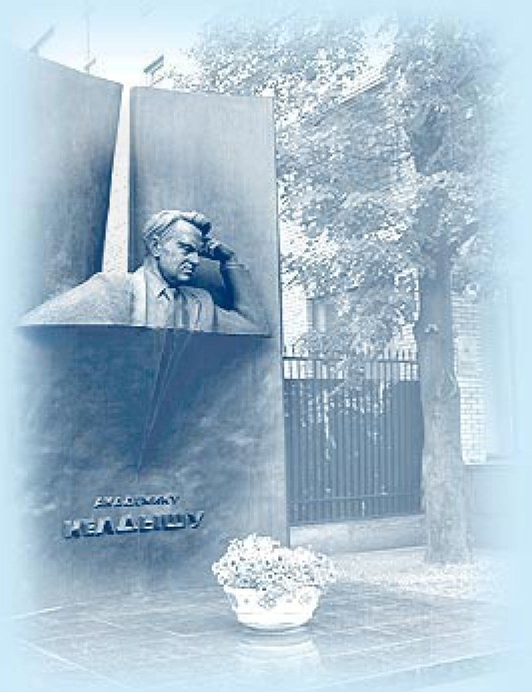
ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 50 за 2023 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

А.В. Плеханов, С.Ю. Рыжов

Механическое взаимодействие метаемого тела со стенками канала рельсового электромагнитного ускорителя. Тестовая задача

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Плеханов А.В., Рыжов С.Ю. Механическое взаимодействие метаемого тела со стенками канала рельсового электромагнитного ускорителя. Тестовая задача // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2023. № 50. 30 с.
https://doi.org/10.20948/prepr-2023-50
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2023-50

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

А.В. Плеханов, С.Ю. Рыжов

МЕХАНИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МЕТАЕМОГО ТЕЛА СО СТЕНКАМИ КАНАЛА РЕЛЬСОВОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО УСКОРИТЕЛЯ. ТЕСТОВАЯ ЗАДАЧА

Москва — 2023

А.В. Плеханов, С.Ю. Рыжов

Механическое взаимодействие метаемого тела со стенками канала рельсового электромагнитного ускорителя. Тестовая задача

Рассмотрено колебание рельсов ускорителя под действием электромагнитных сил. Якорь и вместе с ним правая граница приложения электромагнитных сил движутся по каналу ствола от казенной части к дульному срезу. Рельсовый ускоритель упрощенно рассматривается как балка Бернулли–Эйлера конечной длины, лежащая на вязкоупругом основании, с консольной поддержкой со стороны казенной части ускорителя. Колебание рельса описывается дифференциальным уравнением в частных производных четвертого порядка по координате и второго порядка по времени. С помощью метода разложения по собственным формам получено аналитическое решение уравнения с учетом изменения скорости якоря по длине канала. Учет особенности выражения для собственных форм колебаний для данной задачи позволил упростить вычисления и учесть необходимое количество гармоник на всей траектории движения якоря, что затруднительно при традиционном применении метода, и повысить за счет этого точность прогнозирования амплитуды и характера колебаний рельса в процессе разгона. Предлагаемый подход позволяет проводить тестирование и отладку численных методов решения сложных задач, а также более корректно проектировать канал рельсового ускорителя.

Ключевые слова: рельсовый электромагнитный ускоритель, колебание рельса, движущаяся нагрузка, аналитическое решение, метод разложения по собственным формам, тестовый пример

A.V. Plekhanov, S.Yu. Ryzhov

Mechanical interaction of a projectile body with a bore walls of an electromagnetic accelerator. Task problem

The vibration of the accelerator rails under the action of electromagnetic forces is considered. The armature and with it the right boundary of electromagnetic forces application moves along the barrel bore from the breach to the muzzle. The rail accelerator is simply considered as a Bernoulli-Euler beam of finite length, lying on a viscoelastic foundation, with cantilever support from the side of the accelerator breech. The rail vibration is described by a differential equation in partial derivatives of the fourth order in coordinate and the second order in time. Using the eigenmode expansion method an analytical solution of the equation is obtained taking into account the change in the armature speed along the length of the barrel. Taking into account the peculiarities of the expression for natural vibration modes for this problem made it possible to simplify the calculations and take into account appropriate number of harmonics along the entire trajectory of the armature, which is difficult in the traditional application of the method, and thereby increase the accuracy of predicting the amplitude and nature of rail vibrations during the shot. The proposed approach allows testing and debugging numerical methods for solving complex problems, as well as more correctly designing the barrel of a rail accelerator.

Key words: rail electromagnetic accelerator, rail vibration, moving load, analytical solution, eigenmode expansion method, test problem

1. Введение

При разработке программ решения задач численными методами возникает необходимость их отладки и проверки правильности работы. Для этих целей результаты численных расчетов часто сравнивают с результатами, полученными при решении тестовых задач, которые имеют аналитические решения. При этом чем сложнее тестовая задача, тем в большей степени она позволяет подтвердить правильность работы численной модели в широком диапазоне изменения начальных данных.

Сказанное относится и к задачам колебания балки под воздействием движущейся нагрузки. Анализ многочисленных работ, выполненных по данной тематике, показал, что в приведенных в них численных примерах часто не указан полный набор исходных данных, что не позволяет повторить результаты. Также в некоторых работах выкладки приведены с описками и ошибками, ставящими под сомнение правильность конечных выражений и результатов расчетов.

Все это заставило авторов данной работы заняться получением аналитического решения достаточно сложной задачи, чтобы в дальнейшем иметь возможность тестировать программы численного решения, разработанные для исследования практических задач.

2. Постановка задачи

В качестве примера рассмотрим колебания рельсов электромагнитного (ЭМ) ускорителя рельсового типа, генерируемые нагрузками, связанными с движением якоря [1].

Обычный электромагнитный рельсовый ускоритель состоит из двух проводящих рельсов, изолирующих пластин и внешней силовой оболочки. Для питания ускорителя в большинстве случаев используется импульсный источник электрической энергии (ИИЭ). На рис. 1 показана упрощенная механическая модель ЭМ рельсового ускорителя. Окружающие изолирующие пластины и силовая оболочка упрощенно рассматриваются как вязкоупругое основание Винклера. Для анализа динамического поведения системы при разгоне якоря каждый из проводящих рельсов считается консольной балкой конечной длины, расположенной на вязкоупругом основании. На рельсы главным образом действуют расталкивающая электромагнитная сила, механическое контактное давление якоря и силы со стороны элементов конструкции, удерживающие их при разгоне. Якорь, а вместе с ним и правая граница приложения расталкивающей рельсы электромагнитной силы и область контактного давления, движутся слева направо от казенной части к дульному срезу до момента разрыва электрической цепи при достижении якорем конца рельса.

Проводящие рельсы в основном удерживают поперечные силы, а размеры рельсов в поперечном сечении очень малы по сравнению с их длиной. Так что рельсы могут упрощенно моделироваться в рамках модели балки Бернулли–Эйлера. Изгибная деформация – это основная деформационная мода (вид деформации) балки.

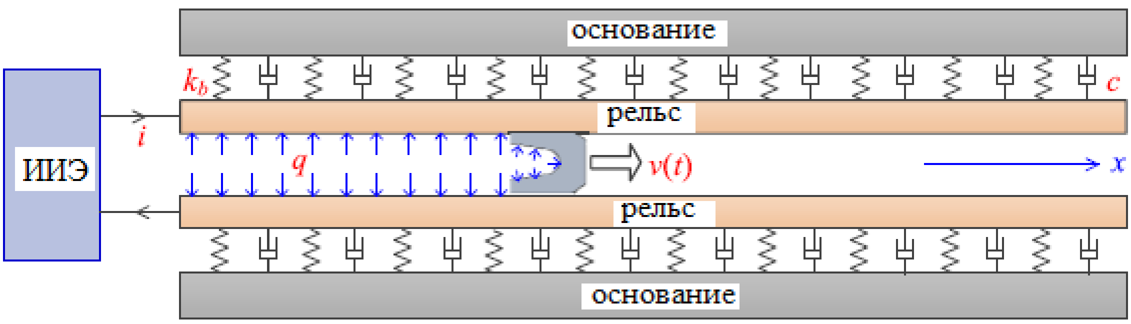


Рис. 1. Упрощенная схема электромагнитного рельсового ускорителя [1].

При сделанных предположениях уравнение, описывающее поведение балки (рельса), примет следующий вид [1]:

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m_r\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c\frac{\partial w}{\partial t} + k_b w = q(x,t), \qquad (1)$$

где: $w(x,t)$ – прогиб рельсов в направлении, перпендикулярном оси движения якоря x, t – время, E – модуль упругости материала рельсов, I – момент инерции поперечного сечения рельса на изгиб, m_r – масса единицы длины рельса, k_b и c – коэффициенты упругости и демпфирования основания соответственно, $q(x,t)$ – динамическая нагрузка, действующая на рельсы, которая содержит две части: $q_1(t)$ – распределенная электромагнитная расталкивающая сила и $q_2(t)$ – контактное давление со стороны якоря. Таким образом [1],

$$q(x,t) = q_1(t)[1-H(x-u(t))] + q_2(t)H\{(0{,}5l)^2 - [x-(u(t)+0{,}5l)]^2\}, \quad (2)$$

где $u(t)$ – положение якоря, l – длина контактной зоны якоря, действующей на рельс, H –ступенчатая функция Хевисайда.

Для балки с консольной поддержкой со стороны казенной части справедливы следующие граничные и начальные условия.

Граничные условия:

при $x = 0$: $w(0,t) = 0,\ \frac{\partial w(0,t)}{\partial x} = 0,$

при $x = L$: $\frac{\partial^2 w(L,t)}{\partial x^2} = 0,\ \frac{\partial^3 w(L,t)}{\partial x^3} = 0,$ (3)

где L – длина балки.

Начальные условия:

при $t = 0$: $w(x,0) = 0, \frac{\partial w(x,0)}{\partial t} = 0.$ (4)

Уравнение (1) является линейным дифференциальным уравнением в частных производных четвертого порядка по координате и второго порядка по времени. Для его решения применим метод разложения по собственным формам [2],[3].

