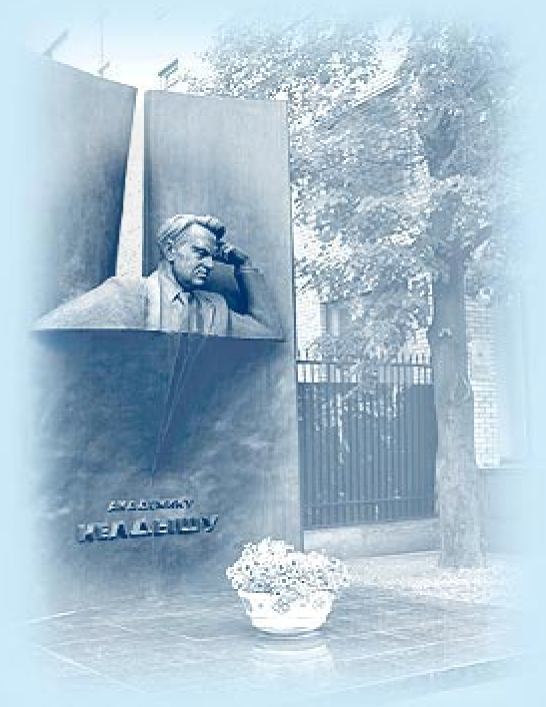
ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 34 за 2023 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

А.В. Колесниченко

К построению релятивистских гидродинамических уравнений в искривленном пространстве-времени, записанных в абстрактных геометрических обозначениях

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Колесниченко А.В. К построению релятивистских гидродинамических уравнений в искривленном пространстве-времени, записанных в абстрактных геометрических обозначениях // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2023. № 34. 34 с. **https://doi.org/10.20948/prepr-2023-34**
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2023-34

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

А.В. Колесниченко

К построению релятивистских гидродинамических уравнений в искривленном пространстве-времени, записанных в абстрактных геометрических обозначениях

Москва – 2023

Колесниченко А.В.

К построению релятивистских гидродинамических уравнений в искривленном пространстве-времени, записанных в абстрактных геометрических обозначениях.

Аннотация. В работе представлена процедура макроскопического вывода системы уравнений релятивистской гидродинамики неидеальных жидкостей в абстрактной геометрической форме, которая не зависит от выбранных пространственно-временных координат и сводится к уравнениям, справедливым как в плоском, так и в искривленном пространстве-времени. Приведенная процедура, служащая связующим звеном между негравитационными законами физики и гравитацией, основана на принципе эквивалентности Эйнштейна, который гарантирует, что законы физики, записанные в абстрактно геометрическом представлении, имеют одинаковый вид как в плоском, так и в искривленном пространстве-времени. Предложена современная формулировка релятивистской гидродинамики, основанная как на классической неравновесной термодинамике (теория первого порядка), так и на расширенной необратимой термодинамике (теория второго порядка).

Представленная теория имеет как сугубо концептуальное, так и прикладное значение. Эта теория имеет свои приложения в таких важных областях знаний, как ядерная физика, астрофизика и космология. В частности, в вязкостных космологических моделях объемная вязкость выступает в роли причины диссипации, оказывающей значительное воздействие на процессы во Вселенной.

***Ключевые слова*:** принцип эквивалентности Эйнштейна, законы физики в искривленном пространстве-времени, релятивистская расширенная термодинамика.

\

Kolesnichenko Aleksander Vladimirovich

On the construction of relativistic hydrodynamic equations in curved space-time written in abstract geometrical notations.

Abstract. This paper presents a macroscopic derivation of the system of equations of relativistic dissipative hydrodynamics in an abstract geometrical form, which does not depend on the chosen space-time coordinates and reduces to equations valid in both flat and curved space-time. The above procedure, serving as a link between the non-gravitational laws of physics and gravitation, is based on Einstein's equivalence principle which guarantees that the laws of physics written in abstract geometrical representation have the same form both in flat and curved spacetime. A modern formulation of relativistic hydrodynamics based on both classical nonequilibrium thermodynamics (first-order theory) and expanded irreversible thermodynamics (second-order theory) is proposed.

The theory presented has both purely conceptual and applied significance. In particular, this theory has applications in such important fields of knowledge as nuclear physics, astrophysics and cosmology. For example, in viscous cosmological models, bulk viscosity acts as a cause of dissipation, which has a significant impact on the processes in the Universe.

Keywords: Einstein's equivalence principle, laws of physics in curved space-time, relativistic expanded thermodynamics.

ВВЕДЕНИЕ

Основная цель настоящей работы состоит в том, чтобы дать макроскопический вывод справедливых в искривленном пространстве-времени, релятивистских гидродинамических уравнений для простой диссипативной космологической жидкости, записанных в общековариантной форме, т.е. в абстрактной геометрической форме, которая не зависит от выбранных пространственно-временных координат и сводится к правильным уравнениям при отсутствии гравитации. В серии препринтов (Колесниченко, 2023a,b,c,d) автор данной работы предпринял попытку систематического вывода гидродинамических уравнений для релятивистской жидкости в случае отсутствия гравитационного поля (т.е. в плоском пространстве-времени) в рамках релятивистских кинетических уравнений (классического, базирующегося на статистике Больцмана-Гиббса, и неэкстенсивного, базирующегося на статистике Тсаллиса). В отличие от многих известных публикаций, автор при конструировании определяющих соотношений для диссипативных потоков следовал тому пути конструирования гидродинамики, который был блестяще осуществлен де Гроотом в его давно ставшей классической монографии по термодинамике необратимых процессов (см. de Groot, Mazur, 1962).

Термодинамический анализ космологических диссипативных жидкостей в плоском случае неоднократно применялся в специально-релятивистской области (см., например, Eckart, 1940; Kluitenberg и др., 1953; Israel, 1963, 1976; de Groot и др., 1968, 1969, 1975; Meixner, 1969; Weinberg, 1971; Alts, Müller, 1972; Cox и др., 1976; Havas, Swenson, 1979; Hiscock, Lindblom, 1985; Liu и др., 1986; Bater, Romatschko, 2007). Его распространение на общие релятивистские рамки искривленного пространства-времени представляется, вообще говоря, относительно легким делом (при этом кривизна пространства-времени необязательно должна быть малой), если для вывода ковариантных гидродинамических уравнений использовать путь простой замены обычных производных на ковариантные и замены метрики Минковского на ее римановый аналог. При этом подобная процедура основана на принципе эквивалентности (ПЭ) Эйнштейна, который служит связующим звеном между негравитационными законами физики и гравитацией. Согласно этому принципу, в любой пространственно-временной точке в произвольном гравитационном поле существует «лоренцева локально инерциальная» система покоя (называемая также сопутствующей системой координат и обозначаемая индексом LR (*local rest*)), в которой эффекты гравитации отсутствуют в достаточно малой пространственно-временной окрестности данной точки. Это означает, что в этой системе отсчета в любой момент времени и в любом месте

Вселенной все (негравитационные) законы физики должны принимать тот вид, который они имеют в специальной теории относительности. Таким образом, этот принцип позволяет записать дифференциальные уравнения, описывающие эволюцию любой достаточно малой физической системы в гравитационном поле, если известны уравнения, определяющие это поведение при отсутствии гравитации. Для этого необходимо лишь записать моделирующие уравнения в абстрактной геометрической форме, т.е. в форме, которая не зависит от выбранных пространственно-временных координат и сводится к правильным уравнениям при отсутствии гравитации. Затем, опираясь на ПЭ, можно обобщить эти физические законы специальной теории относительности на случай искривленного пространства-времени, причем кривизна может быть произвольно велика или почти произвольно велика. Таким образом, ПЭ гарантирует, что законы физики, записанные в *абстрактной геометрической форм*е, имеют одинаковый вид как в плоском, так и в искривленном пространстве-времени. Они отличаются только тем, что частная производная и градиент в плоском пространстве-времени заменяются ковариантной производной и градиентом в искривленном пространстве-времени. Собственно, эту процедуру и предполагается осуществить в представленной работе при конструировании замкнутой системы релятивистских гидродинамических уравнений первого и второго порядка, моделирующих эволюцию космологической простой диссипативной жидкости (Мизнер и др., 1977).

Феноменологическое моделирование движения релятивистской жидкости основывается на наборе базисных макроскопических величин, которые, описывая систему вне равновесия, удовлетворяют балансовым уравнениям, следующим из законов сохранения числа частиц и энергии-импульса. В чисто континуальной теории эти законы постулируются. Однако в рамках кинетической теории они выводятся из соответствующих законов сохранения, справедливых на микроскопическом уровне описания (Jüttner, 1911; van Dantzig, 1939; Kluitenberg и др., 1953; Israel, 1963; Chandrasekhar, 1965; de Groot и др., 1968, 1969; Weinberg, 1971,1972; Liu и др., 1986).

Для того чтобы объединить в единую и согласованную схему необратимые явления переноса, происходящие в простой (без химических превращений) космологической жидкости, релятивистская неравновесная термодинамика при феноменологическом конструировании должна базироваться, как и классическая, на двух фундаментальных идеях. Первая идея связана с гипотезой о существовании локального равновесия в неравновесной системе, математическим выражением которой является равновесное соотношение Гиббса для энтропии в его локальной форме. Она подразумевает, что вне равновесия энтропия системы зависит локально от того же самого набора макроскопических переменных (плотности, температуры и гидродинамической 4-скорости), что и в равновесном состоянии. Вторая идея заключается в том, что в присутствии необратимых процессов существует рост энтропии, который, согласно второму закону термодинамики, нигде и никогда не бывает отрицательным. Математически эта идея принимает форму уравнения баланса энтропии, которое отражает тот факт, что локальная энтропия системы изменяется как из-за потока энтропии, так и из-за наличия источника энтропии, представленного в этом уравнении в виде суммы произведений независимых диссипативных потоков и сопряженных с ними термодинамических сил. Явная форма уравнения баланса энтропии позволяет сконструировать феноменологические линейные определяющие соотношения для релятивистских потоков тепла и вязкости и тем самым получить полное гидродинамическое описание релятивистской системы, находящейся вне равновесия. При этом важно отдавать себе отчет в том, что предположение о локальном равновесии может оказаться слишком грубым допущением для достаточно обширного класса релятивистских систем (например, астрофизических высокоэнергетических систем, связанных с крутыми градиентами или быстрыми изменениями). Таким образом, разработанная Эккартом (Eckart, 1940) и Ландау и Лифшицем (Landau, Lifshitz, 1959) на основе принципа локального равновесия стандартная теория релятивистской термогидродинамики содержит фундаментальный недостаток, который приводит к параболическим дифференциальным уравнениям и, следовательно, к бесконечным скоростям распространения термических и вязкостных возмущений космологической среды, что противоречит принципу причинности (Israel, 1976; Weinberg, 1971). Кроме этого, эта теория приводит к линейным определяющим соотношениям, отличающимися общей неустойчивостью – фактически при наличии малых возмущений основанные на них решения экспоненциально расходятся от состояния равновесия (Hiscock, Lindblom, 1985).

