



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 41 за 2023 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**А.С. Самотохин, З.Н. Хуторовский**

**Алгоритмы обнаружения  
высокоорбитальных  
космических объектов по  
оптическим измерениям**

Статья доступна по лицензии  
Creative Commons Attribution 4.0 International



**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Самотохин А.С., Хуторовский З.Н. Алгоритмы обнаружения высокоорбитальных космических объектов по оптическим измерениям // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2023. № 41. 28 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2023-41>  
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2023-41>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.Келдыша  
Российской академии наук**

**А.С. Самотохин, З.Н. Хуторовский**

**Алгоритмы обнаружения  
высокоорбитальных космических  
объектов по оптическим измерениям**

**Москва — 2023**

*Самотохин А.С., Хуторовский З.Н.*

## **Алгоритмы обнаружения высокоорбитальных космических объектов по оптическим измерениям**

Рассматривается задача определения орбитальных параметров движения некаталогизированных космических объектов в околоземном космическом пространстве на основе оптических измерений. Предложены схемы построения начальных приближений при использовании длинных и коротких треков оптических измерений и последующего отождествления обнаруженных объектов.

**Ключевые слова:** определение орбит, космический мусор, метод Гаусса, метод наименьших квадратов, оптические измерения.

*Alexander Sergeevich Samotokhin, Zakhary Naumovich Khutorovsky*

## **Algorithms for detecting of HEO satellites by optical measurements**

The problem of determining orbital parameters of motion of non-catalogized space objects in near-Earth space based on optical measurements is considered. Schemes are proposed for constructing initial approximations when using long and short tracks of optical measurements and subsequent identification of detected objects.

**Key words:** orbit determination, space debris, Gauss method, least squares method, optical measurements.

## **Оглавление**

Введение .....	3
Основные определения и термины .....	4
Постановка задачи обнаружения КО .....	6
Общая схема работы программы обнаружения КО .....	7
Метод Гаусса и его модификации .....	8
Построение начальной орбиты КО .....	13
Привязка измерений и уточнение орбиты КО .....	17
Отождествление обнаруженных КО .....	20
Режим дополнительного уточнения КО .....	24
Результаты практической реализации .....	25
Заключение .....	26
Библиографический список .....	27

## Введение

Сразу после запуска первого ИСЗ возникла серьезная потребность автоматизации процесса обработки траекторных измерений с помощью ЭВМ [1]. Эта потребность ещё более усугубилась впоследствии, когда в связи с развитием технологий в околоземном космическом пространстве появилось много разнообразных объектов, идентификация которых является насущно необходимой. В России задача обнаружения неизвестных космических объектов (КО) по измерительной информации теоретически и практически была решена ещё в 80-х годах XX века [2-4]. Однако это решение было получено только для объектов низкоорбитальной области (высота в апогее менее 3500 км) для информации радиолокационных станций (РЛС) обнаружения. Существенной особенностью радиолокационной информации является то, что измерение, полученное при одном проходе КО через зону действия радиолокационной станции (РЛС), содержит полный шестимерный вектор фазового пространства его траектории.

Высокоорбитальные (ВО) КО (высота в апогее более 3500 км) наблюдаются главным образом оптическими средствами, которые работают только в ночное время при надлежащих погодных условиях. Эти средства измеряют только два угла и не измеряют дальность до КО. В результате этого на интервалах времени до нескольких минут с удовлетворительной точностью определяются только 4 параметра орбиты из 6. Для такой информации описанный в [3,4] алгоритм обнаружения неизвестных КО неэффективен. Требуется разработка новых более эффективных алгоритмов.

С появлением в России сначала по инициативе Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, а затем и Астрономического научного центра (АНЦ) новых оптических телескопов, снабженных ПЗС-матрицами и ориентированных на слежение за искусственными объектами, число оптических измерений быстро росло. Росло и число измерений, не привязанных ни к какой орбите.

Более того, около 10 лет назад перед пунктами оптического наблюдения была поставлена задача выполнения привязки к объектам каталога получаемых измерений в реальном времени. Требовалось также обеспечить необходимое для обнаружения объекта продолжение наблюдений в случаях, когда уже выполненное наблюдение на малой временной базе оказалось непривязанным. Начиная с 2014 года АНЦ удалось оснастить измерительные пункты Российского космического агентства компьютерами с большим числом процессоров, после чего на измерительных пунктах задачу оперативной привязки получаемых измерений и продолжения наблюдения КО с непривязанными измерениями удалось решить в автоматическом режиме. Стали появляться непривязанные измерения по высокоорбитальным КО, полученные на временной базе 1 час и более.

Такое качественное изменение в составе получаемых измерений привело к необходимости доработки существующих методов обнаружения неизвестных

КО в рамках отечественной системы контроля космического пространства (СККП). Потребовались доработки как в программно-алгоритмической части, так в организации оперативного взаимодействия между центрами обработки поступающих измерений и наблюдательными средствами.

В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением лишь средств математического и алгоритмического обеспечения, которые используются в центрах обработки измерений для определения параметров орбит обнаруженных объектов, не затрагивая вопросов планирования наблюдений и их организации.

## Основные определения и термины

Под *единичной засечкой* понимается одиночное оптическое измерение, которое в общем случае включает в себя время измерения  $t$ , два измеренных угла  $\alpha$ ,  $\delta$  (углы склонения и прямого восхождения), блеск  $s$  космического объекта, измеряемый в звездных величинах, а также координаты наблюдательного пункта и номер КО, зарегистрированный на нем. Не нарушая общности, можно считать, что такая единичная засечка  $u$  содержит вектор  $\mathbf{p}$ , определяющий положение наблюдательного пункта в инерциальном геоцентрическом пространстве в момент времени  $t$ , единичный вектор  $\mathbf{e}$ , направленный от наблюдательного пункта к КО, и блеск  $s$ . Отметим, что величина блеска  $s$  не используется при определении параметров орбит для обнаруженных КО, но может использоваться в алгоритме отождествления построенной орбиты с объектами каталога и в алгоритме привязки измерений к ним, который будет описан позже.

*Проводка (трек)* – набор единичных засечек, полученных на ограниченном интервале времени и относящихся к одному и тому же наблюдаемому объекту. Единичные засечки в рамках одного трека сортируются в порядке возрастания их времен  $t$ . Под *длительностью проводки*  $\Delta t$  понимается интервал времени, на котором были получены единичные засечки (т.е. разность между временами последней и первой засечки в треке).

В общем случае *параметры орбиты КО* задаются с помощью орбитальных элементов Лагранжа  $\{\lambda, L, p, q, h, k\}$ , привязанных к определенному моменту времени  $t_{orb}$ , и согласующего баллистического коэффициента  $k_b$ , с помощью которого учитывается влияние атмосферы и светового давления. Предполагается, что коэффициент светового давления  $k$  прямо пропорционален баллистическому коэффициенту  $k_b$ . Это оправдано, если КО имеет форму, близкую к сфере (или же беспорядочно вращается, что обычно справедливо для космического мусора). Указанный коэффициент пропорциональности подбирается эмпирически.

*Стандартная процедура минимизации* – процедура уточнения параметров орбиты КО с помощью метода наименьших квадратов [4]. На вход в процедуру подается начальное приближение для элементов орбиты и набор измерений, по которым проводится их уточнение. В случае успешного завершения процедуры

на её выходе получается новое приближение для параметров орбиты и их ковариационная матрица **К**. В процедуре может выполняться уточнение только части параметров орбиты, а также селекция аномальных измерений. Ситуацию, когда в результате выполнения процедуры не удастся получить нового решения для параметров орбиты, в дальнейшем будем называть *отказом процедуры минимизации*.

*Каталог КО* – база данных, содержащая информацию обо всех известных КО. Для каждого КО эта база содержит траекторную информацию о параметрах его орбиты и измерениях, на основе которых были определены эти параметры. Помимо траекторной информации записи каталога включают административные характеристики объектов (дату запуска, государственную принадлежность, международный номер и т.д.) и ряд дополнительных признаков, например, признак наличия или отсутствия на КО двигателей малой тяги.

*Программа сопровождения* – программа в составе траекторного комплекса центра обработки информации, задачей которой является уточнение параметров орбит в каталоге КО. На вход этой программы поступают измерения со всех наблюдательных средств. Программа выполняет привязку поступивших измерений к известным объектам каталога с последующим уточнением параметров орбит этих объектов. Измерения, которые не удалось привязать к известным объектам, сохраняются в базе данных (БД) как *непривязанные*. Эти измерения поступают затем на обработку программой обнаружения.

