



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 51 за 2023 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Н.О. Савенко

О разностной аппроксимации
газодинамических потоков на
свободной границе расчетной
области

Статья доступна по лицензии
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Савенко Н.О. О разностной аппроксимации газодинамических потоков на свободной границе расчетной области // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2023. № 51. 28 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2023-51>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2023-51>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

Н.О. Савенко

**О разностной аппроксимации
газодинамических потоков на свободной
границе расчетной области**

Москва — 2023

Н.О. Савенко

О разностной аппроксимации газодинамических потоков на свободной границе расчетной области

В работе представлена методика построения неотражающих граничных условий на основе локально-одномерной аппроксимации газодинамических потоков с помощью данных, получаемых экстраполяцией вдоль линии тока. Методика ориентирована на получение корректного значения переменных на свободной границе области преимущественно в двухмерных и трехмерных постановках. В работе также рассмотрен способ реализации неотражающих граничных условий на основе однородного линейного дифференциального уравнения переноса с корректировкой переменных в соответствии с характеристической формой уравнений газовой динамики.

Ключевые слова: газовая динамика, неотражающие граничные условия, конечно-разностная схема, локально-одномерная методика.

Savenko Nikita Olegovich

On the difference approximation of gas-dynamic flows on the free boundaries of the computational domain

The paper presents a technique for constructing non-reflective boundary conditions based on local one-dimensional approximation of gas-dynamic flows using data obtained by extrapolation along a streamline. The technique is focused on obtaining the correct values of variables on the free boundary of the region, mainly in two-dimensional and three-dimensional formulations. The work also considers a method for implementing non-reflective boundary conditions based on a homogeneous linear differential transport equation with adjustment of variables in accordance with the characteristic form of the gas dynamics equations.

Key words: gas dynamics, non-reflective boundary conditions, finite-difference scheme, locally one-dimensional technique.

Оглавление

1. Введение.....	3
2. Описание существующих принципов построения неотражающих граничных условий	4
2.1 Методы, основанные на корректировке потока через границу.....	4
2.2 Методы с достраиванием сеточных элементов.....	6
3. Вариант реализации существующих методик.....	6
3.1 Описание предлагаемой методики	8
3.1.1 Схематичное описание	9
3.1.2 Алгоритм выбора ячеек	9
3.1.3 Особенности реализации алгоритма	10
3.2 Варианты интерполяции вдоль линии тока.....	12
4. Реализация и тестирование	13
4.1 Сравнительный анализ предложенных методик на одномерных задачах	14
4.2 Сравнительный анализ предлагаемых методик для задачи обтекания в двумерной постановке	18
4.3 Пример расчета трёхмерной задачи	21
5. Заключение.....	26
6. Библиографический список.....	28

1. Введение

Известной проблемой численного решения задач газодинамики является возникновение нефизичных осцилляций на свободной границе расчетной области. Такого рода эффекты, как показывает практика, зачастую возникают в расчетах до- и трансзвуковых течений. Проблема устранения осцилляций численного происхождения на свободной границе потока не всегда может быть решена выбором расчетной области большего размера. Нефизичные осцилляции не только искажают решение, но и могут приводить к потере устойчивости решения.

К настоящему времени созданы разнообразные алгоритмы обработки данных на свободных границах, которые позволяют существенно снизить уровни нефизичных осцилляций. Такие алгоритмы различаются точностью и сложностью реализации. Большинство из них для различных постановок задач основано на анализе волновых процессов в одномерной постановке задач газовой динамики.

Такие условия носят название «неотражающих». По своей сути они являются искусственной конструкцией, назначение которой – обеспечение

прозрачности для всех волновых структур, проходящих сквозь границу расчетной области.

Варианты существующих подходов к конструированию неотражающих искусственных граничных условий (ГУ) принято разделять на три группы: локальные условия, нелокальные условия и поглощающие слои. Наряду с общепринятым разделением неотражающие ГУ можно классифицировать иначе, что более подходит для целей настоящей работы. Наибольшую группу неотражающих ГУ можно рассматривать как корректировку потока через границу области каким-либо способом (например, [1-4]). Другой подход базируется на использовании приёма достройки разностной сетки дополнительными слоями ячеек (например, [5-8]).

Целью работы является создание численной методики, реализующей разностные граничные условия с низким уровнем нефизичных осцилляций, пригодной для расчетов двух- и трехмерных газодинамических течений в областях со свободными границами. Алгоритм позволяет проводить расчеты для широкого круга двух-трехмерных задач газовой динамики при сравнительно низком уровне осцилляций без использования поглощающих слоёв.

В работе будет рассмотрен вариант неотражающих ГУ на примере однотемпературной газовой динамики. Для моделирования используется явная двухэтапная (предиктор – корректор) разностная схема Лакса–Фридрихса.

2. Описание существующих принципов построения неотражающих граничных условий

2.1 Методы, основанные на корректировке потока через границу

Нефизичное отражение на свободной границе является следствием того, что расчет в приграничной ячейке проходит с некорректным набором параметров, не позволяющим обеспечить правильное разрешение волновых процессов. В то время как во внутренних ячейках расчетной области вычисления происходят с полным набором необходимых сеточных данных, что позволяет обеспечить корректность вычислений при надлежащем выборе дискретизации по пространству и времени, на границе области недостающие для расчета данные необходимо восполнить с помощью аппроксимации граничных условий исходной начально-краевой задачи. Для сверхзвукового потока на границе или течения около стенки построение разностных ГУ обычно не вызывает проблем. В общем случае количество задаваемых скалярных величин, теоретически необходимых для корректной постановки начально-краевой задачи, может меняться в зависимости от ориентации вектора скорости и его величины в сравнении со скоростью звука.

Для обеспечения корректности расчета параметров течения вдоль свободной границы обычно используется сеточно-характеристическая техника аппроксимации.

Подобную аппроксимацию, как правило, реализуют в два шага[12, 13]: давление в фиктивной ячейке у границы расчетной области вычисляется экстраполяцией по данным из внутренних ячеек; газодинамические потоки массы/импульса/энергии между приграничной и фиктивной ячейкой вычисляются с использованием инвариантов Римана.

В работах [2, 3] рассмотрен иной вариант сеточно-характеристического подхода. Было предложено для решения уравнений гиперболического типа использовать разложение на волновые моды. Для каждой отдельной моды ставятся граничные условия в соответствии со скоростью её продвижения. Такой вариант алгоритма успешно используется для вычислений на свободной границе в программных комплексах ANSYS. Выпишем конечную форму аппроксимации, предложенную в [3]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + d_1 + \frac{\partial m_2}{\partial x_2} + \frac{\partial m_3}{\partial x_3} = 0, \\ \frac{\partial m_1}{\partial t} + U_1 d_1 + \rho d_3 + \frac{\partial(m_1 U_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(m_1 U_3)}{\partial x_3} = 0, \\ \frac{\partial m_2}{\partial t} + U_2 d_1 + \rho d_4 + \frac{\partial(m_2 U_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(m_2 U_3)}{\partial x_3} + \frac{\partial P}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{\partial m_3}{\partial t} + U_3 d_1 + \rho d_5 + \frac{\partial(m_3 U_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(m_3 U_3)}{\partial x_3} + \frac{\partial P}{\partial x_3} = 0, \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{1}{2} |U|^2 d_1 + \frac{d_2}{(\gamma - 1)} + m_1 d_3 + m_2 d_4 + m_3 d_5 + \frac{\partial[(\rho E + P)U_2]}{\partial x_2} + \frac{\partial[(\rho E + P)U_3]}{\partial x_3} = 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

где $m_1 = \rho U_1$, $m_2 = \rho U_2$, $m_3 = \rho U_3$,

$$d = \begin{pmatrix} \frac{1}{c^2} \left[L_2 + \frac{1}{2} (L_5 + L_1) \right] \\ \frac{1}{2} (L_5 + L_1) \\ \frac{1}{2\rho c} (L_5 + L_1) \\ L_3 \\ L_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} L_1 = \lambda_1 \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} - \rho c \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right), \\ L_2 = \lambda_2 \left(c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_1} \right), \\ L_3 = \lambda_3 \frac{\partial U_2}{\partial x_1}, \\ L_4 = \lambda_4 \frac{\partial U_3}{\partial x_1}, \\ L_5 = \lambda_5 \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} - \rho c \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right), \end{array} \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = U_1 - c, \\ \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = U_1, \\ \lambda_5 = U_1 + c. \end{array}$$

где ρ – плотность, P – давление, E – внутренняя энергия, c – скорость звука, U – вектор скорости в локальных координатах ячейки на приграничной грани.

В данном случае необходимо скорректировать не только давление, но также плотность и энергию, что соответствует трём законам сохранения.

2.2 Методы с достраиванием сеточных элементов

Известным примером в классе методов, основанных на достраивании ячеек около свободной границы, является PML (Perfectly Matched Layer) [5, 6], а также ABC (Absorbing Boundary Conditions) [7, 8]. Суть подобных методов заключается в использовании нескольких слоёв ячеек на свободной границе, в которых происходит демпфирование приходящих на границу возмущений.

Применение таких граничных условий позволяет достичь более точных результатов в пределах основной расчетной области, однако связано с увеличением используемых вычислительных ресурсов. Наибольшую эффективность такие граничные условия дают в сочетании с методами, корректирующими значение параметров потока на границе. В случае трёхмерной области с протяженными открытыми границами увеличение объёма вычислений возрастает кратно, что усложняет проведение больших серий вычислительных экспериментов.

3. Вариант реализации существующих методик

В данной работе будем рассматривать такие аппроксимации ГУ, которые для своей реализации не требуют дополнительных построений фиктивных ячеек сетки.

Анализ алгоритмов, разработанных в данной работе, будет проведён для гладких решений. Рассмотрим формально волновой процесс в некотором скалярном или векторном поле, для чего будем использовать однородное дифференциальное линейное уравнение переноса в направлении нормали к границе:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a \frac{\partial f}{\partial n} = 0, \quad (2)$$

где $f = (\rho, P, \varepsilon, w, \dots)^T$ – вектор физических величин, a – скорость переноса, n – внешняя нормаль.

Вопрос о работе алгоритма в случае выхода на границу разрывного решения будет рассмотрен в дальнейшем.

Рассмотрим 2 варианта волн:

- волна сжатия, $div \vec{w} > 0$,
- волна разрежения, $div \vec{w} \leq 0$.

Для расчета потока через внешнюю границу необходимо задать значение вектора f на грани $i-1/2$. Для случая выхода через границу волны сжатия новое значение на границе будет отличаться от значения на текущем временном слое на $O(\tau+h)$ ($f_{new} \approx f^{k+1}$) и, соответственно, на предыдущем временном слое для волны разрежения.

