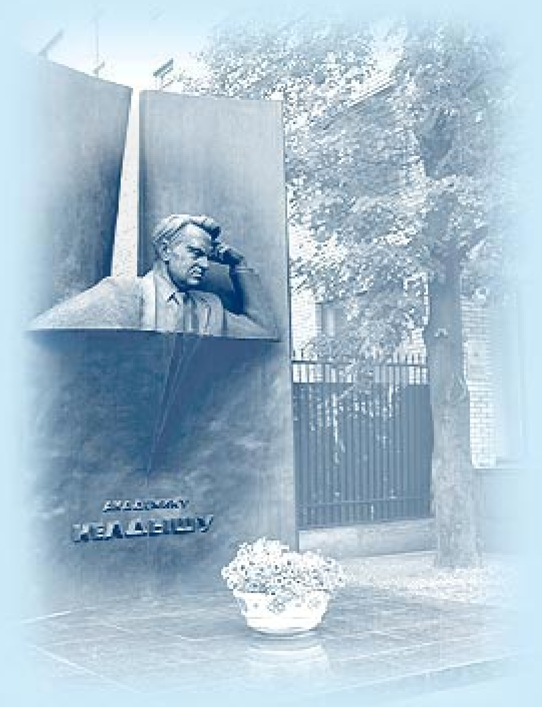
ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 45 за 2023 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

П.А. Кучугов, В.Ф. Тишкин

Частично усредненные уравнения Навье-Стокса

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Кучугов П.А., Тишкин В.Ф. Частично усредненные уравнения Навье-Стокса // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2023. № 45. 19 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2023-45
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2023-45

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

П.А. Кучугов, В.Ф. Тишкин

Частично усреднённые уравнения Навье-Стокса

Москва — 2023

П.А. Кучугов, В.Ф. Тишкин

Частично усреднённые уравнения Навье-Стокса

Течения, содержащие переход к турбулентности, присущи широкому кругу явлений и процессов, таких как взрывы сверхновых, горение газовых смесей, обтекание тел различной формы и т.п. Численное моделирование таких течений представляет существенный практический интерес и является сложной самостоятельной задачей. Для решения этой задачи существует несколько основных подходов в вычислительной гидродинамике, имеющих свою область применимости, достоинства и недостатки. Так, прямое численное моделирование (DNS) и метод крупных вихрей (LES/ILES) являются оптимальными подходами для описания течений, в которых происходит переход к турбулентности, т.к. они разрешают широкий диапазон масштабов течения, но при этом требуют значительных вычислительных ресурсов за счёт использования подробных сеток. Подходы на основе усреднённых уравнений Навье-Стокса (RANS) используют полностью стохастическое описание турбулентности и обладают существенно более низкой вычислительной стоимостью. При этом они позволяют описывать только установившиеся или медленно меняющиеся течения. Возможной альтернативой являются гибридные методы, призванные объединить достоинства DNS/LES и RANS.

В данной работе рассматривается гибридный подход на основе частично усреднённых уравнений Навье-Стокса (PANS), обеспечивающий бесшовный переход от RANS к DNS/LES. Приводится детальный вывод соответствующей системы уравнений и теоретические оценки, характеризующие возможности подхода.

Ключевые слова: частично усреднённые уравнения Навье-Стокса, турбулентность, переходные течения

Pavel Aleksandrovich Kuchugov, Vladimir Fedorovich Tishkin

Partially averaged Navier-Stokes equations

Flows containing a transition to turbulence are inherent in a wide range of phenomena and processes, such as supernova explosions, combustion of gas mixtures, flow around bodies of various shapes, etc. Numerical simulation of such flows is of significant practical interest and is a complex independent task. To solve this problem, there are several main approaches in computational fluid dynamics, which have their own area of applicability, advantages and disadvantages. Thus, direct numerical simulation (DNS) and the large eddy simulation method (LES/ILES) are optimal approaches for describing flows in which there is a transition to turbulence, since they resolve a wide range of flow scales, but at the same time require significant computational resources due to the use of fine grids. Approaches based on the Reynolds Averaged Navier-Stokes equations (RANS) use a completely stochastic description of turbulence and have a significantly lower computational cost. At the same time, they allow one to describe only steady or slowly changing flows. A possible alternative is hybrid methods that combine the strengths of DNS/LES and RANS.

In this paper, it is considered a hybrid approach based on partially averaged Navier-Stokes equations (PANS), which provides a seamless transition from RANS to DNS/LES. A detailed derivation of the corresponding system of equations and theoretical estimates characterizing the possibilities of the approach are given.

Key words: partially averaged Navier-Stokes equations, turbulence, transitional flow

Оглавление

Введение

Современные задачи требуют аккуратного учёта всех особенностей возникающих течений при сохранении доступной вычислительной стоимости таких расчётов. Этого возможно добиться, объединяя достоинства отдельных подходов, использующихся для моделирования турбулентных течений, в частности RANS и LES. RANS подход снижает вычислительные затраты за счёт возможности использования грубых сеток, LES подход обеспечивает высокое разрешение турбулентного течения, где это необходимо. На текущий момент уже существует некоторое число таких гибридных подходов. Среди них можно выделить DES [1, 2], VLES [3], LMS (limited numerical scales) [4] и некоторые другие. Все эти подходы основаны на переходе между RANS и LES и используют соответствующие функции контроля пространственного разрешения, зависящие от характерного размера ячейки численной сетки и масштаба турбулентных пульсаций. Так, в VLES таким образом модифицируется выражение для турбулентной вязкости, а для замыкания используется какая-либо модель турбулентности. LMS является по сути разновидностью VLES со своей ограничивающей турбулентную вязкость константой. В DES используется переключение между моделью турбулентности и соответствующей подсеточной моделью при удалении от стенки. Наряду с этими подходами существуют и другие гибридные подходы, например зонные, в которых определение областей использования того или иного подхода происходит априорным способом и требует согласование турбулентных величин на границах зон. В работе [5] был предложен ещё один поход (PANS) контроля разрешения модели за счёт введения соответствующих коэффициентов для каждой из турбулентных величин. В отличие от других гибридных подходов, PANS подход призван избавиться от пространственной зависимости границы переключения между RANS и LES, оперируя отношениями турбулентных величин, определяемых подсеточной моделью, к их полным значениями, полученных с использованием базовой модели турбулентности. Несмотря на то что в литературе встречаются примеры использования этого подхода [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11], многие выкладки, необходимые для получения соответствующих замыкающих уравнений, опущены, что затрудняет анализ возможностей подхода и области его применимости на основе сделанных при выводе допущений. В данной работе восстановлены все искомые уравнения, что облегчит использование PANS подхода другими исследователями.

