



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 74 за 2023 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

И.Р. Хайталиев, Е.В. Шильников,
Т.Г. Елизарова

Квазигазодинамическая
гетерогенная модель
описания смеси сжимаемых
флюидов. Одномерный
случай

Статья доступна по лицензии
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Хайталиев И.Р., Шильников Е.В., Елизарова Т.Г. Квазигазодинамическая гетерогенная модель описания смеси сжимаемых флюидов. Одномерный случай // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2023. № 74. 24 с.
<https://doi.org/10.20948/prepr-2023-74>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2023-74>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

И.Р. Хайталиев, Е.В. Шильников, Т.Г. Елизарова

**Квазигазодинамическая гетерогенная
модель описания смеси сжимаемых
флюидов. Одномерный случай**

Москва — 2023

Хайталиев И.Р., Шильников Е.В., Елизарова Т.Г.

Квазигазодинамическая гетерогенная модель описания смеси сжимаемых флюидов. Одномерный случай

Приведена регуляризация квазигазодинамического типа для гетерогенной модели двухжидкостного течения смеси сжимаемых флюидов. Модель позволяет описывать течения застывших газов.

Рассматривается облегченная модель из 4 уравнений динамики гетерогенной сжимаемой двухжидкостной смеси с уравнениями состояния застывшего газа. Дальнейшую уменьшенную форму этой модели с исключенными объемными концентрациями и квадратным уравнением для общего давления компонентов можно назвать квазигомогенной формой. Применяется конечно-разностный алгоритм, построенный с помощью метода конечных объемов. На примерах решения типичных одномерных задач показано, что представленный алгоритм является стабильным и надежным способом моделирования задач с сильными ударными волнами.

Ключевые слова: газовая динамика, гетерогенная двухжидкостная смесь, модель из четырех уравнений, конечно-разностный алгоритм, регуляризованные уравнения.

Ismatullo Ramazanovich Khaytaliev, Evgeny Vladimirovich Shilnikov, Tatiana Gennadievna Elizarova

Quasi-gasodynamic heterogeneous model for describing a mixture of compressible fluids. One-dimensional case

Quasi-gasdynamic type regularization is presented for a heterogeneous model of a two-fluid mixture of compressible fluids. This model allows to describe the flows of stiffened gases.

The reduced four-equation model for dynamics of the heterogeneous compressible two-fluid mixture with equations of state of a stiffened gas is considered. A further reduced form of this model with the excluded volume concentrations and a quadratic equation for the common pressure of the components can be called a quasi-homogeneous form. A finite difference algorithm is used, built with the finite volume method. Using examples of solving typical one-dimensional problems, it is shown that the presented algorithm is a stable and reliable way to model problems with strong shock waves.

Key words: gas dynamics, heterogeneous two-fluid mixture, four-equation model, finite difference algorithm, regularized equations.

Введение

Моделирование смесей разнородных флюидов проводится, как правило, в рамках гомогенных или гетерогенных моделей. Для гомогенных смесей полагается, что компоненты смеси не имеют выраженных границ и собственных объемов. В этом случае давление в смеси вычисляется как сумма парциальных давлений компонент. Для гетерогенных моделей предполагается, что каждая компонента смеси занимает свой собственный объем. В этом случае давление в смеси вычисляется через уравнения состояния компонент и их объемные доли в смеси. Как показывает опыт численного моделирования, область применимости гетерогенной модели оказывается более обширной, чем модели гомогенной. В частности, на основе гетерогенной модели удастся моделировать не только смеси газов, но и смеси газ-жидкость в приближении так называемого «застывшего» газа, что существенно для практических применений. Для случая смеси двух идеальных газов обе модели совпадают.

В данной работе рассматривается так называемая облегченная модель динамики гетерогенных сжимаемых двухжидкостных смесей, состоящая из четырех уравнений, с уравнениями состояния застывшего газа. Эту модель мы применим для решения задач о распаде разрыва в среде «воздух-вода» и в среде «вода-воздух», описанных в [1-3].

Остальная часть этой статьи организована следующим образом. В разделе 2 приведен обзор некоторых работ по моделированию смесей в гетерогенном приближении, в разделе 3 выписаны управляющие уравнения двухжидкостной модели с четырьмя уравнениями. Построение квазигазодинамической регуляризации (КГД) для гетерогенной модели в квазигомогенной форме приведено в разделе 4. Числовые примеры и некоторые обсуждения приведены в разделе 4. Наконец, в разделе 5 подведены итоги работы.

1. Обзор вычислительных моделей

Двухжидкостные течения возникают в различных инженерных приложениях. Примерами таких течений сжимаемых флюидов являются:

- течение воздуха и водяного пара во влажной среде, где оба газа взаимодействуют и необходимо учитывать их сжимаемость;
- воздушно-водородное течение, например, течение смеси воздуха и водорода, часто встречающееся в системах топливных элементов или при хранении и транспортировке газа;
- течение воздух-СО₂, например, в промышленных процессах или системах газообмена;
- течение воздух-природный газ. Это течение смеси воздуха и природного газа, широко используемой в системах сжигания, таких как нагреватели, работающие на природном газе, или газовые турбины.

Связанные с этими случаями явления весьма сложны и для моделирования таких двухжидкостных течений сжимаемых флюидов гетерогенное приближение оказывается востребованным.

Достаточно полная иерархия моделей, описывающих динамику гетерогенных сжимаемых смесей, сформулирована, например, в [1-8]. Эти модели различаются по числу уравнений, входящих в систему, – от четырех до семи дифференциальных уравнений в частных производных. В модели из семи уравнений (the seven-equation model) Бэра-Нунциато (Baer-Nunziato 1986 г.) каждый компонент описывается своей собственной скоростью, температурой и давлением. Однако для определенных сценариев применения включенная в модель Бэра-Нунциато физика оказывается излишней. Поэтому предлагаются различные облегченные модели, например, модель из шести уравнений с равновесной скоростью [5], приближение с общим давлением [6-8], модель из пяти уравнений с равновесной скоростью и равновесным давлением [2] и модель из четырех уравнений с равновесной скоростью, давлением и температурой.

В частности, в [6] используется модель из шести уравнений для двухжидкостного течения сжимаемых флюидов с общим давлением для компонентов. В [7] выписана модель из шести уравнений с общим давлением для компонентов для двухфазного двухжидкостного течения сжимаемых флюидов. Здесь же разработан метод конечных объемов с технологией выделения границ раздела для невязкой двухжидкостной модели с шестью уравнениями. В [8] решают уравнения Навье-Стокса для двух полностью сжимаемых смешивающихся жидкостей, в рамках которой исследуется неустойчивость Рэлея-Тейлора.

В [1] показано, что модель из четырех уравнений (four-equation model) эквивалентна для гетерогенных и гомогенных смесей идеальных газов. В [2] отмечено, что одножидкостное моделирование недостаточно для точного воспроизведения динамики кавитации. Поэтому авторы использовали двухжидкостное моделирование. Это моделирование позволяет каждой жидкости обладать своими собственными физическими переменными, за исключением давления.

Существует множество численных алгоритмов для моделирования гомогенных одножидкостных смесей, которые включают запись исходной системы уравнений и их численную реализацию, см., например, [9]. В частности, в [3,10-12] были разработаны и протестированы алгоритмы для моделирования газовых смесей, основанные на регуляризованных или квазигазодинамических (КГД) уравнениях. Эти уравнения используются в однотемпературном и односкоростном приближениях для описания поведения смеси. Первая версия такой системы была представлена в работе [13] для течений разреженных газов.

В работе [1] представлена облегченная модель динамики гетерогенных сжимаемых двухжидкостных смесей, состоящей из четырех уравнений, с

уравнениями состояния застывшего газа. Там же представлено развитие модели с исключенными объемными концентрациями и квадратным уравнением для общего давления компонентов, которую можно назвать квазигомогенной формой модели. Именно эту модель мы будем использовать для построения разностной аппроксимации и решения тестовых задач.

2. Гетерогенная модель сжимаемой смеси

Облегченная система дифференциальных уравнений в частных производных из четырех уравнений для гетерогенной сжимаемой двухжидкостной смеси с одной скоростью и одной температурой состоит из балансовых уравнений для массы компонентов, общего импульса и полной энергии. В одномерном случае соответствующая система уравнений имеет вид

$$\frac{\partial(\alpha_k r_k)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_k r_k u) = 0, \quad k = 1, 2, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial x} p = \frac{\partial}{\partial x} \Pi^{\text{NS}} + \rho f, \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(0.5 \cdot \rho u^2 + \rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x}((0.5 \cdot \rho u^2 + \rho \varepsilon + p)u) \\ = \frac{\partial}{\partial x}(-q^{\text{F}} + \Pi^{\text{NS}} \cdot u) + \rho u \cdot f + Q. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь основными искомыми функциями являются плотность $r_k > 0$ и объемная доля $0 < \alpha_k < 1$ гетерогенного компонента, $k = 1, 2$, общая скорость u и абсолютная температура $T > 0$ смеси. Эти функции зависят от $x \in [l_1, l_2]$ и $t \geq 0$, где $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$. Используются общепринятые обозначения газодинамических величин. Внешнюю силу и источник или сток внешней энергии обозначим f и Q соответственно.