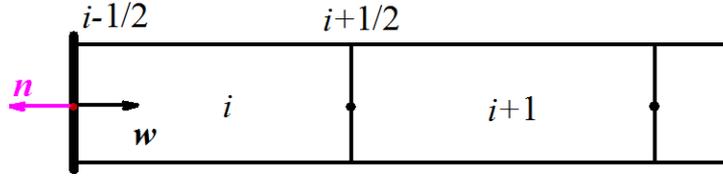


Рис. 1. Одномерный вариант используемой индексации

Запишем разностные аппроксимации уравнения (2) для волн сжатия и разрежения:

$$\begin{aligned} \frac{f_{i-1/2}^{k+1} - f_{i-1/2}^k}{\tau} + a_{i-1/2} \frac{f_{i+1/2}^k - f_{i-1/2}^k}{h} &= 0, \quad \text{при } \operatorname{div} \vec{w} > 0, \\ \frac{f_{i-1/2}^k - f_{i-1/2}^{k-1}}{\tau} + a_{i-1/2} \frac{f_{i+1/2}^k - f_{i-1/2}^k}{h} &= 0, \quad \text{при } \operatorname{div} \vec{w} \leq 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Из (3) получаем новые значения вектора f на границе области:

$$\begin{aligned} f_{i-1/2}^{new} &= f_{i-1/2}^k \left(1 - \frac{a_{i-1/2} \tau}{h} \right) - \frac{a_{i-1/2} \tau}{h} f_{i+1/2}^k, \quad \text{при } \operatorname{div} \vec{w} > 0, \\ f_{i-1/2}^{new} &= f_{i-1/2}^k \left(1 - \frac{a_{i-1/2} \tau}{h} \right) + \frac{a_{i-1/2} \tau}{h} f_{i+1/2}^k, \quad \text{при } \operatorname{div} \vec{w} \leq 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где значение переменных на грани $i+1/2$ считаем как среднее арифметическое от соответствующих параметров в двух соседних ячейках $f_{i+1/2} = \frac{f_i + f_{i+1}}{2}$.

Скорость переноса a представим как нормальную к границе компоненту скорости $a = |\vec{w}| \cdot \cos(\vec{w}, \vec{n})$, где скорость принимается равной скорости в текущей ячейке.

В расчете дозвуковых волн, проходящих на границу области, будем использовать инварианты Римана в виде [11]:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (w \pm c) \frac{\partial}{\partial n} \right] \left(\delta w \pm \frac{1}{\rho c} \delta P \right) = 0, \quad (5)$$

где w – скорость, P – давление, c – скорость звука.

В работах [1, 12, 13] приводятся различные варианты использования уравнения (5). В данной работе рассмотрим модификацию методик [12, 13] используя следующую линеаризованную форму уравнения (5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + \rho c \frac{\partial w}{\partial n} = 0 &\rightarrow P_{i-1/2}^{k+1} - P_{i-1/2}^k + \rho_{i-1/2} c_{i-1/2} \frac{\tau}{h} (w_{i+1/2} - w_{i-1/2}) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \underline{P_{i-1/2}^{k+1} = P_{i-1/2}^k + \rho_{i-1/2} c_{i-1/2} (w_{i+1/2} - w_{i-1/2})}, \end{aligned} \quad (6)$$

где используется индексация в соответствии с рис. 1.

3.1 Описание предлагаемой методики

Предлагаемый метод ориентирован на использование в двумерных и трехмерных течениях. Для большей наглядности рассмотрим вариант 2D – расчетную структурированную разностную сетку – и рассмотрим случай $\cos(\vec{n}, \vec{W}) > 0$, где \vec{n} – вектор внешней нормали на границе, т.е. неотражающее граничное условие для случая выхода потока за пределы расчетной области. Аналогично $\cos(\vec{n}, \vec{W}) < 0$, только значение вектора скорости будем брать с отрицательным знаком. Если $|\cos(\vec{n}, \vec{W})| < 0.017 \approx 89^\circ$, то принимаем значение на границе без изменения. При значении угла между внешней нормалью и вектором скорости, предположительно, от 89° до 90° , т.е. до полной параллельности, изменения настолько малы, что предлагаемый подход может ошибку не уменьшить, а увеличить.

Расчет скорректированного значения вектора физических параметров $f = (\rho, P, \varepsilon, w, \dots)^T$ на границе предлагается осуществить вдоль линии тока (вектора скорости $W(W_x, W_y)$), т.е. значение предлагается находить интерполяцией значений в точках M и \tilde{M} (см. рис. 2).

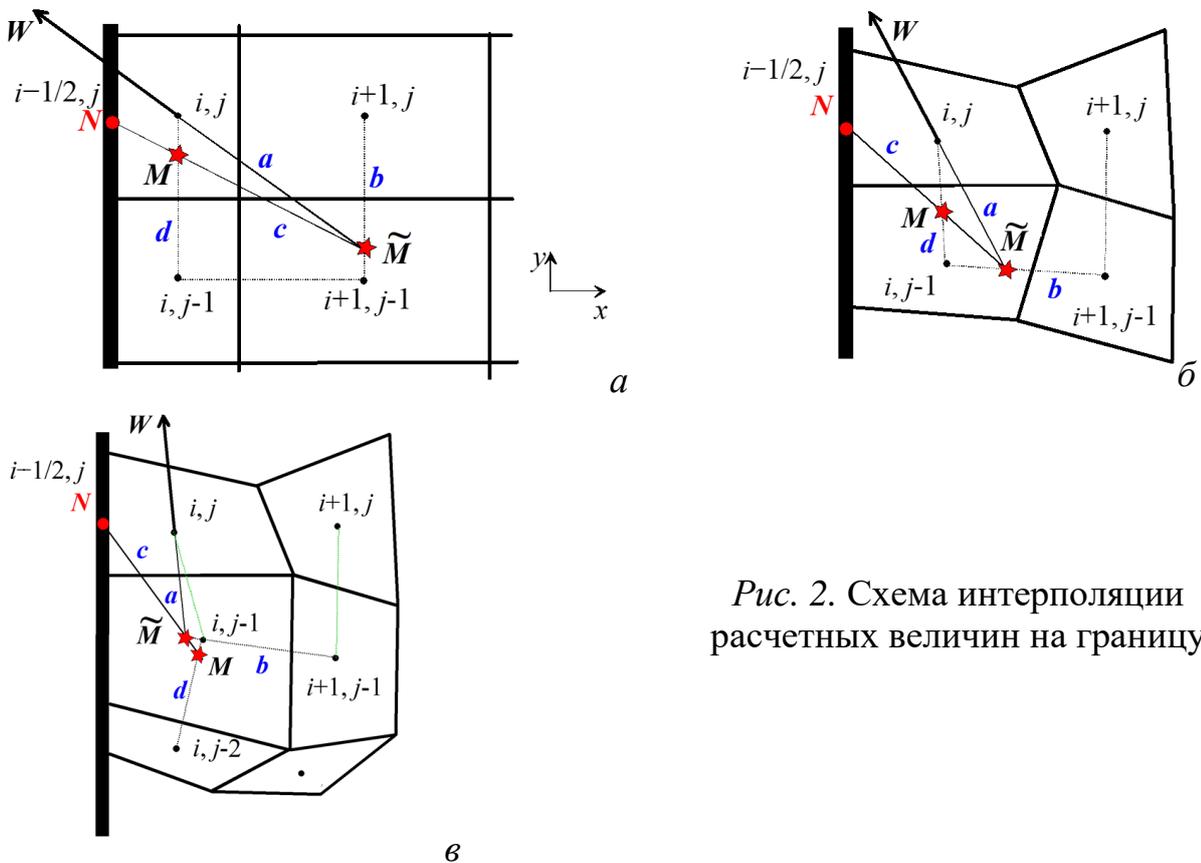


Рис. 2. Схема интерполяции расчетных величин на границу

Для случаев *a* и *б* (см. рис. 2) будем корректировать данные в соответствии с алгоритмом, описанным ниже, в случае *в* принимаем значение без корректировки, поскольку предлагается работа только с одним слоем ячеек

вокруг текущей. В рамках развития метода увеличение количества слоёв является допустимым.

3.1.1 Схематичное описание

1. Если компонента вектора скорости $W_y > 0$, то рассматриваются близлежащие ячейки к границе (i, j) , $(i+1, j)$, $(i, j-1)$ и $(i+1, j-1)$, иначе: (i, j) , $(i+1, j)$, $(i, j+1)$ и $(i+1, j+1)$.
2. Вдоль вектора скорости W строим прямую a . Ищем ее пересечение с прямой b , проходящей через центры двух (для 2D) ближайших ячеек (см. рис. 2.a) $(i+1, j) - (i+1, j-1)$ или (см. рис. 2.б) $(i, j-1) - (i+1, j-1)$. Требование: точка пересечения M принадлежит соответствующему отрезку.
3. Строим прямую c , проходящую через найденную точку M и искомую точку N на границе области $(i-1/2, j)$.
4. Ищем пересечение прямой c с прямой d , проходящей через центры приграничных ячеек $(i, j) - (i, j-1)$ – точку M .
5. В соответствии с интерполированными значениями в точках M и M определяем значение на границе области по всему вектору рассчитываемых переменных.

В трехмерных постановках задач рассчитывается пересечение прямой вдоль вектора скорости с поверхностью, образованной центрами ближайших к прямой ячеек.

3.1.2 Алгоритм выбора ячеек

1. В качестве соседних примем ячейки, инцидентные по узлам к текущей ячейке $(i;j)$;
2. От центра текущей ячейки $(i;j)$ строим вектор к центру очередной соседней;
3. Если скорость направлена наружу, то вектор скорости, умноженный на шаг времени, складываем с полученным радиус-вектором. Если же скорость направлена внутрь, то складываем уже с противоположно направленным вектором скорости. Записываем длины полученных векторов в массив для каждой соседней ячейки;
4. Повторяем предыдущий шаг только для ячеек, прилегающих к свободной границе;
5. Имеем два массива: для всех соседей и для прилегающих к границе;
6. Сортируем по величине от меньшего к большему;
7. В зависимости от размерности задачи (1D, 2D, 3D) выбираем, сколько элементов из начала массива берём для дальнейшей обработки для построения прямых/плоскостей (2D – два первых элемента из первого массива и один первый элемент из второго массива, 3D – три первых из первого массива и два первых из второго);
8. Ищем пересечения, как указано в схеме.