Система уравнений Навье-Стокса

В качестве отправной точки выступает система уравнений Навье-Стокса для сжимаемого многокомпонентного теплопроводного газа. Приведём её здесь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\rho + \dfrac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \dfrac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) = -\dfrac{\partial p}{\partial x_i} + \dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \dfrac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i E + p v_i) = \dfrac{\partial}{\partial x_i}(v_j \sigma_{ij} - q_i), \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho C_\alpha) + \dfrac{\partial}{\partial x_i}(\rho C_\alpha v_i) = 0, \\ p = p(\rho, \varepsilon), \end{cases} \tag{1}$$

где

$$\sigma_{ij} = 2\mu\left(S_{ij} - \frac{1}{3}S_{kk}\delta_{ij}\right) \tag{2}$$

– тензор вязких напряжений, $S_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$ – симметричный тензор скоростей деформации, μ – коэффициент динамической вязкости. Остальные величины суть $E = \varepsilon + \dfrac{1}{2}v_k v_k$ – полная удельная энергия, ε – удельная внутренняя энергия, p – давление, ρ – плотность, v_i – компоненты скорости, C_α – массовая концентрация, q_i – поток тепла, в диффузионном приближении имеем $q_i = -\kappa(\rho, T)\dfrac{\partial T}{\partial x_i}$. По повторяющимся индексам здесь и далее предполагается проведение суммирования.

Усреднение уравнений Навье-Стокса

Существует несколько подходов к усреднению уравнений Навье-Стокса. Эти подходы включают статистическое усреднение по ансамблю реализаций, усреднение по времени или же по пространству. Во всех случаях возможно получить структурно схожие уравнения, что допускает возможность предельных переходов между ними, однако существенно отличающиеся смыслом величин, используемых для описания турбулентного течения.

Поскольку гибридные методы подразумевают переключение между подходами, предварительно необходимо привести варианты усреднённых уравнений Навье-Стокса.

Нестационарные уравнения Навье-Стокса, усреднённые по Рейнольдсу (URANS)

Следуя идеям Рейнольдса [12], рассмотрим линейный оператор усреднения $f \rightarrow \overline{f}$, для которого выполнено равенство $\overline{\overline{f}g} = \overline{f}\overline{g}$, называемое условием Рейнольдса. f и g здесь характеристики течения, которые можно представить в виде суммы усреднённой $\overline{f}$ и пульсационной f' составляющих, т.е. $f = \overline{f} + f'$ и $g = \overline{g} + g'$. Также потребуем, чтобы в случае $f \equiv 1$ $\overline{f} = f$. Данное дополнительное условие будет гарантировать, что любая константа α не будет меняться при операции усреднения, т.е. $\overline{\alpha} = \alpha$. Используя обозначенные свойства, можно показать, что такой оператор будет коммутировать с пространственными и временными производными: $\overline{\dfrac{\partial f}{\partial x}} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\overline{f\,(x + \Delta x)} - \overline{f\,(x)}}{\Delta x} = \dfrac{\partial \overline{f}}{\partial x}$ и $\overline{\dfrac{\partial f}{\partial t}} = \dfrac{\partial \overline{f}}{\partial t}$. Кроме того, можно получить следующие свойства оператора усреднения, которые позволяют существенно упростить усреднённые уравнения: $\overline{f'} = 0$, $\overline{\overline{f}} = \overline{f}$ и $\overline{fg} = \overline{f}\,\overline{g} + \overline{f'g'}$. Данная процедура приводит к хорошо известным уравнениям Навье-Стокса, усреднённым по Рейнольдсу (RANS) [13].

При усреднении по Рейнольдсу сжимаемых уравнений Навье-Стокса возникают дополнительные члены, требующие априорного определения, связанные с корреляциями плотности с другими характеристиками течения. В этом случае удобным приёмом является использование взвешенного среднего, называемого усреднением по Фавру [14], для некоторых переменных. Будем обозначать усреднение по Фавру через $\widehat{(\ldots)}$. По определению $\hat{f} = \overline{\rho f}/\overline{\rho}$. Характеристики течения в свою очередь также можно представить в виде суммы $f = \hat{f} + f''$ средней и пульсационной составляющей. Запишем здесь полезные свойства усреднения по Фавру, следующие из условий Рейнольдса:

$$\overline{\hat{f}} = \hat{f}\,, \tag{3}$$

$$\overline{\rho\hat{f}} = \overline{\rho\overline{\hat{f}}} = \overline{\rho}\,\overline{\hat{f}} = \overline{\rho}\hat{f}\,, \tag{4}$$

$$\overline{\rho f''} = 0 \,\text{или}\, \hat{f}'' = 0\,. \tag{5}$$

Используя (3) – (5), можно показать, что

$$\overline{\rho\hat{f}g''} = \overline{\rho g''\overline{\hat{f}}} = \overline{\rho g''}\hat{f} = 0 \tag{6}$$

и

$$\overline{\rho\hat{f}\hat{g}} = \overline{\rho\overline{\hat{f}}\,\overline{\hat{g}}} = \overline{\rho\overline{\overline{\hat{f}}\,\overline{\hat{g}}}} = \overline{\rho}\,\overline{\overline{\hat{f}}\,\overline{\hat{g}}} = \overline{\rho}\,\overline{\hat{f}}\,\overline{\hat{g}} = \overline{\rho}\hat{f}\hat{g}\,. \tag{7}$$

Такой подход приводит к компактной записи усреднённых уравнений Навье-Стокса.