3. Решение однородного уравнения

Решение уравнения (1) ищется методом разделения переменных в виде суммы бесконечного ряда:

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i(x)\varphi_i(t), \quad (5)$$

где $\theta_i(x)$ – собственные формы колебаний, удовлетворяющие условиям закрепления концов балки, которые используются в качестве базисных функций, $\varphi_i(t)$ – обобщенные координаты. Собственные формы колебаний находятся из решения однородного вида уравнения (1), которое записывается в следующем виде:

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m_r\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c\frac{\partial w}{\partial t} + k_b w = 0. \qquad (6)$$

Подставляя (5) в (6), получим:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[EI\frac{d^4\theta_i}{dx^4}\varphi_i + m_r\frac{d^2\varphi_i}{dt^2}\theta_i + c\frac{d\varphi_i}{dt}\theta_i + k_b\theta_i\varphi_i\right] = 0.$$

Это уравнение выполняется, если каждый член ряда равняется нулю, а сумма является его решением. После подстановки произведения $\theta_i(x)\varphi_i(t)$ в уравнение (6) и разделения переменных получим:

$$\frac{EI}{m_r}\frac{1}{\theta_i(x)}\frac{d^4\theta_i(x)}{dx^4} + \frac{k_b}{m_r} = -\frac{1}{\varphi_i(t)}\frac{d^2\varphi_i(t)}{dt^2} - \frac{c}{m_r}\frac{1}{\varphi_i(t)}\frac{d\varphi_i(t)}{dt} = \lambda_i^2,$$

откуда следуют два уравнения для определения $\theta_i(x)$ и $\varphi_i(t)$:

$$\frac{d^4\theta_i}{dx^4} - \beta_i^4\theta_i = 0, \qquad (7)$$

$$\frac{d^2\varphi_i(t)}{dt^2} + \frac{c}{m_r}\frac{d\varphi_i(t)}{dt} + \lambda_i^2\varphi_i(t) = 0.$$

Здесь $\beta_i^4 = (\lambda_i^2 - k_b/m_r)\frac{m_r}{EI}$. (8)

Граничные условия (из условий (3)):

при $x = 0$: $\theta_i(0) = 0,\ \frac{\partial\theta_i(0)}{\partial x} = 0,$

при $x = L$: $\frac{\partial^2\theta_i(L)}{\partial x^2} = 0,\ \frac{\partial^3\theta_i(L)}{\partial x^3} = 0.$

Рассмотрим уравнение (7), решение которого позволит определить собственные формы колебаний. Введем функции А.Н. Крылова [3]:

$U(z) = ½[ch(z) - cos(z)]$,

$V(z) = ½[sh(z) - sin(z)]$, (9)

$S(z) = ½[ch(z) + cos(z)]$,

$T(z) = ½[sh(z) + sin(z)]$.

Тогда с учетом граничных условий при $x = 0$ решение уравнения (7) запишется в следующем виде [3]:

$$\theta(x) = C\,U(\beta_i x) + D\,V(\beta_i x), \qquad (10)$$

где константы C и D определяются из условий на границе при $x = L$:

$$C\,S(\beta_i L) + D\,T(\beta_i L) = 0,$$

$$C\,V(\beta_i L) + D\,S(\beta_i L) = 0,$$

откуда $S^2 - TV = 0$ или

$$ch(\beta_i L)\,cos(\beta_i L) + 1 = 0. \qquad (11)$$

Корни уравнения (11) находят из специальных таблиц [4] или численно: $\beta_1 L = 1{,}875$; $\beta_2 L = 4{,}694$; $\beta_3 L = 7{,}855$; $\beta_4 L = 10{,}966$, $\beta_5 L = 14{,}137$; $\beta_6 L = 17{,}279$ и $\beta_i L \approx (i - ½)\,\pi$ для $i > 6$ [5]. Стоит отметить, что хотя $cos[(i-1/2)\pi] = 0$, но для уравнения (11) в виде $\cos(\beta_i L) = -1/ch(\beta_i L)$ при росте величины $\beta_i L$ приведенное выражение оказывается единственным численным приближением точного решения, известного из литературных источников.

Выражение для i-й собственной формы колебаний получается в следующем виде:

$$\theta_i(x) = C[U(\beta_i x) - r_i\,V(\beta i\, x)], \qquad (12)$$

где:

$$r_i = \frac{S(\beta_i L)}{T(\beta_i L)} = \frac{ch(\beta_i L) + \cos(\beta_i L)}{sh(\beta_i L) + \sin(\beta_i L)} \text{ или } r_i = \frac{V(\beta_i L)}{S(\beta_i L)} = \frac{sh(\beta_i L) - \sin(\beta_i L)}{ch(\beta_i L) + \cos(\beta_i L)}, \qquad (13)$$

что равнозначно. Далее будем использовать первое выражение для r_i.

Совокупность функций (12) определяет формы колебаний и называется главными формами колебаний.

Главные формы колебаний являются ортогональными функциями [2], то есть для них, при условии нормирования, выполняются следующие условия:

$$\int_0^L m_r \theta_i \theta_j\,dx = \begin{cases} 0, \text{если } i \neq j, \\ 1, \text{если } i = j. \end{cases} \qquad (14)$$

Из условий ортогональности и нормирования (14) получим выражение для постоянной интегрирования: $C = \frac{2}{\sqrt{m_r L}}$. Тогда соотношение для собственной формы колебаний примет окончательный вид:

$$\theta_i(x) = \frac{2}{\sqrt{m_r L}}[U(\beta_i x) - r_i V(\beta_i x)]. \qquad (15)$$

Вернемся снова к уравнению (1). Известно, что главные формы колебаний являются ортогональными функциями. Это позволяет разложить произвольную функцию в ряд по главным формам [2]. В частности, в качестве таковой можно выбрать функцию нагрузки *q(x,t)*. Мы получим:

$$q(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j(t)\, m_r \theta_j(x), \qquad (16)$$

где $g_i(t)$ – неизвестные коэффициенты разложения, зависящие от времени. Для их определения умножим обе части уравнения (16) на $\theta_i(x)$ и проинтегрируем полученное выражение по длине балки. С учетом условий ортогональности получим:

$$\int_0^L q(x,t)\theta_i(x)dx = \int_o^L \sum_{j=1}^{\infty} g_j(t) m_r \theta_j \theta_i dx = \sum_{j=1}^{\infty} g_j(t) \int_0^L m_r \theta_j \theta_i dx =$$

$$= g_i(t) \int_0^L m_r \theta_i^2(x)dx. \qquad (17)$$

Введем понятия обобщенной силы

$$Q_i(t) = \int_0^L q(x,t)\theta_i(x)dx \qquad (18)$$

и обобщенной массы балки при каждой форме колебаний

$$M_i = \int_0^L m_r \theta_i^2(x)dx. \qquad (19)$$

Тогда

$$g_i(t) = \frac{Q_i(t)}{M_i} = \frac{\int_0^L q(x,t)\theta_i(x)dx}{\int_0^L m_r \theta_i^2(x)dx}. \qquad (20)$$

С учетом условий ортогональности и нормирования (14) $M_i = 1$.

4. Решение временного уравнения

Подставляя (5) в уравнение (1) и принимая во внимание условия ортогональности и нормирования, получим уравнение для вычисления обобщенной координаты [2]:

$$\frac{d^2\varphi_i(t)}{dt^2}+\frac{c}{m_r}\frac{d\varphi_i(t)}{dt}+\ \lambda_i^2\varphi(t)=g_i(t)=\frac{Q_i(t)}{M_i}. \qquad (21)$$

4.1. Вычисление обобщенной силы

Для получения зависимости обобщенной силы от времени воспользуемся уравнениями (2), (15) и (18):

$$Q_i(t)= \int_0^L q(x,t)\theta_i(x)dx=\ \int_0^{u(t)} q_1\theta_i(x)\,dx+\int_{u(t)}^{u(t)+l} q_2\theta_i(x)dx=\ Q_i^{(1)}(t)+$$

$$+Q_i^{(2)}(t).$$

Тогда с учетом уравнения (15) получим:

$$Q_i^{(1)}(t)=\ \int_o^{u(t)} q_1(t)\frac{2}{\sqrt{m_rL}}[U(\beta_ix)-r_iV(\beta_ix)]dx=$$

$$=\frac{2q_1}{\sqrt{m_rL}}\frac{1}{\beta_i}[V(\beta_ix)-r_i\mathrm{S}(\beta_ix)]_0^{u(t)}=\frac{2q_1}{\sqrt{m_rL}}\frac{1}{\beta_i}\{V[\beta_iu(t)]-r_iS[\beta_iu(t)]+r_i\}.$$

$$Q_i^{(2)}(t)=\ \frac{2q_2}{\sqrt{m_rL}}\frac{1}{\beta_i}[V(\beta_ix)-r_i\mathrm{S}(\beta_ix)]_{u(t)}^{u(t)+l}=$$

$$=\frac{2q_2}{\sqrt{m_rL}}\frac{1}{\beta_i}\{V[\beta_i(u(t)+l)]-\ r_iS[\beta_i(u(t)+l)]-V[\beta_iu(t)]+r_iS[\beta_iu(t)]\}.$$

Окончательно:

$$Q_i(t)=\frac{2(q_1-q_2)}{\sqrt{m_rL}}\frac{1}{\beta_i}V[\beta_iu(t)]-\frac{2(q_1-q_2)}{\sqrt{m_rL}}\frac{r_i}{\beta_i}S[\beta_iu(t)]+$$

$$+\frac{2q_2}{\sqrt{m_rL}}\frac{1}{\beta_i}V[\beta_i(u(t)+l]-\frac{2q_2}{\sqrt{m_rL}}\frac{r_i}{\beta_i}S[\beta_i(u(t)+l)]+\frac{2q_1}{\sqrt{m_rL}}\frac{r_i}{\beta_i}=\frac{2}{\sqrt{m_rL}\beta_i}F_i(t), \qquad (22)$$

где

$F_i(t) = (q_1 - q_2)\{ V[\beta_i u(t)] - r_i S[\beta_i u(t)]\} + q_2 V[\beta_i (u(t) + l] -$
$-q_2 r_i S[\beta_i(u(t) + l)] + q_1 r_i.$ (23)

4.2. Получение зависимости обобщенной координаты от времени

С учетом (23) уравнение (21) запишется в следующем виде:

$$\frac{d^2\varphi_i(t)}{dt^2} + \frac{c}{m_r}\frac{d\varphi_i(t)}{dt} + \lambda_i^2\varphi(t) = g_i(t) = \frac{Q_i}{M_i} = \frac{2}{\sqrt{m_r L} M_i \beta_i} F_i(t) \quad (24)$$