*Программа обнаружения* – программа в составе траекторного комплекса центра обработки информации, задачей которой является обнаружение КО, которые отсутствуют в каталоге. Программа обрабатывает совокупность непривязанных измерений в базе данных (БД) и при необходимости размещает в каталоге обнаруженные ею КО.

Обнаруженный объект, записанный в каталог, может иметь *статус предварительно обнаруженного объекта* или же *статус обнаруженного объекта*.

В первом случае предполагается, что точность знания орбиты обнаруженного объекта недостаточна для его последующего устойчивого сопровождения. Такие объекты далее сопровождают совместно программами сопровождения и обнаружения с использованием *режима дополнительного уточнения*. Работа программ в этом режиме будет рассмотрена далее более подробно в разделе «Режим дополнительного уточнения».

Если же точность знания орбиты оказывается достаточной для устойчивого сопровождения, то объект получает статус *обнаруженного*. В дальнейшем такие объекты обрабатываются только программой сопровождения.

## Постановка задачи обнаружения КО

Следуя [3-6], рассмотрим в абстрактной постановке задачу обнаружения неизвестных КО по измерениям и эффективный алгоритм её решения. Сделаем это конспективно, не вдаваясь в детали и математические подробности.

По совокупности измерений  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ , не привязанных к объектам каталога, необходимо определить число  $k$  наблюдаемых неизвестных КО и их параметры орбит  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$  с максимально возможной точностью. В условиях, когда ошибки измерений ограничены определёнными константами (без ограничения общности можно считать все эти константы одинаковыми и равными  $\varepsilon$ ), каждое измерение  $\mathbf{y}$  порождает область неопределённости  $U_x(\mathbf{y}) = \{\mathbf{x} \in X : \|\mathbf{I}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\| < \varepsilon\}$  в пространстве параметров орбит  $X = \{\mathbf{x}\}$ . Здесь  $\mathbf{I}(\mathbf{x})$  – функциональная зависимость параметров измерения  $\mathbf{y}$  относительно параметров орбиты  $\mathbf{x}$  (информационный оператор),  $\|\mathbf{a}\|$  – норма (мера длины) вектора  $\mathbf{a}$  в пространстве параметров.

Примером нормы является функция  $l_p = \left( \sum_k |r_k|^p \right)^{1/p}$ ,  $r_k$  –  $k$ -я компонента вектора  $\mathbf{r}$ . Частными случаями нормы  $l_p$  являются обычная длина вектора  $l_2 = \left( \sum_k |r_k|^2 \right)^{1/2}$ , сумма модулей компонент вектора  $l_1 = \sum_k |r_k|$  и максимальный модуль компоненты  $l_\infty = \max_k |r_k|$ . При этом для  $p=2$  получается метод наименьших квадратов, а для  $p=1$  и  $p=\infty$  – алгоритмы линейного программирования. Обычно используется евклидова норма ( $p=2$ ), в которой оптимальный алгоритм наиболее прост.

Считается, что если области неопределённости  $U_x(\mathbf{y}_1), U_x(\mathbf{y}_2)$  двух измерений  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$  не пересекаются, т.е.  $U_x(\mathbf{y}_1) \cap U_x(\mathbf{y}_2) = \emptyset$ , то эти измерения получены для различных КО. Наличие непустого пересечения  $U_x(\mathbf{y}_1) \cap U_x(\mathbf{y}_2) \neq \emptyset$  областей неопределённости двух измерений ещё не означает, что это измерения одного КО. Однако если группа измерений соответствует одному КО, их области неопределённости обязательно имеют непустое пересечение. В связи со сказанным запрашивается следующий алгоритм обнаружения неизвестных КО [2-6].

Будем считать, что все компоненты векторов являются безразмерными. Для любой группы непривязанных измерений  $\mathbf{G} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n)$  находится пересечение областей неопределённости измерений этой группы  $U_x(\mathbf{y}_1) \cap U_x(\mathbf{y}_2) \cap \dots \cap U_x(\mathbf{y}_n)$ , которое будем называть областью неопределённости группы  $U_x(\mathbf{G})$ . Отбираются группы измерений, для которых  $U_x(\mathbf{G}) \neq \emptyset$ . Все отобранные группы упорядочиваются по размеру их области неопределённости и берутся только те из них, размер области неопределённости которых меньше определённого порога. Каждая из выбранных таким образом групп измерений

определяет область, где содержатся параметры обнаруженного объекта, а центр этой области неопределённости отождествляется с параметрами орбиты объекта. Центром  $\mathbf{c}(U_x(\mathbf{G}))$  области  $U_x(\mathbf{G})$  называется такая точка (при выпуклой области  $U_x(\mathbf{G})$  она всегда лежит внутри этой области), для которой максимальное расстояние до точек  $U_x(\mathbf{G})$  минимально (т.е.  $\mathbf{c}(U_x(\mathbf{G})) = \arg \min_{u \in U_x(\mathbf{G})} (\max_{v \in U_x(\mathbf{G})} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|)$ ), размером (радиусом)  $r(U_x(\mathbf{G}))$  области  $U_x(\mathbf{G})$  – максимальное значение расстояния между  $\mathbf{c}(U_x(\mathbf{G}))$  и другими точками области  $U_x(\mathbf{G})$  (т.е.  $r(U_x(\mathbf{G})) = \max_{u \in U_x(\mathbf{G})} (\|\mathbf{u} - \mathbf{c}(U_x(\mathbf{G}))\|)$ ), а  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  – точки, принадлежащие области  $U_x(\mathbf{G})$ .

Описанный алгоритм нахождения центра области неопределённости выбранной совокупности измерений фактически решает некоторую задачу оптимизации, которая при  $p=2$  совпадает с задачей метода наименьших квадратов (см. [5-6]).

Этот алгоритм структурно прост, однако его реализация представляет существенную вычислительную проблему. Достаточно сказать, что нахождение области неопределённости двух измерений и центра этой области – задача, эффективное решение которой в практически интересных случаях при коротких измерительных треках непростая и требует большого объёма вычислений. Алгоритм же требует выполнения этой операции для всех групп измерений, содержащих 2, 3 и более измерений.

По указанным причинам было решено использовать алгоритм, который требует меньших вычислительных ресурсов.

## Общая схема работы программы обнаружения КО

В программе обнаружения КО предусмотрены два режима работы:

- режим обнаружения новых объектов;
- режим дополнительного уточнения совместно с программой сопровождения.

Режим обнаружения новых объектов является основным. Программа обнаружения в этом режиме вызывается всякий раз, когда программа сопровождения записывает в БД новые непривязанные измерения. Для каждого нового непривязанного измерения последовательно выполняются следующие шаги.

1. Построение начальной орбиты КО на одном витке с использованием метода Гаусса, в котором используются три единичные засечки. Могут использоваться три засечки, относящиеся к одному треку, либо осредненные измерения из трех разных треков.
2. Цикл по привязке измерений к построенной орбите КО и ее уточнению.
3. Отождествление построенной орбиты с каталогом КО и либо создание в каталоге нового объекта, либо обновление параметров отождествленного объекта.

Первые два шага могут завершиться успешно (*true*) или неуспешно (*false*). В последнем случае следующий шаг не выполняется и происходит переход к



обработке очередного нового измерения без внесения каких-либо изменений в каталог КО.

Программа обнаружения КО в режиме дополнительного уточнения вызывается всякий раз, когда программа сопровождения выполняет привязку нового измерения к объекту, имеющему статус предварительно обнаруженного.

## Метод Гаусса и его модификации

Метод Гаусса [7-9] позволяет строить орбиты Кеплера по трем угловым измерениям. Приведем краткое описание принципов, на которых основан этот метод.

В качестве исходных данных для рассматриваемого метода используются три угловых измерения. Каждое из этих измерений описывается следующими параметрами ( $i=0,1,2$ ):

$\mathbf{p}_i$  - вектор, определяющий положение наблюдательного пункта в пространстве;

$\mathbf{e}_i$  - единичный вектор, направленный вдоль линии визирования оптического измерения;

$t_i$  - время измерения

Для определенности будем считать, что индексы  $i$  в тройке измерений выбраны таким образом, что  $t_1 < t_0 < t_2$ , а все вектора заданы в инерциальной геоцентрической системе отсчета (например, J2000).

При введенных обозначениях геоцентрический радиус-вектор  $\mathbf{r}_i$ , определяющий положение космического объекта в момент  $t_i$ , вычисляется по формуле

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{p}_i + \rho_i \mathbf{e}_i, \quad (1)$$

где  $\rho_i$  – топоцентрическая (наклонная) дальность  $i$ -го измерения.