Таким образом можно получить следующую систему [14, 13]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\overline{\rho} + \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{\rho}\hat{v}_i\right) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\overline{\rho}\hat{v}_i\right) + \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho}\hat{v}_i\hat{v}_j + \overline{p}\delta_{ij}\right) = \dfrac{\partial\overline{\sigma_{ij}}}{\partial x_j} - \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho v_i'' v_j''}\right), \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\overline{\rho}\hat{E}\right) + \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{\rho}\hat{v}_i\hat{E} + \overline{p}\hat{v}_i + \overline{v_i''\left(\rho\varepsilon'' + p'\right)} + \hat{v}_k\overline{\rho v_k'' v_i''} + \dfrac{1}{2}\overline{\rho v_k'' v_k'' v_i''}\right) = \\ = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\hat{v}_j\overline{\sigma_{ij}} + \overline{v_j''\sigma_{ij}} - \overline{q_i}\right), \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\overline{\rho}\hat{C}_\alpha\right) + \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{\rho}\hat{C}_\alpha\hat{v}_i\right) = 0, \\ p = p\left(\overline{\rho}, \hat{\varepsilon}\right)\ , \end{cases} \tag{8}$$

где

$$\overline{\sigma_{ij}} = \overline{2\mu\left(S_{ij} - \frac{1}{3}S_{kk}\delta_{ij}\right)}\,. \tag{9}$$

Пренебрегая флуктуациями вязкости ($\mu' \ll \overline{\mu}$), (9) можно записать в виде:

$$\overline{\sigma_{ij}} \approx 2\overline{\mu}\left(\overline{S_{ij}} - \frac{1}{3}\overline{S_{kk}}\delta_{ij}\right)\,. \tag{10}$$

Тензор (10) выражается в терминах усреднённых по Рейнольдсу компонент скорости, в то время как для дальнейшего использования системы (8) его компоненты необходимо выразить через усреднённые по Фавру компоненты скоростей. Для этих целей необходимо сделать дополнительные предположения [15]. Используя выражение $\overline{\rho}\hat{f} = \overline{\rho}\overline{f} + \overline{\rho' f'}$, для отношения усреднённых скоростей получим

$$\frac{\hat{v}_i}{\overline{v_i}} = 1 + \frac{\overline{\rho' v_i'}}{\overline{\rho}\,\overline{v_i}}\,. \tag{11}$$

Полагая отношение $\dfrac{\overline{\rho' v_i'}}{\overline{\rho}\,\overline{v_i}} \ll 1$, что подтверждается прямыми численными расчётами [16], для $\overline{\sigma_{ij}}$ можно записать

$$\overline{\sigma_{ij}} \approx 2\overline{\mu}\left(\hat{S_{ij}} - \frac{1}{3}\hat{S_{kk}}\delta_{ij}\right) \approx 2\hat{\mu}\left(\hat{S_{ij}} - \frac{1}{3}\hat{S_{kk}}\delta_{ij}\right)\,. \tag{12}$$

Последнее приближённое равенство обусловлено необходимостью использования зависимости вязкости от температуры, а именно взвешенной средней температуры. Следуя рассуждениям, использовавшимся выше, при условии, что $\dfrac{\overline{\rho' T'}}{\overline{\rho}\,\overline{T}} \ll 1$, для усреднённого потока тепла можно записать

$$\overline{q_i} = -\overline{\kappa\frac{\partial T}{\partial x_i}} \approx -\hat{\kappa}\frac{\partial\hat{T}}{\partial x_i}\,. \tag{13}$$

Тензор $-\overline{\rho v_i'' v_j''} \equiv R_{ij}$ называется тензором Рейнольдса. Следуя гипотезе Буссинеска, для тензора Рейнольдса по аналогии с обычной молекулярной вязкостью можно записать

$$R_{ij} = 2\mu_t \left(\hat{S_{ij}} - \frac{1}{3}\hat{S_{kk}}\delta_{ij} \right) - \frac{2}{3}\overline{\rho} k \delta_{ij}, \tag{14}$$

μ_t – турбулентная вязкость, определяемая моделью турбулентности. След тензора Рейнольдса определяет величину турбулентной кинетической энергии, $k = -\frac{1}{2}\frac{1}{\overline{\rho}}R_{kk}$. Для полной усреднённой энергии имеем $\overline{\rho}\hat{E} = \overline{\rho}\left(\hat{\varepsilon} + \frac{1}{2}\hat{v}_k\hat{v}_k\right) + \overline{\rho}k$. Остальные корреляционные члены можно записать в градиентном приближении в соответствии с их физическим смыслом:

$$\overline{v_i'' \left(\rho \varepsilon'' + p'\right)} \approx -\frac{C_p \mu_t}{Pr_t}\frac{\partial \hat{T}}{\partial x_i}\,, \tag{15}$$

$$\overline{v_j'' \sigma_{ij}} - \frac{1}{2}\overline{\rho v_k'' v_k'' v_i''} \approx \left(\hat{\mu} + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_i}\,, \tag{16}$$

$Pr_t = \dfrac{C_p \mu_t}{\kappa_t}$ – турбулентное число Прандтля, $Pr_t \approx 0.7 - 1.0$ для большинства жидкостей, $Pr_t = 0.85$ часто используется как значение по умолчанию [17].