В последние годы были выполнены интенсивные исследования в области так называемой расширенной необратимой термодинамики (РНТ), выходящей за пределы гипотезы о локальном равновесии за счёт расширения числа базисных независимых переменных при рассмотрении близких к равновесному состоянию систем, а также за счёт модификации таких концептуальных понятий, как энтропия, температура, давление и химические потенциалы (см. Müller, Ruggeri 1998; Casas-Vazquez, Jou, 2003; Жоу и др., 2006). В отличие от классической необратимой термодинамики (КНТ), эта теория вводит в рассмотрение в качестве дополнительных структурных параметров диссипативные термодинамические потоки, фигурирующие в уравнениях баланса массы, импульса и энергии. К ним, в частности, относятся: гидродинамическая скорость, тензор напряжений (минус его гидростатическая часть), тепловой поток (полный поток энергии минус потоки, связанные с адвекцией и механической энергией) и т.п. Согласно теории РНТ, энтропия также зависит от диссипативных потоков, причем выражение для потока энтропии может содержать дополнительные члены, отличные от $T^{-1}\boldsymbol{J}_q$. Использование этих новых параметров состояния позволяет термодинамически получить релаксационные определяющие соотношения для сильно неравновесной системы, которые не могут быть получены в рамках КНТ. Таким образом, формализм РНТ предназначен для описания явлений с относительно длительным временем релаксации и большой длиной корреляций, а также высокочастотных и коротковолновых явлений (см. Casas-Vazquez, Jou, 2003).

В данной работе сначала выводятся общерелятивистские уравнения гидродинамики для неидеальной космологической жидкости в классе теорий первого порядка в абстрактной геометрической форме, не зависящей от выбранных пространственно-временных координат. Затем стандартная линейная аппроксимация для прироста энтропии обобщается в рамках РНТ на случай квадратичного приближения к равновесию. Это позволяет получить модифицированные определяющие соотношения, содержащие релаксационные члены, которые обеспечивают, в частности, конечные скорости распространения волн возмущения.

В представленной работе заново рассматривается с единой ковариантной независимой точки зрения общая релятивистская механика и необратимая релятивистская термодинамика для диссипативной космологической жидкости. Причем, в отличие от многих предыдущих работ, мы при конструировании линейных и квадратичных определяющих соотношений для диссипативных потоков следуем той точке зрения, что эти соотношения должны быть сформулированы с помощью явного выражения для прироста энтропии. При таком выборе транспортные (кинетические) коэффициенты принимают вид, который в контексте релятивистских неравновесной и расширенной термодинамик является наиболее естественным.

Отметим, что для простоты изложения электродинамика при наличии тяготения нами не рассматривалась; кроме этого, предполагалось, что космологическая жидкость изотропна, материя (масса покоя) не может превращаться в другие формы энергии и не существует внешних сил. Кроме этого, если не оговорено особо, использованы единицы измерения, в которых постоянная Планка и скорость света равны единице.

1. ОСНОВНЫЕ МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ

1.1. Предварительные замечания (операции над тензорами)

При континуальном описании неоднородной космологической системы макроскопические величины являются функциями пространственно-временных координат $x^{\mu}:=(t,\mathbf{x})$, где индекс μ принимает 4 значения: $\mu=0,1,2,3$; здесь t − время, $\mathbf{x}$ − пространственные координаты. Далее при формулировании законов движения космологической жидкости в искривленном пространстве-времени будем использовать дифференциальные соотношения между тензорными величинами. Поскольку космологические законы не зависят от выбора системы координат, то в теории дифференцирования тензоров учет этой особенности реализуется благодаря применению специального ковариантного дифференцирования. Оператор ковариантного дифференцирования далее будем обозначать как

$$\nabla(..)\to\partial(..)^{\mu}/\partial x^{\nu}+\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu}(..)^{\alpha},$$

где $\dfrac{\partial}{\partial x^{\nu}}=\left(\dfrac{\partial}{\partial t},\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)$, $\quad \Gamma^{\mu}_{\alpha\nu}=\frac{1}{2}g^{\gamma\mu}\left(\dfrac{\partial g_{\gamma\nu}}{\partial x^{\alpha}}+\dfrac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\nu}}-\dfrac{g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\gamma}}\right)$ − символы Кристоффеля, которые связаны с метрическим тензором $\mathbf{g}\to g^{\mu\nu}=\mathrm{diag}\,(1,-1,-1,-1)$.

Некоторые свойства метрического тензора.

$$\mathbf{g}\to g_{\mu\nu}\quad\text{(метрическая матрица)},\quad \mathrm{g}=\det(g_{\mu\nu}),$$

$$g^{\alpha\mu}g_{\mu\beta}=g^{\alpha}_{\beta}=\delta^{\alpha}_{\beta},\quad g^{\alpha\mu}=(g_{\mu\beta})^{-1},\quad \mathrm{u}^{\mu}g_{\mu\nu}=\mathrm{u}_{\nu},\quad \mathrm{T}_{\mu\nu}=\mathrm{T}^{\alpha\beta}g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}$$

Алгебраические операции над тензорами.

$$\mathbf{J}_q\cdot\mathbf{u}\to \mathrm{J}^{\mu}_q\mathrm{u}_{\mu}\quad\text{(скаляр)},\quad \mathbf{u}\cdot\mathbf{T}\to\mathrm{u}_{\nu}\mathrm{T}^{\nu\sigma},\quad \mathbf{T}\cdot\mathbf{u}\to\mathrm{T}^{\nu\sigma}\mathrm{u}_{\sigma}\quad\text{(вектор)},$$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{u}\to\mathrm{u}_{\nu}\mathrm{T}^{\nu\sigma}\mathrm{u}_{\sigma}\quad\text{(скаляр)},\quad \mathbf{u}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{h}\to\mathrm{u}_{\nu}\mathrm{T}^{\nu\sigma}\mathrm{h}^{\mu}_{\sigma}\quad\text{(вектор)},$$

$$\mathbf{h}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{h}\to\mathrm{h}^{\mu}_{\sigma}\mathrm{T}^{\sigma\tau}\mathrm{h}^{\nu}_{\tau}\quad\text{(тензор)},$$

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{h}\to\mathrm{T}^{\nu\sigma}\mathrm{h}^{\mu}_{\sigma}\quad\text{(тензор)},\quad \mathbf{T}:\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\to\mathrm{T}^{\mu\nu}\mathrm{T}_{\nu\mu}\quad\text{(скаляр)}.$$

$$\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}\to\mathrm{a}^{\mu}\mathrm{b}_{\nu},\quad \mathbf{a}\otimes\mathbf{T}\to\mathrm{a}_{\mu}\mathrm{T}^{\nu\sigma},$$

$$\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\otimes(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}),\quad \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})=(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})\otimes\mathbf{b}.$$

$$\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}:\mathbf{c}\otimes\mathbf{d}=(\mathbf{a}\otimes\mathbf{c}):(\mathbf{b}\otimes\mathbf{d})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})\otimes(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\otimes\mathbf{d}),$$

$$(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\otimes\mathbf{d})=(\mathbf{a}\otimes\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}\otimes\mathbf{d})=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{d}.$$

Ковариантная производная и ее свойства

$$\nabla\mathbf{u} \to \partial u^{\nu} / \partial x^{\mu} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\mu} u^{\alpha}$$

– ковариантная производная от контравариантного векторного поля $\mathbf{u}$;

$$\nabla\mathbf{T} \to \partial \mathrm{T}^{\alpha\beta} / \partial x^{\gamma} + \mathrm{T}^{\tau\beta}\,\Gamma^{\alpha}_{\tau\gamma} + \mathrm{T}^{\alpha\tau}\,\Gamma^{\beta}_{\tau\gamma}$$

– ковариантная производная от контравариантного тензорного поля;

$$\nabla\cdot\mathbf{T} \to \frac{\partial \mathrm{T}^{\alpha\beta}}{\partial x^{\alpha}} + \mathrm{T}^{\tau\beta}\,\Gamma^{\alpha}_{\alpha\tau} + \mathrm{T}^{\alpha\tau}\,\Gamma^{\beta}_{\tau\alpha} = \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (\sqrt{g}\,\mathrm{T}^{\alpha\beta}) + \Gamma^{\beta}_{\tau\alpha}\,\mathrm{T}^{\alpha\tau} \right)$$

– дивергенция контравариантного тензора;

$$\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = (\nabla\otimes\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} + (\nabla\otimes\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}$$

– градиент скалярного произведения двух векторов;

$$\nabla\cdot(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}) = (\nabla\cdot\mathbf{a})\otimes\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\nabla\otimes\mathbf{b}$$

– дивергенция тензорного произведения.

1.2. Макроскопические параметры состояния космологической жидкости

В континуальной специальной теории относительности основными параметрами состояния являются следующие контравариантные величины: 4-вектор потока частиц $\mathbf{N}$, симметричный 4-тензор энергии-импульса $\mathbf{T}$ и 4-вектор энтропии $\mathbf{S}$.

Гидродинамическая скорость. Одним из основных понятий при конструировании релятивистской гидродинамики является также гидродинамическая скорость $\mathbf{u}$ (контравариантный четырехмерный вектор), которая используется в определении ряда физических величин, играющих важную роль при установлении макроскопических законов сохранения. В космологической литературе используются в основном два специфических способа определения гидродинамической скорости $\mathbf{u}$. В подходе Ландау и Лифшица (Landau, Lifshitz, 1959) величина $\mathbf{u}$ определяется как скорость переноса энергии, а в подходе Эккарта (Eckart, 1940) величина $\mathbf{u}$ является скоростью переноса частиц. Оба подхода совершенно эквивалентны. Однако в данной работе использован более удобный подход Эккарта, в котором скорость $\mathbf{u}$ выражена непосредственно через 4-вектор потока частиц $\mathbf{N}$ с помощью следующего определения: $\mathbf{u} = \mathbf{N} / \sqrt{\mathbf{N}\cdot\mathbf{N}^{\Downarrow}}$. Согласно этому определению величина $\mathbf{u}$ представляет собой среднюю скорость частиц. Поскольку скорость $\mathbf{u}$ является времениподобным контравариантным вектором, то возможно в каждой пространственно-временной точке рассматривать локальную систему покоя (называемую также сопутствующей системой координат), обозначаемую далее индексом LR (local rest). При использовании подхода Эккарта пространственные компоненты 4-вектора потока частиц $\mathbf{N}$ в системе координат LR обращаются в нуль: $\mathrm{N}^i_{\mathrm{LR}} = 0, \quad (i = 1,2,3)$, а гидродинамическая скорость имеет следующие компоненты: $\mathrm{u}_{\mathrm{LR}} = (1,0,0,0)$. Таким образом, 4-скорость $\mathbf{u}$ задается в виде времениподобного вектора с модулем единица в каждой пространственно-временной точке:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}^{\Downarrow} = 1. \tag{1}$$

Далее символ «$\Downarrow$» будет означать ковариантный дуал относительно $\mathbf{g}$ (понижение индекса). Аналогично «$\Uparrow$» означает ковариантный дуал (повышение индекса), а символ «$\Updownarrow$» используется для тензора со смешанными компонентами.