Если точки, определяемые векторами положения  $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ , принадлежат орбите Кеплера, то для них выполняются условия

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= f_1 \mathbf{r}_0 + g_1 \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{r}_2 &= f_2 \mathbf{r}_0 + g_2 \mathbf{v}_0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\mathbf{v}_0$  – вектор скорости в момент времени  $t_0$ , а  $f_1, f_2, g_1, g_2$  – некоторые коэффициенты, зависящие от параметров орбиты. Исключение из уравнений (2) переменной  $\mathbf{v}_0$  приводит к уравнению

$$n_1 \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 + n_2 \mathbf{r}_2 = 0, \quad (3)$$

в котором

$$n_1 = \frac{g_2}{f_1 g_2 - f_2 g_1},$$

$$n_2 = \frac{-g_1}{f_1 g_2 - f_2 g_1}.$$
(4)

Можно показать, что для коэффициентов  $n_1, n_2$  выполняются соотношения

$$n_1 = \frac{|\mathbf{r}_0 \times \mathbf{r}_2|}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}, \quad n_2 = \frac{|\mathbf{r}_0 \times \mathbf{r}_1|}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}.$$
(5)

Таким образом,  $n_1, n_2$  являются отношениями площадей треугольников, построенных на векторах  $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_2$  и  $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1$  к площади треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ .

Подстановка уравнений (1) в уравнения (3) и последующее их разрешение относительно топоцентрических дальностей  $\rho_i$  приводит к следующей системе скалярных уравнений:

$$\rho_0 = \frac{-s_{00} + n_1 s_{01} + n_2 s_{02}}{D},$$

$$\rho_1 = -\frac{n_1 s_{11} - s_{10} + n_2 s_{12}}{n_1 D},$$

$$\rho_2 = -\frac{n_1 s_{21} - s_{20} + n_2 s_{22}}{n_2 D}.$$
(6)

Здесь  $D$  вычисляется по формуле

$$D = \mathbf{e}_0 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1) = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1),$$
(7)

а  $s_{ij}$  – элементы матрицы  $\mathbf{S}$  размерности  $3 \times 3$

$$\mathbf{S} = \begin{vmatrix} (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{p}_0) & (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{p}_1) & (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{p}_2) \\ (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_2, \mathbf{p}_0) & (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_2, \mathbf{p}_1) & (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_2, \mathbf{p}_2) \\ (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_0, \mathbf{p}_0) & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_0, \mathbf{p}_1) & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_0, \mathbf{p}_2) \end{vmatrix}$$
(8)

Следовательно, задача построения орбиты Кеплера по трем угловым измерениям сводится к нахождению таких коэффициентов  $n_1, n_2$ , которые удовлетворяют приведенным выше уравнениям. Как только найдены значения  $n_1, n_2$ , с помощью уравнений (6) можно вычислить топоцентрические дальности для всех трех измерений и положения космического объекта на орбите, используя уравнения (1). Очевидно, задача не имеет решения, если  $D=0$ .

В настоящее время известно несколько модификаций метода Гаусса, большинство из которых основано на получении начального приближения и последующего уточнения этого приближения с помощью той или иной итерационной процедуры (в разных модификациях используются различные процедуры).

Введем в рассмотрение относительные времена  $\tau_0$ ,  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ , которые вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= (t_0 - t_1)\sqrt{\mu}, \\ \tau_2 &= (t_2 - t_0)\sqrt{\mu}, \\ \tau_0 &= \tau_1 + \tau_2,\end{aligned}\tag{9}$$

где  $\mu$  – гравитационная постоянная центрального тела.

Тогда коэффициенты  $n_1$ ,  $n_2$  могут вычислены через  $\tau_0$ ,  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  с помощью следующих соотношений:

$$\begin{aligned}n_1 &= n_1^0 + \frac{c_1}{|\mathbf{r}_0|^3} \\ n_2 &= n_2^0 + \frac{c_2}{|\mathbf{r}_0|^3},\end{aligned}\tag{10}$$

где

$$\begin{aligned}n_1^0 &= \frac{\tau_1}{\tau_0} \\ n_2^0 &= \frac{\tau_2}{\tau_0},\end{aligned}\tag{11}$$

а коэффициенты  $c_1$ ,  $c_2$  связаны с относительными временами  $\tau_0$ ,  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}c_1 &= \frac{\tau_1\tau_2}{6}(1+n_1^0) + \frac{r_0'}{4r_0} \frac{\tau_1\tau_2(\tau_0\tau_2 - \tau_1^2)}{\tau_0} + \dots \\ c_2 &= \frac{\tau_1\tau_2}{6}(1+n_2^0) - \frac{r_0'}{4r_0} \frac{\tau_1\tau_2(\tau_0\tau_1 - \tau_2^2)}{\tau_0} + \dots\end{aligned}\tag{12}$$

Однако, поскольку ни геоцентрическая дальность  $r_0$ , ни ее производные не известны, то уравнения (12) заменяют приближенными соотношениями

$$\begin{aligned} c_1 &\approx \frac{\tau_1 \tau_2}{6} (1 + n_1^0), \\ c_2 &\approx \frac{\tau_1 \tau_2}{6} (1 + n_2^0), \end{aligned} \quad (13)$$

полученными за счет отбрасывания старших членов в разложении (12).

Подстановка уравнений (9)-(11), (13) в первое уравнение (6) приводит к уравнению

$$\rho_0 + P - \frac{Q}{\left(\sqrt{\rho_0^2 + 2C\rho_0 + R^2}\right)^3} = 0, \quad (14)$$

которое в теории обработки наблюдений часто называют уравнением Лагранжа [10]. Коэффициенты  $P$ ,  $C$ ,  $R^2$ ,  $Q$  этого уравнения вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} C &= \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{p}_0, \\ R^2 &= |\mathbf{p}_0|^2, \\ P &= \frac{s_{00} - n_1^0 s_{01} - n_2^0 s_{02}}{D}, \\ Q &= \frac{c_1 s_{01} + c_2 s_{02}}{D}. \end{aligned} \quad (15)$$

Отметим, что коэффициенты  $P$ ,  $C$ ,  $R^2$  в этом уравнении зависят только от параметров центрального измерения в момент времени  $t_0$ , а коэффициент  $Q$  зависит также от  $c_1$ ,  $c_2$  (т.е. от параметров орбиты).

С учетом сказанного выше процедура получения начального приближения в методе Гаусса сводится к следующей последовательности действий. На основании уравнений (9), (11) и приближенных уравнений (13) вычисляются коэффициенты  $c_1$ ,  $c_2$ . Далее при известных значениях  $c_1$ ,  $c_2$  численно решается уравнение (14) относительно  $\rho_0$ . При известном значении  $\rho_0$  по формулам (1) вычисляется геоцентрическая дальность  $r_0$  и затем вычисляется начальное приближение для  $n_1$ ,  $n_2$ , как результат решения уравнений (10).

После того, как получено начальное приближение для  $n_1$ ,  $n_2$ , в различных модификациях метода Гаусса используются разные итерационные процедуры для уточнения этого приближения. Здесь мы ограничимся лишь кратким описанием нескольких таких модификаций.

В работе [7] описана модификация метода Гаусса, в которой используются формулы Гиббса и формулы, основанные на решении уравнений Гаусса, определяющих отношение площадей секторов и треугольников. В этой модификации на каждой итерации происходит уточнение значений  $c_1$ ,  $c_2$  и повторное решение уравнения Лагранжа.

В [8] приводится описание модификации метода Гаусса, в которой уравнение Лагранжа решается только один раз на нулевой итерации, а последующее уточнение проводится в терминах  $n_1$ ,  $n_2$  с использованием методов Гиббса или Херрика-Гиббса. Однако, как отмечает сам автор, эта модификация успешно работает только в тех случаях, когда длина дуги не превышает 60 градусов.

В работе [9] представлен метод, подобный методу, описанному в [7]. Однако на его промежуточных итерациях, после того как вычислены значения  $n_1$ ,  $n_2$ , происходит вычисление наклонных дальностей по формулам (6). Это, в свою очередь, позволяет определить геоцентрические векторы положения  $\mathbf{r}_i$  в моменты времени  $t_i$ . Далее с использованием метода Бэттина (Richard H. Battin, [11]) осуществляется решение задачи Ламберта (определение параметров орбиты Кеплера по двум положениям КО и разности времен между ними) на двух смежных дугах. Значения коэффициентов  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $g_1$ ,  $g_2$ , полученные в результате решения этих задач, затем усредняются и используются для вычисления  $c_1$ ,  $c_2$  для следующей итерации. Поскольку метод Бэттина обеспечивает решение задачи Ламберта на дугах длиной до одного витка, такой подход теоретически позволяет получать решения на длинных дугах вплоть до 180 градусов.