с начальными условиями (из условий (4)):

при $t = 0$: $\varphi_i(0) = 0$ и $\frac{d\varphi_i(0)}{dt} = 0.$ (25)

Для получения решения уравнения (24) воспользуемся методом операционного исчисления. Изображение уравнения (24) запишется в следующем виде:

$$p^2[\mathrm{Y(p)} - \frac{1}{p}\varphi_i(0) - \frac{1}{p^2}\frac{d\varphi_i(0)}{dt}] + \frac{c}{m_r}p\left[Y(p) - \frac{1}{p}\varphi_i(0)\right] + \lambda_i^2 Y(p) = \frac{2}{\sqrt{m_r L}\, M_i\beta_i}\Psi(\mathrm{p}),$$

или с учетом начальных условий (25) и приведения подобных:

$$\mathrm{Y(p)} = \frac{2}{\sqrt{m_r L}\, M_i\beta_i}\Psi(\mathrm{p})\frac{1}{(p^2 + \frac{c}{m_r}p + \lambda_i^2)} = \frac{2}{\sqrt{m_r L}\, M_i\beta_i}\Psi(\mathrm{p})\frac{1}{(p + \frac{c}{2m_r})^2 + \gamma_i^2}, \quad (26)$$

где $\mathrm{Y(p)} \Rightarrow \varphi_i(t)$; $\Psi(p) \Rightarrow F_i(t)$, $\gamma_i = \sqrt{\lambda_i^2 - (\frac{c}{2m_r})^2}$. Знак $\Rightarrow$ означает, что *Y(p)* является изображением $\varphi_i(t)$, а *Ψ(p)* является изображением $F_i(t)$.

Перейдем к начальным функциям в предположении слабого демпфирования, то есть при условии, что $\gamma_i > 0$ или $0 < c < 2m_r\lambda_i$. По определению (8), $\lambda_i = \sqrt{\frac{EI}{m_r}\beta_i^4 + \frac{k_b}{m_r}}$. Наименьшей является величина λ_1. Тогда, если условие слабого демпфирования выполняется для λ_1 ($\gamma_1 > 0$, или $0 < c < 2m_r\lambda_1$), то оно автоматически выполняется для всех других λ_i при $i > 1$. Получим:

$$\varphi_i(t) = \frac{2}{M_i\beta_i\gamma_i\sqrt{m_r L}}\int_0^t F_i(\tau)e^{-\frac{c}{2m_r}(t-\tau)}\sin[\gamma_i(t-\tau)]\,d\tau. \quad (27)$$

Подставим выражение (23) в (27). Тогда:

$$\varphi_i(t) = \frac{2}{M_i\beta_i\gamma_i\sqrt{m_r L}}\sum_{j=1}^{5} I_{ji}, \qquad (28)$$

где:

$$I_{1i} = \int_0^t (q_1(\tau) - q_2(\tau))V[\beta_i u(\tau)]e^{-\frac{c}{2m_r}(t-\tau)}\sin[\gamma_i(t-\tau)]\,d\tau,$$

$$I_{2i} = -r_i\int_0^t [q_1(\tau) - q_2(\tau)]S[\beta_i u(\tau)]e^{-\frac{c}{2m_r}(t-\tau)}\sin[\gamma_i(t-\tau)]\,d\tau,$$

$$I_{3i} = \int_0^t q_2(\tau)V[\beta_i(u(\tau) + l]e^{-\frac{c}{2m_r}(t-\tau)}\sin[\gamma_i(t-\tau)]\,d\tau,$$

$$I_{4i} = -r_i\int_0^t q_2(\tau)S[\beta_i(u(\tau) + l)]e^{-\frac{c}{2m_r}(t-\tau)}\sin[\gamma_i(t-\tau)]\,d\tau,$$

$$I_{5i} = r_i\int_0^t q_1(\tau)e^{-\frac{c}{2m_r}(t-\tau)}\sin[\gamma_i(t-\tau)]\,d\tau.$$

Наконец, базируясь на принципе суперпозиции мод, колебание рельсов можно выразить как линейную комбинацию различных мод:

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty}\theta_i(x)\varphi_i(t). \qquad (29)$$

Выражение (29) определяет колебательные отклонения рельса при слабом демпфировании, когда якорь движется с переменной скоростью.

4.3. Перемещение якоря по длине канала

Перемещение якоря по длине канала определяется из второго закона Ньютона:

$$u(t) = u(0) + \frac{1}{m_a}\int_0^t dt\int_0^t [\frac{1}{2}L` i^2(\tau) - F_f]d\tau, \qquad (30)$$

где F_f – силы сопротивления, которые включают фрикционные и аэродинамические потери, m_a – масса якоря, L`- градиент индуктивности рельсов, $i(\tau)$ – ток в цепи ускорителя.

5. Численный пример

Как показал анализ, полностью повторить результаты работы [1] невозможно, так как в ней отсутствует информация о том, как вычисляются силы, действующие на рельсы (q_1 и q_2), и силы сопротивления, тормозящие якорь при движении по каналу (F_f), а также в явном виде не определена зависимость тока в цепи ускорителя от времени. Далее сравним результаты работы [1] с результатами наших расчетов и попытаемся понять, насколько они отличаются и по каким причинам.

5.1. Исходные данные

Рассмотрим пример из работы [1]. Как показано на рис. 2, для анализа выбран электромагнитный рельсовый ускоритель среднего калибра с каналом прямоугольной формы. Детальные параметры ускорителя перечислены в табл. 1. Типичная форма тока в цепи ускорителя показана на рис. 3.

Таблица 1. Параметры рассматриваемого ускорителя [1]

Параметр	Значение	Обозначение
s	50 мм	Расстояние между рельсами
h	40 мм	Ширина рельсов
b	20 мм	Толщина рельса
E	115 ГПа	Модуль упругости материала рельсов
I	1,07x10^{-7} м^4	Момент инерции поперечного сечения на изгиб
u_o	200 мм	Начальное положение якоря
k_b	10 ГПа	Коэффициент упругости основания
c	1,0x10^4 кг/(м с)	Коэффициент демпфирования на единицу длины
L	3 м	Длина рельсов
m_r	8 кг/м	Масса единицы длины рельса
L\`	0,45 мкГн/м	Градиент индуктивности рельсов
l	60 мм	Контактная длина якоря с рельсом
m_a	200 г	Масса якоря и нагрузки

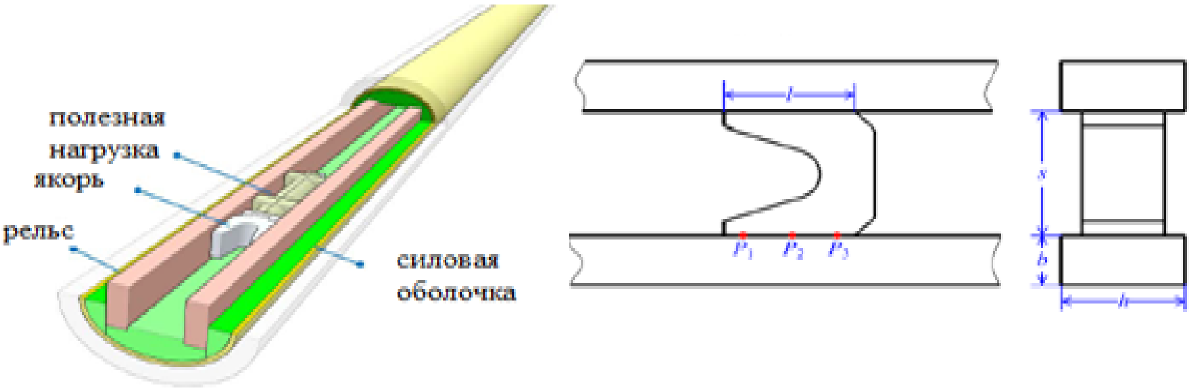


Рис. 2. Иллюстрация ускорителя с размерами рельсов и якоря [1].

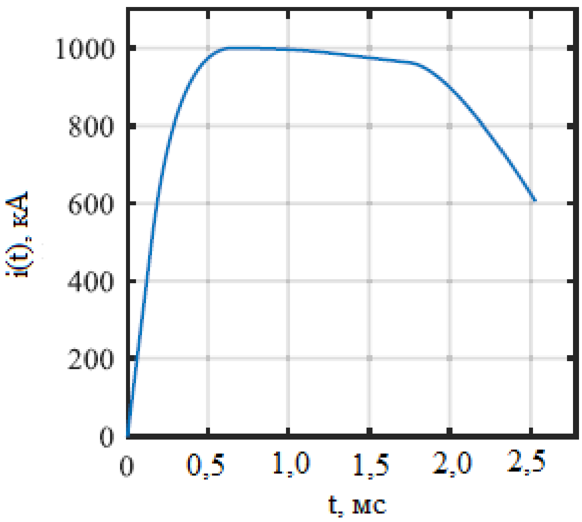


Рис. 3. Типичный профиль тока в цепи ускорителя [1].

Расталкивающую рельсы силу можно вычислить из соотношения, полученного для взаимодействия двух параллельных проводников при протекании по ним тока в противоположных направлениях [6]:

$$q_1 = \frac{\mu i^2}{\pi h} \arctan\left(\frac{h}{2(s+b)}\right), \quad (31)$$

где μ – магнитная проницаемость вакуума, h – средняя ширина рельса, $s+b$ – расстояние между центроидами (центрами фигуры, средними точками) рельсов (в нашем случае расстояние между центрами рельсов). Так как магнитная проницаемость вакуума $\mu = 4\pi 10^{-7}$ Гн/м, то выражение (31) можно записать в следующем виде:

$$q_1 = \frac{4i^2}{h}\arctan\left(\frac{h}{2(s+b)}\right)10^{-7}. \tag{32}$$

Сила, прижимающая лепестки якоря к рельсам (q_2), зависит от конструкции якоря, и для ее вычисления требуется рассмотрение детальной картины протекания тока в рельсах и якоре, что не входит в круг задач данной работы. Чаще всего ее принимают пропорциональной силе, расталкивающей рельсы: $q_2=mq_1$, где m – параметр. Далее примем, что $m = 1$.