Ковариантное дифференцирование выражения (1) по пространственно-временным координатам, $\boldsymbol{\nabla}$, приводит к используемому далее вспомогательному соотношению: $\mathbf{u}\otimes\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} = 0$. С помощью вектора гидродинамической скорости можно определить так называемый *тензор-проектор жидкости*

$$\mathbf{h} := \mathbf{g} - \mathbf{u}\otimes\mathbf{u}), \tag{2}$$

который при свертке с произвольным 4-вектором уничтожает часть вектора, параллельную скорости $\mathbf{u}$: $\mathbf{h}\cdot\mathbf{u}^{\Downarrow} = 0$, что является следствием соотношений (1) и (2). Проекционный контравариантный тензор $\mathbf{h}$ характеризуется следующими свойствами:

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{h}\cdot\mathbf{h}^{\Downarrow\Downarrow} = \mathbf{h}^{\Updownarrow}, \quad \mathbf{h}:\mathbf{h}^{\Downarrow\Downarrow} = 3. \tag{3}$$

Заметим, что с учетом нормировки (1) и определения тензора проектора (2), выражение для скорости Эккарта эквивалентно следующим двум формам:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}/(\mathbf{N}\cdot\mathbf{u}^{\Downarrow}), \quad \mathbf{h}\cdot\mathbf{N}^{\Downarrow} = 0. \tag{4}$$

Основные термодинамические величины. С помощью полевых величин $\mathbf{N}, \mathbf{T}, \mathbf{S}$ и гидродинамической скорости $\mathbf{u}$ можно определить следующие характеризующие простую жидкость термодинамические величины, измеренные в системе отсчета, покоящейся относительно жидкости: плотность числа барионов n, плотность энергии $\varepsilon = en$, тепловой поток $\mathbf{J}_q$, тензор давления $\mathbf{P}$ и плотность энтропии sn. При этом

(i) Плотность числа барионов (т. е. число барионов на единицу трехмерного объема в системе координат LR) n задается как скалярная величина

$$n = \mathbf{N} \cdot \mathbf{u}^{\Downarrow}; \tag{5}$$

в системе отсчета LR эта величина принимает значение: $n_{\mathrm{LR}} = \mathrm{N}^0_{\mathrm{LR}}$, что в соответствии с определением (5) показывает, что это действительно плотность барионов.

(ii) Плотность полной массы-энергии жидкости ε (включающей массу покоя, тепловую энергию, энергию сжатия и т. д.) определяется выражением

$$\varepsilon = e\,n = \mathbf{u}^{\Downarrow} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}^{\Downarrow}, \tag{6}$$

где e – средняя энергия на один барион; вектор скорости $\mathbf{u}$ в формуле (6) имеет ковариантное представление; в системе покоя LR определение энергии (6) сводится к выражению: $\varepsilon_{\mathrm{LR}} = e_{\mathrm{LR}} n_{\mathrm{LR}} = \mathrm{T}^{00}_{\mathrm{LR}}$.

(iii) Энтальпия (или тепловая функция) на один барион определяется как

$$h = e + p / n, \tag{7}$$

где p – равновесное изотропное давление.

(iv) Контравариантный 4-вектор потока тепла $\mathbf{J}_q$ определяется выражением

$$\mathbf{J}_q = \mathbf{u}^{\Downarrow} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{h}^{\Updownarrow}, \tag{8}$$

где в сопутствующей системе координат тепловой поток имеет компоненты: $\mathrm{J}^0_{q,\mathrm{LR}} = 0$, $\mathrm{J}^i_{q,\mathrm{LR}} = \mathrm{T}^{0i}_{\mathrm{LR}}$, $(i = 1, 2, 3)$; в ковариантном представлении вектора $\mathbf{J}_q$ имеет место условие ортогональности теплового потока и скорости

$$\mathbf{J}_q \cdot \mathbf{u}^{\Downarrow} = 0, \tag{9}$$

как это непосредственно следует из соотношений (8) и $\mathbf{h} \cdot \mathbf{u}^{\Downarrow} = 0$.

(v) Контравариантный 4-тензор давления $\mathbf{P}$ определяется формулой

$$\mathbf{P} = \mathbf{h}^{\Updownarrow} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{h}^{\Updownarrow}. \tag{10}$$

Здесь тензорный оператор $\mathbf{h}$ имеет смешанные компоненты; из определения (10) следует, что тензор $\mathbf{P}$ симметричен, поскольку тензор энергии-импульса симметричен; для дальнейших целей тензор давления удобно разбить на «обратимую» и «необратимую» части:

$$\mathbf{P} = -p\mathbf{h} + \mathbf{\Pi}, \tag{11}$$

где величина $\mathbf{\Pi}$ называется тензором вязкого давления, $\mathbf{u}^{\Downarrow}\cdot\mathbf{\Pi}=0$; в локальной системе покоя тензор давления является чисто пространственной величиной: $\mathrm{P}^{00}_{\mathrm{LR}}=0,\ \mathrm{P}^{0i}_{\mathrm{LR}}=\mathrm{P}^{i0}_{\mathrm{LR}}=0,\quad \mathrm{P}^{ij}_{\mathrm{LR}}=\mathrm{T}^{ij}_{\mathrm{LR}},\quad (i,j=1,2,3)$.

(vi) Плотность энтропии S определяется как скаляр

$$S=sn=\mathbf{S}\cdot\mathbf{u}^{\Downarrow}, \tag{12}$$

где s представляет собой энтропию на барион, в сопутствующей системе LR это определение принимает вид: $sn=S^{0}_{\mathrm{LR}}$, из которого видно, что $S=ns$ представляет собой плотность энтропии (энтропия на единицу объема).

Таким образом, с учетом определений плотности энергии (6), потока тепла (8) и тензора давления (10) можно записать следующие абстрактные геометрические соотношения:

$$\varepsilon=\mathbf{u}^{\Downarrow}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{u}^{\Downarrow},\quad \mathbf{J}_q=\mathbf{u}^{\Downarrow}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{h}^{\Updownarrow},\quad \mathbf{\Pi}-p\,\mathbf{h}=\mathbf{h}^{\Updownarrow}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{h}^{\Updownarrow}. \tag{13}$$

Разложение тензора энергии-импульса. С помощью определения (2) для проекционного тензора $\mathbf{h}$ можно доказать следующее тождество (de Groot и др.,1968):

$$\mathbf{T}=\mathbf{T}^{(0)}+\mathbf{T}^{(1)}, \tag{14}$$

где $\mathbf{T}^{(0)}=\varepsilon\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}-p\,\mathbf{h}$ – «обратимая» часть, а $\mathbf{T}^{(1)}=\mathbf{J}_q\otimes\mathbf{u}+\mathbf{u}\otimes\mathbf{J}_q+\mathbf{\Pi}$ – «необратимая» часть тензора энергии-импульса. Эти две формы играют важную роль при выводе макроскопических законов сохранения.

2. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ В ОБЩЕКОВАРИАНТНОЙ ФОРМЕ

Прежде чем приступить к выводу релятивистских гидродинамических уравнений, введем в рассмотрение операторы градиента и конвекционной производной по времени.

2.1. Производная по времени и градиент

С помощью гидродинамической 4-скорости $\mathbf{u}$ можно ковариантную производную по пространственно-временным координатам $\mathbf{\nabla}$ разложить на временноподобную и пространственноподобную части. С использованием тензора-проектора $\mathbf{h}$ запишем тождество

$$\boldsymbol{\nabla}^{\Uparrow} = \mathbf{u}\otimes(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}) + (\mathbf{g}-\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})\cdot\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{u}\otimes \mathrm{D}_{\mathrm{u}} + \nabla_g, \tag{15}$$

где введены обозначения: $\mathrm{D}_u = \mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}$, $\nabla_g = \mathbf{h}\cdot\boldsymbol{\nabla}$. Оператор D_u называется конвекционной производной по времени (в локальной системе покоя он представляет собой чисто временное дифференцирование, $\mathrm{D}_{u\mathrm{LR}} = \partial/\partial t$); аналогично четырехмерный контравариантный оператор градиента ∇_g в сопутствующей системе отсчета является чисто пространственным, поскольку в этом случае он имеет вид: $\nabla^0_{\mathrm{gLR}} = 0,\ \nabla^i_{\mathrm{gLR}} = -\nabla_{\mathrm{gLR}\,i} = -\partial/\partial x^i$, или $\mathbf{u}\cdot\nabla_g^{\Downarrow} = 0$.

2.2. Разложение тензора градиента 4-скорости на независимые компоненты

Можно показать, что $\boldsymbol{\nabla}^{\Uparrow}\mathbf{u} = \mathbf{u}\otimes \mathrm{D}_{\mathrm{u}}\,\mathbf{u} + \nabla_g\mathbf{u}$ можно разложить следующим образом на «несводимые» компоненты:

$$\boldsymbol{\nabla}^{\Uparrow}\otimes\mathbf{u} = \mathbf{u}\otimes(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} + (\mathbf{h}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} = \mathbf{u}\otimes\mathbf{a} + \tfrac{1}{3}\mathbf{h}\theta - \tfrac{1}{2}\left\{\left[(\mathbf{h}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u}\right]^{\mathrm{T}} - (\mathbf{h}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u}\right\} +$$

$$+\tfrac{1}{2}\left\{(\mathbf{h}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} + \left[(\mathbf{h}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u}\right]^{\mathrm{T}}\right\} - \tfrac{1}{3}\mathbf{h}\theta = -\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\theta} + \mathbf{u}\otimes\mathbf{a} =$$

$$= -\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\sigma} + \tfrac{1}{3}\mathbf{h}\theta + \mathbf{u}\otimes\mathbf{a}, \tag{16}$$

где

$$\mathbf{a} = (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} = \mathrm{D}_u\,\mathbf{u} \tag{17}$$

− 4-ускорение жидкости;

$$\boldsymbol{\omega} = \tfrac{1}{2}\left[(\mathbf{h}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u})^{\mathrm{T}} - \mathbf{h}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}\right] = \tag{18}$$

− пространственноподобный антисимметричный тензор вращения жидкости;

$$\boldsymbol{\theta} = \tfrac{1}{2}\left[\mathbf{h}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} + (\mathbf{h}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u})^{\mathrm{T}}\right] \tag{19}$$

– пространственноподобный симметричный тензор сдвига жидкости;

$$\theta = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} = \nabla_g\cdot\mathbf{u} \tag{20}$$

− дивергенция объемного расширения (скорость увеличения объема жидкостного элемента);

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\theta} - \tfrac{1}{3}\theta\,\mathbf{h} = \tfrac{1}{2}\left[\mathbf{h}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} + (\mathbf{h}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u})^{\mathrm{T}}\right] - \tfrac{1}{3}\theta\,\mathbf{h} \tag{21}$$

− бесследовой тензор сдвига неидеальной жидкости.

2.3. Законы сохранения в искривленном пространстве-времени

Общерелятивистские гидродинамические уравнения описываются законом сохранения числа барионов и законом сохранения энергии-импульса. В рассматриваемой здесь континуальной теории законы сохранения постулируются. Заметим, что, записанные в абстрактной геометрической форме, эти законы сохранения являются справедливыми равным образом как в плоском пространстве-времени, так и в искривленном (принцип эквивалентности).