3.1.3 Особенности реализации алгоритма

1. При поиске ближайших к прямой вдоль вектора скорости ячеек может образоваться набор, из которого не получится построить треугольник для 2D и тетраэдр для 3D, и данные будут получены только из одного пространственного слоя. Для устранения данной проблемы на этапе заполнения массивов с ближайшими ячейками надо организовать предпроверку. В случае если фигура интерполяции по центрам ячеек вырождается, то из массива ближайших удаляется первый элемент и проводится повторная проверка уже без него.
2. Для автоматизации определения, какая сетка пришла на счет (1D, 2D или 3D), и выбора метода пересечения прямых для каждой размерности необходимо проверить, сколько у ячейки граней лежит на границах области. Так, для сеток из прямоугольных ячеек: 1D – 5 приграничных граней, 2D – 3 приграничные грани, 3D – одна приграничная грань.
3. Имеется ряд ячеек, обработка которых не всегда является корректной, такими являются ячейки, которые имеют больше одной грани, лежащей на границе расчетной области. Проблема заключается в совместном использовании предлагаемого метода на одной и той же ячейке относительно сначала одной неотражающей грани, а потом другой. Решением может послужить «флажок», отвечающий, была ли уже обработана эта ячейка на данной итерации или обработка происходит впервые. Но данный подход себя не оправдал, имея некоторую громоздкость результат не отличается от полученного следующим образом (на примере прямоугольных структур): обрабатывать только те ячейки, у которых 1, 3 или 5 граней лежат на границе. Так, 2 грани – это ребро в 3D, а 4 – это угол в 2D. Исключением является угол трехмерной области, у которого 3 грани лежат на границе области, исключаем его из расчета дополнительной проверкой.

Далее рассмотрим только те сложности, которые возникают непосредственно при обработке ячеек.

4. Начинать обработку следует только при ненулевой скорости выноса за пределы области. Предлагается использовать указанное ранее условие $|\cos(\vec{n}, \vec{W})| < 0.017$.
5. Установив, что поток не параллелен границе, на следующем шаге проверяем градиент давления. Если перепад давления между двумя рассматриваемыми точками меньше некоторой константы, например, меньше 1% величины давления в приграничной ячейке, то можно переходить к дальнейшей обработке, иначе поток не возмущён и можно принять новое значение без изменения.
6. Предлагаемый подход подразумевает интерполяцию значений из внутренних точек на границу. При определённых условиях возможна ситуация, когда вычисляемая величина может принять отрицательное значение (например, малая величина параметра и большая производная). Требуется проверка на

отрицательность основных расчетных параметров (плотность, энергия, ...). Если после проверки было обнаружено отрицательное значение, вместо него для дальнейших вычислений используем значение без корректировки. Результат такого подхода будет показан в ряде тестовых задач.

Дадим формальное описание предлагаемого алгоритма:

```

цикл по всем приграничным ячейкам
. если ячейка относится к неотражающей границе
. . если  $|\vec{W}_i| > \varepsilon$  (например, 1 см/сек)
. . . если  $|\cos(\vec{n}, \vec{W})| > 0.017$ 
. . . . если у ячейки 1, 3 или 5 граничных сегментов,
        относящихся к любой границе
. . . . . если в трехмерном случае 3 граничных сегмента
. . . . . то попали в угловую ячейку,  $f_{i-1/2\ new} = f_i$ 
. . . . . // далее в зависимости от размерности
. . . . . если одномерная задача
. . . . . то если  $|P_i - P_{i+1}| > 0.01 \cdot P_i$ 
        то вычисляем значение на границе
        без дополнительных операций
        если  $P_{i-1/2\ new} < 0$  или  $E_{i-1/2\ new} < 0$ , или  $\rho_{i-1/2\ new} < 0$ 
        то  $f_{i-1/2\ new} = f_i$ 
. . . . . иначе если двумерная задача
. . . . . то если  $|P_i - P_{i+1}| > 0.01 \cdot P_i$ 
        то 1) ищем координаты точек  $M$  и  $M$ 
        пересечением
        прямых,
        2) интерполируем значения рассчитываемых
        параметров в найденные точки,
        3) вычисляем значение на границе
        если  $P_{i-1/2\ new} < 0$  или  $E_{i-1/2\ new} < 0$ , или  $\rho_{i-1/2\ new} < 0$ 
        то  $f_{i-1/2\ new} = f_i$ 
. . . . . иначе // трехмерная задача
. . . . . если  $|P_i - P_{i+1}| > 0.01 \cdot P_i$ 
        то 1) ищем координаты точек  $M$  и  $M$  пересечением
        прямой с поверхностью,
        2) интерполируем значения рассчитываемых
        параметров в найденные точки,

```

3) вычисляем значение на границе

если $P_{i-1/2\ new} < 0$ или $E_{i-1/2\ new} < 0$, или $\rho_{i-1/2\ new} < 0$

то $f_{i-1/2\ new} = f_i$

. . . . *иначе* у ячейки 2 или 4 граничных сегмента, $f_{i-1/2\ new} = f_i$

. . . *иначе* угол выхода/входа потока от 89° до 90° , $f_{i-1/2\ new} = f_i$

. . *иначе* поток почти стационарен, $f_{i-1/2\ new} = f_i$

3.2 Варианты интерполяции вдоль линии тока

Первоначально предложенные варианты методики основаны на локально-одномерных вычислениях, они не учитывают данные из соседних ячеек. Повышение качества вычислений может быть достигнуто при использовании данных на расширенном шаблоне.

В предлагаемом подходе после вычисления значений в точках M и M необходимо пересчитать значение на границе области в точке N . В вычислительных экспериментах были проверены различные способы получения уточнённого значения переносимого через границу параметра. Рассматривались следующие варианты расчета вектора переменных f :

1) Линейная экстраполяция через точки M и M

$$f_N = f_M + \frac{h_2}{h_1}(f_M - f_M), \quad (7)$$

где h_1 – расстояние от M до M , h_2 – расстояние от M до N ;

2) Экстраполяция в предположении о равенстве нулю второй производной

по пространству $\Delta f = 0 \rightarrow \frac{f_M h_2 - f_M (h_2 + h_1) + f_N h_1}{h_1^2 h_2} = 0$, откуда

$$f_N = \frac{f_M (h_1 + h_2) - f_M h_2}{h_1}; \quad (8)$$

3) Экстраполяция на основе аппроксимации уравнения параболического типа

$\frac{\partial f}{\partial t} = q \Delta f \rightarrow \frac{f_N^{k+1} - f_N}{\tau} - q \frac{f_M h_2 - f_M (h_2 + h_1) + f_N h_1}{h_1^2 h_2} = 0$. Откуда:

$$f_N^{k+1} = f_N + q \frac{\tau}{h_1^2 h_2} (f_M h_2 - f_M (h_2 + h_1) + f_N h_1), \quad (9)$$

где $q = w \cdot h_0$, h_0 – расстояние от центра целевой ячейки (i, j) до N ;

4) Использование линейного волнового уравнения в форме, изучавшейся, например, в [9],

$\frac{f_N^{k+1} - 2f_N + f_N^{k-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{f_M h_2 - f_M (h_2 + h_1) + f_N h_1}{h_1^2 h_2}$. Приблизительное значение на

предыдущем временном слое получим из формулы (2):

$$\frac{f_N - f_N^{k-1}}{\tau} + a \frac{f_M - f_N}{h_2} = 0, \quad f_N^{k-1} = f_N + a \frac{\tau}{h_2} (f_M - f_N).$$

Отсюда имеем

$$f_N^{k+1} = 2f_N - f_N^{k-1} + a^2 \frac{\tau^2}{h_1^2 h_2} [f_M h_2 - f_M (h_2 + h_1) + f_N h_1]. \quad (10)$$

4. Реализация и тестирование

Вычислительные эксперименты проведены средствами кода MARPLE[10], в котором были реализованы предложенные в настоящей работе алгоритмы. Основой вычисления потоков между сеточными элементами послужила схема Лакса–Фридрихса. Метод пригоден для использования на неструктурированных разностных сетках общего вида.

Способы экстраполяции по формулам (7), (8), (10) показали себя неработоспособным. Так способы, без учета производной по времени (7, 8), приводили к неустойчивому решению, практически сразу после прихода возмущения на границу. В случае уравнения (10), возмущение, вызванное волной сжатия, проходящей под малым углом к нормали, было обработано вполне корректно, но при увеличении угла приходящей волны значение на границе давало ошибку больше 100%, что не имеет смысла в качестве универсального варианта.

Приемлемый результат показали вычисления по формуле (9) с модифицированным коэффициентом перед пространственной производной. Вместо $w h_0$ опытным путём было получено, что коэффициент, позволяющий получить наилучший результат, необходимо принять равным $w^2 \tau h_0$, аналогично (10):

$$f_N^{k+1} = f_N + \Lambda \frac{\tau}{h_1^2 h_2} (f_M h_2 - f_M (h_2 + h_1) + f_N h_1), \quad (11)$$

где $\Lambda = w^2 \tau h_0$.

С подобной модификацией было получено отклонение при прохождении волны под малыми углами к нормали, аналогично случаю (10), но при этом намного лучше обрабатывается случай выхода пологой волны.

Удостоверимся в предположении, что предлагаемый вариант постобработки в виде корректировки значения на границе позволяет обеспечить беспрепятственный выход возмущений за пределы расчетной области. Варианты обработки с помощью формул (1), (2) и (6) можно проверить на одномерной волне. Метод, предлагаемый в данной работе на основе корректировки потока

вдоль линии тока, с помощью формулы (11) даёт хороший результат в ситуациях, когда течение около границы неоднородно и существенно неоднмерно. В случае выхода потока по нормали к границе расчетная формула этого метода соответствует чисто одномерному варианту.

Далее представим результаты для следующих методов:

- Метод **A** – на основе (4), с уточнением для дозвуковых эффектов по формуле (6);
- Метод **B** – на основе (4), с уточнением для дозвуковых эффектов по формуле (1);
- Метод **C** – на основе (4), без дополнительных уточнений;
- Метод **D** – на основе (11), без дополнительных уточнений.

4.1 Сравнительный анализ предложенных методик на одномерных задачах.

Для проверки качества реализации предлагаемых способов корректировки следует начать рассмотрение с простейшего одномерного случая как наиболее показательного. Рассмотрим задачи Сода и Лакса в постановках, представленных в [14].

В данных задачах получаются волны, порожденные различными условиями. В задаче Сода на поверхности разрыва задаются перепады плотности и давления, в то время как в задаче Лакса к плотности и давлению добавляется скорость набегающего потока. В отличие от оригинальных тестов, позволим волнам выйти за пределы области. На правую границу придёт волна сжатия, на левую – волна разрежения.