Несмотря на различия, всем перечисленным выше модификациям метода Гаусса присущи особенности, которые можно отнести к их недостаткам. Во-первых, при длинных дугах начальные приближения для  $c_1$ ,  $c_2$ , полученные по приближенным формулам (13), могут давать такие значения, для которых не существует ни одного действительного корня уравнения (14). В этом случае любая из рассмотренных модификаций метода Гаусса не позволит найти искомое решение. Во-вторых, ни для одной из рассмотренных модификаций не доказана сходимость используемых в них итерационных процедур. В-третьих, все эти модификации ориентированы на поиск одного единственного решения. Однако возможно существование нескольких орбит Кеплера, которые соответствуют исходной тройке угловых измерений.

В работе [12] авторами предложена модификация метода Гаусса, которая не требует начального приближения. В работе было показано, что в случае наложения ограничений на топоцентрические дальности

$$\rho_{\min} < \rho_i < \rho_{\max}, \quad (16)$$

где  $\rho_{\min}$ ,  $\rho_{\max}$  – некоторые константы, эти ограничения отображаются на плоскости параметров  $n_1$ ,  $n_2$  как прямые линии. Такой подход позволяет ограничить область поиска возможных решений, представляющих практический интерес для задач контроля околоземного космического пространства и создать вычислительный метод, который способен находить несколько возможных решений, если они существуют. Предложенная в [12] модификация метода Гаусса более сложна с точки зрения программной

реализации и требует больших вычислительных затрат, чем модификации [7-9]. Однако, как показала практика, эта модификация дает наилучшие результаты с точки зрения качества обнаружения.

## Построение начальной орбиты КО

Обработка каждого очередного нового непривязанного измерения (засечки) начинается с поиска группы измерений, которые соответствуют тому же КО, что и новое измерение, включения нового измерения в эту группу и построения по этой новой найденной группе орбиты Кеплера.

Первоначально строится трек, к которому принадлежит текущая единичная засечка. В трек включаются все засечки, полученные от того же наблюдательного средства, имеющие тот же номер КО на пункте и время которых отличается от времени текущей засечки не более чем на 8 часов. Эта константа взята с большим запасом. На практике мы не получаем треки с длительностью более 2-3 часов. Засечки в треке сортируются в порядке возрастания по времени. Пусть  $n$  – число засечек в треке, а  $\Delta t$  – интервал времени, на котором были получены единичные засечки (т.е. разность между временами последней и первой засечки в треке).

Если  $n < 4$ , то такой трек считается неинформативным и на этом обработка текущего измерения прекращается. Порядок дальнейшей обработки зависит от величины  $\Delta t$  сформированного трека.

Далее определяется, может ли данный трек соответствовать КО, принадлежащим области ГСО. Область ГСО – это тор, ось которого совпадает с геостационарной орбитой. Каждая засечка определяет направление (единичный вектор) от НП к наблюдаемому КО. Если хотя бы для одной засечки трека у такого вектора нет пересечений с ГСО, то КО явно не принадлежит ГСО. В остальных случаях считается, что может принадлежать.

Трек считается «длинным», если он может принадлежать к КО, находящимся в области геостационарных орбит (ГСО) и имеет  $\Delta t$  более 12 минут. Для всех прочих КО трек считается «длинным», если  $\Delta t$  более 4 минут.

Для длинных треков дальнейшая обработка выполняется в цикле, внутри которого формируются тройки единичных засечек и для каждой сформированной тройки выполняется попытка построения орбиты Кеплера с помощью модификации метода Гаусса [12]. Если для очередной тройки удастся найти решение методом Гаусса, то полученная орбита уточняется с помощью метода наименьших квадратов с использованием более точного прогноза. Если получить решение не удастся, то эти операции повторяются для следующей тройки единичных засечек. Если для любой тройки трека нет решения, то это означает, что на основе данного трека мы орбиту построить не можем, и тогда переходим к обработке следующего трека.

Рассмотрим эту процедуру более подробно.

Если трек содержит  $n$  засечек, то число троек  $N$  определяется известной формулой комбинаторики

$$N = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}. \quad (17)$$

Формируется массив троек единичных засечек размерности  $N$ . Пусть  $t_0, t_1, t_2$  – времена измерений в тройке засечек, такие, что  $t_1 < t_0 < t_2$ . Тогда сформированный массив троек сортируется в порядке убывания разностей  $t_2 - t_1$ . При совпадении этих разностей у двух троек измерений сортировка происходит в порядке убывания произведений  $(t_0 - t_1)(t_2 - t_0)$ . Сформированный таким образом массив определяет последовательность обработки троек измерений в цикле.

На каждом шаге цикла для очередной тройки измерений выполняется попытка построения орбиты Кеплера с помощью метода Гаусса. Как отмечалось выше, таких решений может быть несколько. Для каждого такого решения выполняется уточнение полученной орбиты методом наименьших квадратов (МНК) из условия минимизации следующего критерия

$$\Phi = \sum \frac{\Delta\alpha_i^2}{\sigma_{\alpha_i}^2} + \sum \frac{\Delta\delta_i^2}{\sigma_{\delta_i}^2}. \quad (18)$$

Здесь  $\Delta\alpha_i, \Delta\delta_i$  – невязки углов единичных засечек с полученным решением,  $\sigma_{\alpha_i}$  и  $\sigma_{\delta_i}$  – среднеквадратичные отклонения (СКО) ошибок измерительного средства для этих углов.

При выполнении этого уточнения используется модель движения КО, которая учитывает влияние несферичности гравитационного поля Земли, влияние гравитационных полей Луны и Солнца, а также светового давления и атмосферы (если перигей орбиты меньше 1500 км). Уточняются 6 орбитальных элементов Лагранжа, а значение согласующего баллистического коэффициента  $k_b$  назначается априорно. При выполнении минимизации с помощью МНК используются все  $n$  засечек текущего трека. Полученное решение проверяется на достоверность по следующим критериям.

Пусть  $\Delta\alpha_i, \Delta\delta_i$  – невязки углов единичных засечек с полученным решением,  $\sigma_{\alpha_i}$  и  $\sigma_{\delta_i}$  – среднеквадратичные отклонения (СКО) ошибок измерительного средства для этих углов. Тогда решение считается достоверным, если выполняются следующие два условия.

1. Число засечек, у которых  $|\Delta\alpha_i|$  и  $|\Delta\delta_i|$  менее 20 угловых секунд, больше, чем  $k_n n$ .
2. Если  $\Delta t$  менее  $\Delta t_1$  от периода орбиты, то для компонентов измерений, которые признаны неаномальными, должно выполняться условие

$$\frac{1}{k_\alpha} \sum \frac{\Delta\alpha_i^2}{\sigma_{\alpha_i}^2} + \frac{1}{k_\delta} \sum \frac{\Delta\delta_i^2}{\sigma_{\delta_i}^2} < \Phi_1.$$

Здесь  $k_\alpha, k_\delta$  – число засечек, у которых измерения соответственно по углам  $\alpha$  и  $\delta$  были признаны неаномальными,  $k_n, \Delta t_1, \Phi_1$  – некоторые константы, которые выбираются эмпирически (использовались следующие значения:  $k_n=0.8, \Delta t_1=0.2, \Phi_1 = 5$ ).

Если в результате обработки текущего трека было получено достоверное решение, то цикл по дальнейшей обработке массива троек прерывается, а полученное решение затем используется для дальнейшей привязки измерений из массива непривязанных (см. следующий раздел).

Описанные выше действия выполняются только для длинных треков. Если текущий трек является коротким, то выполняется попытка его расширения одним из двух способов.

Первый способ основан на использовании линейной интерполяции. С помощью метода наименьших квадратов строятся линейные аппроксимации зависимости углов  $\alpha(t)$  и  $\delta(t)$  от времени  $t$  по формулам  $\alpha(t)=a_\alpha+b_\alpha t$  и  $\delta(t)=a_\delta+b_\delta t$ . Коэффициенты  $a_\alpha, b_\alpha, a_\delta, b_\delta$  определяются аналитически из условий

$$\sum (\alpha_i - \alpha(t_i))^2 \rightarrow \min \text{ и } \sum (\delta_i - \delta(t_i))^2 \rightarrow \min.$$

Далее из массива непривязанных измерений в БД на интервале  $\pm 3$  часа от текущего трека выбираются все единичные засечки, которые были получены тем же наблюдательным средством, что и текущий трек. Для выбранных засечек вычисляются невязки с построенными линейными аппроксимациями  $\alpha(t)$  и  $\delta(t)$ . В случае если находятся засечки, у которых невязки по обоим углам не превышают 300 угловых секунд, то формируется набор измерений, в который включается текущий трек и засечки, удовлетворяющие этому условию.