Уравнение непрерывности. Макроскопический закон сохранения 4-вектора $\mathbf{N}$ потока числа барионов имеет вид:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{N}=0. \tag{22}$$

Полная числовая плотность космологической жидкости задается, согласно определениям (4) и (5) для скорости $\mathbf{u}$ и плотности n соответственно, вектором барионного тока $\mathbf{N}=n\mathbf{u}$. Подставляя его в (22), получим следующее уравнение непрерывности для плотности n:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(n\mathbf{u})=0. \tag{23}$$

При использовании оператора конвекционной производной по времени $\mathrm{D}_u:=\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}$, уравнение (23) можно привести к виду:

$$\mathrm{D}_u\, n=-n\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}. \tag{23*}$$

Релятивистское уравнение движения. Закон сохранения 4-тензора энергии-импульса $\mathbf{T}$ для простой вязкой жидкости с теплопроводностью в континуальной макроскопической теории постулируется в виде:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{T}=0, \tag{24}$$

где, согласно разложению (14),

$$\mathbf{T}=(\varepsilon+p)\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}-p\,\mathbf{g}+\mathbf{\Pi}+\mathbf{J}_q\otimes\mathbf{u}+\mathbf{u}\otimes\mathbf{J}_q. \tag{25}$$

Уравнение движения выводится из закона сохранения энергии-импульса (24) путем свертывания его с проекционным тензором $\mathbf{h}$:

$$\mathbf{h}^{\Updownarrow}\cdot\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{T}=0 \tag{26}$$

(здесь тензор-оператор $\mathbf{h}^{\Updownarrow}$ имеет смешанные компоненты). В результате получим не зависящее от системы отсчета релятивистское уравнение движения в следующем виде:

$$(\varepsilon+p)\mathrm{D}_\mathrm{u}\,\mathbf{u}=\mathbf{h}\cdot\boldsymbol{\nabla}p-\mathbf{h}^{\Updownarrow}\nabla_g^{\Downarrow}\cdot\mathbf{\Pi}+\mathbf{\Pi}\cdot\mathrm{D}_\mathrm{u}\mathbf{u}-$$

$$-\left(\mathbf{h}^{\Updownarrow}\cdot \mathrm{D}_u\,\mathbf{J}_q+(\mathbf{J}_q\cdot\nabla_g^{\Downarrow})\mathbf{u}+\mathbf{J}_q\nabla_g\cdot\mathbf{u}\right) \qquad (27)$$

Из уравнения (27) видно, что ускорение среды $\mathbf{a}$ обусловлено градиентами давления и, кроме этого, рядом членов чисто релятивистского происхождения. Если пренебречь диссипативными потоками $\mathbf{\Pi}$ и $\mathbf{J}_q$, то уравнение движения сведется к уравнению нулевого порядка

$$\mathbf{a}\equiv \mathrm{D}_{\mathrm{u}}\mathbf{u}=(nh)^{-1}\nabla_g p, \qquad (28)$$

которое соответствует уравнению Эйлера для идеальной жидкости в классической гидромеханике. Это соотношение, связывающее ускорение и градиент давления, играет важную роль при выводе релятивистских определяющих соотношений в теории первого порядка, т.е. в тех случаях, когда рассматриваются только линейные по диссипативным потокам определяющие соотношения. По этой причине производную по времени, входящую в правую часть уравнения движения (27), можно исключить с помощью уравнения (28). В этом случае релятивистское уравнение движения (27) принимает следующий вид:

$$(\varepsilon+p)\mathrm{D}_{\mathrm{u}}\,\mathbf{u}=\mathbf{h}\boldsymbol{\nabla}p-\mathbf{h}^{\Updownarrow}\nabla_g^{\Downarrow}\cdot\mathbf{\Pi}+(hn)^{-1}(\mathbf{\Pi}\cdot\nabla_g p)-$$

$$-\left(\mathbf{h}^{\Updownarrow}\cdot \mathrm{D}_u\,\mathbf{J}_q+(\mathbf{J}_q\cdot\nabla_g^{\Downarrow})\mathbf{u}+\mathbf{J}_q\nabla_g^{\Downarrow}\cdot\mathbf{u}\right). \qquad (29)$$

Уравнение энергии. Закон для энергии выводится путем свертывания закона сохранения энергии-импульса (24) с гидродинамической скоростью $\mathbf{u}$; в результате будем иметь

$$\mathrm{D}_u\,\varepsilon=-hn\nabla_g^{\Downarrow}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{\Pi}:\nabla_g^{\Downarrow}\otimes\mathbf{u}^{\Downarrow}-\nabla_g^{\Downarrow}\cdot\mathbf{J}_q+2\mathbf{J}_q\cdot\mathrm{D}_u\mathbf{u}^{\Downarrow}. \qquad (30)$$

Далее нам понадобится уравнение для скорости изменения энергии e на один барион, для вывода которого вычтем из уравнения (30) уравнение непрерывности (23*), умноженное на e; в результате получим

$$n\mathrm{D}_u\,e=-p\nabla_g^{\Downarrow}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{\Pi}:\nabla_g^{\Downarrow}\otimes\mathbf{u}^{\Downarrow}-\nabla_g^{\Downarrow}\cdot\mathbf{J}_q+2\mathbf{J}_q\cdot\mathrm{D}_u\,\mathbf{u}^{\Downarrow}. \qquad (31)$$

Если пренебречь диссипативными потоками $\mathbf{\Pi}$ и $\mathbf{J}_q$, то два уравнения для энергии (30) и (31) запишутся в виде следующих релятивистских уравнений Эйлера (уравнений нулевого порядка для энергии):

$$\mathrm{D}_u\,\varepsilon=-hn\nabla_g^{\Downarrow}\cdot\mathbf{u}, \qquad (32)$$

$$nD_u e = -p\nabla_g^{\Downarrow}\cdot\mathbf{u}\,. \tag{33}$$

Полученные здесь уравнения непрерывности, движения и энергии имеют пока чисто формальный смысл, поскольку входящие в них диссипативные потоки вязкости $\mathbf{\Pi}$ и тепла $\mathbf{J}_q$ являются неопределенными величинами. Покажем сначала, как эти потоки можно связать линейным образом методами релятивистской необратимой термодинамики (РНТ) с градиентами макроскопических переменных.

3. ЗАКОН ЭНТРОПИИ И БАЛАНС ЭНТРОПИИ

3.1. Первый закон термодинамики

Первым законом термодинамики является уравнение, которое связывает производные $D_u e + pD_u(1/n)$ с другими локальными величинами. Первое слагаемое определяется из уравнения (31). Второе слагаемое $nD_u n^{-1} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}$ следует из уравнения непрерывности (23^*). Комбинируя это выражение с (31) и используя (28)[1)], приходим к уравнению

$$n\left[D_u e + pD_u(1/n)\right] = \mathbf{\Pi} : \nabla_g^{\Downarrow}\otimes\mathbf{u}^{\Downarrow} - \nabla_g^{\Downarrow}\cdot\mathbf{J}_q + 2(nh)^{-1}\mathbf{J}_q\cdot\nabla_g^{\Downarrow}p\,, \tag{34}$$

которое является первым законом релятивистской термодинамики.

В случае отсутствия величин, связанных с диссипативными потоками, этот закон принимает простой вид

$$D_u e + pD_u(1/n) = 0\,, \tag{35}$$

соответствующий первому закону термодинамики для систем, адиабатически изолированных от окружающей среды.

3.2. Второй закон термодинамики

Содержание понятия второго закона термодинамики означает одно из двух следующих утверждений или охватывает оба эти утверждения:

(i) ***Закон баланса энтропии.*** Это уравнение выражает тот факт, что локальная энтропия системы может изменяться как из-за потока энтропии $\mathbf{J}_s$, так и из-за наличия интенсивности источника энтропии σ (производства энтропии на

[1)] Поскольку здесь нас интересуют уравнения не выше первого порядка по диссипативным потокам, то для ускорения, входящего в правую часть, можно взять закон нулевого порядка (28).

единицу объема в единицу времени), которая, являясь неотрицательной величиной, выражается через независимые потоки и сопряженные с ними термодинамические силы, непосредственно связанные с измеряемыми параметрами состояния.

В первом разделе формулой (12) была введена плотность энтропии $S = sn = \mathbf{S}\cdot\mathbf{u}$ через поток энтропии $\mathbf{S}$, где s − энтропия на один барион. Получим формальное выражение для баланса энтропии, используя тождество

$$n\mathrm{D}_u s = \boldsymbol{\nabla}\cdot(s\mathbf{N}), \tag{36}$$

которое является следствием закона сохранения плотности числа барионов n и определения (15) для оператора D_u. Добавляя и вычитая одну и ту же величину $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{S}$, запишем тождество (36) в виде

$$n\mathrm{D}_u s = -\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{S} - s\mathbf{N}) + \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{S} \tag{37}$$

и далее будем трактовать его как уравнение баланса для энтропии, приходящейся на одну частицу. Действительно, его можно переписать в виде

$$n\mathrm{D}_u s = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J}_s + \sigma, \tag{38}$$

где $\mathbf{J}_s = \mathbf{S} - s\mathbf{N} = \mathbf{J}_q / T - sn\mathbf{u}$ − поток энтропии (по определению), а величина $0 \le \sigma := \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{S}$, являясь постулируемым законом возрастания энтропии, описывает интенсивность источника энтропии.

(ii) ***Релятивистское соотношения Гиббса.*** Из классической термодинамики известно, что плотность энтропии для равновесной системы является вполне определенной функцией параметров состояния, необходимых для полного описания макроскопической системы (Müller, 1986). Для рассматриваемой простой жидкости (с «замороженным» химическим составом) такими параметрами являются энергия на один барион e и удельный объем $1/n$, приходящийся на один барион: $s = s(e, n^{-1})$. Это свойство выражается тем фактом, что для релятивистской системы, находящейся равновесии, изотропное давление p, плотность энергии $\varepsilon = ne$ и объем, приходящийся на один барион, $1/n$, можно выразить как функции температуры T и энтропии s, приходящейся на один барион, так что полный дифференциал s дается локальной формулой Гиббса (см., например, de Groot и др., 1968; Israel, 1976)

$$T\,\mathrm{D_u}\, s = \mathrm{D_u}\, e + p\,\mathrm{D_u}(1/n)\,. \tag{39}$$

При этом к уравнениям, определяющим локальное равновесие, относятся два уравнения состояния простой жидкости

$$p = p(n,s), \quad T = T(n,s), \tag{40}$$

подчиняющихся условию совместности (соотношениям Максвелла), которое следует из первого закона термодинамики $(\partial p / \partial s)_n = n^2 (\partial T / \partial n)_s$.

3.3. Баланс энтропии, основанный на соотношении Гиббса и законах сохранения

Чтобы найти явную форму уравнения баланса энтропии (38), скомбинируем уравнения (34) и (39); в результате получим:

$$Tn \mathrm{D_u}\, s = \mathbf{\Pi} : \nabla^{\Downarrow} \otimes \mathbf{u}^{\Downarrow} - \nabla^{\Downarrow} \cdot \mathbf{J}_q + 2(nh)^{-1} \mathbf{J}_q \cdot \nabla^{\Downarrow} p. \tag{41}$$

Преобразуем теперь уравнение (41) к форме уравнения баланса (38); в результате получим

$$n \mathrm{D_u}\, s = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J}_s + \sigma, \quad (42)\backslash$$

$$0 \le \sigma = \frac{1}{T} \left\{ \mathbf{\Pi} : \nabla_g^{\Downarrow} \otimes \mathbf{u}^{\Downarrow} - \mathbf{J}_q \cdot \left(\frac{\nabla_g^{\Downarrow} T}{T} - \frac{\nabla_g^{\Downarrow} p}{hn} \right) \right\} \tag{43}$$

– производство энтропии за счет диссипативных процессов вязкости и теплопроводности в простой космологической жидкости.

В случае идеальной жидкости поток энтропии $\mathbf{J}_s = \mathbf{J}_q / T$ и производство энтропии σ обращаются в нуль, так что закон баланса энтропии (41) сводится к уравнению $\mathrm{D_u}\, s = 0$, из которого следует, что энтропия s на одну частицу является постоянной величиной, если в системе имеет место термодинамическое равновесие.

4. УРАВНЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

Покажем, как потоки можно методами релятивистской необратимой термодинамики связать линейным образом с градиентами макроскопических переменных.