Используются следующие дополнительные соотношения:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 \alpha_k &= 1, \\ \rho &= \sum_{k=1}^2 \alpha_k r_k, \\ \rho \varepsilon &= \sum_{k=1}^2 \alpha_k r_k \varepsilon_k(r_k, T), \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$p = p_k(r_k, T) > 0, \quad (2.5)$$

где $p_k(r_k, T)$ и $\varepsilon_k = \varepsilon_k(r_k, T)$ – давление и удельная внутренняя энергия k -го компонента ($k = 1, 2$), ρ и ε – плотность и удельная внутренняя энергия смеси, а p – общее давление компонентов.

Мы применяем уравнения состояния застывшего газа в известном виде [1, 14]

$$p_k(r_k, T) = R_k r_k T - p_{*k}, \quad \varepsilon_k(r_k, T) = c_{V_k} T + \frac{p_{*k}}{r_k} + \varepsilon_{0k}, \quad (2.6)$$

где $R_k > 0$, $c_{V_k} > 0$, $p_{*k} > 0$ и ε_{0k} – заданные физические константы, $k = 1, 2$. Кроме того, $R_k = (\gamma_k - 1)c_{V_k}$, где $\gamma_k > 1$ – показатель адиабаты, и $c_{p_k} = \gamma_k c_{V_k}$. Это приближение основано на упрощенном уравнении Ван-дер-Ваальса для жидкого компонента. Напомним, что идеальный политропный случай соответствует $p_{*k} = \varepsilon_{0k} = 0$.

Классический тензор вязкости Навье-Стокса и тепловой поток Фурье в 1D случае задаются формулами:

$$\begin{aligned} \Pi^{\text{NS}} &= \frac{4}{3} \mu \frac{\partial u}{\partial x}, \\ -q^{\text{F}} &= \kappa \frac{\partial T}{\partial x}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $\mu > 0$ и $\kappa > 0$ – коэффициенты вязкости и теплопроводности, которые могут зависеть от искомым функций.

Для исключения величин α_k и r_k из уравнения (2.1) введем альтернативную плотность для k -го компонента

$$\rho_k = \alpha_k r_k. \quad (2.8)$$

Формулы (2.4) – (2.6), (2.8) приводят к соотношениям

$$\sum_{k=1}^2 \frac{R_k \rho_k}{p + p_{*k}} T = 1, \quad (2.9)$$

$$\rho \cdot (\varepsilon - \varepsilon_0) = \left(\rho \cdot c_V + \sum_{k=1}^2 \frac{R_k \rho_k p_{*k}}{p + p_{*k}} \right) T, \quad (2.10)$$

где

$$\rho \cdot c_V = \sum_{k=1}^2 \rho_k c_{V_k}, \quad (2.11)$$

$$\rho = \sum_{k=1}^2 \rho_k. \quad (2.12)$$

Выражая T из (2.9), поставив в (2.10) и деля результат на $\rho \cdot c_V$, получим следующий результат для p в зависимости от ρ_1, ρ_2 и ε :

$$\sum_{k=1}^2 \frac{\sigma_k (\rho \cdot (\varepsilon - \varepsilon_0) - p_{*k})}{p + p_{*k}} = 1, \quad (2.13)$$

где

$$\sigma_k = \frac{R_k \cdot \rho_k}{c_V \cdot \rho}, \quad (2.14)$$

$$\gamma = \frac{R}{c_V} + 1, \quad \rho \cdot R = \sum_{k=1}^2 \rho_k R_k. \quad (2.15)$$

Это рациональное уравнение сводится к квадратному уравнению

$$p^2 - bp - c = 0. \quad (2.16)$$

Здесь коэффициенты этого уравнения вычисляются следующим образом:

$$b = \sum_{k=1}^2 (\sigma_k \cdot (\rho \cdot (\varepsilon - \varepsilon_0) - p_{*k}) - p_{*k}), \quad (2.17)$$

$$c = (\sigma_1 p_{\infty 2} + \sigma_2 p_{\infty 1}) \cdot \rho \cdot (\varepsilon - \varepsilon_0) - \gamma \cdot p_{*1} \cdot p_{*2}, \quad (2.18)$$

Если дискриминант

$$d = b^2 + 4 \cdot c \quad (2.19)$$

больше нуля (подробнее в [1]), то квадратное уравнение (2.16) имеет корни

$$p = 0.5 \cdot (b \pm \sqrt{d}), \quad p_+ > p_-. \quad (2.20)$$

Для случая $p_{*1} p_{*2} = 0$ (в данной работе рассматриваются только такое случай) отрицательный корень $p_- = 0.5 \cdot (b - \sqrt{d})$ отбрасываем как нефизичный.

Таким образом, давление задается положительным корнем квадратного уравнения (2.16) по формуле (2.20)

$$p = p_+ = 0.5 \cdot (b + \sqrt{d}). \quad (2.21)$$

Значение температуры T можно получить из (2.6), используя (2.4) – (2.5), (2.8)

$$T = \frac{\rho \cdot (\varepsilon - \varepsilon_0) + p}{\gamma \cdot c_v \cdot \rho}. \quad (2.22)$$

В работе [1] описан способ получения формулы для квадрата скорости звука

$$c_s^2 = \gamma \frac{(p_+ + p_{*a}) \cdot (p_+ + p_{*b})}{\rho \cdot (d)^{0.5}}. \quad (2.23)$$

Подходы, заложенные в моделях гомогенного и гетерогенного описания газовых смесей, существенно различны. Однако использованный здесь вариант описания гетерогенной смеси формально отличается от гомогенного варианта только вычислением давления смеси и скорости звука в ней. А именно, в алгоритме для гетерогенной смеси давление вычисляется согласно (2.21), а при описании смеси в гомогенном приближении, см., например, [3], давление смеси вычисляется как сумма парциальных давлений компонент. Поэтому изложенный выше способ описания гетерогенной смеси является перспективным с точки зрения реализации его в численных алгоритмах, уже созданных на базе гомогенного подхода.

3. Построение регуляризованных уравнений для смеси газов

Для построения регуляризованного варианта исходной системы воспользуемся приемом сглаживания газодинамических величин по малому промежутку времени, согласно, например, [15]. Аналогичное осреднение газодинамических уравнений, выполненное по малому объему и приводящее к построению регуляризованных газодинамических уравнений, выписано в [13, 16]. Осредним систему уравнений по малому промежутку времени и воспользуемся предположением о том, что решение системы уравнений существует и обладает достаточной гладкостью. Применяя теорему о среднем при вычислении интегралов по времени и полагая, что интервал осреднения невелик, представим изменение параметров газа на промежутке времени в виде первого члена разложения в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} \widetilde{\rho}_k &= \rho_k + \tau \frac{\partial \rho_k}{\partial x}, & k &= 1, 2; \\ \widetilde{\rho} &= \rho + \tau \frac{\partial \rho}{\partial x}, & \widetilde{p} &= p + \tau \frac{\partial p}{\partial x}, & \widetilde{u} &= u + \tau \frac{\partial u}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Проведя преобразования, описанные в [3], подставим приведенные разложения в системы типа Навье-Стокса-Фурье (2.1) – (2.3) с заменой (2.8) и

приведем ее к следующей регуляризованной системе уравнений для описания течения двух флюидов:

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_k (u - \hat{w})) = \tau \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial}{\partial x} (\rho_k u) \right), \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho (u - w) u) + \frac{\partial}{\partial x} p = \frac{\partial}{\partial x} \Pi + \left(\rho - \tau \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) \right) f, \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} ((E + p)(u - w)) &= \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} q + \frac{\partial}{\partial x} (\Pi \cdot u) + \rho (u - w) \cdot f + Q. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Эта система уравнений отличается от классической системы уравнений Эйлера регуляризирующими членами, содержащими множитель τ . Эти члены в одномерном случае, с которым мы будем иметь дело, выглядят следующим образом:

$$w = \frac{\tau}{\rho} \left(\frac{\partial (\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} - \rho f \right), \quad (3.5)$$

$$q = q^F + q^\tau, \quad (3.6)$$

$$\Pi = \Pi^{\text{NS}} + \rho u \hat{w} + \tau \left(u \frac{\partial}{\partial x} p + \rho c_s^2 \frac{\partial}{\partial x} u - (\gamma - 1) Q \right), \quad (3.7)$$

$$\hat{w} = \frac{\tau}{\rho} \left(\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} - \rho f \right), \quad (3.8)$$

$$-q^\tau = \tau \rho u \left(u c_v \frac{\partial T}{\partial x} + p u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \right) - \frac{Q}{\rho} \right). \quad (3.9)$$

Здесь использованы стандартные обозначения для газодинамических переменных, $E = \rho(\varepsilon + u^2/2)$ – полная энергия.