Задача Сода:

Начальное состояние:

- слева от разрыва $(\rho^L, u^L, p^L) = (1, 0, 1)$;
- справа от разрыва $(\rho^R, u^R, p^R) = (0.125, 0, 0.1)$;

Для задачи Сода получены следующие распределения давления и плотности на правой и левой границах в зависимости от времени (рис. 3, 4).

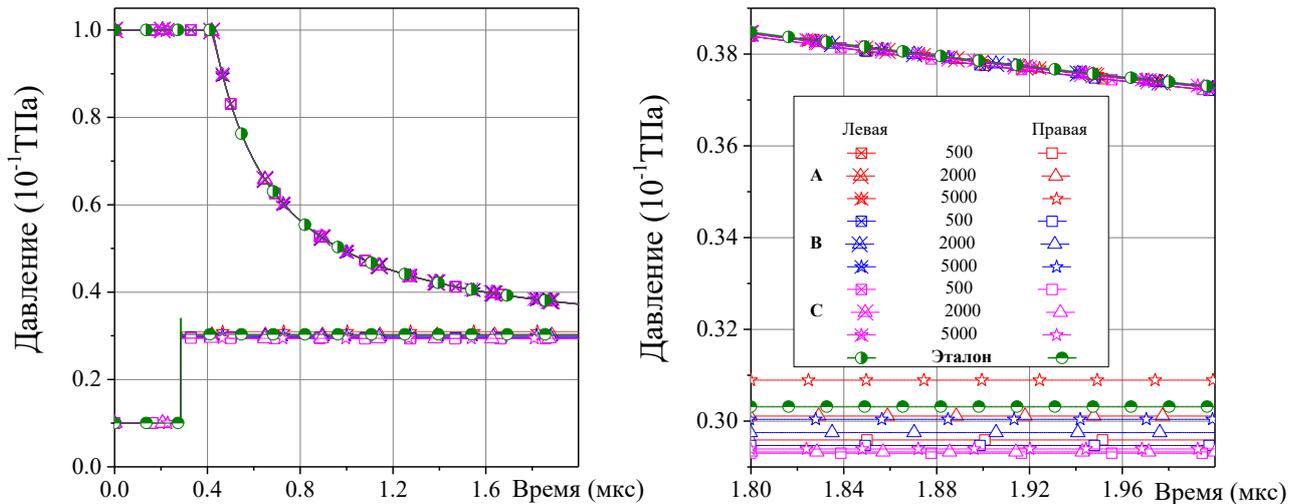


Рис. 3. Эпюра давления на левой и правой свободных границах для сеток 500, 2000 и 5000 ячеек в сравнении с эталоном

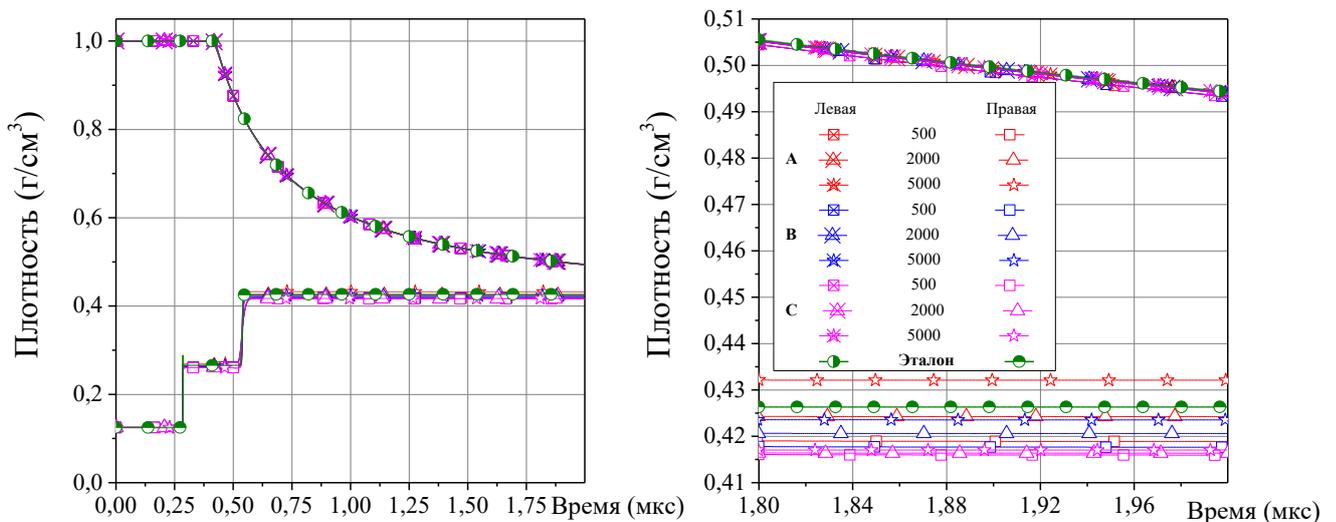


Рис. 4. Эпюра плотности на левой и правой свободных границах для сеток 500, 2000 и 5000 ячеек в сравнении с эталоном

На рис. 3 и 4 показано, что, несмотря на измельчение сетки, уровень отраженной волны на границе весьма мал, что видно на увеличенной области вблизи конца временной шкалы.

Представим наиболее усреднённую иллюстрацию проблемы прохода волны сжатия через правую границу области в динамике. На рис. 5 представлена ошибка методов в процентах для давления и «средней» по шагу сетки, используемой в тестировании (2000 ячеек). Полная информация для рассмотренных вариантов сеток отражена в таблице 1.

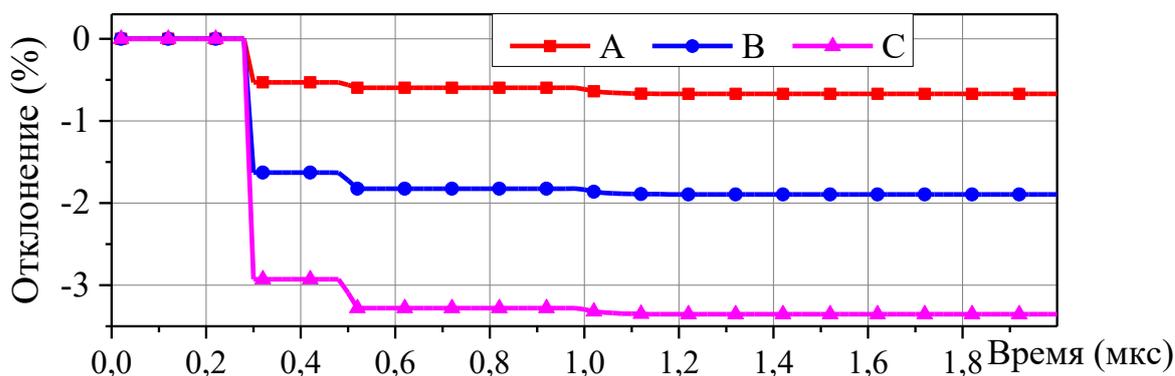


Рис. 5. Отклонения давления от эталонного значения при проходе волны сжатия через свободную границу для предлагаемых методик (на сетке 2000 ячеек)

Таблица 1

Отклонение плотности и давления на свободной границе для одномерных задач

A					Отклонение			
<i>Левая граница</i>	эталон	500	2000	5000	эталон	500	2000	5000
Плотность	0,49428	0,49324	0,49394	0,49413	1	1,00211	1,00069	1,0003
Давление	0,37286	0,37201	0,37259	0,37275	1	1,00228	1,00072	1,0003
<i>Правая граница</i>	эталон	500	2000	5000	эталон	500	2000	5000
Плотность	0,42632	0,41888	0,42424	0,43211	1	1,01776	1,00490	0,98660
Давление	0,30313	0,29589	0,30111	0,30893	1	1,02447	1,00671	0,98123
B					Отклонение			
<i>левая граница</i>	эталон	500	2000	5000	эталон	500	2000	5000
плотность	0,49428	0,49329	0,49393	0,49414	1	1,00201	1,00071	1,00028
давление	0,37286	0,37205	0,37257	0,37276	1	1,00218	1,00078	1,00027
<i>правая граница</i>	эталон	500	2000	5000	эталон	500	2000	5000
плотность	0,42632	0,41765	0,42060	0,42355	1	1,02076	1,01360	1,00654
давление	0,30313	0,29468	0,29749	0,30039	1	1,02868	1,01896	1,00912
C					Отклонение			
<i>левая граница</i>	эталон	500	2000	5000	эталон	500	2000	5000
плотность	0,49428	0,49324	0,49393	0,49415	1	1,00211	1,00071	1,00026
давление	0,37286	0,37201	0,37257	0,37274	1	1,00228	1,00078	1,00032
<i>правая граница</i>	REF	500	2000	5000	эталон	500	2000	5000
плотность	0,42632	0,41594	0,41635	0,41702	1	1,02496	1,02395	1,02230
давление	0,30313	0,29299	0,29330	0,29394	1	1,03461	1,03352	1,03126

В ситуации выхода волны сжатия, где корректировка происходит только сглаживанием по формуле (2), ошибка колеблется в диапазоне от 2.2 до 3.3% для рассмотренных вариантов сеток с различным шагом, а дополнительное использование инварианта Римана или метода характеристик позволяет уменьшить ошибку практически до нуля. Такое возможно только путём подгонки шага по времени, что нетрудно осуществить в тестовых задачах, тогда как с вычислением на реальных расчетных сетках такой приём представляется затруднительным.

Методы **C** и **D** дают аналогичные результаты, по этой причине последний не иллюстрируется. Фактически приходим к ситуации, когда метод **D** оказывается эквивалентным методу **C**, несмотря на различные исходные формулировки.

Задача Лакса:

Начальное состояние:

- слева от разрыва $(\rho^L, u^L, p^L) = (0.445, 0.698, 3.528)$;
- справа от разрыва $(\rho^R, u^R, p^R) = (0.5, 0, 0.571)$.

На рис. 6 и 7 показано, что для задачи Лакса, аналогично задаче Сода, сеточное дробление незначительно влияет на получаемый результат.