Данная система уравнений замыкается выбранной моделью турбулентности. Для определённости будем использовать стандартную $k - \epsilon$ модель [18], уравнения которой записываются следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\overline{\rho} k\right) + \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{\rho} k \hat{v}_i\right) = P_k - \overline{\rho}\epsilon + T_k, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\overline{\rho}\epsilon\right) + \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{\rho}\epsilon \hat{v}_i\right) = C_{1\epsilon} P_k \dfrac{\epsilon}{k} - C_{2\epsilon}\dfrac{\overline{\rho}\epsilon^2}{k} + T_\epsilon, \end{cases} \tag{17}$$

где ϵ – скорость диссипации турбулентной кинетической энергии, P_k – генерационный член:

$$P_k = R_{ij}\frac{\partial \hat{v}_i}{\partial x_j}\,, \tag{18}$$

$$\mu_t = \overline{\rho} C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}\,, \tag{19}$$

T_k и T_ϵ – турбулентный перенос и диффузия:

$$T_k = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left(\hat{\mu} + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_i}\right)\,, \tag{20}$$

$$T_\epsilon = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left(\hat{\mu} + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon}\right)\frac{\partial \epsilon}{\partial x_i}\right)\,, \tag{21}$$

$\hat{\mu}$ – усреднённая динамическая вязкость. Наиболее часто используемые значения настроечных параметров, позволяющие в достаточной степени воспроизводить результаты экспериментов в ударных трубах, суть $C_\mu = 0.09$, $\sigma_k = 1$, $\sigma_\epsilon = 1.3$, $C_{1\epsilon} = 1.44$, $C_{2\epsilon} = 1.92$.

Частично усреднённые уравнения Навье-Стокса

Достаточно понятным является тот факт, что мало какие операторы усреднения удовлетворяют условиям Рейнольдса, которые использовались в предыдущем разделе, в силу конечности временных интервалов и пространственных масштабов в численных расчётах. Следующим шагом рассмотрим оператор фильтрации достаточно общего вида [19]. Через $\langle \ldots \rangle$ будем обозначать усреднённое значение величины f: $\langle f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}', t-t^{'}\right) f\left(\boldsymbol{r}', t'\right) dt' d\boldsymbol{r}'$, где G – свёрточное ядро, характеризующее временной и пространтственный масштабы используемого фильтра, являющееся в свою очередь гладкой дифференцируемой функцией. Кроме того, $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G\left(\boldsymbol{r}', t^{'}\right) dt' d\boldsymbol{r}' = 1$, что обеспечивает сохранение констант при таком преобразовании. В силу линейности имеем $\langle f+g \rangle = \langle f \rangle + \langle g \rangle$ и $\langle \alpha f \rangle = \alpha \langle f \rangle$, α – скалярная константа. Также из определения следует, что данный оператор коммутирует с временными и пространственными производными, т.е. $\left\langle \frac{\partial}{\partial t} f \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t}\langle f \rangle$ и $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} f \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x_i}\langle f \rangle$. Через $\widetilde{(\ldots)}$ будем обозначать взвешенное среднее: $\widetilde{f} = \frac{\langle \rho f \rangle}{\langle \rho \rangle}$.

Применим данный оператор последовательно к уравнениям системы (1). Следует отметить, что при этом из-за невыполнения условий Рейнольдса будет возникать множество дополнительных корреляционных членов. Эти члены удаётся сгруппировать, записывая уравнения в терминах обобщённых корреляционных моментов различных порядков [19], которые мы будем вводить по мере необходимости в последующем изложении. Для уравнения сохранения массы имеем

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}\rho \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho v_i\right) \right\rangle = 0, \tag{22}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle \rho \rangle + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\langle \rho \rangle \widetilde{v_i}\right) = 0\,. \tag{23}$$

Уравнение сохранения импульса перепишется следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\langle \rho \rangle \widetilde{v_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\langle \rho v_i v_j \rangle + \langle p \rangle \delta_{ij}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\langle \sigma_{ij} \rangle\,. \tag{24}$$

$$\langle \rho v_i v_j \rangle = \langle \rho \rangle \widetilde{v_i}\widetilde{v_j} + \langle \rho \rangle \widetilde{v_i v_j} - \langle \rho \rangle \widetilde{v_i}\widetilde{v_j} = \langle \rho \rangle \left(\widetilde{v_i}\widetilde{v_j} + \tau_1\left(v_i, v_j\right)\right), \tag{25}$$

где $\tau_1(f,g) = \widetilde{fg} - \widetilde{f}\widetilde{g}$. Тогда (24) перепишется в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\langle\rho\rangle\widetilde{v_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\langle\rho\rangle\widetilde{v_i}\widetilde{v_j} + \langle p\rangle\delta_{ij}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\langle\rho\rangle\tau_1(v_i,v_j)\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\langle\sigma_{ij}\rangle\ , \tag{26}$$

где

$$\langle\sigma_{ij}\rangle \approx 2\widetilde{\mu}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\widetilde{v_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial\widetilde{v_i}}{\partial x_j}\right) - \frac{1}{3}\frac{\partial\widetilde{v_k}}{\partial x_k}\delta_{ij}\right)\ . \tag{27}$$

Отфильтрованное уравнение сохранения энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\langle\rho\rangle\widetilde{E}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\langle\rho v_i E + p v_i\rangle = -\frac{\partial}{\partial x_i}\langle q_i\rangle + \frac{\partial}{\partial x_i}\langle v_j\sigma_{ij}\rangle\,. \tag{28}$$

Рассмотрим отдельно некоторые члены.

$$\langle\rho v_i E\rangle = \langle\rho\rangle\widetilde{v_i}\widetilde{E} + \langle\rho\rangle\tau_1(v_i,E)\,, \tag{29}$$

$$\langle p v_i\rangle = \langle p v_i\rangle + \widetilde{v_i}\langle p\rangle - \widetilde{v_i}\langle p\rangle = \widetilde{v_i}\langle p\rangle + \tau_2(v_i,p)\,, \tag{30}$$