Параметры газовой смеси, зависящие от массовых долей частиц, рассчитываются по формулам, являющимся следствиями из (2.4), (2.10), (2.11), (2.15):

$$R = \frac{R_a \rho_a + R_b \rho_b}{\rho} = c_p - c_v, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}, \quad \gamma - 1 = \frac{R}{c_v}, \quad (3.12)$$

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_a \rho_a + \varepsilon_b \rho_b}{\rho}, \quad c_v = \frac{c_{va} \rho_a + c_{vb} \rho_b}{\rho}, \quad (3.13)$$

где γ – адиабатический индекс, R – газовая постоянная, а ε – удельная внутренняя энергия смеси.

Отметим, что газодинамические значения для смеси определяются как взвешенные значения компонентов газа и зависят от долей компонентов смеси в каждой точке пространства-времени (x, t) .

При решении уравнений Эйлера коэффициенты вязкости и теплопроводности смеси рассматриваются как искусственные регуляризаторы и вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu &= \tau \cdot p \cdot Sc, \\ \kappa &= \mu \cdot p \cdot c_p \cdot Pr, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где число Шмидта Sc и число Прандтля Pr полагаются искусственными коэффициентами.

Мы пренебрегаем физической вязкостью μ и теплопроводностью κ газов и используем уравнения смеси в формулировке Эйлера. Предполагается, что внешняя сила f и источник тепла Q равны нулю.

Коэффициент τ имеет размерность времени и может быть представлен в виде:

$$\tau = \frac{\alpha h}{c_s}, \quad (3.11)$$

где c_s – это скорость звука, h – шаг пространственной сетки, α – численный коэффициент, который выбирается из соображений точности и устойчивости численного алгоритма.

Для численной реализации используется явная по времени консервативная разностная схема со вторым порядком аппроксимации всех пространственных производных [17], построенная по методу конечных объемов. В расчетной области на $x \in [l_1, l_2]$ введем разностную сетку $l_1 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = l_2$. На отрезке $I_i: [x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, N-1}$ – обозначим шаг по пространству $h_i = x_{i+1} - x_i$.

Все газодинамические переменные отнесены к центрам ячеек. Их значения на границах ячеек рассчитываются как полусуммы значений в соседних ячейках. Пространственные производные на границах ячеек вычисляются с помощью центральных разностей. В отличие от этого, в [1]

применяется более сложная аппроксимация пространственных производных. Шаг по времени вычисляется по формуле:

$$\Delta t = \beta \cdot \min_i \frac{h}{c_{si} + |u_i|}, \quad (3.14)$$

где минимум берется по всем ячейкам сетки на данный момент времени, i - номер ячейки, $\beta < 1$ – числовой коэффициент (число Куранта), который подбирается экспериментально.

4. Тестовые задачи и численные эксперименты

Мы представляем результаты трех численных экспериментов для испытаний с ударными волнами, взятыми из работ [1-3].

Используются среды воздух ($k = 1$) и вода ($k = 2$). В основном используем число Шмидта $Sc = 1$ и число Прандтля $Pr = 1$. Область определения задается с $l_1 = -5$ по $l_2 = 5$, то есть $x \in [-5, 5]$.

Параметры флюидов, использованных во всех задачах, представлены в Табл. 1.

Таблица 1

Параметры флюидов во всех тестах

Субстанция	γ	C_p , Дж/(кг·К)	p_∞ , Па	q , Дж/кг
1. Воздух	1.4	1004.5	0	0
2. Вода	2.8	1495	$8.5 \cdot 10^8$	0

Начальными условиями в вычислительной области ($-5 \leq x \leq 5$) являются:
Задача А. Задача о распаде разрыва в среде воздух-вода

$$\begin{aligned} (p, u, T)_1 &= \left(10^9 \text{ Па}, 0 \frac{\text{М}}{\text{с}}, 308.15 \text{ К} \right), \alpha_1 = 1, x \leq 0; \\ (p, u, T)_2 &= \left(10^5 \text{ Па}, 0 \frac{\text{М}}{\text{с}}, 308.15 \text{ К} \right), \alpha_1 = 0, x > 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Задача В. Задача о распаде разрыва в среде вода-воздух с низким соотношением давлений ($p_1/p_2 = 2$):

$$\begin{aligned} (p, u, T)_1 &= \left(2 \cdot 10^7 \text{ Па}, 0 \frac{\text{М}}{\text{с}}, 308.15 \text{ К} \right), \alpha_1 = 0.25, x \leq 0; \\ (p, u, T)_2 &= \left(10^7 \text{ Па}, 0 \frac{\text{М}}{\text{с}}, 308.15 \text{ К} \right), \alpha_1 = 0.75, x > 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Задача С. Задача о распаде разрыва в среде вода-воздух с низким соотношением давлений ($p_1/p_2 = 2$):

$$\begin{aligned} (p, u, T)_1 &= \left(10^7 \text{ Па}, 0 \frac{\text{М}}{\text{с}}, 308.15 \text{ К} \right), \alpha_1 = 0, x \leq 0; \\ (p, u, T)_2 &= \left(5 \cdot 10^6 \text{ Па}, 0 \frac{\text{М}}{\text{с}}, 308.15 \text{ К} \right), \alpha_1 = 1, x > 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Кроме перечисленных величин, исследуется распределение массовой доли газа $y_1 = \rho_1/\rho$.

4.1. Задача А

Графики, показывающую общую плотность ρ смеси, а также массовую $y_1 = \rho_1/\rho$ и объемную α_1 доли газовой фазы, давление p , скорость u и абсолютную температуру T смеси, показаны на рис. 1. Конечное время расчета $t_{fin} = 0.002$. Те же самые искомые функции для других тестов представлены на последующих рисунках. Напомним, что N – это количество ячеек разбиения расчетной области, параметры Sc и Pr используются в формулах (3.19). Взяты наиболее стандартные значения числа Шмидта и числа Прандтля: $Sc = 1$ и $Pr = 1$, и качество решения довольно хорошее. Число Куранта, используемое в формуле (3.14), берем $\beta = 0.2$. Ниже приведены те же значения, за исключением отмеченных случаев.

Рис. 1 иллюстрирует сравнение численных решений при $\alpha = 0.3$ для разного числа точек N . Показано, что увеличение числа точек N делает решение менее плавным. Напомню, что на рис. 1 (б) изображен профиль концентрации воздуха α_1 .

Отметим, что аналогичная ситуация имеет место в численных решениях для $N = 300$ при $\alpha = 0.3$ и при $\alpha = 0.5$. Решение становится более «размазанным» при $\alpha = 0.5$. Профили решений ближе друг другу, чем на рис. 1.

4.2. Задача В

На рис. 2-4 представлены результаты со следующими параметрами: $\beta = 0.1, t_{fin} = 0.006$.

Рис. 2 показывает результаты для искомых функций при разных параметрах N . Изображены результаты расчета при $\alpha = 2.0$. Результаты, полученные при решении с параметром $\alpha < 1$, например, $\alpha = 0.3$, оказываются заметно хуже.

На рис. 3 представлено сравнение полученного численно распределения плотности для разных сеток N при $\alpha = 2$. Было замечено, что при использовании более подробных сеток эти профили становятся более крутыми (см. рис. 3 (б)), что указывает на то, что метод действительно является сходящимся по сетке.

Сравнение решений при разных Sc для $\alpha = 2$ представлено на рис. 4. Видно, что при $Sc = 0$ решение более крутое. При этом вычисления

выполняются нормально и качество решения сохраняется. В этом тесте мы также видим, что y_1 и α_1 существенно различаются (рис. 5).

4.3. Задача С

Для тестовой задачи С используем следующие параметры: $\beta = 0.1$, $t_{fin} = 0.002$.

Это задача схожа с задачей В, только используются чистые фазы: $\alpha_1 = 0$ в левой половине и $\alpha_1 = 1$ в правой половине. Здесь y_1 и α_1 близки друг к другу, как в задаче А.