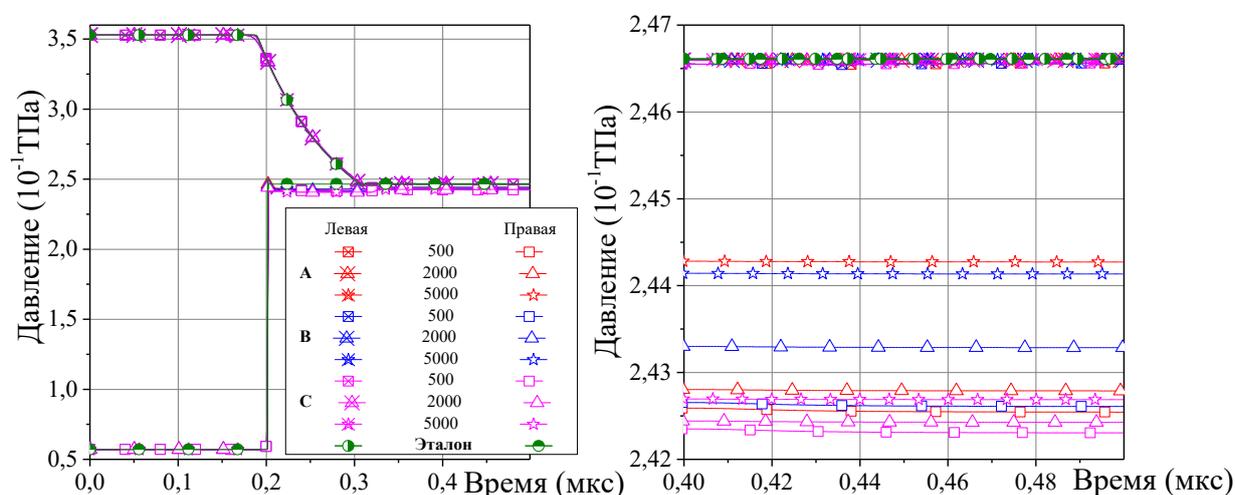


Рис. 6. Эпюра давления на левой и правой свободных границах для сеток 500, 2000 и 5000 ячеек в сравнении с эталоном

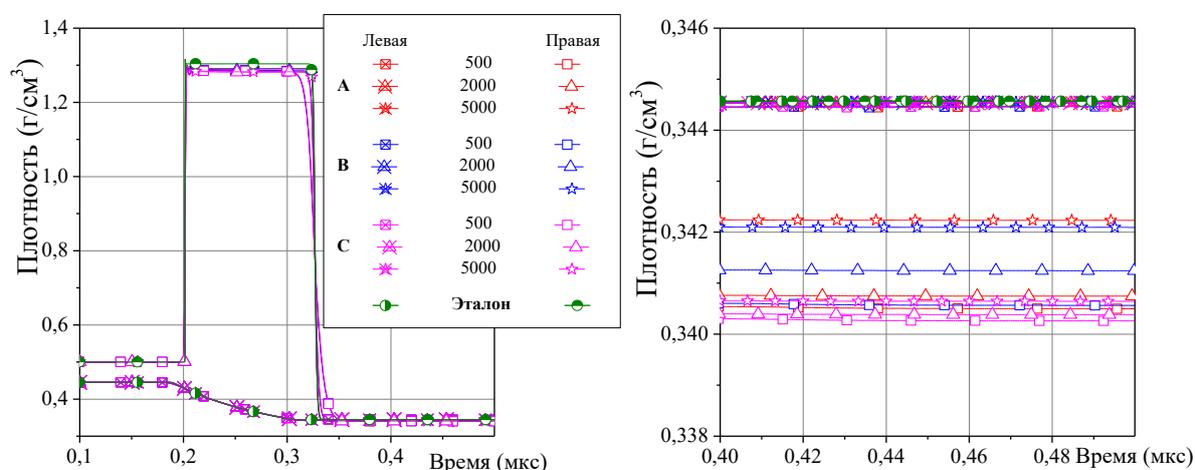


Рис. 7. Эпюра плотности на левой и правой свободных границах для сеток 500, 2000 и 5000 ячеек в сравнении с эталоном

Как и в предыдущем случае, представим типичную ситуацию прохождения волны сжатия, в нашем случае – через правую границу. На рис. 8 представлена ошибка методов в процентах для давления. Расчетная сетка включала 2000 ячеек.

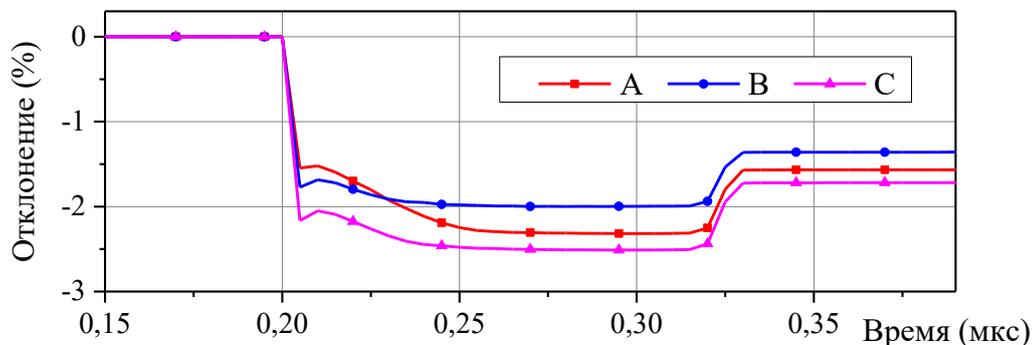


Рис. 8. Отклонения давления от эталонного значения при проходе волны сжатия через свободную границу для предлагаемых методик (на сетке 2000 ячеек)

Решение задачи Сода характеризуется выходом через правую границу только ударной волны, тогда как в задаче Лакса после выхода ударной волны происходит выход контактного разрыва.

Методы С и D дают эквивалентные результаты, по этой причине последний не был представлен.

Согласно проведенным одномерным тестам (рис. 3-8), при использовании формул (2) и (11), при обработке проходящей на границу волны разрежения ошибка стремится к нулю. Прохождение волны сжатия осложнено тем, что на границу приходит разрыв, который в численном решении сглажен схемной или искусственной вязкостью. Соответствующие расчеты по формулам (2), (11), показывают отклонение от эталонного значения в пределах 3,5%. Используя методы А или В (с дополнительной «дозвуковой» корректировкой), результат можно улучшить.

4.2 Сравнительный анализ предлагаемых методик для задачи обтекания в двумерной постановке

Поскольку в одномерном случае направление выхода всегда перпендикулярно свободной границе, следующим шагом является увеличение степени свободы потока. Добавим одну координатную ось, тем самым позволим потоку выходить через границу под двумерным углом.

Рассмотрим случай стационарного скачка уплотнения. С этой целью проведём расчет модельной задачи «обтекание ступеньки», предложенной в [15]. Будем рассматривать сверхзвуковое течение с числом Маха, равным 3, но в отличие от постановки [15] верхнюю границу примем свободной.

При сверхзвуковом обтекании перед ступенькой встанет ударная волна, которая будет выходить через свободную границу. В таком случае будет значительное отражение, причем в отличие от гладких дозвуковых структур отражение такой волны будет чёткое, что приведёт к ложному образованию дополнительных структур.



Рис. 9. Распределение давления установившегося течения

На рис. 10 представлены распределения отклонения давления от эталонного по расстоянию вдоль верхней границы и вдоль верхней поверхности ступеньки на рис. 11.

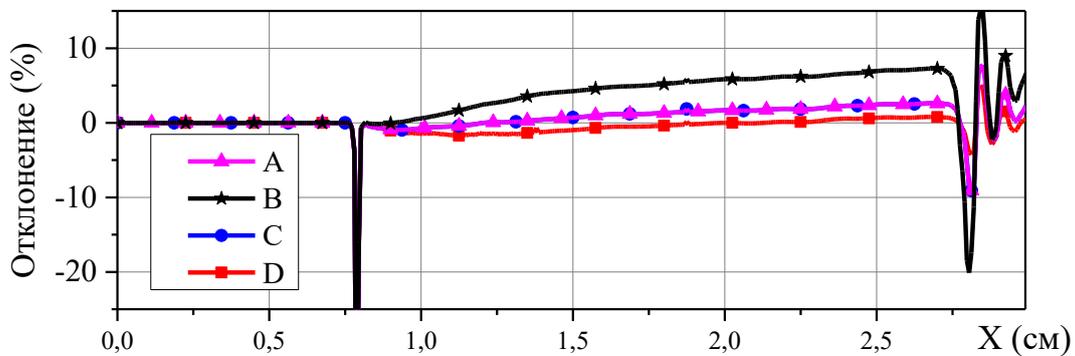


Рис. 10. Отклонение давления на свободной границе

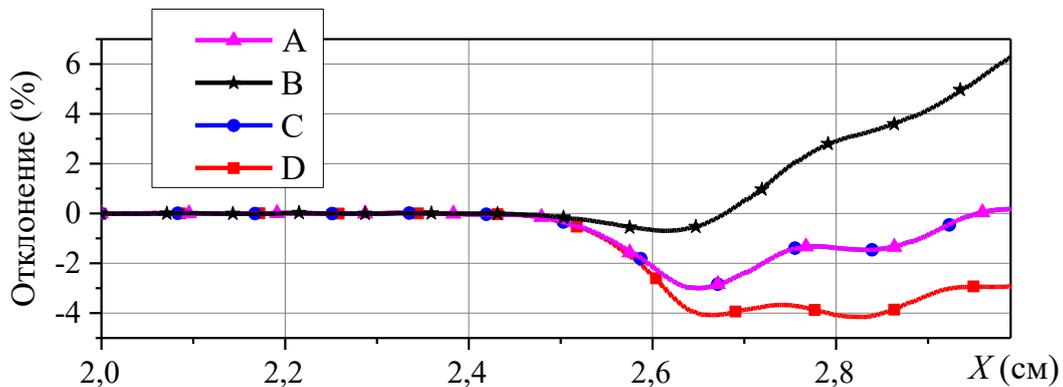


Рис. 11. Отклонение давления на верхней поверхности ступеньки

Из рис. 10 следует, что локальный (в пределах 1...3 ячеек) всплеск на фронте волны даёт отклонение $\approx 45\%$ для всех методов. О степени отклонения на свободной границе для рассмотренных методов можно судить результатам таблицы 2.