где $\tau_2(f,g) = \langle fg\rangle - \widetilde{f}\langle g\rangle$.

$$\langle v_j\sigma_{ij}\rangle = \widetilde{v_j}\langle\sigma_{ij}\rangle + \tau_2(v_j,\sigma_{ij})\,. \tag{31}$$

Тогда (28) перепишется в следующем виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\langle\rho\rangle\widetilde{E}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\langle\rho\rangle\widetilde{E}\widetilde{v_i} + \langle p\rangle\widetilde{v_i}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\langle\rho\rangle\tau_1(v_i,E)\right) -\\ -\frac{\partial}{\partial x_i}\tau_2(v_i,p) - \frac{\partial}{\partial x_i}\langle q_i\rangle +\\ +\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\widetilde{v_j}\langle\sigma_{ij}\rangle\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\tau_2(v_j,\sigma_{ij})\,.\end{aligned} \tag{32}$$

Далее необходимо определить вид функций $\tau_1(v_i,v_j)$, $\tau_1(v_i,E)$, $\tau_2(v_i,p)$ и $\tau_1(v_j,\sigma_{ij})$.

По-прежнему предполагая выполнение гипотезы Буссинеска, для корреляционного момента скоростей можно записать выражение, аналогичное обычной молекулярной вязкости:

$$-\tau_1(v_i,v_j) = 2\nu_u\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\widetilde{v_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial\widetilde{v_i}}{\partial x_j}\right) - \frac{1}{3}\frac{\partial\widetilde{v_k}}{\partial x_k}\delta_{ij}\right) - \frac{2}{3}k_u\delta_{ij}\,, \tag{33}$$

ν_u – вязкость, определяемая неразрешёнными сеткой турбулентными пульсациями.

Для дальнейших преобразований необходимо ввести ещё один момент для корреляций, а именно $\tau_1(v_i,v_k,v_k)$. Согласно определению, $\tau_1(f,g,h)$ можно записать как $\tau_1(f,g,h) = \widetilde{fgh} - \widetilde{f}\tau_1(g,h) - \widetilde{g}\tau_1(f,h) - \widetilde{h}\tau_1(f,g) - \widetilde{f}\widetilde{g}\widetilde{h}$ по аналогии с моментами в классической статистической теории турбулентности [20]. Для нужных нам переменных имеем

$$\tau_1(v_i, v_k, v_k) = \widetilde{v_i v_k v_k} - \widetilde{v}_i \tau_1(v_k, v_k) - \widetilde{v}_k \tau_1(v_i, v_k) - \widetilde{v}_k \tau_1(v_i, v_k) - \\ - \widetilde{v}_i \widetilde{v}_k \widetilde{v}_k\,, \quad (34)$$

где, как и прежде, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Теперь преобразуем член $\langle\rho\rangle\,\tau_1(v_i, E)$:

$$\langle\rho\rangle\,\tau_1(v_i, E) = \langle\rho\rangle\left(\widetilde{v_i E} - \widetilde{v}_i \widetilde{E}\right) = \\ = \langle\rho\rangle\left(\widetilde{v_i \varepsilon} - \widetilde{v}_i \widetilde{\varepsilon} + \frac{1}{2}\widetilde{v_i v_k v_k} - \frac{1}{2}\widetilde{v}_i \widetilde{v_k v_k}\right) = \\ = \langle\rho\rangle\left(\tau_1(v_i, \varepsilon) - \frac{1}{2}\widetilde{v}_i \widetilde{v_k v_k} + \frac{1}{2}\tau_1(v_i, v_k, v_k) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}\widetilde{v}_i \tau_1(v_k, v_k) + \widetilde{v}_k \tau_1(v_i, v_k) + \frac{1}{2}\widetilde{v}_i \widetilde{v}_k \widetilde{v}_k\right) = \\ = \langle\rho\rangle\left(\tau_1(v_i, \varepsilon) + \frac{1}{2}\tau_1(v_i, v_k, v_k) + \widetilde{v}_k \tau_1(v_i, v_k)\right). \quad (35)$$

Далее имеем

$$\tau_2(v_i, p) + \langle\rho\rangle\,\tau_1(v_i, \varepsilon) = \langle v_i(p + \rho\varepsilon)\rangle - \widetilde{v}_i(\langle p\rangle + \langle\rho\varepsilon\rangle) = \tau_2(v_i, H)\,, \quad (36)$$

где $H = h\rho$, $h = \varepsilon + p/\rho$ – удельная энтальпия. Тогда (32) перепишется в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\langle\rho\rangle\,\widetilde{E}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\langle\rho\rangle\,\widetilde{E}\widetilde{v}_i + \langle p\rangle\,\widetilde{v}_i\right) = -\frac{\partial}{\partial x_i}\langle q_i\rangle + \frac{\partial}{\partial x_i}(\widetilde{v}_j\langle\sigma_{ij}\rangle) - \\ - \frac{\partial}{\partial x_i}\tau_2(v_i, H) - \frac{\partial}{\partial x_i}(\langle\rho\rangle\,\widetilde{v}_k \tau_1(v_i, v_k)) + \\ + \frac{\partial}{\partial x_i}\tau_2(v_j, \sigma_{ij}) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}\langle\rho\rangle\,\tau_1(v_i, v_k, v_k)\right). \quad (37)$$

Аналогично усреднённому уравнению сохранения массы для массовых концентраций получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\langle\rho\rangle\,\widetilde{C_\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\langle\rho\rangle\,\widetilde{C_\alpha}\widetilde{v}_i\right) = 0\,. \quad (38)$$