4.1. Разложение тензора вязкого давления на независимые компоненты

Для удобства выполнения дальнейших операций разобьем симметричный тензор вязкого давления $\mathbf{\Pi} = p\,\mathbf{h} + \mathbf{P}$ следующим образом:

$$\mathbf{\Pi} = -\Pi\, \mathbf{h} + \overset{\circ}{\mathbf{\Pi}}. \tag{44}$$

Здесь $\overset{\circ}{\mathbf{\Pi}}$ − контравариантный тензор вязкого давления с нулевым следом, $\overset{\circ}{\mathbf{\Pi}}:\mathbf{h}^{\Downarrow\Downarrow}=\overset{\circ}{\mathbf{\Pi}}:\mathbf{g}=0$; $\mathit{\Pi}$ − вязкое давление, определяемое как взятая со знаком минус одна треть следа тензора вязкого давления

$$\mathit{\Pi}=-\tfrac{1}{3}\mathbf{\Pi}:\mathbf{h}^{\Downarrow\Downarrow}=-\tfrac{1}{3}\mathbf{\Pi}:(\mathbf{g}-\mathbf{u}^{\Downarrow}\otimes\mathbf{u}^{\Downarrow})=-\tfrac{1}{3}\mathbf{\Pi}:\mathbf{g}=-\tfrac{1}{3}\mathrm{Sp}\,\mathbf{\Pi}. \qquad (45)$$

Заметим, что тензоры $\mathbf{P}$, $\mathbf{\Pi}$ и $\overset{\circ}{\mathbf{\Pi}}$ являются пространственно-подобными; это означает, что в сопутствующей системе координат, где гидродинамическая скорость $\mathbf{u}$ имеет компоненты (1, 0, 0, 0,), они имеют только пространственные компоненты. Эти тензоры также симметричны, что видно из их определения.

4.2. Феноменологические (определяющие) соотношения

Прежде чем переходить к написанию определяющих соотношений, сделаем следующее замечание: В релятивистской кинетической теории используются разнообразные формы этих соотношений (см., например, Eckart, 1940; Israel, 1963; Chandrasekhar, 1965; Weinberg, 1971, 1972; Cox и др., 1976). В данной работе мы придерживаемся той точки зрения, что макроскопический вывод линейных определяющих соотношений должен базироваться на уравнении баланса энтропии (42) и должен быть сформулирован с помощью потоков и термодинамических сил, которые входят в выражение для локального прироста энтропии (43). При таком подходе соответствующие коэффициенты переноса принимают вид, который в контексте релятивистской неравновесной термодинамики является наиболее естественным. В случае необходимости связь с другими представлениями для этих коэффициентов может быть легко установлена.

Если теперь подставить разложения (16) и (45) в соотношение (43) для производства энтропии через вязкие и тепловые процессы, то в результате получим:

$$T\sigma=\left(-\mathit{\Pi}\mathbf{h}+\overset{\circ}{\mathbf{\Pi}}\right):\nabla_g^{\Downarrow}\otimes\mathbf{u}^{\Downarrow}-\mathbf{J}_q\cdot\left(\frac{\nabla_g^{\Downarrow}T}{T}-\frac{\nabla_g^{\Downarrow}p}{hn}\right)=$$

$$=-\mathit{\Pi}\nabla_g^{\Downarrow}\cdot\mathbf{u}-\mathbf{J}_q\cdot\left(\frac{\nabla_g^{\Downarrow}T}{T}-\frac{\nabla_g^{\Downarrow}p}{hn}\right)+\overset{\circ}{\mathbf{\Pi}}:\boldsymbol{\sigma}. \qquad (46)$$

По поводу второй формы представления прироста энтропии в (46) следует заметить следующее: поскольку тензор $\overset{\circ}{\mathbf{\Pi}}$ является симметричным и пространственно-подобным, то от ковариантной производной $\nabla\otimes\mathbf{u}$ остается только ее симметричная, пространственно-подобная и бесследовая часть, а именно бесследовой тензор сдвига жидкости: $\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2}\left[\nabla_g^{\Downarrow}\mathbf{u} + (\nabla_g^{\Downarrow}\mathbf{u})^{\mathrm{T}}\right] - \frac{1}{3}\theta\mathbf{h}$.

Запишем теперь выражение (46) в виде суммы произведений необратимых потоков и сопряженных с ними термодинамических сил X различной тензорной размерности, в следующем виде:

$$T\sigma = \mathit{\Pi} X + \mathbf{J}_q \cdot \mathbf{X}_{\mathrm{q}} + \overset{\circ}{\mathbf{\Pi}} : \overset{\circ}{\mathbf{X}}, \tag{47}$$

где

(i) $X := -\nabla_g^{\Downarrow} \cdot \mathbf{u}^{\Downarrow} = -\theta$ – термодинамическая сила (4-дивергенция гидродинамической скорости), сопряженная с потоком, обусловленным вязким давлением Π;

(ii) $\mathbf{X}_{\mathrm{q}} := \dfrac{\nabla_g^{\Downarrow} T}{T} - \dfrac{\nabla_g^{\Downarrow} p}{hn}$ – связанная с тепловым потоком $\mathbf{J}_q$ термодинамическая сила, включающая градиент температуры и пропорциональный градиенту давления так называемый член Эккарта (чисто релятивистский эффект, обусловленный зависимостью энтальпии h релятивистской жидкости от энергии покоя mc^2 барионов);

(iii) $\overset{\circ}{\mathbf{X}} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{h}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} + (\mathbf{h}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u})^{\mathrm{T}} - \frac{2}{3}\theta\mathbf{h}\right]$ – термодинамическая сила (тензор сдвига – симметризованная пространственно-подобная, обладающая нулевым следом часть гидродинамической скорости), сопряженная с тензором $\overset{\circ}{\mathbf{\Pi}}$.

Из КНТ известно, что для широкого класса необратимых явлений термодинамические потоки являются линейными функциями (в классе теорий первого порядка) термодинамических сил X, что выражается феноменологическими законами, которые вводятся ad hoc в макроскопические теории необратимых процессов. В принципе, каждая компонента потока в этом выражении может быть функцией компонент всех термодинамических сил. Однако, поскольку потоки и термодинамические силы в (47) обладают различными тензорными свойствами (т.е. являются скалярами, векторами и тензорами), трансформационные свойства указанных объектов относительно инфинитезимальных преобразований Лоренца являются также разными (см. Weinberg, 1972). В результате может оказаться, что, в силу свойств симметрии рассматриваемой среды, отдельные компоненты какого-либо потока будут зависеть не от всех компонентов термодинамических сил. В частности, согласно принципу симметрии Кюри, для изотропной среды потоки и термодинамические силы различной тензорной размерности не зависят друг от друга (de Groot, Mazur, 1962).

Таким образом, релятивистские определяющие соотношения для изотропной простой космологической жидкости, связанные с вкладом вязкости и теплопроводности в производство энтропии, принимают вид:

$$\Pi = \zeta \mathrm{X} = -\zeta \nabla_g^{\Downarrow} \cdot \mathbf{u}^{\Downarrow} = -\zeta \theta, \tag{48}$$

$$\mathring{\mathbf{\Pi}} = 2\eta \boldsymbol{\sigma} = \eta \left[\boldsymbol{\nabla}_g \mathbf{u} + (\boldsymbol{\nabla}_g \mathbf{u})^{\mathrm{T}} - \tfrac{2}{3} \theta \mathbf{h} \right], \tag{49}$$

$$\mathbf{J}_q = \lambda \left(\boldsymbol{\nabla}_g \ln T - h^{-1} n^{-1} \boldsymbol{\nabla}_g p \right). \tag{50}$$

Здесь ζ, η и λ – соответственно скалярный коэффициент объемной вязкости, скалярный коэффициент динамической (сдвиговой) вязкости и коэффициент теплопроводности, которые задаются следующим образом (de Groot и др., 1975; Liu и др., 1986):

(i) ультрарелятивистский предел ($z = mc^2 / k_B T << 1$) идеального газа

$$\zeta = \frac{1}{108} \frac{p}{mn} z^4 \tau_1, \quad \lambda = \frac{8}{5} \frac{p}{mnT} \tau_2, \quad \eta = \frac{4}{3} \frac{p}{mn} \tau_3;$$

(ii) радиационная жидкость, представляющая собой смесь фотонов и электронов

$$\lambda = \frac{4}{3} a T^3 c^2 \tau_2, \quad \zeta = 4 a T^4 \tau_1 \left[\frac{1}{3} - \left(\frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \right)_n \right]^2, \quad \eta = \frac{4}{15} a T^4 \tau_3, \tag{51}$$

где a – постоянная Стефана-Больцмана, τ – времена релаксации. Величина времен релаксации зависит от того, какая теория была использована для описания взаимодействия между веществом и излучением. Если рассматривается обычное рассеяние Томсона (т.е. классическое нерелятивистское рассеяние электромагнитного излучения на свободных заряженных частицах), значения времен релаксации следующие: $\tau_2 = (9/10)\tau_3$ и $\tau_1 = \infty$.

Относительно коэффициентов переноса, которые вводятся в макроскопические уравнения здесь на эмпирических основаниях, можно добавить следующее: информация об этих коэффициентах может быть, в частности, получена с использованием альтернативной релятивистской кинетической теории (см. de

Groot и др., 1975; Liu и др., 1986). Так, в работе (Cox и др. 1976) представлены аналитические и численные результаты для первых трех приближений к коэффициентам переноса газа, состоящего из массивных частиц с постоянным дифференциальным сечением, а также исследован температурный режим поведения этих коэффициентов как для слаборелятивистского, так и для ультрарелятивистского газа.

4.3. Линеаризация по градиентам релятивистских уравнений гидродинамики

Рассмотрим теперь гидродинамические уравнения, которые получаются, если скомбинировать линейные соотношения (48)-(50) с уравнениями непрерывности, движения и энергии, выведенными в разделе 2. Однако, если просто подставить эти определяющие соотношения в указанные уравнения баланса, получится громоздкий результат, не имеющий, по-видимому, какой-либо практической ценности. Поэтому обычно предполагается, что градиенты полевых величин можно считать малыми, что позволяет линеаризовать по этим градиентам балансовые уравнения, т.е. пренебречь членами, содержащими произведения потоков и градиентов. Коэффициенты переноса при этом также можно считать постоянными.

Уравнение непрерывности (23), не содержащее каких-либо необратимых величин, сохраняет свою форму

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(n\mathbf{u})=0. \tag{52}$$

Обобщенное релятивистское уравнение Навье-Стокса для простой неидеальной жидкости после линеаризации принимают вид:

$$(\varepsilon+p)\,\mathrm{D}_{\mathrm{u}}\,\mathbf{u}=\boldsymbol{\nabla}_g\,p-\mathbf{h}^{\Updownarrow}\nabla_g^{\Downarrow}\cdot\boldsymbol{\Pi}-\mathrm{D}_u\,\mathbf{J}_q \tag{53}$$

и с учетом соотношения

$$\boldsymbol{\Pi}=-\mathit{\Pi}\,\mathbf{h}+\overset{\circ}{\boldsymbol{\Pi}}=\zeta\,\theta\,\mathbf{h}+2\eta\,\boldsymbol{\sigma} \tag{54}$$

для тензора вязкости может быть переписано следующим образом:

$$(\varepsilon+p-\zeta\theta)\,\mathbf{a}=\nabla_g(p-\zeta\theta)+\eta\boldsymbol{\nabla}\cdot\left\{[\nabla_g\mathbf{u}+(\nabla_g\mathbf{u})^{\mathrm{T}}]-\tfrac{1}{3}\theta\mathbf{h}\right\}-\mathrm{D}_u\,\mathbf{J}_q\,. \tag{55}$$

При написании уравнения (55) были использованы обозначения $\mathbf{a} = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}$, $\theta = \nabla_g^{\Downarrow} \cdot \mathbf{u}$ и тождество $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{h} = \theta\mathbf{u} - \mathbf{a}$, а также отброшено в силу принятой линеаризации малое слагаемое $\theta^2\mathbf{u}$. Заметим, что величина $p - \zeta\theta = p + \Pi$ в этом уравнении играет роль эффективного давления.