Если в результате такой операции удастся сформировать набор измерений на интервале более 12 минут для ГСО объектов и более 4 минут для остальных КО, то дальнейшая обработка такого набора измерений выполняется так же, как и для длинного трека (формирование массива троек единичных засечек, использование метода Гаусса, уточнение с помощью МНК, проверка достоверности).

Второй способ расширения короткого трека аналогичен описанному выше, но он основан на использовании метода Гаусса. По засечкам короткого трека выполняется попытка построения достоверной орбиты. Если удастся получить такую орбиту, то из массива непривязанных измерений в БД на интервале  $\pm 3$  часа от текущего трека выбираются все единичные засечки от всех измерительных средств. Для выбранных засечек вычисляются невязки с орбитой, построенной по короткому треку. В случае если находятся засечки, у которых невязки по обоим углам не превышают 1000 угловых секунд, формируется набор измерений, в который включается текущий трек и засечки, удовлетворяющие этому условию. Как и в предыдущем случае, если в результате такой операции удастся сформировать набор измерений на интервале более 12 минут для ГСО объектов и более 4 минут для остальных, то



дальнейшая обработка такого набора выполняется точно так же, как и для длинного трека.

Если текущий трек оказался коротким и попытки его расширения не привели к успеху, то включается режим обнаружения по коротким трекам. В этом случае из массива непривязанных измерений в БД на интервале  $\pm 12$  часов от текущего трека выбираются все треки, содержащие не менее 4 единичных засечек. Для каждой такой засечки (включая текущую) выполняются вычисления параметров осредненного измерения с использованием формул

$$\alpha_m = \frac{1}{n} \sum_i \alpha_i, \quad \delta_m = \frac{1}{n} \sum_i \delta_i, \quad t_m = \frac{1}{n} \sum_i t_i \quad (19)$$

и проводится оценка скоростей изменения измеренных углов

$$\dot{\alpha} = \frac{\sum_i (\alpha_i - \alpha_0)(t_i - t_0) - n\alpha_m t_m}{\sum_i (t_i - t_0)^2 - n t_m^2}, \quad \dot{\delta} = \frac{\sum_i (\delta_i - \delta_0)(t_i - t_0) - n\delta_m t_m}{\sum_i (t_i - t_0)^2 - n t_m^2}. \quad (20)$$

Операции по построению начальной орбиты по коротким трекам аналогичны операциям, которые выполнялись при обработке длинного трека. Однако есть некоторые отличия.

Как и для длинного трека, используется метод Гаусса и происходит формирование троек измерений, которые подаются на вход этого метода. В качестве измерений используются осредненные значения углов  $\alpha_m$  и  $\delta_m$  и времени  $t_m$ . В состав троек всегда включается осредненное измерение текущего трека и два измерения из тех, что были прочитаны из БД. Таким образом, общее число возможных троек  $N = n(n-1)/2$ , где  $n$  – число треков, выбранных из БД по времени. Сформированный массив троек сортируется в порядке убывания произведений  $(t_0 - t_1)(t_2 - t_0)$ , где  $t_0, t_1, t_2$  – времена осредненных измерений в тройке, такие, что  $t_1 < t_0 < t_2$ .

Если для очередной тройки осредненных измерений удастся получить орбиту Кеплера, то выполняется проверка совпадения полученных для этой орбиты угловых скоростей с теми, что были вычислены по формулам (20). В случае, если рассогласование угловых скоростей превышает 2 угловых секунды за секунду времени, такая орбита признается недостоверной. Если же проверка угловых скоростей дает положительный результат, то далее повторяются те же операции, которые были описаны ранее для длинного трека (уточнение параметров орбиты с помощью МНК и проверка достоверности полученного решения).

Сформулируем итоговую последовательность действий для короткого трека.

Сначала выполняется попытка расширить короткий трек с помощью линейной интерполяции. Если это получается (т.е. удастся найти

дополнительные засечки и построить по ним достоверную орбиту), то дальше всё происходит так же, как для длинного трека. Т.е. получаем некоторое начальное приближение для орбиты, к которой затем пытаемся привязать измерения из архива непривязанных.

Если это не получается, то выполняется попытка расширить короткий трек с помощью метода Гаусса. Выявляются треки, которые ложатся на орбиту, построенную по одному короткому треку. Если таковые находятся, то по этим трекам определяется орбита. Если она достоверна, то она считается эквивалентной орбите, полученной по одному длинному треку.

Если же расширить такой короткий трек не удастся, то осуществляется переход на режим обнаружения по коротким трекам, в котором уже используются осредненные измерения.

Таким образом, в случае успешного завершения рассмотренного алгоритма на выходе получается орбита (т.е. шесть орбитальных элементов Лагранжа, привязанных к определенному времени  $t_{orb}$ , и согласующий баллистический коэффициент  $k_b$ ), построенная по измерениям, полученным на интервале времени не менее 4 минут, но не более, чем на одном витке орбиты. Шесть орбитальных элементов получаются в результате обработки измерений с помощью МНК, а значение  $k_b$  задается априорной константой. Для всех орбит используется одно и тоже значение  $k_b = 0.01 \text{ м}^2/\text{кг}$  (среднестатистическое значение для КА).

## Привязка измерений и уточнение орбиты КО

Цель алгоритма, который рассматривается в настоящем разделе, состоит в нахождении измерений, принадлежащих тому же КО, для которого была получена начальная орбита. Если удастся найти такие измерения, то параметры орбиты уточняются с учетом этих измерений.

Поиск и привязка измерений выполняются в цикле. На каждом шаге этого цикла имеются параметры орбиты и набор измерений, по которым эта орбита была получена. Будем называть такую орбиту и связанный с нею набор измерений *базовыми*. На основе базовой орбиты формируется набор измерений, в который включаются все измерения из базового набора и измерения из массива непривязанных, возможно принадлежащие тому же КО, для которого была определена базовая орбита. Сформированный таким образом набор измерений будем называть *текущим*. Критерии отбора измерений для текущего набора будут рассмотрены ниже. Если не удастся найти измерений, которые удовлетворяют этим критериям, то базовый и текущий наборы совпадают. В этом случае цикл прерывается.

Если же базовый и текущий наборы не совпадают, то по текущему набору измерений выполняется попытка уточнения базовой орбиты. Если в результате такого уточнения удастся получить орбиту, которая удовлетворяет критериям достоверности (они будут приведены позже), то базовая орбита и базовый набор измерений обновляются и цикл повторяется. Если же по текущему

набору измерений не удастся построить достоверную орбиту, то цикл также прерывается.

Таким образом, все действия, выполняемые внутри цикла, можно представить как два шага.

1. Формирование текущего набора измерений на основе базовой орбиты и базового набора. Шаг считается успешным, если удастся сформировать текущий набор измерений, который не совпадает с базовым.
2. Уточнение базовой орбиты по текущему набору измерений. Шаг считается успешным, если на основе текущего набора удастся получить новую достоверную орбиту.

Цикл прерывается, если любой из этих шагов не приводит к успеху.

При поиске измерений для привязки к базовой орбите учитывается то обстоятельство, что в орбитальной системе координат небольшие отклонения начальных условий приводят к отклонениям в относительных координатах, которые со временем претерпевают значительно меньшие изменения, чем абсолютные координаты. Особенно это видно в направлениях, перпендикулярных вектору скорости КО (поперечные направления), в которых они часто на порядок меньше, чем в направлении движения. Поэтому в качестве критерия принадлежности единичной засечки к построенной орбите используются угловые невязки измерений в продольном  $\Delta a$  и поперечном  $\Delta p$  направлениях. Приведем расчетные формулы для вычисления этих невязок.