5.2. Численная реализация аналитического решения

Программа расчетов написана на языке Python. Для математических функций применялась стандартная библиотека **numpy** [7]. Вычисление интеграла (27) производилось с помощью функции **integrate.quad** из библиотеки **scipy** [8]. Первые десять корней уравнения (11) находились методом деления отрезка пополам, остальные – из соотношения $\beta_i L = (i - ½)\,\pi$.

Профиль тока в цепи ускорителя аппроксимировался кусочно-линейной функцией следующего вида:

$$i(t) = \begin{cases} 2000\text{x}10^6 t, \text{при } 0 \le t < 0{,}0005 \text{ с}, \\ 1\text{x}10^6, \text{при } 0{,}0005\text{с} \le t < 0{,}0017c, \\ [1 - 500(t - 0{,}0017)]\text{x}10^6 \text{ при } 0{,}0017 \le t \le 0{,}0025 \text{ с}. \end{cases} \tag{33}$$

На рис. 4 приведено сравнение профилей тока, восстановленного из рис. 3 и полученного с помощью зависимости (33). Можно сделать вывод, что с помощью соотношения (33) удалось достаточно хорошо аппроксимировать приведенную в работе [1] кривую тока в цепи ускорителя – относительное среднеквадратичное отклонение ($\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}(1-\frac{i_j}{i_{j\text{р}}})^2}{n-1}}100\%$, где i_j – значение тока, восстановленное из рис. 3, а i_{jp} – вычисленное по соотношению (33); n –

количество точек, в которых производилось сравнение) σ = 3,64% для времени t > 0,5 мс, когда начинаются основные колебательные процессы.

В силу того, что ток в цепи аппроксимировался кусочно-линейной функцией, вычисление значений *q(t)* по соотношению (2) и положения якоря *u(t)* по соотношению (30) выполнялось аналитически. Сравнение вычисленных зависимостей скорости *v(t)* и положения *u(t)* якоря в процессе разгона с результатами работы [1] показано на рис. 5.

Анализ рис. 5 показывает, что форма кривых *v(t)* и *u(t)* и их значения в конце времени ускорения оказались близкими (относительные среднеквадратичные отклонения от восстановленных из рисунков работы [1] значений составили 3,01% и 8,83% для *v(t)* и *u(t)* соответственно), что позволяет перейти к дальнейшему качественному анализу результатов работы [1].

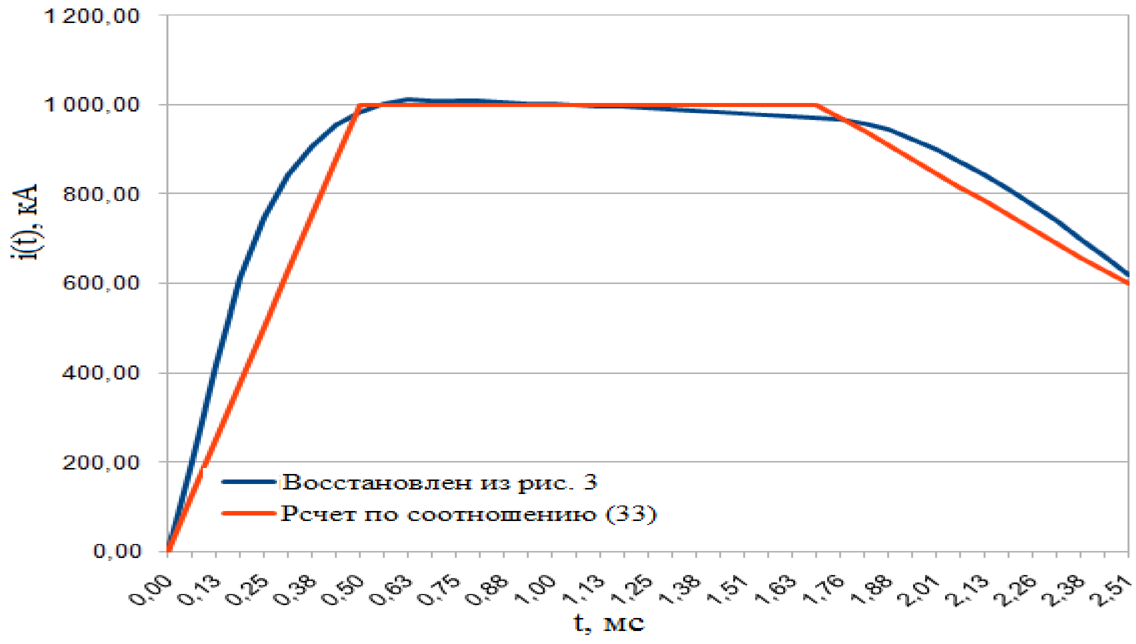


Рис. 4. Профили тока в цепи ускорителя.

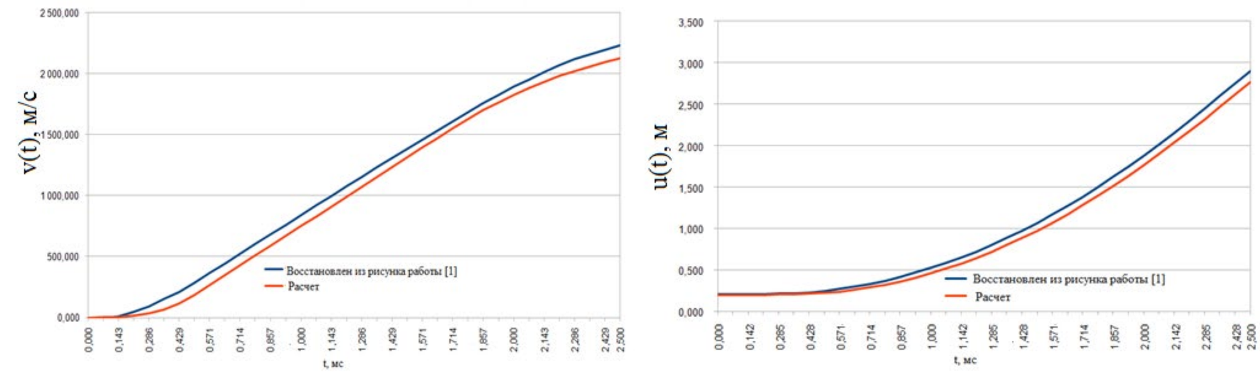


Рис. 5. Скорость (v) и перемещение (u) якоря по длине канала ускорителя.

5.3. Сравнение с результатами работы [1]

На рис. 6 и 7 сравниваются зависимости θ_i(x) и φ_i(t), полученные по выведенным выше соотношениям, с аналогичными результатами работы [1] для разных мод колебаний. Полученные численные результаты качественно близки к результатам работы [1] за исключением знака: в данной работе соотношение (15) записано в более традиционной форме [3], а в работе [1] выражение для формы колебаний записано с противоположным знаком. Чтобы облегчить восприятие результатов, знак θ_i(x) и φ_i(t) на рисунках изменен.

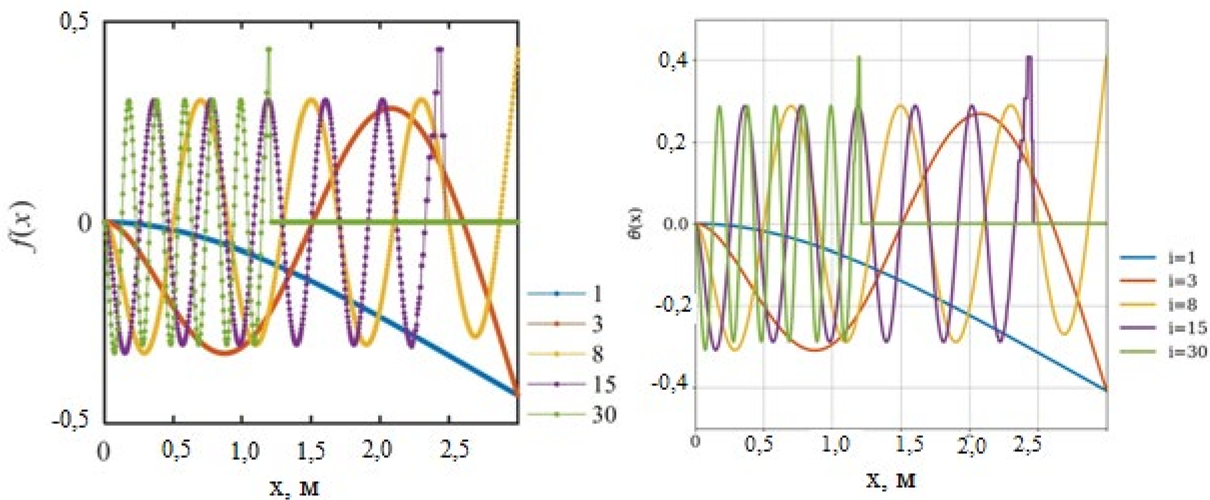


Рис. 6. Зависимость собственных форм колебаний от координаты и номера моды: слева – из работы [1], справа – результаты численного моделирования.

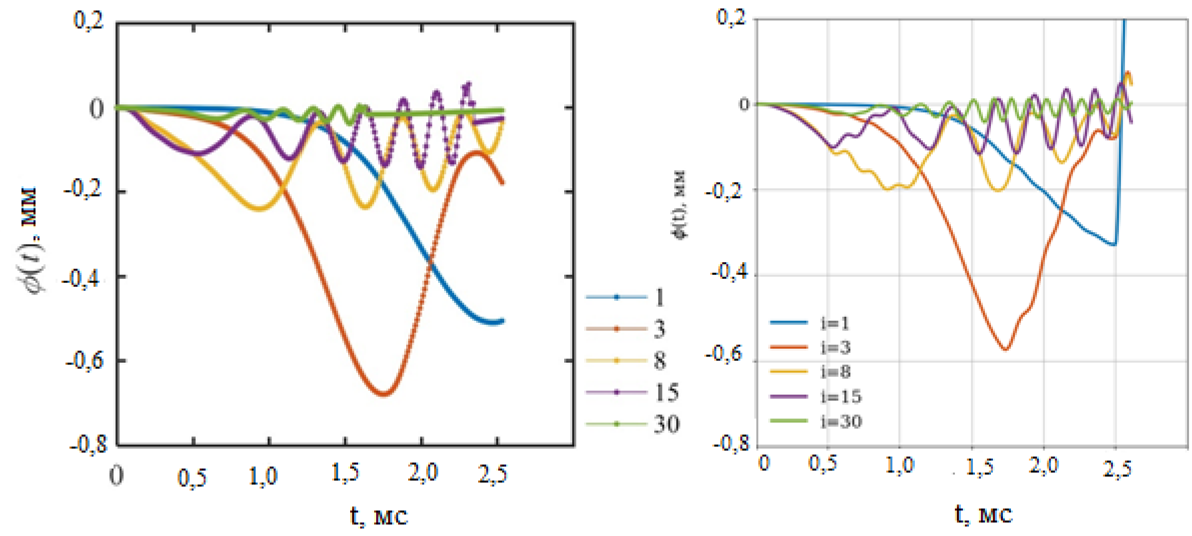


Рис. 7. Зависимость обобщенной координаты от времени и номера моды: слева – из работы [1], справа – результаты численного моделирования.