Наконец, чтобы выразить временную производную $\mathrm{D}_u\, \mathbf{J}_q$ теплового потока в (55) через градиенты, необходимо использовать уравнение для энергии (31)

$$n\mathrm{D}_u\, e = -p\nabla_g^{\Downarrow}\cdot \mathbf{u} + \zeta\theta^2 + 2\eta\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma} - \lambda\nabla_g^{\Downarrow}\cdot \left(\nabla_g \ln T - \frac{\nabla_g p}{hn} \right) - 2\mathbf{u}^{\Downarrow}\cdot \mathrm{D}_u \mathbf{J}_q, \quad (56)$$

которое после линеаризации (и с учетом линейных законов (50) и (54) и калорического уравнения $e = mc^2 + \frac{3}{2}k_B T$) принимает следующий вид:

$$nc_V\, \mathrm{D}_u\, T = -p\theta - \lambda\left(\nabla^2 T - h^{-1}n^{-1}T\nabla^2 p \right). \quad (57)$$

Здесь $c_V = \partial e / \partial T$ − теплоемкость на один барион, а $\boldsymbol{\nabla}^2 = \nabla_g^{\Downarrow} \cdot \boldsymbol{\nabla}_g$. Если использовать выражение $\gamma = c_p / c_V = 1 + k_B / c_V$ для отношения теплоемкостей на один барион, то уравнение энергии (57) может быть переписано следующим образом:

$$\frac{\mathrm{D}_u T}{T} = (1-\gamma)\left[\theta + \frac{\lambda}{p}\left(\nabla^2 T - \frac{T}{hn}\nabla^2 p \right) \right]. \quad (58)$$

Из уравнений (52) и (58) и уравнения состояния совершенной жидкости $p = nk_B T$ вытекает соотношение $\mathrm{D}_u\, p = \gamma\, p\theta$, используя которое получаем для временной производной $\mathrm{D}_u\, \mathbf{J}_q$ теплового потока искомое представление:

$$\mathrm{D}_u\, \mathbf{J}_q = \xi\boldsymbol{\nabla}_g\theta, \quad \text{где} \quad \xi = \frac{\lambda T}{h}\left[(1-\gamma)h + \gamma k_B T \right]. \quad (59)$$

Таким образом, уравнения (52), (55), с учетом (58) и (59) образуют самосогласованную систему дифференциальных уравнений в частных производных, которая полностью описывает временную эволюцию релятивистской жидкости в искривленном пространстве–времени при условии, что заданы соответствующие начальные и граничные условия. Эти уравнения представляют собой релятивистское обобщение классических уравнений Навье−Стокса.

В заключение этого раздела уместно сделать следующее замечание. Линейные определяющие соотношения для диссипативных потоков теплопроводности и вязкости были получены из явного уравнения баланса энтропии, основанного на релятивистском соотношении Гиббса, традиционная форма которого предполагается справедливой (в первом приближении по потокам переноса) для локально равновесной системы. Вместе с тем подобный подход содержит известный фундаментальный недостаток, который приводит к параболическим дифференциальным уравнениям и, следовательно, к бесконечным скоростям распространения тепловых и вязкостных сигналов, что противоречит принципу причинности (Israel, 1976; Weinberg, 1972; Hiscock, Lindblom, 1985). Следовательно, данный подход не подходит для многих явлений в астрофизике высоких энергий, связанных с крутыми градиентами или быстрыми изменениями. Как показала классическая кинетическая теория, используемая выше процедура справедлива лишь для первого порядка приближения по диссипативным потокам при отклонениях от равновесия; однако для того, чтобы найти наиболее эффективную форму замыкающих соотношений из выражения для производства энтропии, требуется уже второй порядок. При феноменологическом построении теории это приводит к необходимости использования методов так называемой расширенной необратимой термодинамики (РНТ), которая вводит в рассмотрение в качестве дополнительных структурных параметров диссипативные термодинамические потоки, фигурирующие в уравнениях баланса массы, импульса и энергии (Jou и др. 1993; Liu и др., 1986; Casas-Vazquez, Jou, 2003). К ним, в частности, относятся: гидродинамическая скорость, тензор напряжений (минус его гидростатическая часть), тепловой поток (полный поток энергии минус потоки, связанные с адвекцией и механической энергией) и т.п. Согласно теории РНТ, энтропия также зависит от диссипативных потоков, при этом выражение для потока энтропии содержит дополнительные члены, отличные от $T^{-1}\boldsymbol{J}_q$. В результате каждый диссипативный поток определяется эволюционным уравнением (уравнением релаксации), а коэффициенты переноса принимают вид, который в контексте релятивистской РНТ является наиболее естественным. Таким образом, использование этих новых параметров состояния позволяет термодинамически получить *релаксационные* определяющие соотношения для сильно неравновесной системы, которые не могут быть получены в рамках КНТ.

5. КОНСТРУИРОВАНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ ПРОСТОЙ ЖИДКОСТИ В КЛАССЕ ТЕОРИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Целью этого раздела является конструирование в рамках РНТ релятивистской гидродинамики с учетом членов второго порядка приближения по диссипативным потокам.

5.1. Обобщенное соотношение Гиббса

Так же, как и в классической неравновесной термодинамике, энтропия и тождество Гиббса играют в РНТ центральную роль. В контексте формализма РНТ будем постулировать, что существует обобщённая неравновесная энтропия

$$s = s(e, n^{-1}, \mathit{\Pi}, \mathbf{J}_q, \overset{\circ}{\mathbf{\Pi}}), \tag{60}$$

зависящая не только от классической переменных – энергии e и удельного объ-ема n^{-1}, но также от и диссипативных потоков $\mathit{\Pi}$, $\mathbf{J}_q$ и $\overset{\circ}{\mathbf{\Pi}}$, фигурирующих в уравнениях баланса числа частиц, импульса и энергии. Тогда дифференциальная форма записи обобщенной энтропии имеет следующий вид:

$$\mathrm{D}_u s = \overset{\circ}{\mathbf{\Pi}} \left(\frac{\partial s}{\partial e}\right)_{n^{-1}, \mathit{\Pi}, \mathbf{J}_q, \overset{\circ}{\mathbf{\Pi}}} \mathrm{D}_u e + \left(\frac{\partial s}{\partial n^{-1}}\right)_{e, \mathit{\Pi}, \mathbf{J}_q, \overset{\circ}{\mathbf{\Pi}}} \mathrm{D}_u n^{-1} + \left(\frac{\partial s}{\partial \mathbf{J}_q}\right)_{e, n^{-1}, \mathit{\Pi}, \overset{\circ}{\mathbf{\Pi}}} \mathrm{D}_u \mathbf{J}_q^{\Downarrow} +$$

$$+ \left(\frac{\partial s}{\partial \mathit{\Pi}}\right)_{e, n^{-1}, \mathbf{J}_q, \overset{\circ}{\mathbf{\Pi}}} \mathrm{D}_u \mathit{\Pi} + \left(\frac{\partial s}{\partial \overset{\circ}{\mathbf{\Pi}}}\right)_{e, n^{-1}, \mathit{\Pi}, \mathbf{J}_q} \mathrm{D}_u \overset{\circ}{\mathbf{\Pi}}^{\Downarrow\Downarrow}. \tag{61}$$

По аналогии с классической теорией необратимых процессов, определим неравновесную абсолютную температуру Θ и неравновесное термодинамическое давление π следующими равенствами:

$$\Theta^{-1}(e, n^{-1}, \mathit{\Pi}, \mathbf{J}_q, \overset{\circ}{\mathbf{\Pi}}) = \left(\partial s / \partial e\right)_{n^{-1}, \mathit{\Pi}, \mathbf{J}_q, \overset{\circ}{\mathbf{\Pi}}}, \tag{62}$$

$$\Theta^{-1}\pi(e, n^{-1}, \mathit{\Pi}, \mathbf{J}_q, \overset{\circ}{\mathbf{\Pi}}) = \left(\partial s / \partial n^{-1}\right)_{e, \mathit{\Pi}, \mathbf{J}_q, \overset{\circ}{\mathbf{\Pi}}}. \tag{63}$$

Оставшиеся частные производные в (61) по предположению будем считать линейными по потокам. Введем обозначения

$$\left(\partial s / \partial \mathit{\Pi}\right)_{e, n^{-1}, \mathbf{J}_q, \overset{\circ}{\mathbf{\Pi}}} = -\alpha_1 (T\, n)^{-1} \mathit{\Pi}, \tag{64}$$

$$\left(\partial s / \partial \mathbf{J}_q\right)_{e, n^{-1}, \mathit{\Pi}, \overset{\circ}{\mathbf{\Pi}}} = -\alpha_2 (T\, n)^{-1} \mathbf{J}_q, \tag{65}$$

$$(\partial s / \partial \overset{\circ}{\mathbf{\Pi}})_{e, n^{-1}, \mathit{\Pi}, \mathbf{J}_q} = -\alpha_3 (T\, n)^{-1} \overset{\circ}{\mathbf{\Pi}}. \tag{66}$$

Здесь коэффициенты α_1, α_2 и α_3 представляют собой неизвестные скалярные функции от параметров e и n^{-1}. Подстановка (64)-(66) в (61), приводит к следующему обобщённому соотношению Гиббса для неравновесной релятивистской системы (Колесниченко, 2023d):

$$n\mathrm{D}_u s = \left(n\Theta^{-1}\right)\mathrm{D}_u e + \left(\pi\, n\Theta^{-1}\right)\mathrm{D}_u n^{-1} -$$
$$-T^{-1}\left[\alpha_1 \mathit{\Pi}\,\mathrm{D}_u \mathit{\Pi} + \alpha_2 \mathbf{J}_q \cdot \mathrm{D}_u \mathbf{J}_q^{\Downarrow} + \alpha_3 \overset{\circ}{\mathbf{\Pi}} : \mathrm{D}_u \overset{\circ}{\mathbf{\Pi}}{}^{\Downarrow\Downarrow}\right]. \tag{67}$$

Эволюция энтропии определяется законом баланса (42), в котором следует определить новые выражения для потока энтропии $\mathbf{J}_s$ и производства энтропии σ. Для этого подставим в (67) выражения для $n\mathrm{D}_u n^{-1}$ и $n\mathrm{D}_u e$ из законов баланса массы (23*) и энергии (31). Непосредственные выкладки позволяют получить следующее равенство:

$$n\mathrm{D}_u s = \frac{1}{T}\left(-\nabla_g^{\Downarrow} \cdot \mathbf{J}_q + 2\mathbf{J}_q \cdot \frac{\nabla_g^{\Downarrow} p}{hn} - \mathit{\Pi}\nabla_g^{\Downarrow} \cdot \mathbf{u} + \overset{\circ}{\mathbf{\Pi}} : \boldsymbol{\sigma}^{\Downarrow\Downarrow}\right) -$$
$$-\alpha_1 \mathit{\Pi}\,\mathrm{D}_u \mathit{\Pi} - \alpha_2\, \mathbf{J}_q \cdot \mathrm{D}_u \mathbf{J}_q^{\Downarrow} - \alpha_3 \overset{\circ}{\mathbf{\Pi}} : \mathrm{D}_u \overset{\circ}{\mathbf{\Pi}}{}^{\Downarrow\Downarrow}. \tag{68}$$

При получении этого результата была использована замена π и Θ на p и T, что возможно, поскольку вклады второго порядка в потоках ничтожно малы (см. Жоу и др., 2006).