Пусть  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$  – прогнозируемое положение КО и его вектор скорости в момент проведения измерения,  $\alpha$ ,  $\delta$  – измеренные углы,  $\mathbf{r}_0$  – положение пункта наблюдения. Тогда

$$\mathbf{e}_m = \{\cos \alpha \cos \delta, \sin \alpha \cos \delta, \sin \delta\} \quad (21)$$

– орт, направленный от наблюдательного пункта на измеренное положение КО,

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1}{|\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1|}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2, \quad (22)$$

– орты системы координат, в которой орт  $\mathbf{e}_1$  направлен от пункта наблюдения на прогнозное положение КО, орт  $\mathbf{e}_2$  перпендикулярен к  $\mathbf{e}_1$  и направлен таким образом, что вектор скорости  $\mathbf{v}$  лежит в плоскости, образованной ортами  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$ , а орт  $\mathbf{e}_3$  дополняет систему до правой. Искомые значения невязок  $\Delta a$  и  $\Delta p$  в этом случае вычисляются по формулам

$$\Delta a = \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_2, \quad \Delta p = \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_3. \quad (23)$$

Из массива непривязанных измерений выбираются все единичные засечки на интервале времени  $\pm \Delta t_p$ , который определяется по формуле

$$\Delta t_p = 0.1T^2/\sigma_T. \quad (24)$$

Здесь  $T$  – период построенной орбиты,  $\sigma_T$  – СКО периода. Значение  $\Delta t_p$ , вычисленное, согласно (24) ограничивается снизу 3 сутками, и ограничивается сверху либо 365 сутками, если исходная орбита была построена более, чем на одном витке, и 90 сутками в противном случае. Для орбит с наклоном менее  $0.5^\circ$  ограничение на значение  $\Delta t_p$  принимается равным 3 суткам.

Для всех прочитанных засечек по формулам (21)-(23) вычисляются невязки  $\Delta a$  и  $\Delta p$ . Рассматриваются только те засечки, у которых  $|\Delta p|$  не превышает 100 угловых секунд, а величина блеска отличается от средней величины блеска в базовом наборе не более чем на 3 единицы. Для таких засечек формируется трек, которому принадлежит рассматриваемая засечка. Если число засечек в таком треке менее 4, то такой трек считается неинформативным и не рассматривается. Для сформированного трека вычисляется медианная оценка поперечных невязок  $\Delta p$ . Трек добавляется в текущий набор измерений для последующего уточнения орбиты, если выполняются следующие условия: значения поперечных невязок  $\Delta p$  должны отличаться от полученной медианной оценки не более чем на 20 угловых секунд, а продольные невязки  $\Delta a$  для любой засечки не должны быть по модулю более 20 тысяч угловых секунд.

Если не удастся найти треки, которые бы отвечали сформулированным выше условиям, то цикл по поиску и привязке измерений на этом прерывается.

Если в результате описанных выше действий удастся сформировать текущий набор измерений, отличный от базового, то с помощью стандартной процедуры минимизации [3] выполняется попытка уточнения параметров орбиты. В качестве начального приближения используются параметры базовой орбиты. Состав уточняемых параметров зависит от длительности временного интервала измерений текущего набора. Если в текущем наборе измерений есть измерения более чем на двух витках, то уточняются 6 орбитальных элементов Лагранжа  $\{\lambda, L, p, q, h, k\}$  и обобщенный баллистический коэффициент  $k_b$ . В противном случае уточняются только 6 элементов Лагранжа, а для баллистического коэффициента  $k_b$  назначается априорное значение.

Параметры новой орбиты, полученные с помощью стандартной процедуры минимизации, проверяются на достоверность с использованием следующих критериев. Полученная орбита считается достоверной, если выполняются следующие условия.

1. Не менее 80% засечек в текущем наборе должны иметь невязки с построенной орбитой не более 20 угловых секунд по обоим измеренным углам.
2. Должны существовать засечки, у которых невязки с построенной орбитой по обоим измеренным углам не превышают 20 угловых секунд и которые отсутствуют в базовом наборе измерений.

3. Если интервал измерений текущего набора не превышает 0.2 от периода построенной орбиты, то должно выполняться условие (18).
4. Значение обобщенного баллистического коэффициента  $k_b$  должно быть положительным.

В случае если попытка уточнения параметров орбиты оказывается неудачной (происходит отказ процедуры минимизации или полученное решение оказывается недостоверным), выполняется попытка уточнения параметров орбиты по ограниченному набору измерений. В текущий набор включаются все измерения из базового набора, к которым добавляется только один трек, имеющий наименьшие невязки с базовой орбитой. Процедура уточнения параметров орбиты по такому набору измерений полностью аналогична той, что была описана выше.

По завершении цикла привязки измерений и уточнения параметров орбиты всегда имеется некоторая орбита, отвечающая условиям достоверности, и набор измерений, по которому она была построена. Если внутри цикла не было найдено новых измерений, то в качестве такой орбиты используется начальная орбита, алгоритм построения которой был описан ранее в разделе «Построение начальной орбиты». Дальнейшие действия зависят от состава измерений орбиты. Если измерения расположены на временном интервале менее 40 минут или если число засечек менее 8, то считается, что точность знания такой орбиты недостаточна ни для ее дальнейшего сопровождения, ни для выдачи целеуказаний на наблюдательные средства. Никаких дальнейших действий с такой орбитой не выполняется. Но измерения, по которым она была построена, остаются в БД в архиве непривязанных измерений. При поступлении новых измерений они могут быть извлечены из этого архива и могут использоваться для обнаружения. Орбиты, построенные не менее чем по 8 засечкам и на временном интервале не менее 40 минут, всегда записываются в каталог КО. Действия, выполняемые с такими орбитами, рассматриваются в следующих разделах.

## Отождествление обнаруженных КО

Орбиты, которые были построены с использованием алгоритмов, рассмотренных в предыдущих двух разделах, необязательно принадлежат неизвестным КО, которые отсутствуют в каталоге. При обработке оптических измерений довольно часто возникают ситуации, когда орбиты, построенные программой обнаружения, принадлежат КО, которые в каталоге уже есть, но они не были идентифицированы нужным образом. Это происходит в том случае, если программа сопровождения не смогла идентифицировать поступившие измерения ни с одним из объектов каталога. Такую ситуацию часто называют *срывом сопровождения*, и она может иметь место как при сопровождении низкоорбитальных КО (НОКО), так высокоорбитальных (ВОКО). Но для высокоорбитальных объектов такие срывы происходят гораздо чаще, что объясняется следующими причинами.

Сопровождение низкоорбитальных объектов основано на измерениях от РЛС, которые являются всепогодными и поступают круглосуточно. Эти РЛС надежно контролируют область околоземного космического пространства над территорией России до высот около 3500 км. Любой КО, который пролетает в этой области, фиксируется, и по нему выдаются измерения. Выскоорбитальные КО (высота в апогее более 3500 км) наблюдаются главным образом оптическими средствами, которые работают только в ночное время при хороших погодных условиях. Сеть оптических средств в настоящее время такова, что она не обеспечивает постоянного контроля всего околоземного пространства. Поэтому по отдельным реально существующим выскоорбитальным КО (ВОКО) измерения могут отсутствовать в течение весьма длительного периода времени.

Особую сложность для сопровождения представляют фрагменты разрушений КО, которые имеют сложную форму, большее отношение их поверхности к массе (ОПМ), чем действующие КА, а также функционирующие аппараты, оснащенные двигателями малой тяги. В этом случае параметры орбит таких объектов значительно эволюционируют под воздействием негравитационных возмущений, обусловленных воздействием светового давления и атмосферы (если перигей орбиты менее 1500 км) и работой двигателей. Проблема сопровождения подобных объектов существует и для низких орбит. Однако на низких орбитах довольно редки случаи длительного отсутствия измерений, а объекты с большим ОПМ, как правило, быстро сгорают в атмосфере.

В силу указанных причин для выскоорбитальных объектов особое значение приобретает задача идентификации (отождествления) обнаруженных орбит с известными объектами каталога.

В настоящее не существует формальных методов, которые обеспечивали бы гарантированное решение задачи отождествления со 100% надежностью. Особенно это касается случаев, когда интервал времени между последней известной орбитой каталога и вновь обнаруженной орбитой составляет десятки или даже сотни суток. Применяемые в настоящее время методы являются по большей части эмпирическими, и зачастую окончательное решение об отождествлении вновь обнаруженной орбиты принимается аналитиком. Не вдаваясь в подробности, рассмотрим общие принципы, на которых основаны используемые в настоящее время алгоритмы отождествления.

Сам процесс отождествления условно можно разбить на три этапа. На первом этапе отсекаются те каталогизированные КО, которые заведомо не могут принадлежать вновь построенной орбите. При этом используются параметры орбит каталога без прогнозирования параметров их движения. На втором этапе по оставшимся каталогизированным КО формируется массив данных, который служит основанием для принятия решения об отождествлении с каталогизированным КО. Формирование этого массива выполняется с использованием прогнозирования параметров движения КО. Наконец, на

третьем этапе на основе сформированного массива данных принимается решение об отождествлении вновь обнаруженной орбиты. Такое решение может приниматься либо автоматической программой по критериям, которые будут приведены позже, либо аналитиком.