Необходимо обратить внимание на вид главных форм колебаний $\theta_i(x)$ для i = 15 и i = 30 на рис. 6: после определенного положения на оси x они достигают максимальной величины, слегка большей 0,4, после чего обращаются в нуль до конца траектории. С ростом номера моды точка максимума перемещается к началу балки. Таким образом, например, на функцию в точке x = 1,2 м моды с номером больше 30 влияния не оказывают. Причина такого поведения кроется в ограничениях представления чисел двойной точности стандарта IEEE 754 [9], согласно которым хранятся только 15-17 значащих десятичных цифр и, например, числа ~ 10^{15} (16 значащих десятичных цифр) уже представляются с точностью до единиц (без десятичных знаков), а ~ 10^{16} – до десятков. Таким образом, при вычислении функции $\theta_i(x)$, когда $e^{\beta_i x}$ превышает 10^{16}, вклад других слагаемых [$e^{-\beta_i x}$, $\cos(\beta_i x)$ и $\sin(\beta_i x)$] не учитывается, так как их величины не превышают единицы, а для учета требуются числа не менее десятка. Стоит отметить, что r_i по тем же самым причинам обращается в единицу для всех i, где возникает указанное выше влияние машинного представления чисел.

Оценки показывают, что критическая точка достигается при $\beta_i x \approx \ln(10^{16}) \approx 36{,}84$, что возникает на траектории движения уже при $i = 13$, так как $\beta_{13} L = 12{,}5\pi \approx 39{,}27$. Тогда при $i > 12$ для некоторых $x \in [0; L]$ $\theta_i(x) = \frac{2}{\sqrt{m_r L}}[U(\beta_i x) - r_i V(\beta_i x)] \approx \frac{2}{\sqrt{m_r L}}\left[e^{\beta_i x} - e^{\beta_i x}\right] \approx 0$ при вычислении со стандартной точностью.

Аналогичная ситуация возникает при вычислении функции $F_i(t)$ по соотношению (23), что влияет на получение значения обобщенной координаты (28).

На рис. 8 приведено сравнение динамики прогиба балки в некоторых точках вдоль ее длины, полученного из уравнения (29), с результатами работы [1]. Небольшие отличия амплитуды отклонения вызваны, на наш взгляд, различием в величинах приложенной силы q, связанным с погрешностью аппроксимации профиля тока в цепи ускорителя и неопределенностью ее выражения соотношением (32) и работы [1].

Таким образом, сравнение результатов, полученных в данной работе, с результатами работы [1] показало их качественное соответствие, а также выявило трудности расчетов при увеличении числа рассматриваемых мод.

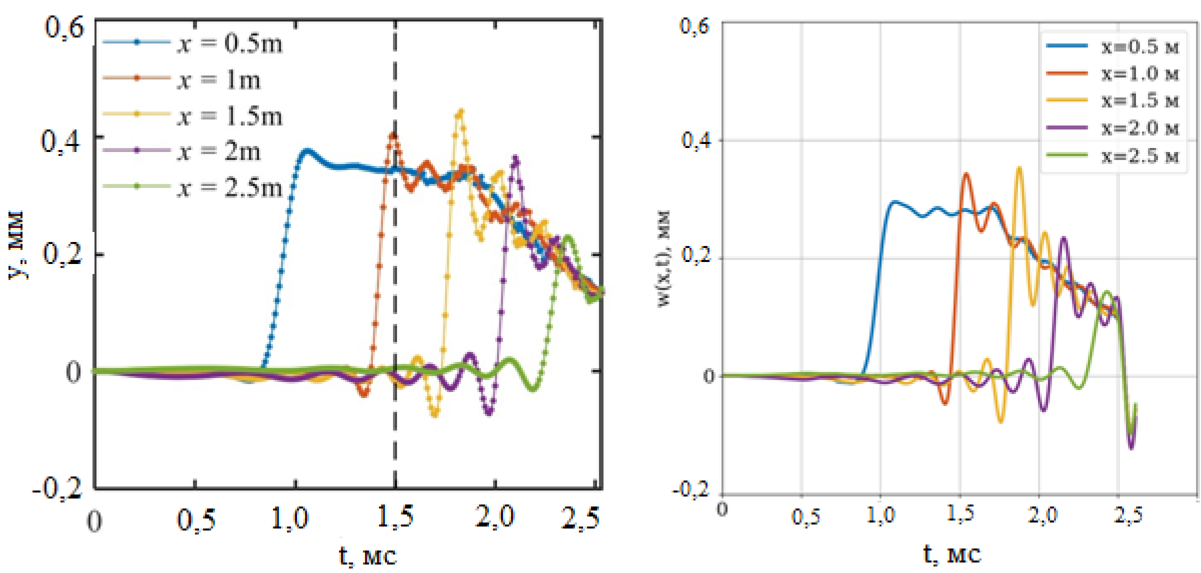


Рис. 8. Динамика величины прогиба в некоторых точках рельса: слева из работы [1], справа – результаты численного моделирования.

6. Повышение точности представления чисел при расчетах

Библиотека **mpmath** [10] для языка Python позволяет производить вычисления с заданной точностью. При этом время расчетов существенно возрастает.

С помощью данной библиотеки авторы выполнили приведенные выше расчеты с точностью 150 десятичных знаков, которая позволяет получить главные формы колебаний до 110-й моды без обнуления, так как $\beta_{110}L = 109{,}5\pi \approx 344 < \ln(10^{150}) \approx 345{,}39$.

На рис. 9 представлены зависимости главных форм колебаний, вычисленных со стандартной точностью (double) и с точностью 150 десятичных знаков. Видно, что при расчетах с повышенной точностью обнуление главных форм колебаний не происходит, а максимальные значения достигаются в конце траектории.

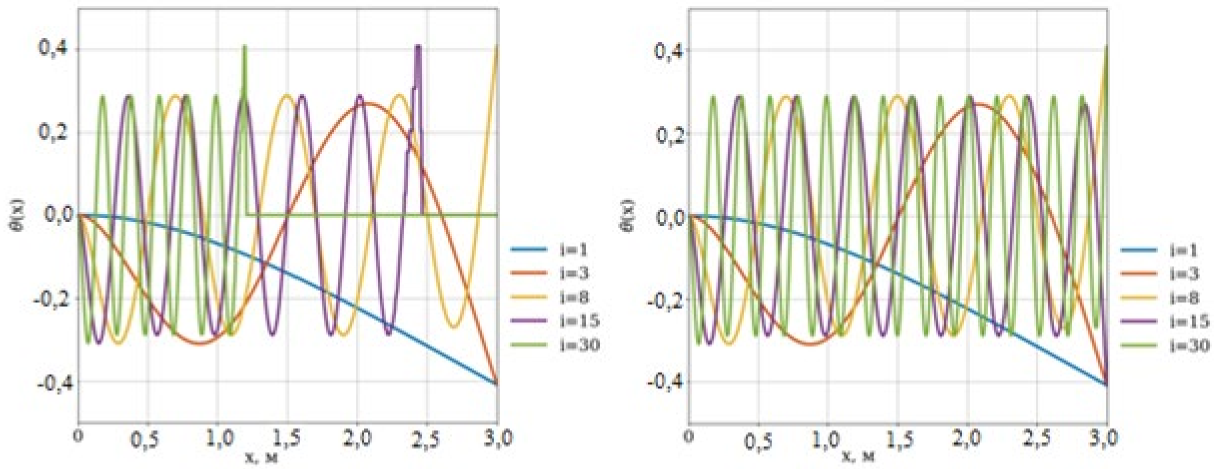


Рис. 9. Зависимость собственных форм колебаний от координаты и номера моды: слева – по стандарту IEEE 754 double, справа – с точностью 150 десятичных знаков.

На рис. 10 показано сравнение зависимостей обобщенной координаты, полученных при вычислении со стандартной точностью и с точностью 150 десятичных знаков. Также видны отличия в поведении старших мод, связанные с отсутствием обнуления при вычислении $F_i(t)$ по соотношению (23) с точностью 150 десятичных знаков.

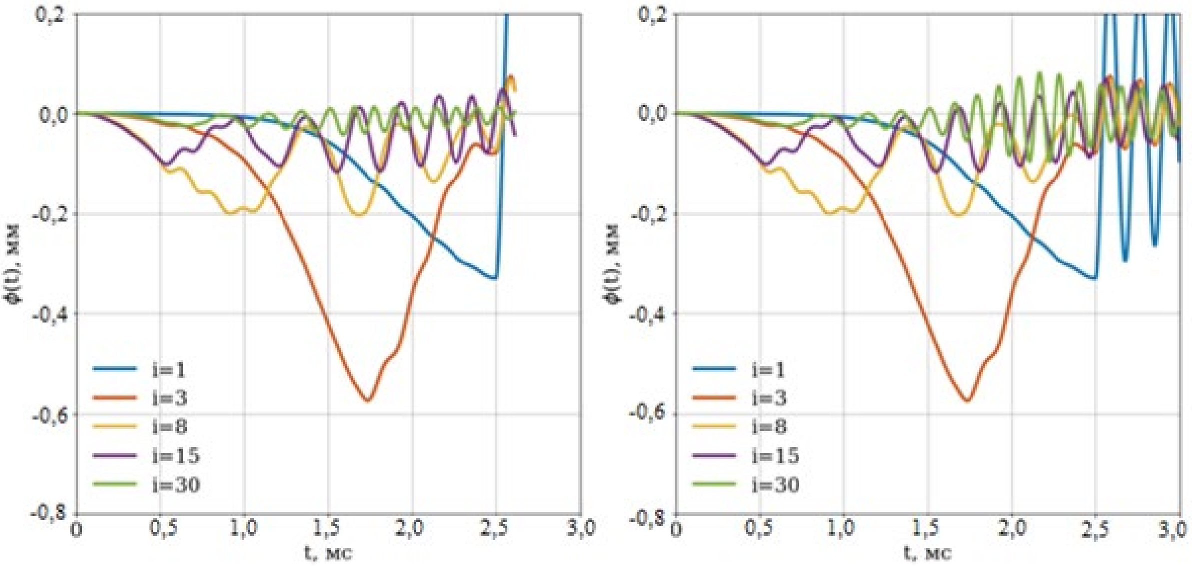


Рис. 10. Зависимость обобщенной координаты от времени и номера моды: слева – по стандарту IEEE 754 double, справа – с точностью 150 десятичных знаков.