Таблица 2

Отклонения давления на искусственной свободной границе при использовании различных методов (в диапазоне расстояния 0.8 ... 2.7см)

метод	$-\delta$	$+\delta$	$ \delta $
A	-0,97%	2,60%	3,57%
B	-0,60%	7,27%	7,87%
C	-0,97%	2,60%	3,57%
D	-1,66%	0,78%	2,44%

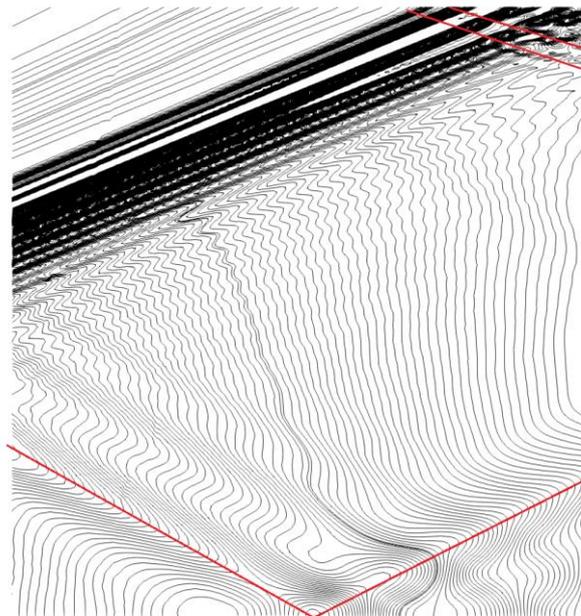


Рис. 12. Изобары в последней трети области, полученные методом **D**

На рис. 12 в нижней части показан приход фиктивно отраженной волны, порождённой стационарным скачком уплотнения. В верхнем правом углу видно отражение контактного разрыва. Отсутствие монотонности вдоль контактного разрыва обусловлено сеточными и схемными эффектами. Помимо пришедших на границу разрывов и их отражений хорошо видно, что на правой границе и в левом верхнем углу, где приходит гладкое возмущение, видимое отражение отсутствует.

Из представленных результатов следует, что отражённая волна приходит на заднюю часть ступеньки и отклоняет параметры, в частности давление, в некотором диапазоне для каждого метода. Отклонение параметров вблизи области падения происходит из отрицательного в положительное, тем самым чем

ниже будет отклонение в отрицательную сторону, на тем большее расстояние будет запас ошибки/отклонения, что полезно при вычислении параметров не в точке, а по поверхности протяжённого тела.

4.3 Пример расчета трёхмерной задачи

Рассматривая трёхмерный случай свободной границы, следует иметь в виду, что в отличие от двухмерных задач, где границей является отрезок, в трёхмерном случае это поверхность с неравномерно приходящими на неё произвольными возмущениями. Проблема обработки свободной поверхности заключается в распространении отражения не перпендикулярно границе, как это предполагается в одномерных методиках, а во все стороны, причём такие эффекты могут складываться, давая большее суммарное отклонение.

В качестве трёхмерного теста для предлагаемой методики рассмотрим канал квадратного сечения длиной $L = 1$ см, на расстоянии $\Delta L = 0,4$ см от входной границы расположим тонкую пластину, которая перекрывает просвет на 50% по одной оси и на 75% по другой. Такая конструкция послужит источником возмущений, которые будут приходить на границу в виде динамических вихревых структур. Рассмотрим предложенную задачу для идеальной газовой динамики без диссипативных механизмов.

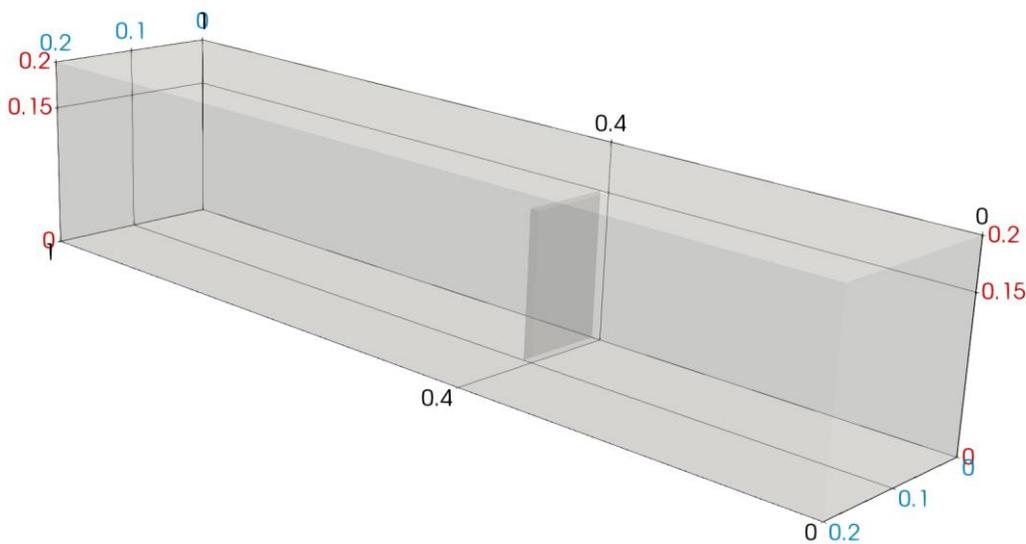


Рис. 13. Геометрия расчётной области с характерными размерами

Аналогично ранее рассмотренным задачам возьмём две области, длиной 1 см и 2 см, результаты, полученные на более длинной области, будем считать эталонными.

Рассмотрим два наиболее отличающихся случая: сверхзвуковой ($M = 3$) и дозвуковой ($M = 0.6$). Это позволит установить, насколько эффективно предлагаемая методика выпускает за пределы области разнонаправленные по скорости потоки.

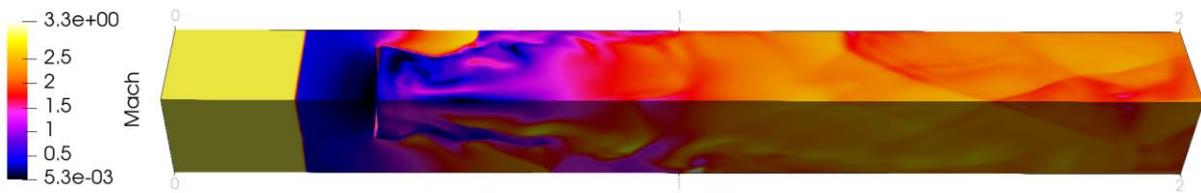


Рис. 14. Общий вид, картина чисел Маха на момент времени 20 мкс, сверхзвуковой вариант

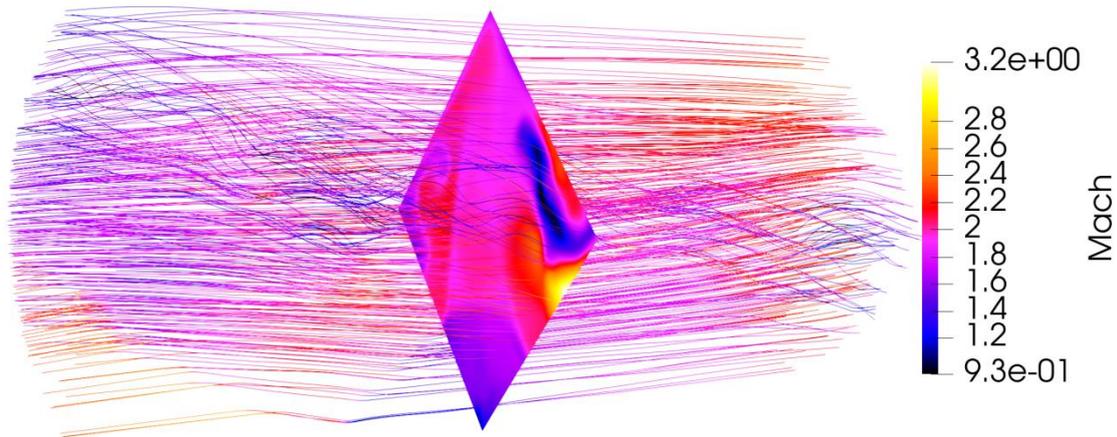


Рис. 15. Линии тока для эталонного случая, проходящие через плоскость отсечения для тестовой постановки, сверхзвуковой случай

Как показано на рис. 15, угол выхода через границу местами не равен нулю, достигая 25...30°.

Результаты вычислительного эксперимента иллюстрируются следующим образом. Построим временные зависимости в двух точках: первая точка – вдоль ребра расчетной области, к которому примыкает пластина, непосредственно на свободной границе и вторая точка – на оси канала, на расстоянии $0.1L$ от границы. Вторая точка позволит установить, насколько возмущение, вызванное свободной границей, проникает вглубь области против течения.

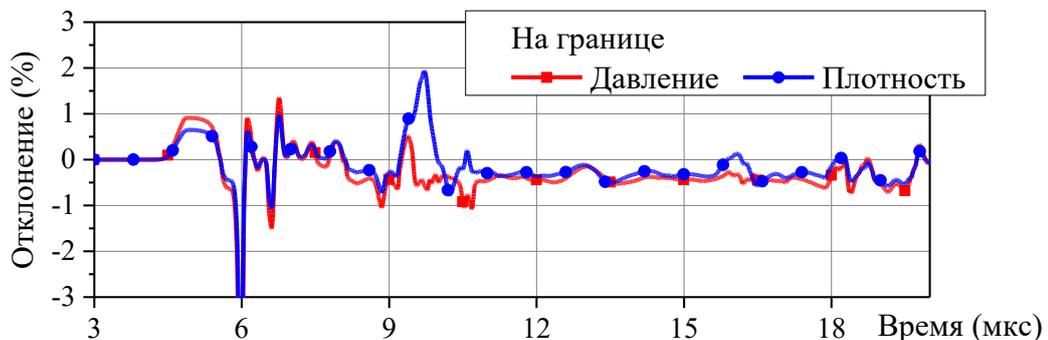


Рис. 16. Отклонение давления и плотности на свободной границе для сверхзвукового течения

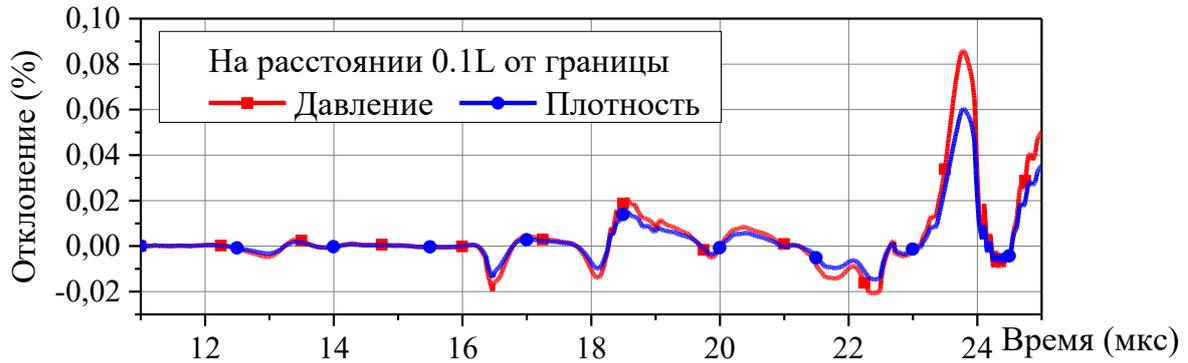


Рис. 17. Отклонения давления и плотности в глубине области, порождённые отклонением на свободной границе для сверхзвукового течения

Для сверхзвукового случая на рис. 16 показано отклонение параметров непосредственно на границе области. В момент прихода разрыва на границу (6 мкс) отклонение достигает -10% , после чего общий уровень ошибки приходит к приблизительно-стационарному значению $0.3...0.8\%$.