Рис. 6 демонстрирует численное решение при $N = 500$ для разных α . Плотности выглядят идентичными, но это не совсем так (см. Рис. 6).

В отличие от [2] на рис. 6 (д) у наших графиков температуры присутствует провал в области контактного разрыва.

Отметим, что при $\alpha = 1.2$ для $N = 500$ решение становится подобным решению для $N = 5000$ при $\alpha = 0.3$.

Рис. 7 (а) и рис. 7 (б) при $N = 500$ для разных α – это увеличения на отрезке $[-5; -0.01]$ и отрезке $[0.1; 5]$ соответственно – показывают, что решения отличаются. Так, для $\alpha = 0.3$ (синяя линия) более крутое решение.

На рис. 8 представлены численные распределения скорости, полученные для разных чисел Прандтля Pr при $N = 500$, $Sc = 1$, $\alpha = 1.2$. Отметим, что при $Pr = 1$ и $Pr = 10$ результаты визуально весьма похожи – из-за чего выводим лишь один: при $Pr = 10$. Решения для разных Pr хорошо наложились друг на друга, за исключением области после ударной волны.

Отметим, что задача А хорошо решается и по гомогенной модели смеси [3]. Задачи же В и С не удается решить с помощью гомогенной модели. Таким образом, используемая здесь гетерогенная модель расширяет возможности квазигазодинамического подхода.

Заключение

В работе описана гетерогенная модель квазигазодинамического типа в квазигомогенной форме для моделирования двухжидкостного течения сжимаемых флюидов.

Рассматривается дважды облегченная модель динамики гетерогенных сжимаемых двухжидкостных смесей, состоящей из четырех уравнений, с уравнениями состояния застывшего газа. Использована модель, основанная на формулировках [1] и недавно опубликованной статьи [18]. Здесь давления, температуры и скорости компонентов полагаются одинаковыми. В отличие от [1,18] в численном алгоритме использованы центрально-разностные аппроксимации всех пространственных производных. Алгоритм построен в виде, удобном для последующей имплементации в открытый программный комплекс OpenFOAM, как дополнение к уже включенной в этот комплекс

гомогенной модели смеси газов с реализацией на основе регуляризованных газодинамических уравнений.

Эту модель мы применили для решения проблем ударной трубки «воздух-вода» и «вода-воздух». Проведено исследование сходимости алгоритма, и установлена его сходимость по сетке, то есть показано, что дробление сетки по пространству ведет к повышению качества решения. Тестовые расчеты демонстрируют надежность используемого подхода при правильном подборе параметров.

В дальнейшем планируется выписать и реализовать гетерогенную модель (в квазигомогенной форме) квазигазодинамического типа для описания двухжидкостных течений сжимаемых флюидов в многомерном случае.

Список литературы

1. Zlotnik A., Lomonosov T. On a Doubly Reduced Model for Dynamics of Heterogeneous Mixtures of Stiffened Gases, its Regularizations and their Implementations // *Chaos*. 2023. Vol. 33, no. 11. 113128.
<https://doi.org/10.1063/5.0159201>
2. Kitamura K., Liou M.-S., Chang C.-H. Extension and comparative study of AUSM-family schemes for compressible multiphase flow simulations // *Communications in Computational Physics*. 2014. Vol. 16. P. 632–674.
<https://doi.org/10.4208/cicp.020813.190214a>
3. Елизарова Т.Г., Шильников Е.В. Квазигазодинамическая модель и численные алгоритмы для описания смесей разнородных флюидов // *Вычислительная математика и математическая физика*. 2023. Т. 63. №7. С. 115-127.
4. Zhang C., Menshov I., Wang L., Shen Z. Diffuse interface relaxation model for two-phase compressible flows with diffusion processes // *Journal of Computational Physics*. 2022. Vol. 466. 111356.
<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2022.111356>
5. Pelanti M., Shyue K.-M. A mixture-energy-consistent six-equation two-phase numerical model for fluids with interfaces, cavitation and evaporation waves // *Journal of Computational Physics*. 2014. Vol. 259. P. 331–357.
6. Pandare A.K., Luo H., Bakosi J. An enhanced AUSM⁺-up scheme for high-speed compressible two-phase flows on hybrid grids // *Shock Waves*. 2019. Vol. 29. P. 629–649.
<https://doi.org/10.1007/s00193-018-0861-x>
7. Lia L., Lohner R., Pandare A.K., Luo H. A vertex-centered finite volume method with interface sharpening technique for compressible two-phase flows // *Journal of Computational Physics*. 2022. Vol. 460. 111194.
<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2022.111194>

8. Wieland S.A., Hamlington P.E., Reckinger S.J., Livescu D. Effects of isothermal stratification strength on vorticity dynamics for single-mode compressible Rayleigh-Taylor instability // *Physical review fluids*. 2019. Vol. 4. 093905.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.4.093905>
9. Борисов В.Е., Рыков Ю.Г. Численное моделирование течений многокомпонентных газовых смесей с использованием метода двойного потока // *Математическое моделирование*. 2020. Т. 32. № 9. С. 15–29.
10. Елизарова Т.Г., Шильников Е.В. Численное моделирование газовых смесей в рамках квазигазодинамического подхода на примере взаимодействия ударной волны с пузырьком газа // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2021. № 1 (61). С. 124–135.
11. Elizarova T.G., Zlotnik A.A., Shil'nikov E.V. Regularized equations for numerical simulation of flows of homogeneous binary mixtures of viscous compressible gases // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2019. Vol. 59, no. 11. P. 1832–1847.
<https://doi.org/10.1134/S0965542519110058>
12. Shilnikov E.V., Elizarova T.G. About one numerical method of compressible multifluid flow modelling in Euler formulation. In: *Proc. IRF2020: 7th Inter. Conf. Integrity–Reliability–Failure*. J.F. Silva Gomes and S.A. Meguid (ed.), INEGI-FEUP. 2020. P. 613–622.
13. Елизарова Т.Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета газодинамических течений. М.: Научный мир. 2007.
14. Le Martelot S., Saurel R., Nkonga B. Towards the direct numerical simulation of nucleate boiling flows,” *Int. J. Multiphase Flow* 66, 62–78 (2014).
<http://dx.doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2014.06.010>
15. Елизарова Т.Г. Осреднение по времени как приближенный способ построения квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2011. Т. 51. № 11. С. 2096–2105.
16. Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. М.-Ижевск. 2009.
17. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики: Учеб, пособие: Для вузов. - 2-е изд., доп., М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1992. 424 с.
18. Злотник А.А., Ломоносов Т.А. Регуляризованные уравнения динамики гетерогенных бинарных смесей «сжатых» газов Ноубла-Абеля и их применение // *Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления*. 2023. Т. 514. С. 26–33.