Таким образом, вычисления со стандартной точностью не позволяют корректно решить исходную задачу. На рис. 11 приведено сравнение функции прогиба в некоторых точках рельса при вычислении с различной точностью. Видно, что форма функции прогиба качественно отличается в зависимости от точности вычислений. Так, максимальное значение амплитуды в рассматриваемых точках по длине канала превышает 0,4 мм и приходится на точку x =2,0 м для решения с повышенной точностью, в то время как при вычислении со стандартной точностью максимальная амплитуда не превышает 0,4 мм и приходится на точку x =1,5 м.

Одновременно с этим в работе [1] говорится, что если первая половина рельса подвергается воздействию колебаний с модами как низкого, так и высокого порядка, то вторая половина рельса подвергается воздействию колебаний с модами низкого порядка. Это утверждение неверно, так как оно базируется на неверном толковании результатов расчетов, связанных с необоснованным обнулением мод высокого порядка во второй половине рельса.

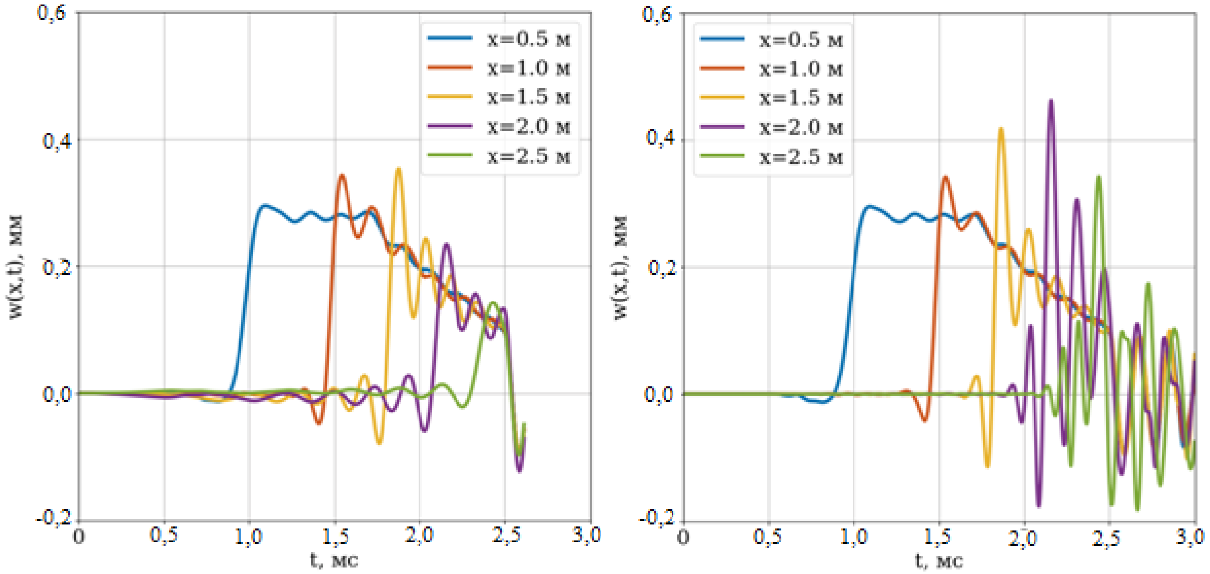


Рис. 11. Динамика величины прогиба в некоторых точках рельса для 60 мод: слева – по стандарту IEEE 754 double, справа – с точностью 150 десятичных знаков.

Для оценки зависимости погрешности численного решения от количества учитываемых мод вычислены значения максимальной абсолютной добавки следующих 10 мод (так как θ_i(x)*φ_i(t) частично компенсируются для соседних i, то рассматривается суммарно вклад 10 мод подряд) и максимального отклонения от наиболее точного решения (учитывающего 110 мод, которое считается «точным»). Функция вычислялась на равномерной сетке из 1000 точек; бралось максимальное значение из всех вычисленных. Результаты приведены в табл. 2. Видно, что при учёте 50 мод разница между вычисленным и «точным» значениями функции прогиба оказывается менее 0,01 мм, а при учете 70 мод — менее 0,001 мм. Для получения погрешности менее 0,0001 мм потребуется учитывать 100 мод.

Вычисления с повышенной точностью позволяют избежать трудностей учета большого количества мод, но требуют существенных затрат машинного времени. Так, на процессоре Intel Core i5-12400 вычисление 1000 точек φ_i для одного значения i при учете 150 знаков занимает около 1 часа, а с двойной точностью – около 10 сек.

Таблица 2. Зависимость разницы между вычисленным прогибом рельса для разного количества мод и «точным» решением от числа учитываемых мод

мод	максимальная суммарная добавка следующих 10 мод, мм						максимальное отличие от 110 мод, мм					
	x=0.5 м	x=1.0 м	x=1.5 м	x=2.0 м	x=2.5 м	max	x=0.5 м	x=1.0 м	x=1.5 м	x=2.0 м	x=2.5 м	max
10	$1\cdot10^{-1}$	$9\cdot10^{-2}$	$1\cdot10^{-1}$	$1\cdot10^{-1}$	$1\cdot10^{-1}$	**$1\cdot10^{-1}$**	$1\cdot10^{-1}$	$1\cdot10^{-1}$	$3\cdot10^{-1}$	$3\cdot10^{-1}$	$3\cdot10^{-1}$	**$3\cdot10^{-1}$**
20	$5\cdot10^{-2}$	$7\cdot10^{-2}$	$1\cdot10^{-1}$	$2\cdot10^{-1}$	$2\cdot10^{-1}$	**$2\cdot10^{-1}$**	$6\cdot10^{-2}$	$9\cdot10^{-2}$	$2\cdot10^{-1}$	$2\cdot10^{-1}$	$2\cdot10^{-1}$	**$2\cdot10^{-1}$**
30	$2\cdot10^{-3}$	$3\cdot10^{-2}$	$6\cdot10^{-2}$	$9\cdot10^{-2}$	$9\cdot10^{-2}$	**$9\cdot10^{-2}$**	$2\cdot10^{-2}$	$3\cdot10^{-2}$	$6\cdot10^{-2}$	$1\cdot10^{-1}$	$1\cdot10^{-1}$	**$1\cdot10^{-1}$**
40	$6\cdot10^{-3}$	$2\cdot10^{-2}$	$3\cdot10^{-2}$	$2\cdot10^{-2}$	$3\cdot10^{-2}$	**$3\cdot10^{-2}$**	$9\cdot10^{-3}$	$2\cdot10^{-2}$	$3\cdot10^{-2}$	$3\cdot10^{-2}$	$4\cdot10^{-2}$	**$4\cdot10^{-2}$**
50	$2\cdot10^{-3}$	$3\cdot10^{-3}$	$3\cdot10^{-3}$	$4\cdot10^{-3}$	$3\cdot10^{-3}$	**$4\cdot10^{-3}$**	$3\cdot10^{-3}$	$4\cdot10^{-3}$	$4\cdot10^{-3}$	$4\cdot10^{-3}$	$4\cdot10^{-3}$	**$4\cdot10^{-3}$**
60	$8\cdot10^{-4}$	$8\cdot10^{-4}$	$1\cdot10^{-3}$	$9\cdot10^{-4}$	$8\cdot10^{-4}$	**$1\cdot10^{-3}$**	$1\cdot10^{-3}$	$1\cdot10^{-3}$	$2\cdot10^{-3}$	$1\cdot10^{-3}$	$1\cdot10^{-3}$	**$2\cdot10^{-3}$**
70	$4\cdot10^{-4}$	$4\cdot10^{-4}$	$4\cdot10^{-4}$	$3\cdot10^{-4}$	$3\cdot10^{-4}$	**$4\cdot10^{-4}$**	$8\cdot10^{-4}$	$7\cdot10^{-4}$	$7\cdot10^{-4}$	$5\cdot10^{-4}$	$5\cdot10^{-4}$	**$8\cdot10^{-4}$**
80	$2\cdot10^{-4}$	$2\cdot10^{-4}$	$2\cdot10^{-4}$	$2\cdot10^{-4}$	$1\cdot10^{-4}$	**$2\cdot10^{-4}$**	$4\cdot10^{-4}$	$4\cdot10^{-4}$	$3\cdot10^{-4}$	$3\cdot10^{-4}$	$2\cdot10^{-4}$	**$4\cdot10^{-4}$**
90	$2\cdot10^{-4}$	$1\cdot10^{-4}$	$1\cdot10^{-4}$	$1\cdot10^{-4}$	$7\cdot10^{-5}$	**$1\cdot10^{-4}$**	$2\cdot10^{-4}$	$2\cdot10^{-4}$	$2\cdot10^{-4}$	$1\cdot10^{-4}$	$9\cdot10^{5}$	**$2\cdot10^{-4}$**
100	$7\cdot10^{-5}$	$7\cdot10^{-5}$	$7\cdot10^{-5}$	$5\cdot10^{-5}$	$4\cdot10^{-5}$	**$7\cdot10^{-5}$**	$7\cdot10^{-5}$	$7\cdot10^{-5}$	$7\cdot10^{-5}$	$5\cdot10^{-5}$	$4\cdot10^{-5}$	**$7\cdot10^{-5}$**

7. Модификация методики решения

Вернемся к уравнению (15) и оценим величину r_i, определенную соотношением (13) для различных величин $\beta_i L$. Оказалось, что величина r_i стремится к 1 при увеличении i и уже при i =3 величина r_i = 0,9992. Распишем более подробно выражение для r_i (13) и преобразуем его следующим образом:

$$r_i = \frac{ch(\beta_i L)+\cos(\beta_i L)}{sh(\beta_i L)+\sin(\beta_i L)} = 1 + \frac{ch(\beta_i L)+\cos(\beta_i L)-sh(\beta_i L)-\sin(\beta_i L)}{sh(\beta_i L)+\sin(\beta_i L)} =$$

$$= 1 + \frac{e^{-\beta_i L}+\cos(\beta_i L)-\sin(\beta_i L)}{\frac{e^{\beta_i L}-e^{-\beta_i L}}{2}+\sin(\beta_i L)} = 1 + \delta r_i. \qquad (34)$$

Для больших величин $\beta_i L$ знаменатель в выражении δr_i можно упростить и записать в следующем виде:

$$\frac{e^{\beta_i L}-e^{-\beta_i L}}{2} + \sin(\beta_i L) \approx \frac{1}{2} e^{\beta_i L}.$$

Тогда выражение для δr_i примет вид:

$$\delta r_i \approx 2e^{-\beta_i L}\left[e^{-\beta_i L} + \cos(\beta_i L) - \sin(\beta_i L)\right] = 2e^{-\beta_i L}R_i, \quad (35)$$

где $R_i = e^{-\beta_i L} + \cos(\beta_i L) - \sin(\beta_i L)$.