5.2. Обобщенный поток энтропии и производство энтропии

Прежде чем перейти к нахождению обобщенного выражения для производства энтропии σ, определяемого равенством (42), необходимо определить соответствующее выражение для потока энтропии $\mathbf{J}_s$. Для изотропных систем наиболее общим таким представлением в терминах базисных независимых переменных e, n^{-1}, $\mathit{\Pi}$, $\mathbf{J}_q$ и $\overset{\circ}{\mathbf{\Pi}}$ и с учетом членов не ниже второго порядка является следующее равенство:

$$\mathbf{J}_s = \Theta^{-1}\mathbf{J}_q + \beta_1 \mathit{\Pi}\mathbf{J}_q + \beta_2 \overset{\circ}{\mathbf{\Pi}} \cdot \mathbf{J}_q^{\Downarrow}, \tag{69}$$

где коэффициенты β_1 и β_2 представляют собой в общем случае функции e и n^{-1}.

Для того чтобы показать связь с проблемой теплопроводности, в качестве коэффициента при потоке $\mathbf{J}_q$ выбрана обратная неравновесная температура Θ^{-1}.

Выражение для производства энтропии σ получим из (42), заменив $n\,\mathrm{D}_{\mathbf{u}}\,s$ и $\mathbf{J}_s$ на соответствующие выражения (68) и (69). В результате получим

$$0 \le \sigma = \frac{1}{T}\left(-\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J}_q + \frac{2}{hn}\mathbf{J}_q\cdot\nabla_g p - \Pi\nabla_g\cdot\mathbf{u} + \overset{\circ}{\mathbf{\Pi}}:\boldsymbol{\sigma}\right) - \left(\alpha_1\Pi\right)\mathrm{D}_u\Pi -$$

$$-\left(\alpha_2\mathbf{J}_q\right)\cdot\mathrm{D}_u\,\mathbf{J}_q^{\Downarrow} - \left(\alpha_3\,\overset{\circ}{\mathbf{\Pi}}\right):\mathrm{D}_u\,\overset{\circ}{\mathbf{\Pi}}{}^{\Downarrow\Downarrow} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left\{\Theta^{-1}\mathbf{J}_q + \beta_1\Pi\mathbf{J}_q + \beta_2\,\overset{\circ}{\mathbf{\Pi}}\cdot\mathbf{J}_q^{\Downarrow}\right\}. \quad (70)$$

Это выражение имеет билинейную форму

$$\sigma = \Pi X + \mathbf{J}_q\cdot\mathbf{X}_q + \overset{\circ}{\mathbf{\Pi}}:\overset{\circ}{\mathbf{X}}, \quad (71)$$

где сопряженные с диссипативными потоками Π, $\mathbf{J}_q$ и $\overset{\circ}{\mathbf{\Pi}}$ термодинамические силы имеют вид (Колесниченко, 2023d):

$$X = -\frac{1}{T}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} - \alpha_1\,\mathrm{D}_u\Pi + \beta_1\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J}_q, \quad (72)$$

$$\mathbf{X}_q = \frac{1}{T}\left(-\boldsymbol{\nabla}\ln T + \frac{\boldsymbol{\nabla}p}{hn}\right) - \alpha_2\,\mathrm{D}_u\,\mathbf{J}_q + \beta_1\boldsymbol{\nabla}\Pi + \beta_2\boldsymbol{\nabla}\cdot\overset{\circ}{\mathbf{\Pi}}, \quad (73)$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{X}} = \frac{1}{T}\boldsymbol{\sigma} - \alpha_3\,\mathrm{D}_u\,\overset{\circ}{\mathbf{\Pi}} + \beta_2\,\overset{\circ}{\overbrace{\nabla_g\otimes\mathbf{J}_q}}. \quad (74)$$

5.3. Уравнения релаксации

В соответствии с общей концепцией конструирования определяющих соотношений в необратимой термодинамике, релятивистские линейные уравнения эволюции для изотропной релятивистской среды могут быть записаны следующим образом:

а) ***Феноменологическое линейное уравнение для вязкого давления***. Это уравнение имеет вид:

$$\Pi = -T^{-1}\zeta X = -\zeta\left[\nabla_g^{\Downarrow}\cdot\mathbf{u} + T^{-1}\left(\alpha_1\,\mathrm{D}_u\Pi - \beta_1\nabla_g^{\Downarrow}\cdot\mathbf{J}_q\right)\right]. \quad (75)$$

Уравнение (75) может быть записано также в форме уравнения релаксации

$$\tau_1 \, \mathrm{D}_u \, \Pi = -\Pi - \zeta \left(\nabla_g^{\Downarrow} \mathbf{u} - \frac{\beta_1}{T} \nabla_g^{\Downarrow} \cdot \mathbf{J}_q \right). \tag{76}$$

Здесь $\tau_1 := T^{-1} \zeta \, \alpha_1$ − время релаксации (имеющее порядок среднего времени свободного пробега); ζ − коэффициент объемной вязкости, для которого релятивистская кинетическая теория дает в первом приближении метода четырнадцати моментов следующее выражение (de Groot и др.1980):

$$\zeta = \frac{k_B T}{c \, \sigma(T)} \frac{[(5 - 3\gamma)\hat{h} - 3\gamma]^2}{A^{22}}; \tag{77}$$

$\sigma(T)$ − эффективное дифференциальное сечение; $\hat{h} = h / k_B T$ − приведенная энтальпия; в том же приближении для коэффициентов α_1 и β_1 получены в случае идеального газа $p = k_B n T$ следующие выражения:

i) в нерелятивистском пределе идеального газа, когда $z \to \infty$:

$$\alpha_1 = 6z^2/5nk_B, \quad \beta_1 = 4z / 5nk_B, \tag{78}$$

ii) в ультрарелятивистском пределе идеального газа, когда $z \to 0$:

$$\alpha_1 = 216 / znk_B, \quad \beta_1 = 6 / z^2 nk_B. \tag{79}$$

Из соотношения (76) видно, что отклонения от линейного закона будут иметь место, если время релаксации системы перекрывается с макроскопической шкалой времени.

b) ***Линейное уравнение эволюции для теплового потока***. Это уравнение имеет вид:

$$\mathbf{J}_q = T^2 \lambda \mathbf{X}_q = -\lambda T \left[\frac{\nabla_g T}{T} - \frac{\nabla_g p}{hn} + T \left(\alpha_2 \, \mathrm{D}_u \, \mathbf{J}_q - \beta_1 \nabla_g \Pi - \beta_2 \nabla_g^{\Downarrow} \overset{\circ}{\mathbf{\Pi}} \right) \right], \tag{80}$$

или в форме уравнения релаксации

$$\tau_2 \, \mathrm{D}_u \, \mathbf{J}_q = -\mathbf{J}_q - \lambda T \left[\frac{\nabla_g T}{T} - \frac{\nabla_g p}{hn} - T \left(\beta_1 \nabla_g \Pi + \beta_2 \nabla_g^{\Downarrow} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{\Pi}} \right) \right]. \tag{81}$$

Здесь $\lambda = \dfrac{3ck_B}{\sigma(T)} \dfrac{\left(\gamma / (\gamma - 1)\right)^2}{B^{11}}$ − коэффициент теплопроводности (полученный в первом приближении метода четырнадцати моментов); $\tau_2 = \lambda T^2 \alpha_2$ − время релаксации. Для коэффициентов β_1, β_2 и α_2 имеем:

i) в нерелятивистском пределе идеального газа, когда $z \to \infty$:

$$\beta_1 = 4z/5p, \quad \alpha_2 = 2z/5c^2 pT, \quad \beta_2 = 2/5p; \tag{82}$$

ii) в ультрарелятивистском пределе идеального газа, когда $z \to 0$:

$$\beta_1 = 6/pz^2, \quad \alpha_2 = 5/4c^2 pT, \quad \beta_2 = 1/4p. \tag{83}$$

c) ***Уравнение для давления при наличии сдвиговой вязкости***. Релятивистская расширенная необратимая термодинамика приводит к следующему результату:

$$\overset{\circ}{\mathbf{\Pi}} = 2\eta T \overset{\circ}{\mathbf{X}} = 2\eta \left[\boldsymbol{\sigma} - T \left(\alpha_3 \, \mathrm{D}_u \overset{\circ}{\mathbf{\Pi}} + \beta_2 \overset{\circ}{\overline{\nabla_g \otimes \mathbf{J}_q}} \right) \right], \tag{84}$$

или в форме уравнения релаксации

$$\tau_3 \, \mathrm{D}_u \overset{\circ}{\mathbf{\Pi}} = -\overset{\circ}{\mathbf{\Pi}} + 2\eta\boldsymbol{\sigma} - 2\eta T \beta_2 \overset{\circ}{\overline{\nabla_g \otimes \mathbf{J}_q}}, \tag{85}$$

где $\tau_3 = \alpha_3 2T\eta$ − время релаксации; $\eta = \dfrac{k_B T}{c\sigma(T)} \dfrac{10\hat{h}}{C^{00}}$ − первое приближение для сдвиговой вязкости; коэффициенты α_3 и β_2 стремятся к следующим значениям:

i) в нерелятивистском пределе − к значениям

$$\alpha_3 = 1/2k_B nT^2, \quad \beta_2 = 2/5k_B nT^2; \tag{86}$$

ii) в ультрарелятивистском пределе − к значениям

$$\alpha_3 = 3/4k_B nT^2, \quad \beta_2 = 1/2k_B nT^2. \tag{87}$$

Здесь матричные элементы A^{22}, B^{11} и A^{22} являются скобочными выражениями, которые вычисляются с учетом вида взаимодействия частиц (см. de Groot др., 1980).

Три уравнения (75), (80) и (84) для вязкого давления, теплового потока и давления при наличии сдвиговой вязкости, полученные в рамках расширенной необратимой термодинамики, являются обобщениями линейных феноменологических законов (48)-(50), полученных методами КНТ.

Таким образом, при решении уравнений релятивистской диссипативной гидродинамики, полученной в рамках теории второго порядка, необходимо найти шесть параметров состояния жидкости: n, ε, p и три компоненты гидродинамической скорости $\mathbf{u}$. Кроме этого, необходимо найти девять диссипативных переменных: объемное давление Π, три компоненты теплового потока $\mathbf{J}_q$

и пять независимых (нередуцируемых) компонент тензора сдвига $\overset{\circ}{\mathbf{\Pi}}$. Эти 14 переменных связаны 14 дифференциальными уравнениями, управляющими потоком неидеальной жидкости: пятью уравнениями сохранения, которые представляют собой уравнение сохранения плотности числа барионов (23), три компоненты уравнения сохранения импульса (27) и уравнение сохранения энергии (50). Кроме этого, имеется девять уравнений релаксации для диссипативных переменных, а именно: уравнение для вязкого давления (75), три компоненты уравнения теплового потока (81) и пять независимых компонентов уравнения тензора сдвига (85). Система из 14 неизвестных и 14 уравнений может быть решена для пространственных изменений всех неизвестных в зависимости от времени, если задан подходящий набор начальных условий, определяющих состояние и движение жидкости в определенный момент времени, плюс набор граничных условий, накладывающих ограничения на поток.