Приложение. Рисунки

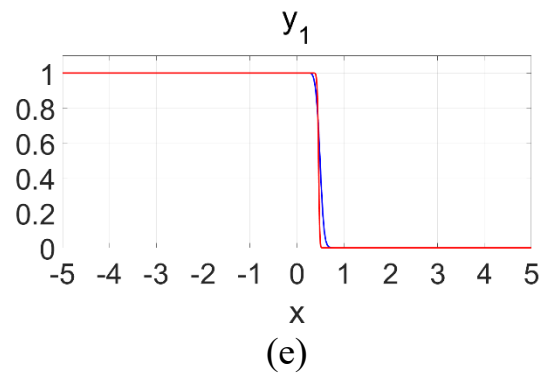
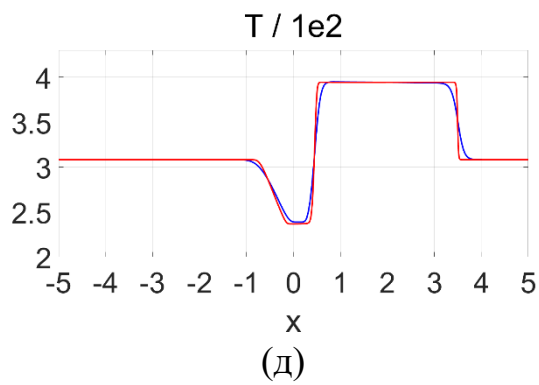
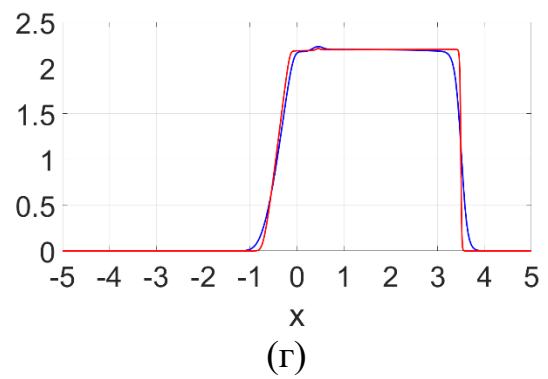
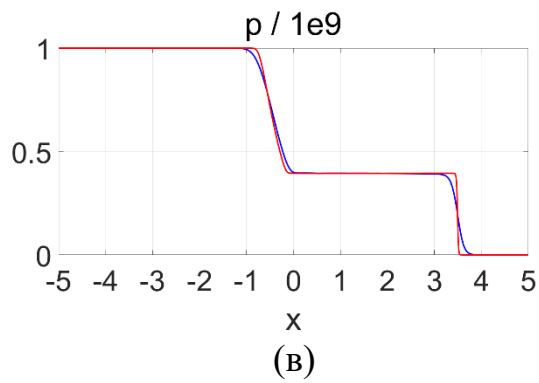
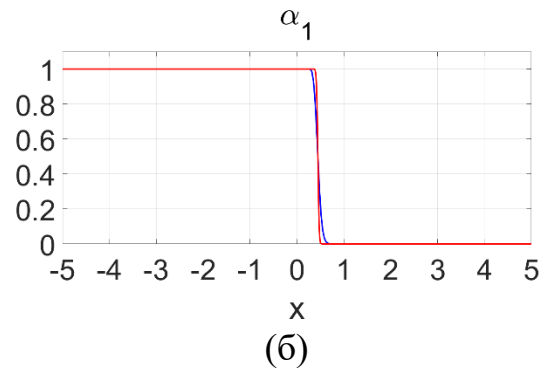
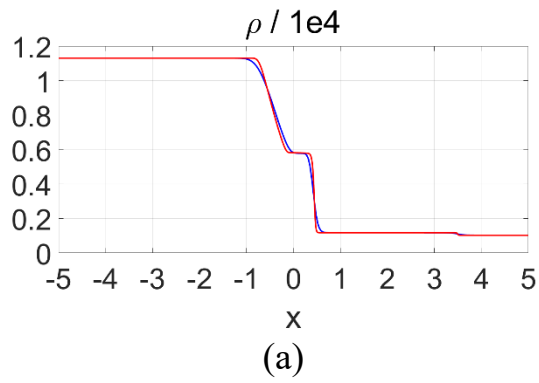