Отметим, что для i = 11 значение $\delta r_i < 10^{-14}$, а для i = 15 значение $\delta r_i < 10^{-19}$. Несмотря на малость величины δr_i ее необходимо учитывать для всех $i > 15$, так как при вычислении θ_i по соотношению (15) r_i умножается на величину $\sim e^{\beta_i x}$, что приводит к особенности расчетов при x, близких к L.

С учетом сказанного выше для больших i выражения (15) для θ_i и (23) для F_i можно упростить.

Из соотношений (9), (15) и (34) получим:

$$\theta_i(x) = \frac{2}{\sqrt{m_r L}}[U(\beta_i x) - r_i V(\beta_i x)] \approx \frac{2}{\sqrt{m_r L}}[U(\beta_i x) - V(\beta_i x) - \delta r_i V(\beta_i x)] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{m_r L}}\frac{1}{2}[ch(\beta_i x) - \cos(\beta_i x) - sh(\beta_i x) + \sin(\beta_i x) -$$

$$-\delta r_i sh\left(\beta_i x\right) + \delta r_i \sin(\beta_i x)] = \frac{1}{\sqrt{m_r L}}[\frac{e^{\beta_i x} + e^{-\beta_i x}}{2} - \cos\left(\beta_i x\right) -$$

$$-\frac{e^{\beta_i x} - e^{-\beta_i x}}{2} + \sin\left(\beta_i x\right) + \delta r_i \sin\left(\beta_i x\right) - \delta r_i \frac{e^{\beta_i x} - e^{-\beta_i x}}{2}] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{m_r L}}\left\{\left[e^{-\beta_i x} - \cos\left(\beta_i x\right) + \sin\left(\beta_i x\right)\right] + \delta r_i\left[\sin\left(\beta_i x\right) + \frac{1}{2}e^{-\beta_i x}\right] -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\delta r_i e^{\beta_i x}\right\} \approx \frac{1}{\sqrt{m_r L}}\left[e^{-\beta_i x} - \cos(\beta_i x) + \sin(\beta_i x) - e^{\beta_i (x-L)}R_i\right], \quad (36),$$

где вторым слагаемым пренебрегли ввиду его малости ($\sim 10^{-14}$ при $i > 10$).

Выражение (23) для вычисления $F_i(t)$ упрощается по аналогичной схеме и принимает следующий вид:

$$F_i(t) \approx q_1 - \frac{q_1 - q_2}{2}\left\{e^{-\beta_i u(t)} + \sin[\beta_i u(t)] + \cos[\beta_i u(t)] + e^{\beta_i (u(t) - L}R_i\right\} -$$

$$-\frac{q_2}{2}\left\{e^{-\beta_i [u(t)+l]} + \sin[\beta_i (u(t)+l)] + \cos[\beta_i (u(t)+l)] + e^{\beta_i (u(t)+l-L}R_i\right\}. \quad (37)$$

Стоит отметить, что добавление слагаемых с R_i в соотношение (37) имеет смысл, если выключение тока приходится на момент приближения якоря к дульному срезу (x близко к L).

Далее при вычислении θ_i и F_i для $i \le 10$ мы использовали выражения (15) и (23), а для $i > 10$ – выражения (36) и (37) соответственно. Остальные параметры принимались равными параметрам, взятым в приведенных выше расчетах.

На рис. 12 показано сравнение некоторых кривых, вычисленных по модифицированной методике со стандартной точностью, с результатами, полученными при расчетах по обычной методике с повышенной точностью (150 десятичных знаков). Можно видеть, что модифицированная методика дает достаточно хорошее приближение точных значений: абсолютное отклонение при вычислении θ_i менее 10^{-13}, при вычислении φ_i – менее 10^{-8}.

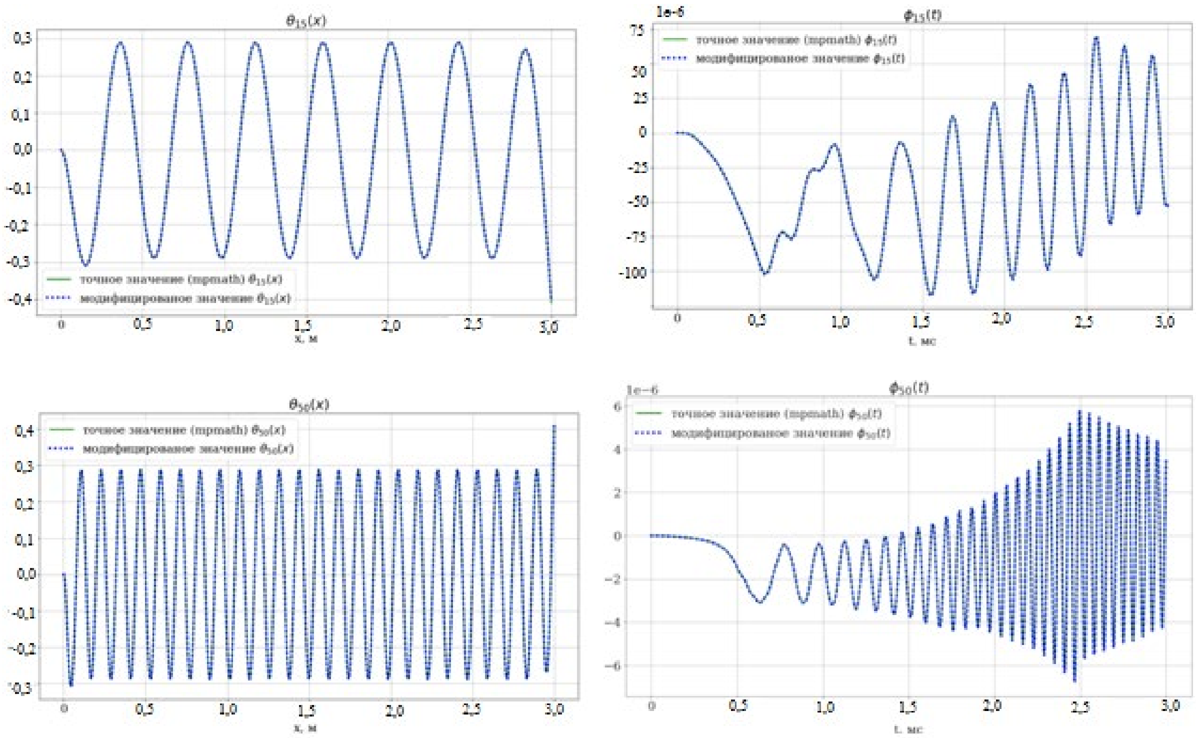


Рис. 12. Сравнение зависимостей, вычисленных по модифицированной методике со стандартной точностью, с результатами, полученными при расчетах по обычной методике с повышенной точностью (150 десятичных знаков).

На рис. 13 и 14 представлено сравнение зависимостей собственных форм и обобщенных координат, полученных по модифицированной методике при расчетах со стандартной точностью и обычной методике при расчетах с точностью 150 десятичных знаков. Результаты расчетов практически совпадают, а время вычисления 1000 точек для одной моды сокращается с примерно часа до 10 сек на процессоре Intel Core i5-12400.

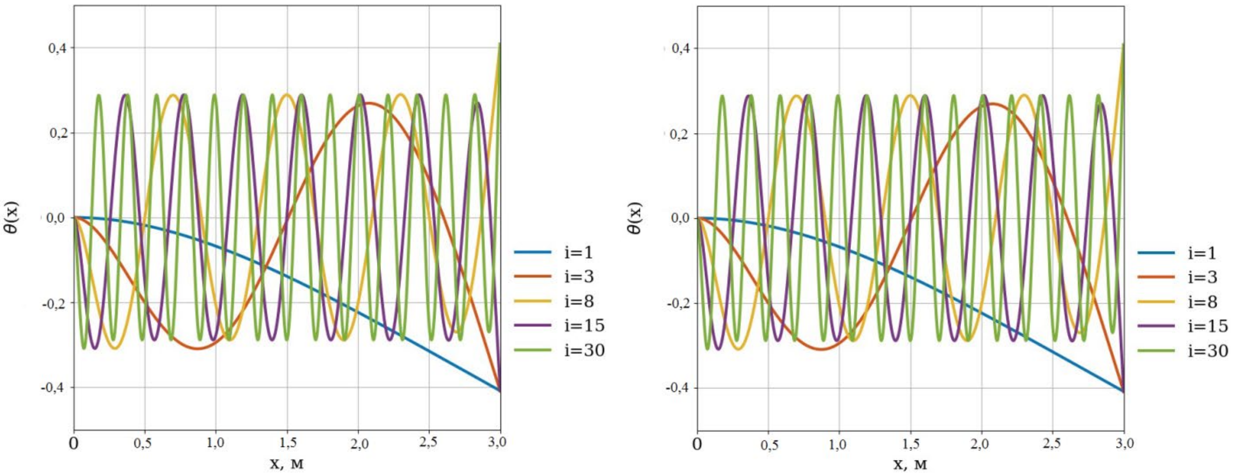


Рис. 13. Зависимость собственных форм колебаний от координаты и номера моды: слева расчеты по обычной методике с повышенной точностью, справа – по модифицированной методике со стандартной точностью.