Исходная система уравнений Навье-Стокса замыкается уравнением состояния вида $p = p(\rho, \varepsilon)$. В случае идеального газа имеем $p = \rho\varepsilon(\gamma - 1)$. Рассмотренная выше процедура усреднения даёт

$$\langle p\rangle = (\gamma - 1)\langle\rho\varepsilon\rangle = (\gamma - 1)\langle\rho\rangle\,\widetilde{\varepsilon}, \quad (39)$$

где

$$\widetilde{\varepsilon} = \widetilde{E} - \frac{1}{2}\widetilde{v_k}\widetilde{v_k} - \frac{1}{2}\tau_1\left(v_k, v_k\right) \ , \tag{40}$$

$k_u = \dfrac{1}{2}\tau_1\left(v_k, v_k\right)$ – турбулентная кинетическая энергия, заключённая в неразрешённых сеткой пульсациях. При использовании УРС общего вида обычно используют приближение “без модели”, т.е. $\langle p\rangle \approx p\left(\langle\rho\rangle, \widetilde{\varepsilon}\right)$. Данное приближённое равенство тождественно выполняется в случае идеального газа.

Для потока тепла имеем

$$\langle q_i\rangle \approx -C_p\frac{\widetilde{\mu}}{Pr}\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial x_i} \, . \tag{41}$$

По аналогии с RANS подходом, используя градиентное приближение, для остальных корреляционных моментов можно записать:

$$\tau_2\left(v_i, H\right) \approx -C_p\frac{\mu_u}{Pr_t}\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial x_i} \tag{42}$$

– турбулентный потока тепла,

$$\tau_2\left(v_j, \sigma_{ij}\right) - \frac{1}{2}\langle\rho\rangle\,\tau_1\left(v_i, v_k, v_k\right) \approx \left(\widetilde{\mu} + \frac{\mu_u}{\sigma_{ku}}\right)\frac{\partial k_u}{\partial x_i} \tag{43}$$

– молекулярная диффузия и турбулентный перенос.

В окончательном виде усреднённое уравнение сохранения энергии запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\langle\rho\rangle\,\widetilde{E}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\langle\rho\rangle\,\widetilde{E}\widetilde{v_i} + \langle p\rangle\,\widetilde{v_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\widetilde{v_j}\,\langle\sigma_{ij}\rangle\right) - \\
&\qquad - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\langle\rho\rangle\,\widetilde{v_k}\tau_1\left(v_i, v_k\right)\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(C_p\left(\frac{\{\mu\}}{Pr} + \frac{\mu_u}{Pr_t}\right)\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial x_i}\right) + \\
&\qquad\qquad + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left(\widetilde{\mu} + \frac{\mu_u}{\sigma_{ku}}\right)\frac{\partial k_u}{\partial x_i}\right) \, .
\end{aligned} \tag{44}$$

Таким образом, выражения (23), (26), (38), (39), (44) составляют искомую систему частично усреднённых или отфильтрованных уравнений Навье-Стокса, используемую в дальнейшем.

Замыкание частично усреднённых уравнений

Для замыкания частично усреднённых уравнений Навье-Стокса будем использовать аналог $k - \epsilon$ модели, уравнения которой в силу инвариантности усреднённых уравнений относительно использования различных фильтров запишутся в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\langle\rho\rangle k_u\right) + \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\langle\rho\rangle k_u \widetilde{v_i}\right) = P_{ku} - \langle\rho\rangle \epsilon_u + T_{ku}, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\langle\rho\rangle \epsilon_u\right) + \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\langle\rho\rangle \epsilon_u \widetilde{v_i}\right) = C^*_{1\epsilon} P_{ku}\dfrac{\epsilon_u}{k_u} - C^*_{2\epsilon}\dfrac{\langle\rho\rangle \epsilon_u^2}{k_u} + T_{\epsilon u}, \end{cases} \tag{45}$$

турбулентная вязкость

$$\mu_u = \langle\rho\rangle C_{\mu u}\frac{k_u^2}{\epsilon_u}\,, \tag{46}$$

генерационный член

$$P_{ku} = -\langle\rho\rangle \tau_1\left(v_i, v_j\right)\frac{\partial \widetilde{v_j}}{\partial x_i}\,, \tag{47}$$

молекулярная диффузия и турбулентный перенос

$$T_{ku} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left(\widetilde{\mu} + \frac{\mu_u}{\sigma_{ku}}\right)\frac{\partial k_u}{\partial x_i}\right)\,, \tag{48}$$

$$T_{\epsilon u} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left(\widetilde{\mu} + \frac{\mu_u}{\sigma_{\epsilon u}}\right)\frac{\partial \epsilon_u}{\partial x_i}\right)\,. \tag{49}$$

Тем самым необходимо определить величины $C_{\mu u}$, $C^*_{1\epsilon}$, $C^*_{2\epsilon}$, σ_{ku} и $\sigma_{\epsilon u}$.

Введём коэффициенты, отвечающие за величину разрешённых пульсаций, следующим образом:

$$f_k = \frac{k_u}{k}\,, \tag{50}$$

$$f_\epsilon = \frac{\epsilon_u}{\epsilon}\,, \tag{51}$$

здесь k и ϵ – полные турбулентная кинетическая энергия и скорость диссипации, опеределяемые моделью турбулентности (17). Значения $f_k = 0$ и $f_\epsilon = 0$ соответствуют случаю, когда все масштабы турбулентных пульсаций в рамках выбранной сетки разрешаются ей. Противоположный случай $f_k = 1$ и $f_\epsilon = 1$ соответствует RANS подходу, в котором вся турбулентная кинетическая энергия даётся выбранной моделью турбулентности. Параметры f_k и f_ϵ могут меняться независимо, совпадая только в предельных случаях. Также подсеточная модель (45) должна переходить в модель турбулентности (17) при $f_k = 1$ и $f_\epsilon = 1$. Предполагая такой предельный переход, можно получить, что $C_{\mu u} = C_\mu$.