Рис. 1. Задача А. Численные решения при разном числе точек N при $\alpha = 0.3$.
Синим $N = 300$; красным $N = 2000$

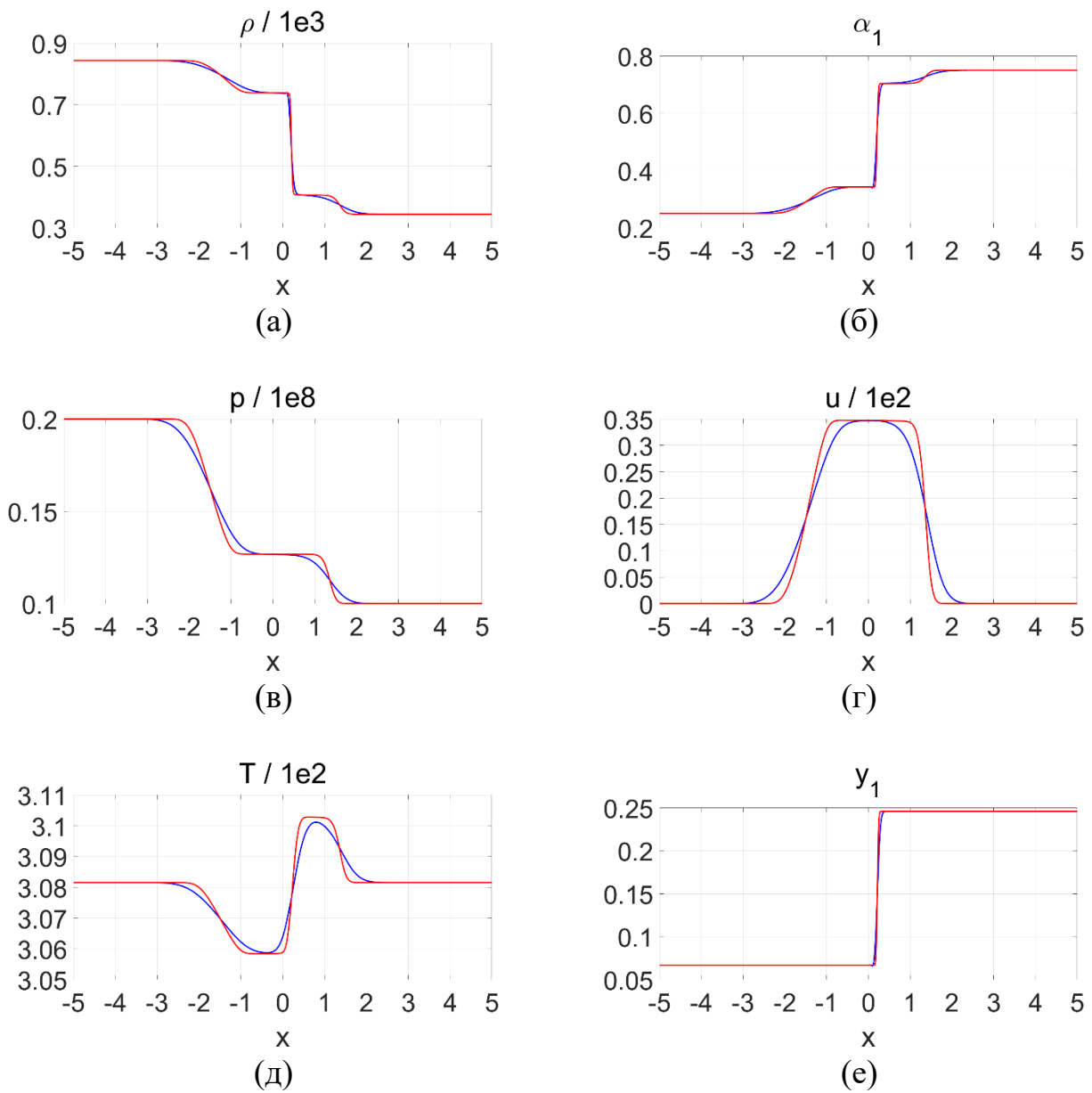
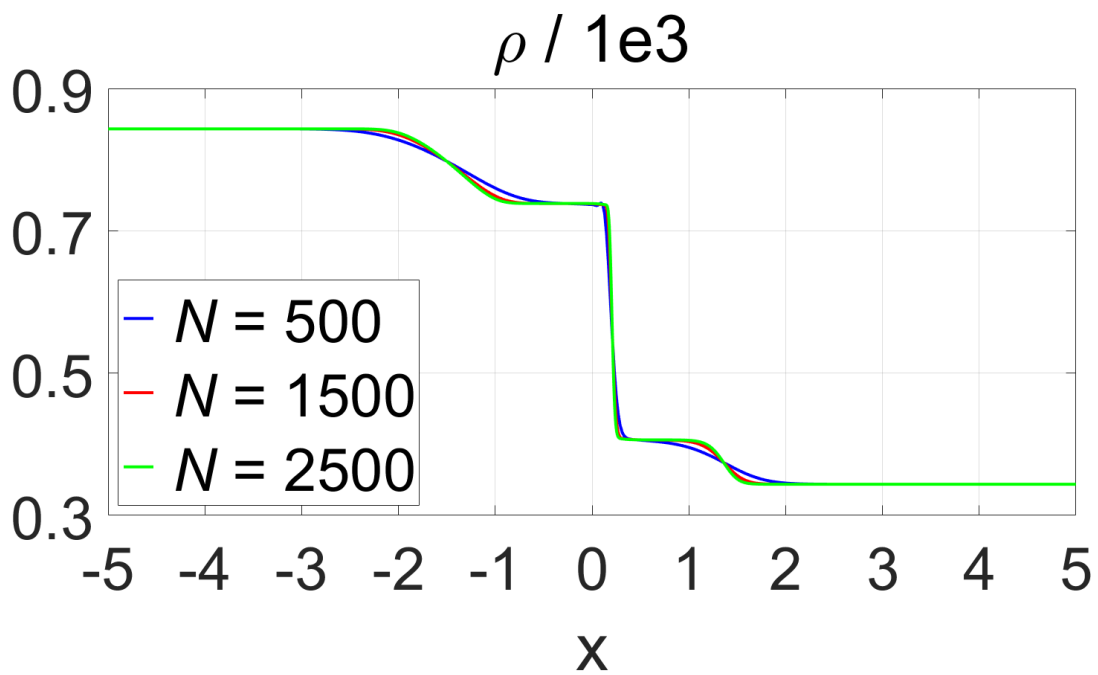
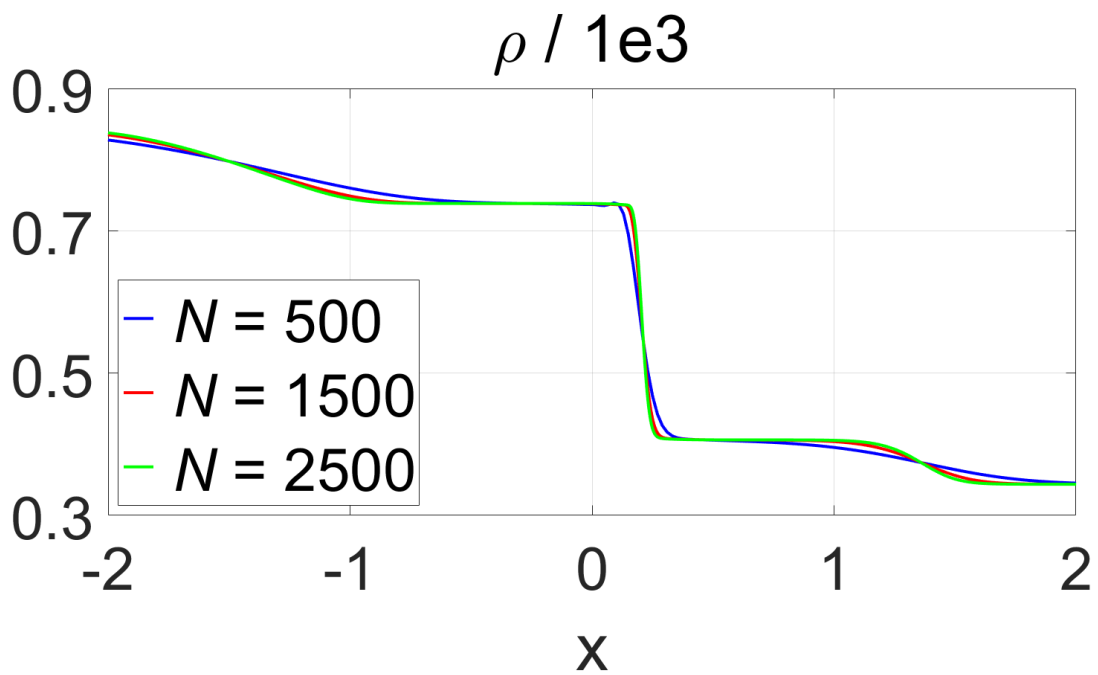