Введем следующие обозначения. Пусть  $T$  – период орбиты,  $i$  – наклонение,  $\Omega$  – долгота восходящего узла,  $\omega$  – аргумент перицентра,  $e$  – эксцентриситет,  $u$  – аргумент широты,  $\Delta T$ ,  $\Delta i$ ,  $\Delta \Omega$ ,  $\Delta \omega$ ,  $\Delta e$ ,  $\Delta u$  – разности этих параметров между вновь обнаруженной орбитой и последней известной орбитой очередного КО каталога, а  $\Delta t$  – разность времен привязки этих орбит в сутках.

На первом этапе из каталога выбираются все КО, для которых выполняются следующие условия:

$$|\Delta i| \leq c_i + 0.01|\Delta t|/365, \quad (25)$$

$$\Delta \Omega + \dot{\Omega} \Delta t \leq c_{\Omega}, \quad (26)$$

$$\Delta T \leq c_T. \quad (27)$$

Здесь  $c_i$ ,  $c_{\Omega}$ ,  $c_T$  – некоторые эмпирические пороги, которые в общем случае могут зависеть от параметров орбиты каталогизированного КО,  $\dot{\Omega}$  – скорость эволюции долготы восходящего узла на геоцентрических орбитах, которая вычисляется по формуле [13]

$$\dot{\Omega} = - \frac{2\pi \cos i}{\mu T \left[ \left( \frac{86400 \cdot T \sqrt{\mu}}{2\pi} \right)^{2/3} (1 - e^2) \right]^2}. \quad (28)$$

На втором этапе для всех каталогизированных орбит, удовлетворяющих условиям (25)-(27), выполняется расчет невязок между орбитами и вычисление обобщенного критерия  $\Phi$ , характеризующего близость этих орбит. Пусть  $t_{orb}$  – время привязки вновь обнаруженной орбиты. В общем случае в каталоге могут существовать две ближайшие по времени орбиты с временами привязки  $t_l$  и  $t_r$ , такими, что  $t_l \leq t_{orb} \leq t_r$ . Критерий  $\Phi$  вычисляется в моменты времени  $t_l$ ,  $t_{orb}$ ,  $t_r$  по невязкам между параметрами одной из орбит и результатом прогнозирования другой на указанный момент времени. Так, вновь обнаруженная орбита прогнозируется на моменты времени  $t_l$  и  $t_r$ , а орбиты каталога – на момент времени  $t_{orb}$ . Вычисление критерия  $\Phi$  выполняется по формуле

$$\Phi = k_1 \frac{2|\Delta T|}{3T} + 10(|\Delta i| + i\Delta\Omega) + k_2 (e|\Delta\omega| + |\Delta e|) + 0.005k_3 |\Delta u|. \quad (29)$$

Здесь безразмерные коэффициенты  $k_1, k_2, k_3$  определяются как

$$k_1 = \frac{1}{\max(0.1, \sigma_T)}, \quad k_2 = \frac{0.001}{\max(0.001, \sigma_k + \sigma_h)}, \quad k_3 = \frac{T^2}{2\pi|\Delta t_p| \max(0.01, \sigma_T)}, \quad (30)$$

где  $\sigma_T$  – среднеквадратичное отклонение (СКО) ошибки определения периода вновь обнаруженной орбиты,  $\sigma_k, \sigma_h$  – СКО ошибки определения орбитальных параметров  $h$  и  $k$ ,  $\Delta t_p$  – интервал прогнозирования.

После выполнения указанных вычислений для дальнейшего анализа выбирается результат прогнозирования, в котором значение критерия  $\Phi$  оказывается наименьшим. В формируемом массиве запоминаются значения критерия  $\Phi$  и невязок между орбитами. После завершения таких вычислений для всех КО, удовлетворяющих условиям (25)-(27), сформированный массив данных сортируется в порядке возрастания значения критерия  $\Phi$ .

Автоматическая программа обнаружения КО может принять решение об отождествлении вновь обнаруженной орбиты с одним из каталогизированных КО, если находится объект, для которого выполняется условие доминирования критерия  $\Phi$ , а разности по периоду, наклонению, долготе восходящего узла, аргументу перицентра, эксцентриситету двух орбит, а также разность по среднему блеску измерений не превышают заданных порогов. Здесь под условием доминирования критерия  $\Phi$  понимается наличие в сформированном массиве объекта, для которого значение этого критерия по крайней мере в два раза меньше, чем для любого другого. Значения порогов для проверки разности выбираются эмпирически в процессе настройки программы.

Если не удастся найти каталогизированный КО, который бы удовлетворял перечисленным выше условиям, то выполняется поиск среди объектов с двигателями малой тяги. Для отождествления может быть выбран КО с двигателями малой тяги и минимальным значением критерия  $\Phi$ , у которого невязки по наклонению, долготе восходящего узла, периоду, эксцентриситету, аргументу перицентра, расстоянию между орбитами, а также блеску в измерениях удовлетворяют заданным порогам. Однако в этом случае используются несколько большие пороги, чем в предыдущем случае.



Если среди каталогизированных объектов не удастся найти такого, который удовлетворял бы сформулированным выше условиям, то в каталоге создается новый объект, который получает статус обнаруженного или предварительно обнаруженного. Впоследствии такой объект может быть отождествлен вручную аналитиком или программой обнаружения КО в режиме дополнительного уточнения, который рассматривается в следующем разделе.

## **Режим дополнительного уточнения КО**

При обнаружении низкоорбитальных КО по измерениям от РЛС использовалась схема, при которой вновь обнаруженный объект записывался в каталог и дальнейшее уточнение его орбитальных параметров выполнялось только программой сопровождения. При обнаружении объектов по оптическим измерениям возникла необходимость введения режима дополнительного уточнения, в котором уточнение предварительно обнаруженного объекта может выполняться и программой сопровождения, и программой обнаружения. Необходимость введения такого режима обусловлена несколькими причинами, из которых выделим две основные.

Как уже отмечалось, если вновь обнаруженная орбита не была отождествлена ни с одним из каталогизированных объектов, то в каталоге создается новый объект. Этот объект получает статус обнаруженного, если у него есть измерения не менее чем на трех витках орбиты. Предполагается, что для таких объектов точность знания построенной орбиты достаточна для их последующего устойчивого сопровождения. В противном случае объект считается предварительно обнаруженным. У предварительно обнаруженных объектов точность достаточна для выдачи целеуказаний средствам наблюдения на ближайшие сутки, но недостаточна для обеспечения их сопровождения в дальнейшем. Присутствие таких объектов в каталоге нужно для организации и планирования их последующего наблюдения оптическими средствами с целью уточнения параметров их орбит. Без организации таких наблюдений сопровождение этих орбит становится проблематичным.

Источником для уточнения вновь обнаруженной орбиты могут служить не только измерения, которые выполняются уже после первоначального обнаружения. Таким источником также могут служить измерения, которые были сделаны ранее и которые хранятся в архиве непривязанных измерений. Эти измерения могли не привязаться к первоначальной орбите вследствие недостаточной точности знания ее параметров. Поэтому после уточнения параметров орбиты по вновь поступившим измерениям целесообразно повторить поиск непривязанных измерений, которые могут принадлежать предварительно обнаруженному КО.

В случае если программа сопровождения выполняет уточнение орбиты предварительно обнаруженного объекта, информация об этом передается в программу обнаружения. Программа обнаружения считывает из каталога параметры последней уточненной орбиты и выполняет действия, аналогичные

тем, что были описаны ранее в разделах «Привязка измерений и уточнение орбиты» и «Отождествление обнаруженных КО». В результате этих действий может произойти привязка дополнительных измерений из архива непривязанных и уточнение орбиты КО, а также отождествление предварительно обнаруженного КО с другим каталогизированным объектом или изменение статуса объекта с предварительно обнаруженного на обнаруженный. В режиме дополнительного уточнения программа обнаружения не создает в каталоге новых объектов. Отметим также, что решение об отождествлении предварительно обнаруженного объекта или об изменении его статуса может иметь место даже в том случае, когда уточнения орбиты в программе обнаружения не происходит. Такие решения могут приниматься на основе орбиты, которая была построена программой обнаружения.