Для определения остальных констант в модели (45) рассмотрим следующее выражение:

$$\frac{\partial k_u}{\partial t} + \hat{v}_i\frac{\partial k_u}{\partial x_i} = f_k\left(\frac{\partial k}{\partial t} + \hat{v}_i\frac{\partial k}{\partial x_i}\right)\,. \tag{52}$$

Для первого уравнения системы (45) имеем

$$\frac{\partial k_u}{\partial t}+\widetilde{v}_i\frac{\partial k_u}{\partial x_i}=f_k\left(\frac{\partial k}{\partial t}+\hat{v}_i\frac{\partial k}{\partial x_i}\right)+\left(\widetilde{v}_i-\hat{v}_i\right)\frac{\partial k_u}{\partial x_i} \tag{53}$$

или

$$P_{ku}-\langle\rho\rangle\,\epsilon_u+T_{ku}=f_k\frac{\langle\rho\rangle}{\overline{\rho}}\left(P_k-\overline{\rho}\epsilon+T_k\right)+\langle\rho\rangle\left(\widetilde{v}_i-\hat{v}_i\right)\frac{\partial k_u}{\partial x_i}. \tag{54}$$

Исходя из (54), можно соотнести слагаемые следующим образом:

$$P_{ku}-\langle\rho\rangle\,\epsilon_u=f_k\frac{\langle\rho\rangle}{\overline{\rho}}\left(P_k-\overline{\rho}\epsilon\right) \tag{55}$$

и

$$T_{ku}=f_k\frac{\langle\rho\rangle}{\overline{\rho}}T_k+\langle\rho\rangle\left(\widetilde{v}_i-\hat{v}_i\right)\frac{\partial k_u}{\partial x_i}. \tag{56}$$

В случае нулевого второго слагаемого в (56)

$$T_{ku}=f_k\frac{\langle\rho\rangle}{\overline{\rho}}T_k=f_k\frac{\langle\rho\rangle}{\overline{\rho}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left(\hat{\mu}+\frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_i}\right)=\frac{\langle\rho\rangle}{\overline{\rho}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\overline{\rho}}{\langle\rho\rangle}\left(\widetilde{\mu}+\frac{\mu_u f_\epsilon}{\sigma_k f_k^2}\right)\frac{\partial k_u}{\partial x_i}\right). \tag{57}$$

Сопоставляя с (48), для σ_{ku} получаем

$$\sigma_{ku}=\sigma_k\frac{f_k^2}{f_\epsilon}. \tag{58}$$

Далее рассмотрим выражения для скорости диссипации турбулентной энергии, а именно:

$$\frac{\partial\epsilon_u}{\partial t}+\hat{v}_i\frac{\partial\epsilon_u}{\partial x_i}=f_\epsilon\left(\frac{\partial\epsilon}{\partial t}+\hat{v}_i\frac{\partial\epsilon}{\partial x_i}\right)=\frac{f_\epsilon}{\overline{\rho}}\left(C_{1\epsilon}P_k\frac{\epsilon}{k}-C_{2\epsilon}\frac{\overline{\rho}\epsilon^2}{k}+T_\epsilon\right) \tag{59}$$

или

$$C_{1\epsilon}^{*}P_{ku}\frac{\epsilon_u}{k_u}-C_{2\epsilon}^{*}\frac{\langle\rho\rangle\,\epsilon_u^2}{k_u}+T_{\epsilon u}=\frac{\langle\rho\rangle}{\overline{\rho}}f_\epsilon\left(C_{1\epsilon}P_k\frac{\epsilon}{k}-C_{2\epsilon}\frac{\overline{\rho}\epsilon^2}{k}+T_\epsilon\right)+\langle\rho\rangle\left(\widetilde{v}_i-\hat{v}_i\right)\frac{\partial\epsilon_u}{\partial x_i}. \tag{60}$$

Выразим P_k из (55):

$$P_k=\frac{\overline{\rho}}{\langle\rho\rangle}\frac{1}{f_k}\left(P_{ku}-\langle\rho\rangle\,\epsilon_u\right)+\overline{\rho}\frac{\epsilon_u}{f_\epsilon} \tag{61}$$

и подставим в (60)

$$C_{1\epsilon}^{*}P_{ku}\frac{\epsilon_u}{k_u}-C_{2\epsilon}^{*}\frac{\langle\rho\rangle\,\epsilon_u^2}{k_u}+T_{\epsilon u}=C_{1\epsilon}\frac{\epsilon_u}{k_u}P_{ku}+C_{1\epsilon}\langle\rho\rangle\left(\frac{f_k}{f_\epsilon}-1\right)\frac{\epsilon_u^2}{k_u}-C_{2\epsilon}\langle\rho\rangle\frac{\epsilon_u^2}{k_u}\frac{f_k}{f_\epsilon}. \tag{62}$$

Таким образом получаем

$$C_{1\epsilon}^{*}=C_{1\epsilon}, \tag{63}$$

$$C_{2\epsilon}^{*} = C_{1\epsilon} + \frac{f_k}{f_\epsilon}\left(C_{2\epsilon} - C_{1\epsilon}\right), \tag{64}$$

$$\sigma_{\epsilon u} = \frac{f_k^2}{f_\epsilon}\sigma_\epsilon. \tag{65}$$

Для выражения $\widetilde{v}_i - \hat{v}_i$ возможно использование и других приближений ($\widetilde{v}_i - \hat{v}_i \neq 0$), тогда константы подсеточной модели ((58), (63)–(65)) будут иначе выражаться через константы модели турблентности.