Рис. 2. Задача В. Численные решения при $\alpha = 2.0$ для разных N .
Синим $N = 500$; красным $N = 2000$

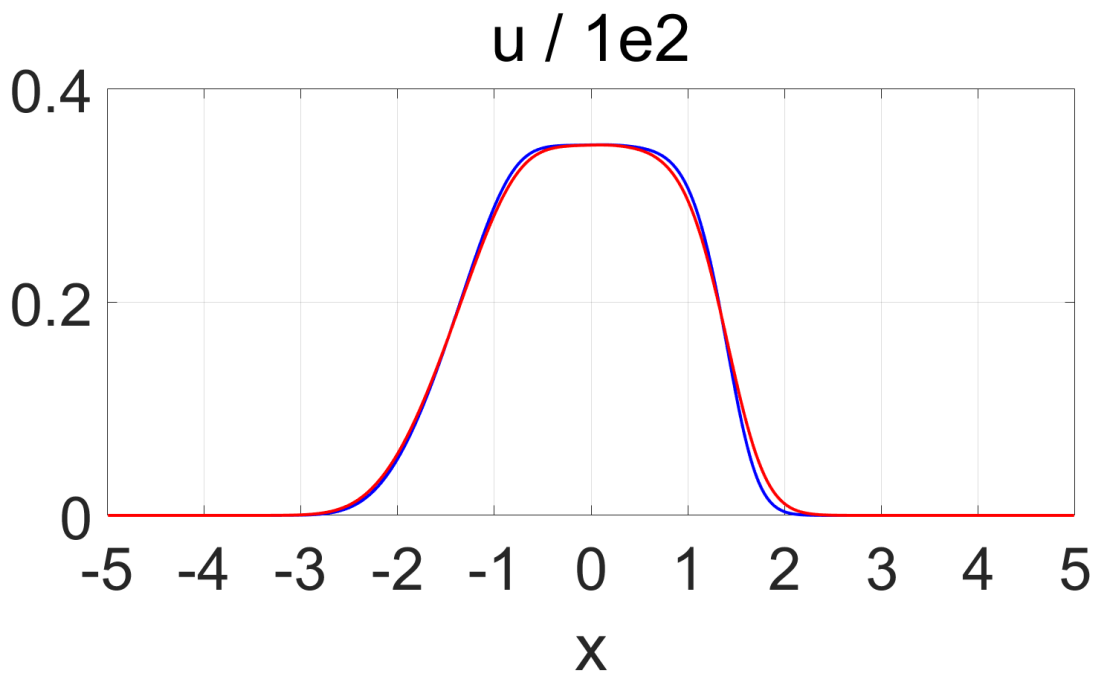


(a) Полный график

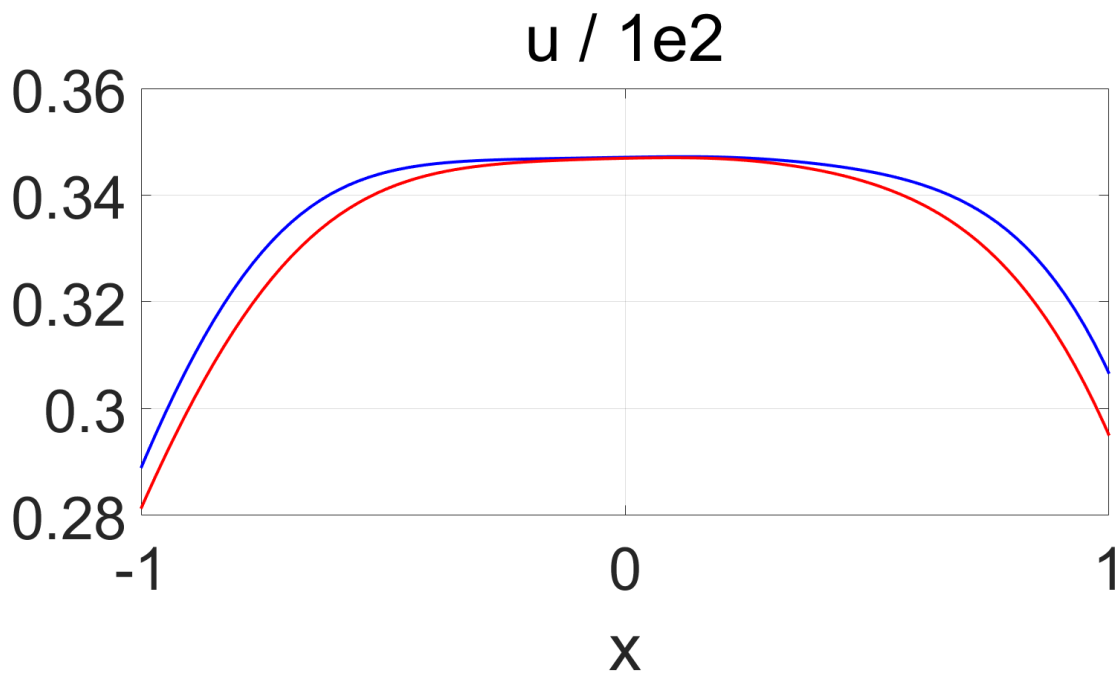


(б) Фрагмент распределения плотности

Рис. 3. Задача В. Сопоставление численных решений по плотности на разных сетках

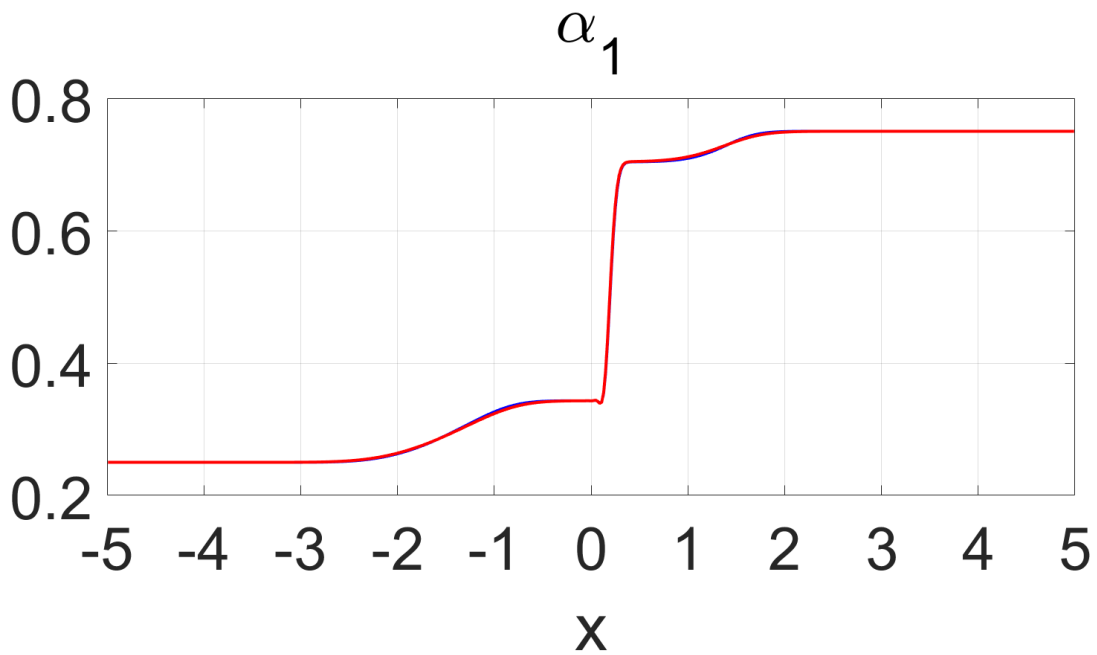


(a) Полный график

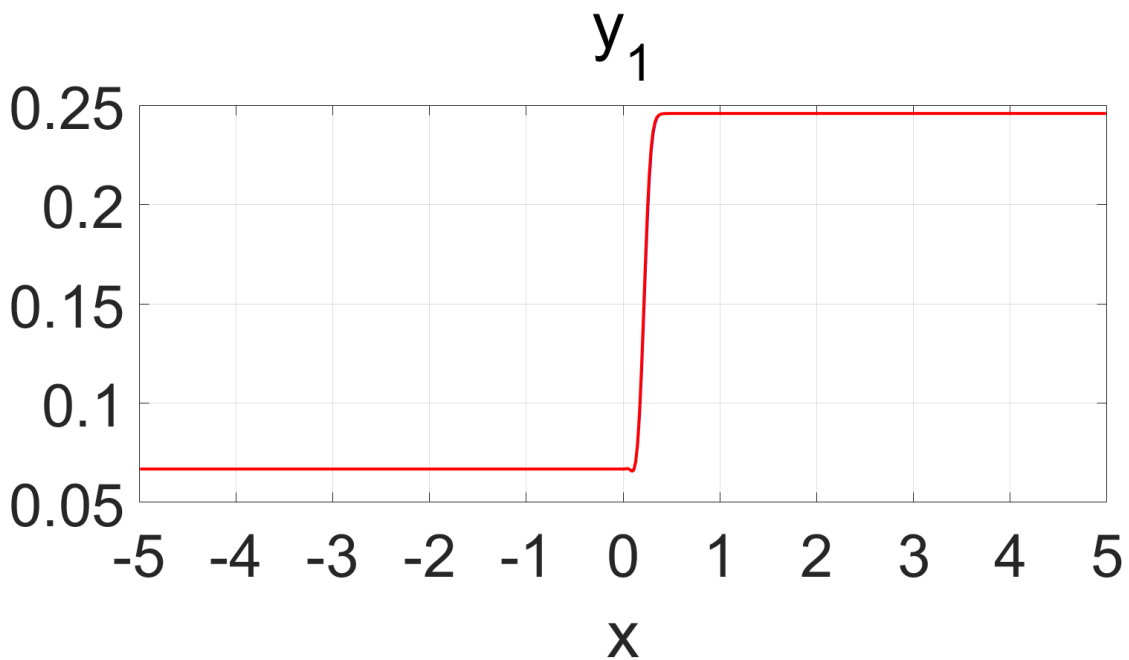


(б) Фрагмент распределения скорости

Рис. 4. Задача В. Сопоставление численных решений для скорости при $N = 500$ при разных Sc . Синим $Sc = 0$; красным $Sc = 1.0$



(а) объемные α_1 доли газовой фазы



(б) массовые y_1 доли газовой фазы

Рис. 5. Задача В. Сопоставление численных решений для $N = 1500$ при разных Sc . Синим $Sc = 0$; красным $Sc = 1.0$