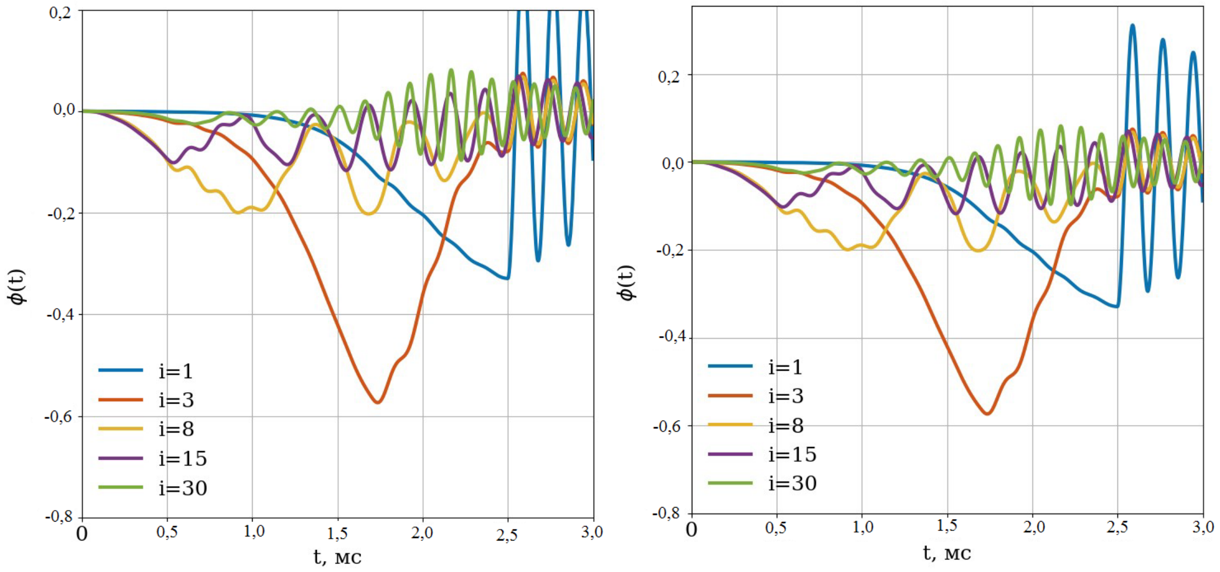


Рис. 14 Зависимость обобщенной координаты от времени и номера моды: слева расчеты по обычной методике с повышенной точностью, справа – по модифицированной методике со стандартной точностью.

При вычислениях значений прогиба балки по модифицированной методике, результаты которых представлены на рис. 15, учтено 80 мод. Видно, что результаты вычислений по модифицированной методике со стандартной точностью практически не отличаются от результатов вычислений по обычной методике с повышенной точностью как количественно, так и качественно. При этом вычисления по модифицированной методике проводятся значительно быстрее и без использования сторонних библиотек.

Таким образом, предложенная модифицированная методика позволяет обойти выявленные при применении обычной методики сложности вычисления гиперболических функций и учитывать необходимое количество мод колебаний на всей траектории движения якоря и, следовательно, повысить точность прогнозирования амплитуды и характера колебаний рельса в течение выстрела за разумное машинное время.

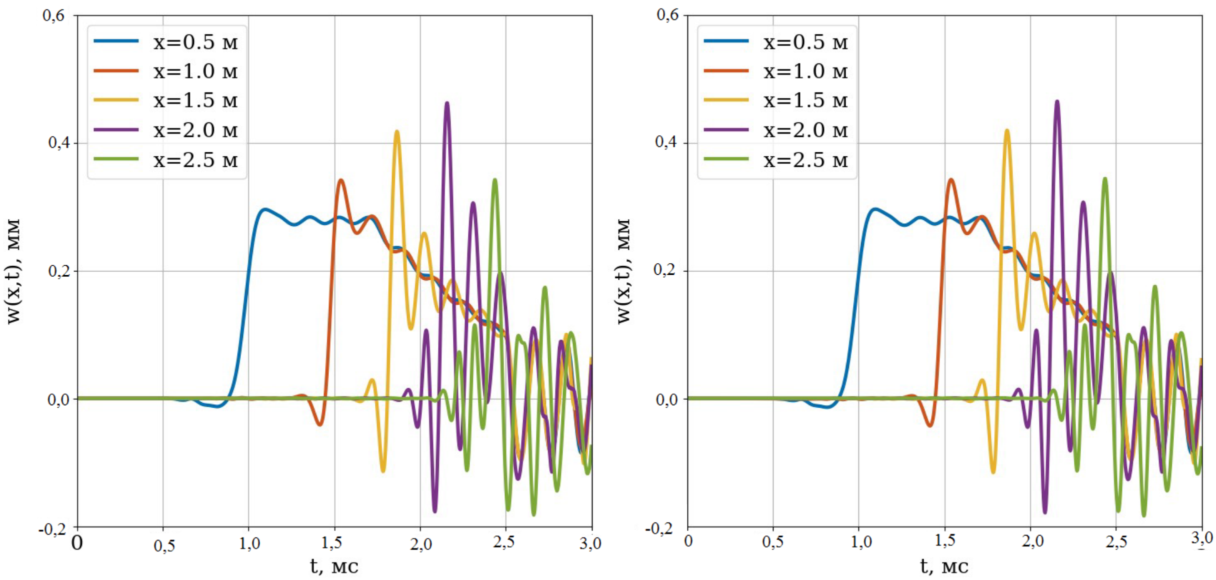


Рис. 15. Динамика величины прогиба в некоторых точках рельса для 80 мод: слева расчеты по обычной методике с повышенной точностью, справа – по модифицированной методике со стандартной точностью.

Заключение

В работе рассмотрено колебание рельсов ускорителя под действием электромагнитных сил. Якорь, а вместе с ним и правая граница приложения сил, движутся по каналу ствола. Каждый рельс моделируются консольной балкой Бернулли–Эйлера конечной длины на вязкоупругом основании Винклера. С помощью метода разложения по собственным формам получено аналитическое решение для колебаний рельса в процессе разгона метаемого тела с учетом изменения его скорости по длине канала ускорителя.

Показано, что результаты расчетов качественно совпадают с результатами работы [1]. Количественное совпадение трудно обеспечить в связи отсутствием в работе [1] информации о том, как вычисляются силы, действующие на рельсы (q_1 и q_2), и силы сопротивления, тормозящие якорь при движении по стволу (F_f), а также зависимости в явном виде изменения тока в цепи ускорителя от времени.

При численном моделировании выяснилось, что при расчетах возникают сложности, вызванные представлением чисел двойной точности в стандарте IEEE 754, что приводит к обрезанию высших форм колебаний. Выполненные вычисления с повышенной точностью (учет 150 десятичных знаков) подтвердили данное предположение. Получены оценки погрешности численного решения в зависимости от количества мод.

Предложен модифицированный метод расчета, учитывающий особенности поведения параметра r_i для $i > 10$, что позволило обойти выявленные при применении обычной методики сложности вычисления гиперболических функций и учитывать необходимое количество мод колебаний на всей траектории движения якоря и, таким образом, повысить точность прогнозирования амплитуды и характера колебаний рельса в процессе разгона.

Сравнение результатов, полученных по обычной методике со стандартной точностью, с результатами, полученными по модифицированной методике и обычной методике с повышенной точностью, показало, что учет высших форм колебаний качественно и количественно меняет результаты расчетов, особенно для второй части траектории движения якоря. Так, показано, что учет высших форм колебаний приводит к смещению положения максима амплитуды колебаний вниз по каналу при одновременном увеличении его величины, что позволит более корректно проводить проектирование рельсовых ускорителей.

Также предложенная модифицированная методика позволяет проводить тестирование и отладку численных методов решения более сложных задач.

Список литературы

1. Jinguo Wu, Bin Yang, Pan Zhou, Shaobo Wen, Qinghua Lin, “Dynamic response analysis of rails on viscoelastic support stimulated by superspeed moving loads” // IEEE Transactions on Plasma Science, vol. 50, no. 4, 2022, pp. 1018-1025. DOI: 10.1109/TPS.2022.3161317.

2. Стоценко А.А., Доценко С.И., Цимбельман Н.Я., Ченз Т., Руденко С. Курс теории сооружений. Строительная механика. Ч. 1. Теория сооружений в инженерном деле. Приложение 2. Нагрузка и оценка эксплуатационных качеств сооружений при динамических воздействиях землетрясений и ветра. - Владивосток: Изд-во ДВГТУ. 2007.-80 с.

3. Бабаков И.М. Теория колебаний. - М.: Наука. 1968.-560 с.

4. Ананьев И.В. Справочник по расчету собственных колебаний упругих систем. – М.; Л.: Гостехиздат. 1946. - 223 с.

5. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. Изд. 2-е переработанное. – М.: Машиностроение. 1970. - 736 стр.

6. Daneshjoo K., Rahimzadeh M., Ahmadi R., “Dynamic response and armature critical velocity studies in an electromagnetic railgun”// IEEE Transactions on Magnetics, 2007, vol. 43, no. 1, pp. 126-131. DOI: 10.1109/TMAG.2006.887668.

7. https://numpy.org.

8. https://scipy.org.

9. IEEE Standard for Binary Floating-Point Arithmetic/ Copyright 1985 by the IEEE, The 345 East 47th Street, New York, NY 10017, USA.

10. https://mpmath.org – библиотека Python для вычисления произвольной точности с плавающей запятой.

Оглавление

		Стр.
1	Введение	3
2	Постановка задачи	3
3	Решение однородного уравнения	5
4	Решение временного уравнения	8
4.1	Вычисление обобщенной силы	9
4.2	Получение зависимости обобщенной координаты от времени	9
4.3	Перемещение якоря по длине канала	11
5	Численный пример	11
5.1	Исходные данные	12
5.2.	Численная реализация аналитического решения	14
5.3.	Сравнение с результатами работы [1]	16
6	Повышение точности представления чисел при расчетах	19
7	Модификация методики решения	22
	Заключение	26
	Список литературы	28