06658, PSNR: 23.53, SSIM: 0.8354 в сравнении с эталоном, полученным трассировкой путей).





Рис. 8. Освещение, рассчитанное с помощью предложенного метода (темпоральной излучательности). (MSE: 0.06651, PSNR: 23.54, SSIM: 0.8323 в сравнении с эталоном, полученным трассировкой путей).



## Список литературы

- [1] *Anti-Aliasing and Upscaling*. <https://docs.unrealengine.com/5.1/en-US/anti-aliasing-and-upscaling-in-unreal-engine>. Accessed: 2023-11-04.
- [2] Philippe Bekaert и др. “Hierarchical Monte Carlo Radiosity”. В: янв. 1998, с. 259—268. ISBN: 978-3-211-83213-4. DOI: 10.1007/978-3-7091-6453-2\_24.
- [3] Gonzalo Besuievksy и Xavier Pueyo. “A Monte Carlo Method for Accelerating the Computation of Animated Radiosity Sequences.” В: февр. 2001, с. 201—208. ISBN: 0-7695-1007-8. DOI: 10.1109/CGI.2001.934675.
- [4] Gonzalo Besuievksy и Mateu Sbert. “The Multi-Frame Lighting Method: A Monte Carlo Based Solution for Radiosity in Dynamic Environments”. В: янв. 1996, с. 185—194. ISBN: 978-3-211-82883-0. DOI: 10.1007/978-3-7091-7484-5\_19.
- [5] Michael F. Cohen и др. “A Progressive Refinement Approach to Fast Radiosity Image Generation”. В: *SIGGRAPH Comput. Graph.* 22.4 (июнь 1988), с. 75—84. ISSN: 0097-8930. DOI: 10.1145/378456.378487. URL: <https://doi.org/10.1145/378456.378487>.
- [6] Michael F. Cohen и др. “A Ray tracing algorithm for progressive radiosity”. В: *Proceedings of the 16th annual conference on Computer graphics and interactive techniques* (1989). URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:8674089>.
- [7] Ronald Cools и Yves Willems. “An Empirical Comparison Of Monte Carlo Radiosity Algorithms”. В: (февр. 1999).
- [8] G Coombe и M Harris. “Global illumination using progressive refinement radiosity”. В: (янв. 2005).
- [9] Cyril Crassin и др. “Interactive Indirect Illumination Using Voxel Cone Tracing”. В: *Computer Graphics Forum* 30 (2011).
- [10] Carsten Dachsbacher и Marc Stamminger. “Reflective Shadow Maps”. В: *Proceedings of the 2005 Symposium on Interactive 3D Graphics and Games. I3D '05*. Washington, District of Columbia: Association for Computing Machinery, 2005, с. 203—231. ISBN: 1595930132.
- [11] Cyrille Damez и François Sillion. “Space-Time Hierarchical Radiosity”. В: *Rendering techniques '99 (Proceedings of the 10th Eurographics Workshop on Rendering)* (авг. 1999). DOI: 10.2312/EGWR/EGWR99/235-246.
- [12] Petros Drineas и Michael W. Mahoney. “RandNLA: Randomized Numerical Linear Algebra”. В: *Commun. ACM* 59.6 (май 2016), с. 80—90. ISSN: 0001-0782. DOI: 10.1145/2842602. URL: <https://doi.org/10.1145/2842602>.

- [13] Duan Gao, Haoyuan Mu и Kun Xu. “Neural Global Illumination: Interactive Indirect Illumination Prediction under Dynamic Area Lights.” В: *IEEE transactions on visualization and computer graphics* PP (2022).
- [14] Cindy M. Goral и др. “Modeling the Interaction of Light between Diffuse Surfaces”. В: *SIGGRAPH Comput. Graph.* 18.3 (январь. 1984), с. 213—222. ISSN: 0097-8930. DOI: 10.1145/964965.808601. URL: <https://doi.org/10.1145/964965.808601>.
- [15] Thorsten Grosch и Tobias Ritschel. “Screen-Space Directional Occlusion”. В: *GPU Pro.* 2010.
- [16] Pat Hanrahan, David Salzman и Larry Aupperle. “A Rapid Hierarchical Radiosity Algorithm”. В: *Proceedings of the 18th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques.* SIGGRAPH '91. New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, 1991, с. 197—206. ISBN: 0897914368. DOI: 10.1145/122718.122740. URL: <https://doi.org/10.1145/122718.122740>.
- [17] Jean-Marc Hasenfratz и др. “A Practical Analysis of Clustering Strategies for Hierarchical Radiosity”. В: *Computer Graphics Forum* 18 (сентябрь. 1999), с. 221—232. DOI: 10.1111/1467-8659.00342.
- [18] JT Hooker. *Volumetric Global Illumination At Treyarch.* URL: [https://www.activision.com/cdn/research/Volumetric\\_Global\\_Illumination\\_at\\_Treyarch.pdf](https://www.activision.com/cdn/research/Volumetric_Global_Illumination_at_Treyarch.pdf). 2016.
- [19] Henrik Wann Jensen. “Global Illumination using Photon Maps”. В: *Rendering Techniques '96.* Под ред. Xavier Pueyo и Peter Schröder. Vienna: Springer Vienna, 1996, с. 21—30. ISBN: 978-3-7091-7484-5.
- [20] Jorge Jimenez и др. “Practical Real-Time Strategies for Accurate Indirect Occlusion”. В: 2016.
- [21] Benjamin Kahl. *Hardware Acceleration of Progressive Refinement Radiosity using Nvidia RTX.* Март 2023.
- [22] James T. Kajiya. “The Rendering Equation”. В: *SIGGRAPH Comput. Graph.* 20.4 (август. 1986), с. 143—150. ISSN: 0097-8930.
- [23] Anton Kaplanyan и Carsten Dachsbacher. “Cascaded light propagation volumes for real-time indirect illumination”. В: *ACM Symposium on Interactive 3D Graphics and Games.* 2010.
- [24] Alexander Keller. “Instant radiosity”. В: *Proceedings of the 24th annual conference on Computer graphics and interactive techniques* (1997).
- [25] Hans-Peter Lehmann. “Weighted Random Sampling – Alias Tables on the GPU”. В: 2020.