Отражённое возмущение, рис. 17, не превосходит 0.1% . Скорость отраженной волны составила $\approx 7.8\%$ от изначальной скорости набегающего потока.

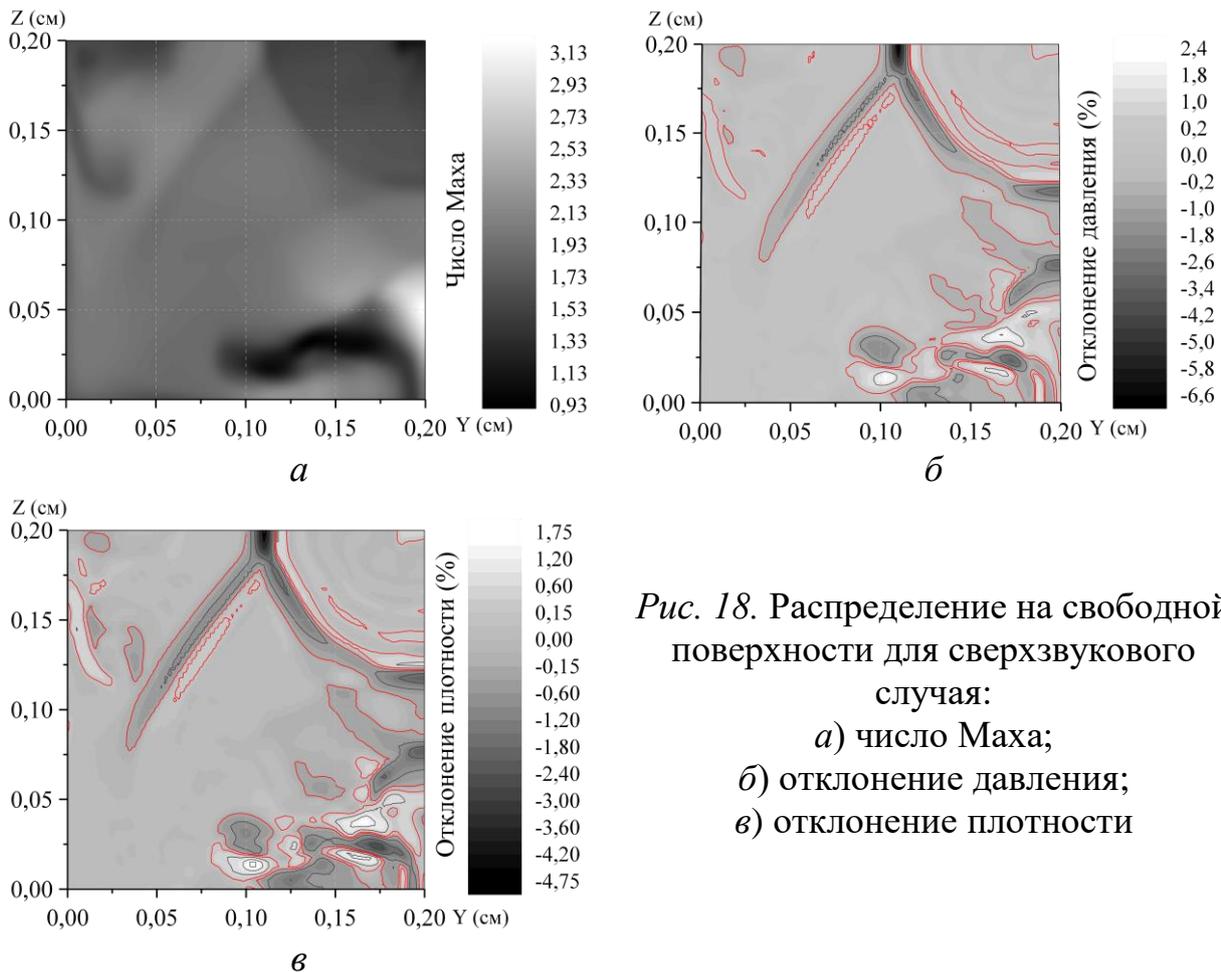


Рис. 18. Распределение на свободной поверхности для сверхзвукового случая:
 а) число Маха;
 б) отклонение давления;
 в) отклонение плотности

На рисунке 18 показаны распределения по сечению потока числа Маха, а также отклонение давления и плотности на свободной поверхности на 25 мкс. Красными границами отсечены ближайшие окрестности нулевого отклонения от эталонного решения величиной $|\delta| = 0.2\%$.

Естественно ожидать, что при моделировании существенно трехмерных течений параметры на выходной границе распределены неоднородно. Так, в правой нижней части каждой из картин происходит активное колебание вокруг нулевого отклонения. Эта область, через которую проходит вихревое течение, хорошо показана на рисунке 15.

Расчёт показал, что максимальное отклонение всех параметров происходит там, где наблюдается пересечение отраженных волн сжатия ($Z \approx 0.2$, $Y \approx 0.1$). Как оказалось, градиенты параметров в этих пересекающихся волнах достаточно большие, что вызывает необходимость дополнительных усилий по коррекции данных на выходной границе.

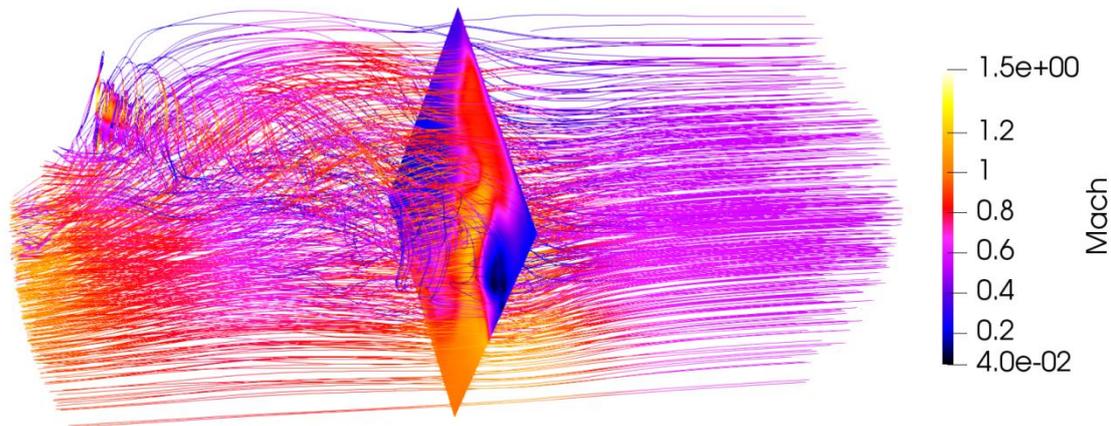


Рис. 19. Линии тока для эталонного случая, проходящие через плоскость отсечения для тестовой постановки, дозвуковой случай

В дозвуковой постановке на момент времени 50 мкс имеем похожую картину (рис. 19), на выход приходит одна вихревая дорожка. Образовавшаяся дорожка на рассмотренный момент времени приходит на границу со значительным наклоном линий тока, а местами получаем частичный разворот потока с почти нулевой скоростью.

Выбор данного момента времени обусловлен наибольшим отклонением параметров от эталонного. В предыдущие моменты времени через границу проходит сравнительно равномерный поток без завихрений, а суммарная ошибка не превосходит $|\delta| < 10\%$.

Данные, полученные для дозвукового течения в фиксированной точке границы как функции времени, представлены на рисунке 20. Отклонение до 35 мкс не превосходит 1...2%, однако после этого времени на границу приходит значительно более возмущённый поток и отклонение параметров становится на порядок выше, до 10%.

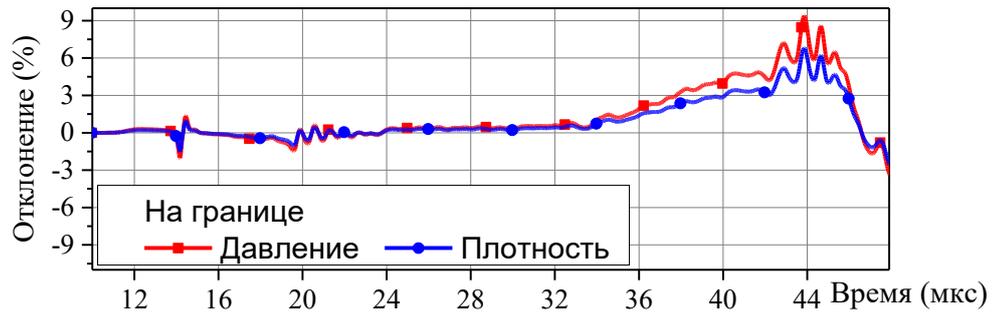


Рис. 20. Отклонения давления и плотности на свободной границе для дозвукового течения

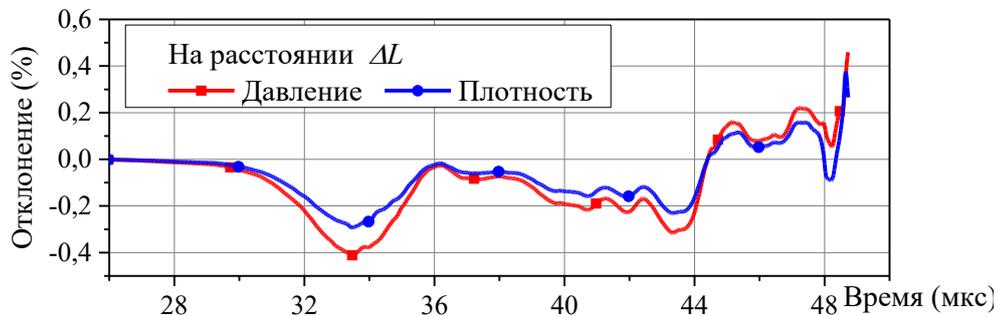


Рис. 21. Отклонения давления и плотности в глубине области, порождённые отклонением на свободной границе для дозвукового течения

В дозвуковом случае отраженное возмущение, показанное на рис. 21, несколько выше сверхзвукового случая, однако не превосходит 1% на рассмотренном временном промежутке. Скорость отраженной волны в данном случае ниже, чем в первом случае, и составляет $\approx 2.5\%$ от первоначальной скорости набегающего потока.