Определение параметров фильтрации

Для реализации PANS подхода в программных комплексах необходимо также определиться со способом вычисления констант модели f_k и f_ϵ. Для f_ϵ в большинстве случаев принято значение 1, что оправдано для высокорейнольдсовых течений, т.к. диссипация происходит в наиболее мелких масштабах, т.е. влияние данного параметра в большей степени будет проявляться при низких числах Рейнольдса [21]. С параметром f_k ситуация обстоит иначе, и на текущий момент не существует единогласного подхода к определению его значения [11]. Совокупность используемых в литературе вариантов можно условно разделить на два направления. Первое – использование статического априорного значения f_k, постоянного во всей области моделирования и на протяжении всего времени моделирования, второе – динамическое значение, меняющееся в пространстве и времени и подстраивающееся под текущий турбулентный масштаб. Некоторые способы определения динамического значения параметра даны в работе [11]. Таким образом, все варианты так или иначе используют оценки для интегрального масштаба турбулентности, зависящего от турбулентной кинетической энергии $K = k_r + k_u$, где k_r – турбулентная кинетическая энергия пульсаций, разрешаемых численной сеткой, k_u – турбулентная кинетическая энергия, даваемая подсеточной моделью, и скорости диссипации турбулентной кинетической энергии $E = \epsilon_r + \epsilon_u$. Тем самым моделирование с использованием PANS подхода требует предварительного RANS-расчёта, который может быть выполнен либо единожды для оценки статического значения f_k, либо предварять каждый временной шаг для получения динамического значения f_k [22].

Заключение

В работе представлен гибридный подход для моделирования турбулентных течений с динамическим изменением параметров, контролирующих разрешающую способность метода. Приведён полный поэтапный вывод всех уравнений модели, позволяющий проследить сделанные предположения и тем самым контролировать выход за пределы области применимости. Данный подход реализует бесшовный переход между RANS и DNS/ILES и теоретически имеет потенциал для балансирования между вычислительной стоимостью расчётов и качеством получаемых результатов, что является принципиальным свойством при инженерном моделировании турбулентных течений.

Библиографический список

1. Spalart P. Trends in turbulence treatments // Fluids 2000 Conference and Exhibit. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2000.

2. Spalart P. R. Detached-Eddy Simulation // Annual Review of Fluid Mechanics. 2009. Vol. 41, no. 1. P. 181–202.

3. Speziale C. G. Computing non-equilibrium turbulent flows with time-dependent rans and vles // Fifteenth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics. Springer Berlin Heidelberg, 1997. P. 123–129.

4. Batten P., Goldberg U., Chakravarthy S. LNS - An approach towards embedded LES // 40th AIAA Aerospace Sciences Meeting & Exhibit. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2002.

5. Girimaji S. S. Partially-Averaged Navier-Stokes Model for Turbulence: A Reynolds-Averaged Navier-Stokes to Direct Numerical Simulation Bridging Method // Journal of Applied Mechanics. 2005. Vol. 73, no. 3. P. 413–421.

6. Lakshmipathy Sunil, Girimaji Sharath S. Partially Averaged Navier–Stokes (PANS) Method for Turbulence Simulations: Flow Past a Circular Cylinder // Journal of Fluids Engineering. 2010. — dec. Vol. 132, no. 12.

7. Suman Sawan, Girimaji Sharath S. On the Invariance of Compressible Navier–Stokes and Energy Equations Subject to Density-Weighted Filtering // Flow, Turbulence and Combustion. 2010. — jun. Vol. 85, no. 3-4. P. 383–396.

8. Razi P., Tazraei P., Girimaji S. Partially-averaged Navier–Stokes (PANS) simulations of flow separation over smooth curved surfaces // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2017. — aug. Vol. 66. P. 157–171.

9. Pereira F. S., Grinstein F. F., Israel D. M. et al. Partially averaged Navier-Stokes closure modeling for variable-density turbulent flow // Physical Review Fluids. 2021. — aug. Vol. 6, no. 8. P. 084602.

10. Pereira F. S., Grinstein F. F., Israel D. M. et al. Modeling and simulation of transitional Taylor-Green vortex flow with partially averaged Navier-Stokes equations // Physical Review Fluids. 2021. — may. Vol. 6, no. 5. P. 054611.

11. Klapwijk M., Lloyd T., Vaz G. On the accuracy of partially averaged Navier-Stokes resolution estimates // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2019. — dec. Vol. 80. P. 108484.

12. Reynolds O. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion // Philosophical Transactions of the Royal Society A. 1895. — dec. Vol. 186. P. 123–164.

13. Wilcox D. C. Turbulence Modeling for CFD. 2nd edition. D C W Industries, 2006. ISBN: 978-0963605153.

14. Favre A. J. A. Statistical equations of turbulent gases // Problems of hydrodynamics and continuum mechanics. Philadelphia: SIAM, 1969. P. 231–266.

15. Gatski T. B., Bonnet J.-P. Compressibility, Turbulence and High Speed Flow. Elsevier, 2009. P. 283. ISBN: 9780080559124.

16. Pirozzoli S., Grasso F. Direct numerical simulations of isotropic compressible turbulence: Influence of compressibility on dynamics and structures // Physics of Fluids. 2004. — dec. Vol. 16, no. 12. P. 4386–4407.

17. Greenshields C. J., Weller H. G. Notes on Computational Fluid Dynamics. CFD Direct, 2022. P. 314. ISBN: 978-1-3999-2078-0.

18. Launder B. E., Sharma B. I. Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc // Letters in Heat and Mass Transfer. 1974. Vol. 1, no. 2. P. 131–137.

19. Germano M. Turbulence: the filtering approach // Journal of Fluid Mechanics. 1992. Vol. 238. P. 325–336.

20. Монин А. С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика Издательство "Наука", 1965. Vol. 1.

21. Klapwijk M., Lloyd T., Vaz G., van Terwisga T. Evaluation of scale-resolving simulations for a turbulent channel flow // Computers & Fluids. 2020. — sep. Vol. 209. P. 104636.

22. Girimaji S., Abdol-Hamid K. Partially-Averaged Navier–Stokes Model for Turbulence: Implementation and Validation // 43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2005.