- [26] Edward Liu и др. “Cinematic Rendering in UE4 with Real-Time Ray Tracing and Denoising: High-Quality and Real-Time Rendering with DXR and Other APIs”. В: февр. 2019, с. 289—319. ISBN: 978-1-4842-4426-5.
- [27] Zander Majercik, Jean-Philippe Guertin и Morgan McGuire. “Dynamic Diffuse Global Illumination with Ray-Traced Irradiance Fields”. В: 2019.
- [28] Adam Marrs и др. “Adaptive Temporal Antialiasing”. В: *Proceedings of the Conference on High-Performance Graphics*. HPG '18. Vancouver, British Columbia, Canada: Association for Computing Machinery, 2018. ISBN: 9781450358965.
- [29] Sam Martin и Per Einarsson. *A Real Time Radiosity Architecture for Video Games*. URL: [https://advances.realtimerendering.com/s2010/Martin-Einarsson-RadiosityArchitecture\(SIGGRAPH\%202010\%20Advanced\%20RealTime\%20Rendering\%20Course\).pdf](https://advances.realtimerendering.com/s2010/Martin-Einarsson-RadiosityArchitecture(SIGGRAPH\%202010\%20Advanced\%20RealTime\%20Rendering\%20Course).pdf). 2010.
- [30] Ignacio Martín, Xavier Pueyo и D. Tost. “Frame-to-frame coherent animation with two-pass radiosity”. В: *Visualization and Computer Graphics, IEEE Transactions on* 9 (февр. 2003), с. 70—84. DOI: 10.1109/TVCG.2003.1175098.
- [31] Martin Stich. *REAL-TIME RAYTRACING WITH NVIDIA RTX*. URL: <https://on-demand.gputechconf.com/gtc-eu/2018/pdf/e8527-real-time-ray-tracing-with-nvidia-rtx.pdf>. Окт. 2018.
- [32] Yuriy O’Donnell. *Precomputed Global Illumination in Frostbite*. URL: <https://media.contentapi.ea.com/content/dam/eacom/frostbite/files/gdc2018-precomputedglobalilluminationinfrostbite.pdf>. 2018.
- [33] Y. Ouyang и др. “ReSTIR GI: Path Resampling for Real-Time Path Tracing”. В: *Computer Graphics Forum* 40 (дек. 2021), с. 17—29.
- [34] William T. Reeves, D. Salesin и Robert L. Cook. “Rendering antialiased shadows with depth maps”. В: *Proceedings of the 14th annual conference on Computer graphics and interactive techniques* (1987).
- [35] Peiran Ren и др. “Global illumination with radiance regression functions”. В: *ACM Transactions on Graphics (TOG)* 32 (2013), с. 1—12.
- [36] Mateu Sbert и др. “Global multipath Monte Carlo algorithms for radiosity”. В: *The Visual Computer* 12 (февр. 1996), с. 47—61. DOI: 10.1007/s003710050047.
- [37] A. S. Shcherbakov и V. A. Frolov. “Dynamic Radiosity”. Англ. В: *WSCG'2019 Full papers proceedings*. 2901. Computer Science Research Notes 2901 Pilsen, Czech Republic, 2019, с. 83—90. DOI: 10.24132/CSRN.2019.2901.1.10.

- [38] Alexandr Shcherbakov и Vladimir Frolov. “Accelerating Radiosity on GPUs”. АНГЛ. В: *WSCG'2017 Full papers proceedings*. 2701. Computer Science Research Notes 2701 Pilsen, Czech Republic, 2017, с. 99–105.
- [39] Alexandr Shcherbakov, Vladimir Frolov и Vladimir Galaktionov. “Virtual patches approach for radiosity”. В: т. 34. 3. Institute for System Programming of the RAS, 2022, с. 47–60.
- [40] Peter Shirley. “Time Complexity of Monte Carlo Radiosity”. В: *Computers & Graphics* 16 (июль 1992). DOI: 10.1016/0097-8493(92)90078-A.
- [41] François X. Sillion и Clarisse Peuch. “Radiosity & Global Illumination”. В: 1994.
- [42] Brian Smits, James Arvo и Donald Greenberg. “A Clustering Algorithm for Radiosity in Complex Environments”. В: *Proceedings of the 21st Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*. SIGGRAPH '94. New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, 1994, с. 435–442. ISBN: 0897916670. DOI: 10.1145/192161.192277. URL: <https://doi.org/10.1145/192161.192277>.
- [43] Tomasz Stachowiak и Yasin Uludag. *Stochastic Screen-Space Reflections*. URL: <https://www.ea.com/frostbite/news/stochastic-screen-space-reflections>. 2015.
- [44] Alastair J. Walker. “New fast method for generating discrete random numbers with arbitrary frequency distributions”. В: *Electronics Letters* 10 (1974), с. 127–128.
- [45] Andrew Willmott, Paul Heckbert и Michael Garl. “Face Cluster Radiosity”. В: *Rendering Techniques 99 (Proceedings of EG Workshop on Rendering)* (июль 1999). DOI: 10.2312/EGWR/EGWR99/293-304.