В совокупности скорость отраженной волны и процент отклонения могут позволить достоверно установить, в какой момент времени следует ожидать прихода отражённой волны и каков процент отклонения. Конечно, для подобных манипуляций следует провести более широкий спектр тестовых решений с более чем одной контрольной точкой в глубине области.

На рис. 22 показаны картина чисел Маха, а также отклонение давления и плотности на свободной поверхности на 50 мкс. На картине чисел Маха зелёным уровнем отделена область со значениями больше 1, а голубым уровнем – значения ниже 0.25. На картинах отклонений давления и плотности зелёным отделены области, где ошибка $\delta < -10\%$, а красным $\delta > 10\%$. Наибольшее отклонение параметров приходится не на области низкого или высокого числа Маха и даже не на область выхода вихревой дорожки, а наблюдается в области, разделяющей выходящий вихрь и спокойный поток.

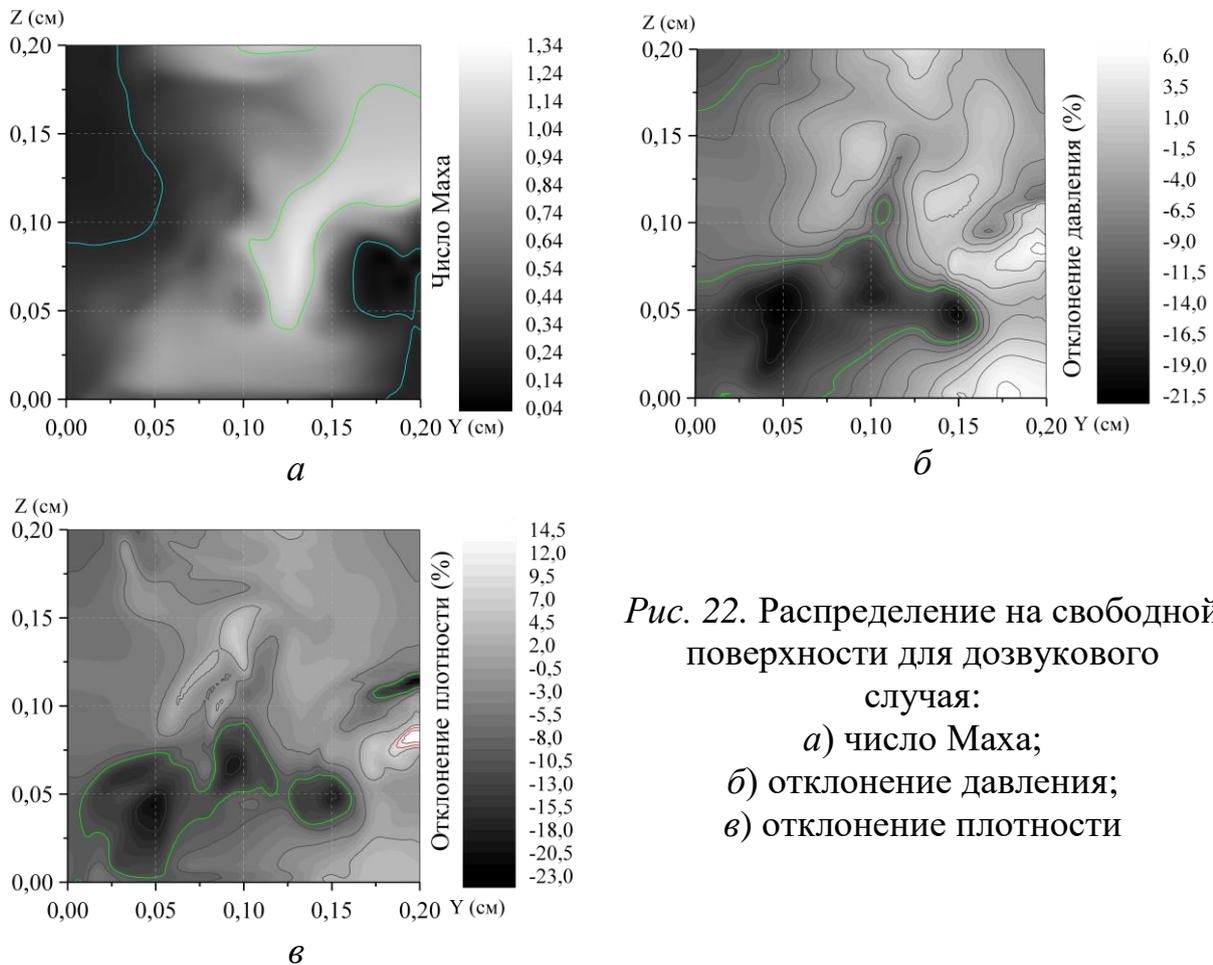


Рис. 22. Распределение на свободной поверхности для дозвукового случая:

- a*) число Маха;
- б*) отклонение давления;
- в*) отклонение плотности

Локальное отклонение при выходе дозвукового завихренного потока значительно и достигает 21-23% на рассмотренный момент времени и в рамках предлагаемой постановки.

В случае сверхзвукового или слабо завихренного дозвукового потока метод **D** показывает свою состоятельность при сравнительно небольшом отклонении параметров от эталонного значения. Для случая со значительно завихренными структурами и разворотом потока на границе требуется дальнейший анализ метода.

5. Заключение

Предложена методика постановки неотражающих граничных условий, учитывающих перенос возмущений вдоль линии тока. Рассмотрен вариант реализации неотражающих граничных условий как в одномерной, так и многомерной постановке.

Проведено сравнение одномерных методик с предложенной многомерной на примере одномерных и двухмерных задач как со стоящей на границе ударной волной, так и в случае её выхода перпендикулярно границе.

Установлено, что способ постановки ГУ с учётом переноса вдоль линии тока на одномерных случаях показывает результат, аналогичный одномерной методике, при этом позволяющий лучше обрабатывать двух-трёхмерные случаи.

Для случая стационарного на границе скачка уплотнения предлагаемый метод показывает себя как более эффективный в сравнении с одномерными методами.

Предположение о гладкости любого приходящего на границу возмущения позволило оценить величину отклонения от эталонного решения в расчёте падающей на границу волны. Эта оценка пригодна также и в случае приходящего на границу разрывного решения, поскольку её можно получить, приблизив разрывное решение некоторой гладкой функцией.

Построение неотражающих граничных условий посредством продолжения численного решения вдоль линии тока можно рассматривать как реализацию локально-одномерного подхода. Такой подход показал свою эффективность в ряде тестовых задач. Кроме того, данный способ реализации неотражающих ГУ не вносит дополнительной коррекции в математическую модель физического процесса, поскольку выполняется как корректирующая процедура на каждом этапе (предиктор/корректор) каждого временного шага.

Во всех представленных случаях использования было установлено, что плотность корректируется точнее, чем давление, даже в случаях, где они примерно равны. Такое получается благодаря тому, что в качестве базы для поиска уточнённого значения используется линия тока, являющаяся траекторией переноса массы. Существует предположение, что если использовать в качестве расчетной базы вместо поля скоростей поля градиентов давления или энергии, то более точно будет скорректирован именно тот параметр, который принят за основу. Также вероятно, что использование трёхэтапной корректировки по трём основным полям (плотность, давление, энергия – что соответствует законам сохранения) даст суммарно лучший результат, чем по отдельности.

В случае расчета на прямоугольной сетке при постоянном поступающем в область потоке можно задать неотражающее условие на входной границе аналогично тому, как это делалось на выходной границе. При использовании нерегулярных сеток в окрестности границы, как показывают предварительные расчеты, требуется дальнейший анализ качества алгоритма с учетом структуры сетки в приграничной области.

Автор благодарит коллег – В.В. Валько, В.А. Гасилова и А.С. Болдарева – за помощь в подготовке данной публикации.

6. Библиографический список

1. G. W. Hedstrom. Nonreflecting boundary conditions for nonlinear hyperbolic systems // *Journal of computational physics* 30, 222–237, 1979.
2. Kevin W. Thompson. Time dependent boundary conditions for hyperbolic systems // *Journal of computational physics* 68, 1–24, 1987.
3. Kevin W. Thompson. Time dependent boundary conditions for hyperbolic systems II // *Journal of computational physics* 89, 439–461, 1990.
4. В.Н. Емельянов, А.Г. Карпенко Метод постановки дозвуковых граничных условий для системы уравнений газовой динамики // *Вестник ТОГУ*, №2(29), 2019.
5. Marcus J. Grote, Thomas Hagstrom. Nonreflecting boundary conditions for time-dependent wave propagation // *Erlangung der wurde eines doktors der philosophie vorgelegt der philosophisch-naturwissenschaftlichen fakultat der universitat basel, Lausanne*, 2010.
6. Marcus J. Grote, Thomas Hagstrom. Nonreflecting boundary conditions for time-dependent wave propagation // *Philosophisch-naturwissenschaftlichen fakultat der universitat basel, Lausanne*, 2010.
7. Bjorn Engquist, Andrew Majda. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves // *Mathematics of computation*, 31(139), 629–651, 1977.
8. Robert Clayton, Bjorn Enquist. Absorbing boundary conditions for acoustic and electric wave equations // *Bulletin of the Seismological Society of America*, 67(6), 1529–1540, 1977.
9. М.А. Ильгамов, А.Н. Гильманов. Неотражающие условия на границах расчетной области. М.: ФИЗМАТЛИТ, 240 с., 2003.
10. V.A. Gasilov, A.S. Boldarev, O.G. Olkhovskaya, D.S. Boykov, Yu.S. Sharova, N.O. Savenko, A.M. Kotelnikov. MARPLE: software for multiphysics modelling in continuous media // *Numerical Methods and Programming*. 24(4), 316–338, 2023. doi 10.26089/NumMet.v24r423.
11. A. Jeffrey, T. Taniuti. *Nonlinear wave propagation*. Academicpress, New York (1964).
12. Л.В. Дородницын. Неотражающие граничные условия и численное моделирование задач обтекания // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 51(1), 152–169, 2011.
13. Л.В. Дородницын. Искусственные граничные условия при численном моделировании дозвуковых течений газа // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 45(7), 1251–1278, 2005.
14. R. Liska, B. Wendroff. Comparison of Several Difference Schemes on 1D and 2D Test Problems for the Euler Equations // *SIAM Journal on Scientific Computing*, 25(3), 995–1017, 23 p., 2006.
15. A. F. Emery. An Evaluation of Several Differencing Methods for Inviscid Fluid Flow Problems // *J. Comput. Phys.* 2(3), 306–331 (1968).