## Результаты практической реализации

Несмотря на перечисленные выше ограничения и недостатки, созданные алгоритмы подтвердили свою работоспособность и практическую значимость. Эти алгоритмы более 10 лет используются для обнаружения неизвестных ВО КО (высота в апогее от 3500 км до 100000 км) по оптической информации от созданной кооперации из более 80 телескопов, эксплуатацию которых осуществляют Астрономический Научный Центр (АНЦ), Роскосмос, НПК СПП, ИПМ им. М.В. Келдыша, ОАО «МАК «Вымпел», ИСЗФ СО РАН и ИНАСАН.

На приводимом ниже рисунке даётся ежемесячное изменение в 2018-2022 годах основных характеристик сопровождения ВО КО, впервые обнаруженных оптическими средствами этой кооперации: число ВО КО в БД, число измеренных в течение месяца ВО КО, число потерянных ВО КО и процент потерянных ВО КО.

За 2018-2022 годы число ВО КО в БД, впервые обнаруженных оптическими средствами российской кооперации, увеличилось с ~3000 до ~8000. В момент их обнаружения они отсутствовали в публичном каталоге Стратегического Командования США (<https://www.space-track.org/>).

С июня 2014 года данные об обнаруженных объектах еженедельно публикуются на сайте ПАО «МАК «Вымпел» <http://spacedata.vimpel.ru>. Некоторые из них (менее 10%) впоследствии появились и на американском сайте.

Следует отметить, что на начало 2023 года регулярно публикуются данные о ~12000 ВО КО. Таким образом, около 2/3 всех известных ВО КО открыты с использованием описанного здесь алгоритма обнаружения по информации оптических отечественных наблюдательных средств.

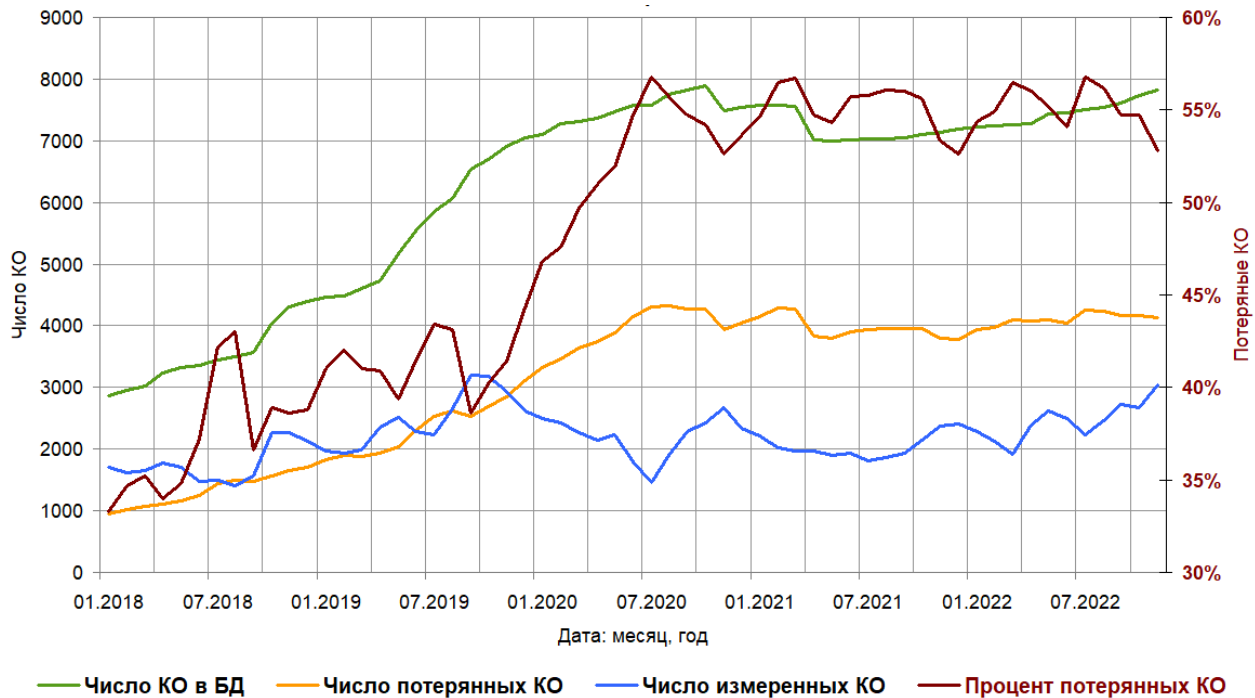


Рис. 1. Помесячное изменение в 2018-2022 годах характеристик сопровождения КО, обнаруженных оптическими средствами российской кооперации.

## Заключение

Обнаружение и сопровождение высокоорбитальных космических объектов является комплексной научно-технической задачей, для решения которой требуется не только разработка программно-алгоритмического обеспечения по обработке поступающих измерений в центрах обработки информации, но и планирование наблюдений и организация взаимодействия между наблюдательными пунктами. Хотя вопросы планирования и организации наблюдений в настоящей работе не рассматривались, необходимость их поддержки была учтена при проектировании алгоритмов, обсуждаемых в настоящей работе.

Сформулируем условия, которые требуются для обнаружения неизвестных КО с помощью представленных алгоритмов. Обнаружение возможно при выполнении одного из следующих условий:

- наличие одного длинного трека (не менее 12 минут для ГСО и не менее 4 минут для других объектов);
- наличие двух коротких треков на интервале не более 3 часов;
- наличие трех коротких треков на интервале не более одного витка орбиты.

Сформулированные условия являются необходимыми, но не достаточными для обнаружения. Если перечисленные выше условия не выполняются (например, есть несколько коротких треков, но на разных витках), то КО заведомо не будет обнаружен. Таким образом, предложенные алгоритмы имеют ограниченную функциональность и не гарантируют обнаружения при редко выполняемых измерениях.

Созданные алгоритмы не обеспечивают решения задач обнаружения в полностью автоматическом режиме. Во многих случаях для эффективного сопровождения каталога КО требуется вмешательство аналитика, который может изменять решения, принятые автоматической программой. В первую очередь это касается решений о достоверности построенных орбит и решений об отождествлении обнаруженных орбит с каталогизированными объектами. Но такое положение дел при ведении каталога космических объектов характерно не только для задач обнаружения. В данном случае основная цель при создании автоматической программы обнаружения состояла в том, чтобы максимально избавить аналитика от выполнения рутинных операций и снабдить его информацией для принятия обоснованных решений.

### **Библиографический список**

- [1] Аким Э.Л., Энеев Т.М. Определение параметров движения космического летательного аппарата по данным траекторных измерений // *Космические исследования*. 1963. Т.1. № 1. С. 5-50
- [2] Хуторовский З.Н. Ведение каталога космических объектов // *Космические исследования*. 1993. Т. 31. № 4. С. 101 – 114.
- [3] Khutorovsky Z.N., Boikov V.F., Pilaev L.N. Low-perigee Satellite Catalogue Maintenance // *Near-Earth Astronomy, Russian Academy of Science, Moscow, 1998.*
- [4] Khutorovsky Z.N., Boikov V.F., Pilaev L.N. Catalog Maintenance of Low-Earth-Orbit Satellites: Principles of the Algorithm // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 22, № 6, 1999, pp. 745-758.
- [5] Самотохин А.С., Хуторовский З.Н. Определение прогнозного положения ИСЗ при ограниченных ошибках измерений // *Космические исследования*, 2011. Т 49. № 6. С. 526–537.
- [6] Khutorovsky Z.N., Samotokhin A.S., Alfriend K.T. Guaranteed Approach for Orbit Determination with Limited Error Measurements // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 36, № 4, 2013, pp. 1186-1193, doi: <http://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/1.56220>.
- [7] Субботин М.Ф. Введение в теоретическую астрономию. М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., – 1968.
- [8] David A. Vallado. *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*. Microcosm Press/Springer; 3rd edition – April 20, 2007.
- [9] Boykov V.F., Khutorovsky Z.N., Sbytov N.N. An Algorithm of Preliminary HEO Orbital Parameters Determination Based on Three Optical Positional Measurements. // *Proc. the 6th US/Russian Space Surveillance Workshop, Russia, Pulkovo — 2005.*
- [10] Lagrange J.L. Sur le problème de la détermination des orbites des comètes d'après trois observations, 1-er et 2-ième mémoires. *Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1778.
- [11] Richard H. Battin. *An Introduction to the Mathematics and Methods of*

Astrodynamics. American Institute of Aeronautics & Astronautics, 1999.

- [12] Самотохин А.С., Хуторовский З.Н. Метод первоначального определения параметров околоземных орбит по трем угловым измерениям // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 44. 31 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-44>.
- [13] Эльясберг П.Е. Введение в теорию движения ИСЗ, М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., – 1965.