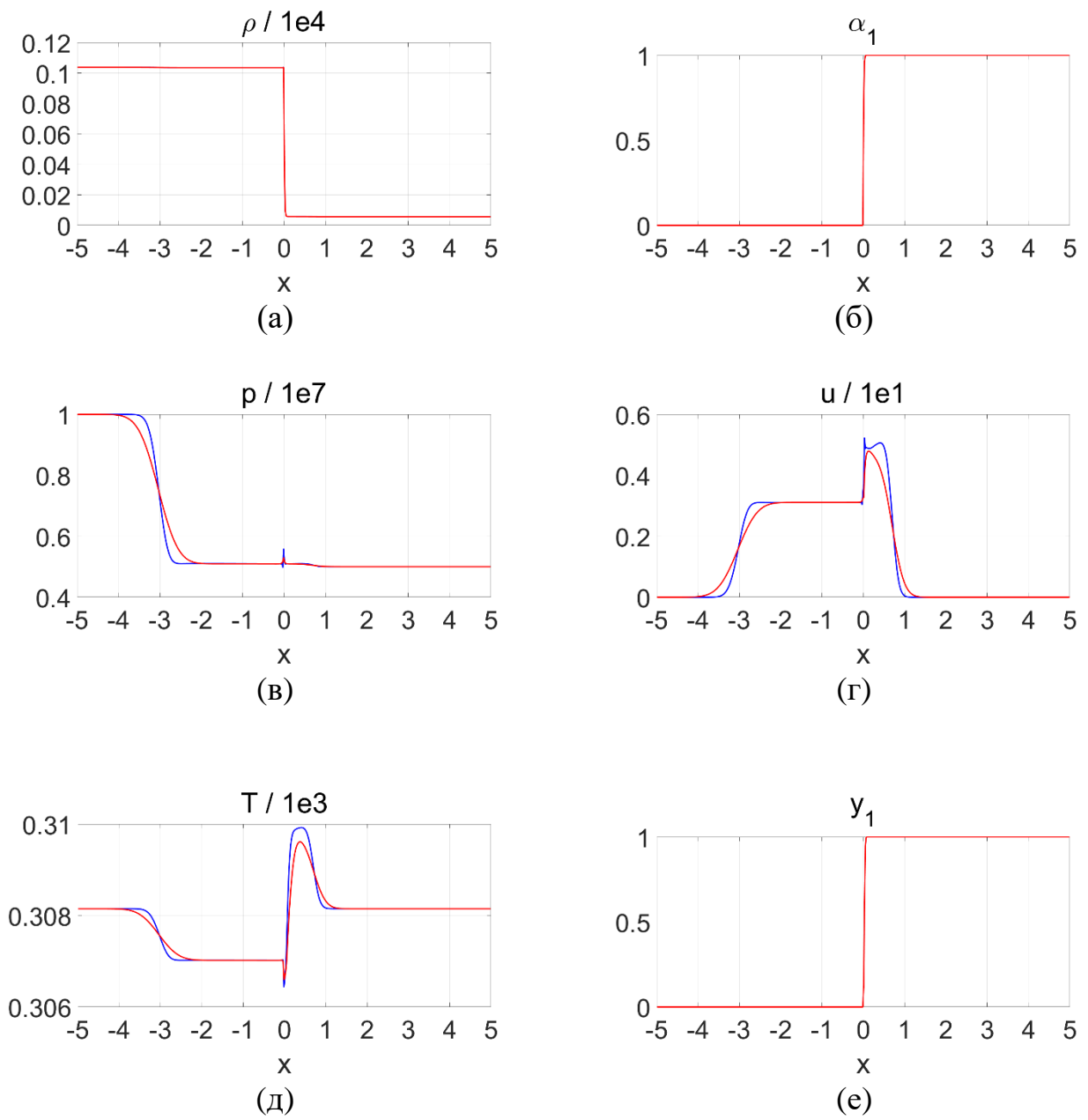
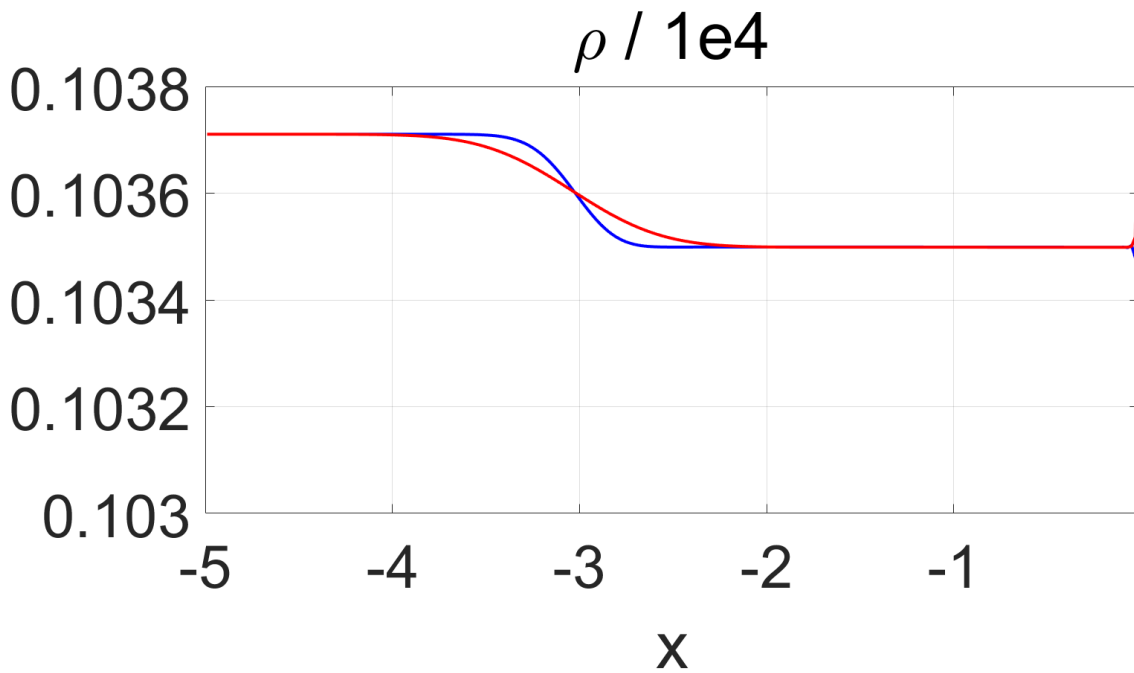
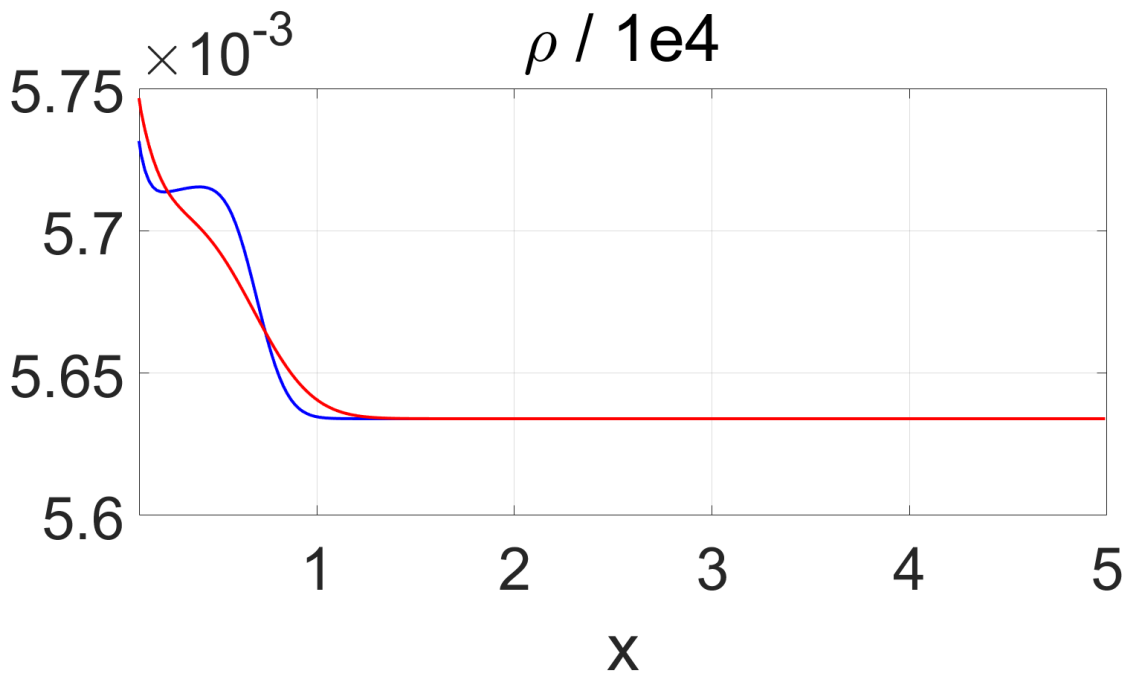


Рис. 6. Задача С. Численные решения при $N = 500$ для разных α .
Синим $\alpha = 0.3$; красным $\alpha = 1.2$



(a) Фрагмент по $x = [-5; -0.01]$ с соответствующей ординатой



(б) Фрагмент по $x = [-5; -0.01]$ с соответствующей ординатой

Рис. 7. Задача С. Численные решения плотности при $N = 500$ для разных α . Синим $\alpha = 0.3$; красным $\alpha = 1.2$

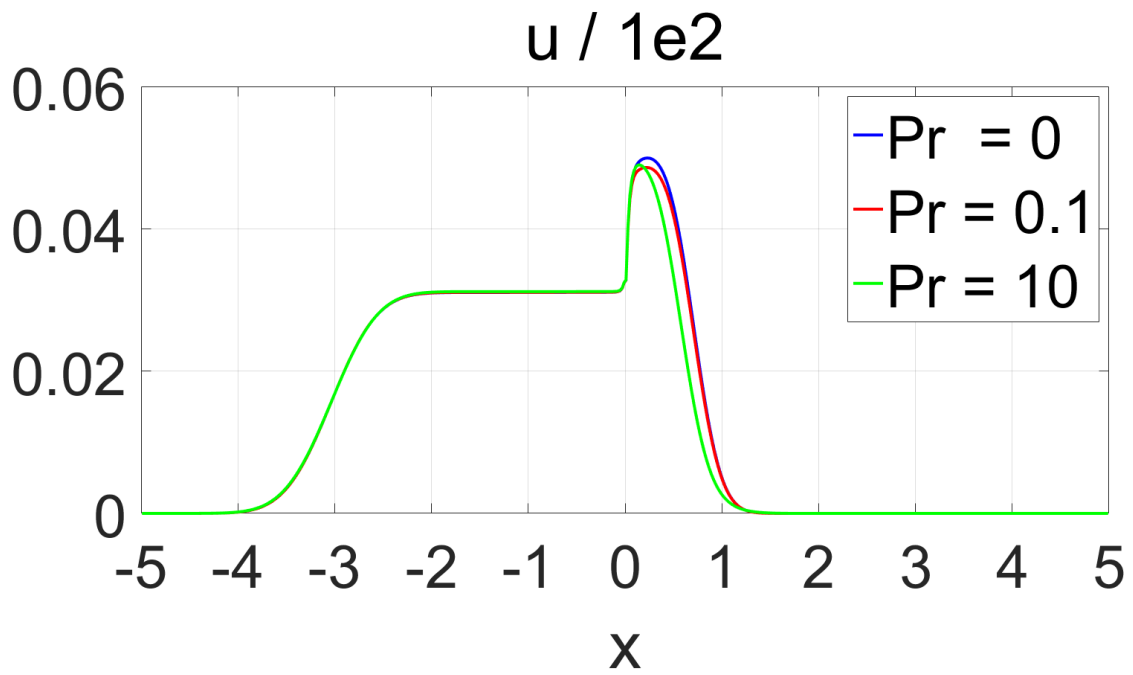


Рис. 8. Задача С. Сопоставление численных решений для скорости при $N = 500$, $Sc = 1$ при разных Pr .

Оглавление

Введение	3
1. Обзор вычислительных моделей	3
2. Гетерогенная модель сжимаемой смеси	5
3. Построение регуляризованных уравнений для смеси газов	8
4. Тестовые задачи и численные эксперименты	11
4.1. Задача А	12
4.2. Задача В	12
4.3. Задача С	13
Заключение.....	13
Список литературы.....	14
Приложение. Рисунки	16