В общем случае аналитические методы решения этих нелинейных уравнений являются слишком ограничительными, и для более реального нахождения решения необходимо прибегнуть к численным методам. Одним из эффективных численных методов решения уравнений гидродинамики является замена исходных дифференциальных уравнений набором конечно-разностных уравнений, определяющих физические свойства жидкости на дискретных пространственно-временных сетках. При этом необходимо иметь численные методы, которые являются достаточно универсальными и гибкими, чтобы быть легко обобщенными для включения различных процессов диссипации и учитывать отступления от локального термодинамического равновесия. В настоящее время это является предметом текущего исследования в научной литературе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получен полный набор релятивистских уравнений диссипативной гидродинамики как в классическом, так и в причинном описании, записанных в ковариантной компактной форме (т.е. в абстрактно геометрическом представлении). Это позволяет записать дифференциальные уравнения, описывающие эволюцию любой достаточно малой физической системы в гравитационном поле, если известны уравнения, описывающие это поведение при отсутствии гравитации. Затем, опираясь на ПЭ, можно обобщить эти физические законы специальной теории относительности на случай искривленного пространства-времени, причем кривизна может быть произвольно велика. ПЭ гарантирует, что законы физики, записанные в абстрактном представлении, отличаются только тем, что частная производная и градиент в плоском пространстве-времени заменяются ковариантной производной и градиентом в искривленном пространстве-времени. Собственно, эта процедура и осуществлена в представленной работе при конструировании замкнутой системы релятивистских гидродинамических уравнений первого и второго порядка для неидеальной жидкости.

Релятивистская термодинамика представлена здесь как теория поля. Уравнения поля основаны на постулируемых законах сохранения таких фундаментальных макроскопических величин, как 4-вектор потока частиц, 4-тензор энергии-импульса и 4-вектор потока энтропии. Линейные определяющие соотношения для диссипативных потоков теплопроводности и вязкости получены из явного уравнения баланса энтропии, основанного на постулируемом релятивистском соотношении Гиббса как для равновесных, так и неравновесных состояний. Вместе с тем теория, основанная на классическом релятивистском соотношении Гиббса для равновесных систем, содержит известный фундаментальный недостаток, который приводит к параболическим дифференциальным уравнениям и, следовательно, к бесконечным скоростям распространения для тепловых и вязкостных флуктуаций среды, что противоречит принципу причинности. Следовательно, этот подход бывает часто малоэффективен для многих явлений в астрофизике, в частности в физике высоких энергий, связанных с крутыми градиентами или быстрыми изменениями структурных параметров. Он справедлив только в случае правомерности использования потоковых членов до первого порядка при отклонениях от равновесия.

По этой причине целью данной работы являлась также попытка устранения указанных недостатков путем систематического сохранения членов второго порядка по термодинамическим потокам в выражении для 4-вектора потока энтропии и получения на его основе определяющих релаксационных уравнений. Это намерение привело к необходимости использования методов так называемой расширенной необратимой термодинамики, которая, выходя за пределы гипотезы о локальном равновесии, использует в качестве дополнительных независимых структурных параметров диссипативные потоки соответствующих физических величин. Наиболее существенное свойство обобщенных линейных законов заключается в том, что они учитывают релаксационные эффекты (с типичной временной шкалой порядка времени среднего свободного пробега), которые обеспечивают верхнюю границу скорости распространения возмущений.

Следует отметить, что сконструированная в классе теорий второго порядка релятивистская термо-гидродинамика имеет не только сугубо концептуальное значение: эта теория имеет свои приложения в таких важных областях знаний, как ядерная физика, астрофизика и космология. В частности, в вязкостных космологических моделях объемная вязкость выступает в роли причины диссипации, оказывающей определяющее влияние на процессы генерации энтропии на ранних стадиях развития Вселенной. Другое возможное проявление вязкостных эффектов реализуется в момент квантового образования космологической материи в сильном гравитационном поле (см., например, Колесниченко, Маров, 2023e).

Работа выполнена в рамках Госзадания ИПМ им. М.В.Келдыша РАН.

ПРИЛОЖЕНИЕ. ВЕКТОРНЫЕ И ТЕНЗОРНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И СВОЙСТВА

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\to \mathrm{u}^{\mu}\mathrm{u}_{\mu},\quad \mathbf{u}\cdot\mathbf{T}\to(\mathbf{u}\cdot\mathbf{T})^{\sigma}=\mathrm{u}_{\nu}\mathrm{T}^{\nu\sigma},\quad \mathbf{T}\cdot\mathbf{u}\to(\mathbf{T}\cdot\mathbf{u})^{\nu}=\mathrm{T}^{\nu\sigma}\mathrm{u}_{\sigma},\ ,$$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{u}\to \mathrm{u}_{\nu}\mathrm{T}^{\nu\sigma}\mathrm{u}_{\sigma},\quad \mathbf{q}=\mathbf{u}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{h}\to \mathrm{u}_{\nu}\mathrm{T}^{\nu\sigma}\mathrm{h}^{\mu}_{\sigma}=\mathrm{q}^{\mu},$$

$$\mathbf{P}=\mathbf{h}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{h}\to \mathrm{h}^{\mu}_{\sigma}\mathrm{T}^{\sigma\tau}\mathrm{h}^{\nu}_{\tau}=\mathrm{P}^{\mu\nu},\quad \mathbf{u}\otimes\mathbf{u}\to \mathrm{u}^{\mu}\mathrm{u}_{\nu},\quad \mathbf{u}\otimes\mathbf{T}\to(\mathbf{u}\otimes\mathbf{T})^{\nu\sigma}_{\mu}=\mathrm{u}_{\mu}\mathrm{T}^{\nu\sigma},$$

$$\mathbf{h}=\mathbf{g}+\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}\to g^{\mu\nu}+u^{\mu}u^{\nu}=\mathrm{h}^{\mu\nu},$$

$$(\boldsymbol{\nabla})^{\mu}_{\nu}\to\left(\frac{\partial(..)^{\mu}}{\partial x^{\nu}}+\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu}(..)^{\alpha}\right),$$

$$\mathrm{D}_{u}:=\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\to \mathrm{u}^{\nu}\left(\frac{\partial(..)^{\mu}}{\partial x^{\nu}}+\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu}(..)^{\alpha}\right),\quad \nabla^{\mu}:=\mathbf{h}\cdot\boldsymbol{\nabla}\to \mathrm{h}^{\mu\nu}\left(\frac{\partial(..)^{\mu}}{\partial x^{\nu}}+\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu}(..)^{\alpha}\right),$$

$$(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{c},\quad \mathbf{a}\otimes\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}),\quad \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})=(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b},$$

$$\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=(\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}+(\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{b})\cdot\mathbf{a},\quad \boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})=(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a})\otimes\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{b},$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})=(\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{b}+\mathbf{b}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a}),\quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{a}=\Delta\mathbf{a},$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(f\mathbf{a})=\boldsymbol{\nabla}f\cdot\mathbf{a}+f\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\otimes(f\mathbf{a})=\boldsymbol{\nabla}f\otimes\mathbf{a}+f\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{a},\quad \boldsymbol{\nabla}\otimes(f\mathbf{T})=\boldsymbol{\nabla}f\otimes\mathbf{T}+f\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{T},$$

$$\boldsymbol{\nabla}\otimes(\mathbf{T}\cdot\mathbf{a})=(\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{T})\cdot\mathbf{a}+(\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{a})\cdot\mathbf{T}^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\nabla}\otimes(\mathbf{a}\cdot\mathbf{T})=(\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{a})\cdot\mathbf{T}+(\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{T}^{\mathrm{T}})\cdot\mathbf{a},$$

$$\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a}=\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{a})^{\mathbf{T}},\ \boldsymbol{\nabla}\cdot(f\mathbf{T})=\boldsymbol{\nabla}f\cdot\mathbf{T}+f\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{T},$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{T}\cdot\mathbf{a})=(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{T})\cdot\mathbf{a}+\mathbf{T}\cdot\cdot(\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{a})^{\mathbf{T}},\quad \boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{a}\cdot\mathbf{T})=(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{T}^{\mathbf{T}})\cdot\mathbf{a}+\mathbf{T}\cdot\cdot\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{a}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{T}\cdot\mathbf{B})=(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{T})\cdot\mathbf{B}+\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\cdot\cdot\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{B},\ (\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\otimes\mathbf{d})=(\mathbf{a}\otimes\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}\otimes\mathbf{d})=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{d},$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Жоу Д., Касас-Баскес Ч., Лебон Дж. Расширенная необратимая термодинамика // Москва –Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований. 2006. 528 с.

Колесниченко А.В. Конструирование релятивистской гидродинамики многокомпонентной жидкости. 1. Метод релятивистской необратимой термодинамики. Москва. 2023a. // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. № 2. 44 с.

Колесниченко А.В. Конструирование релятивистской гидродинамики простой жидкости в классе теорий второго порядка. 2. Метод релятивистской расширенной необратимой термодинамики. Москва. 2023b // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. № 3. 36 с.

Колесниченко А.В. К выводу в рамках статистики Тсаллиса релятивистского кинетического уравнения для разреженной идеальной газовой системы высокоэнергетических частиц. Москва. 2023с // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. № 13. 30 с.

Колесниченко А.В. К выводу в рамках статистики Тсаллиса релятивистских гидродинамических уравнений для разреженной неидеальной газовой системы высокоэнергетических частиц. Москва. 2023d // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. № 23. 40 с.

Колесниченко А.В., Маров М.Я. К конструированию энтропийно-силовой модели расширения Вселенной, обусловленного гравитационно-индуцированным производством темной материи и влиянием обменной энтропии на событийном горизонте. Москва. 2023е. // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. № 4. 39 с.

Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. Том 2. Москва: Изд-во «Мир». 1977. 523 с.

Alts T., Müller I. Relativistic thermodynamics of simple heat conducting fluids // Archive for Rational Mechanics and Analysis.1972. V. 48. № 4. P. 245-273.

Bater R., Romatschko P. Causal viscous hydrodynamics for central heavy-ion collisions//Eur. Phys. 2007. C 51 P.677-687.

van Dantzig D. On the phenomenological thermodynamics of moving matter // Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. 1939, V. 42, 608 p.

Casas-Vazquez J., Jou D. Temperature in non-equilibrium states: A review of open problems and current proposals // Rep. Prog. Phys. 2003. V. 66. P. 1937-2023.

Chandrasekhar S. The post-newtonian equations of hydrodynamics in general relativity // Astroph. J. 1965. V. 142. P. 1488-1512.

Cox A. У., de Groot S. R., van Leeuwen W. A. On relativistic kinetic gas theory XVI. The temperature dependence of the transport coefficients for a simple gas of hard spheres // Physica. 1976. V. 84A. P. 155-164.

Eckart C. The thermodynamics of irreversible processes III. Relativistic theory of the simple fluid // Phys. Rev. 1940. V. 58. P. 919-928.

de Groot S. R., van Weert C. G., Hermens W. T, van Leeuwen W. A. On relativistic kinetic gas theory I. The second law for a gas mixture outside equilibrium // Physica. 1968. V. 40. P. 257-276.

de Groot S. R., van Weert C. G., Hermens W. T., van Leeuwen W. A. On relativistic gas theory II. Reciprocal relations between transport phenomena // Physica. 1969. V. 40. P.581-593.

de Groot S.R., van Weert C.G., Hermens W.T., van Leeuwen W.A. On relativistic kinetic gas theory III. The non-relativistic limit and its range of validity // Physica. 1969. V. 42. P. 309-319.

de Groot S. R., Mazur. Non-Equilibrium Thermodynamics, North-Holland, Amsterdam 1962.

de Groot W.A., van Leeuwen W.A., Meltzeril P. H. Transport Coefficients of a Neutrino Gas // Nuovo Cimento. 1975. V. 25A. № 2. P. 229-251.

de Groot W.A., van Leeuwen W.A.van Weert C. G. Relativisyic Kinetic Theory. Principles and Applications. `North-Holland Publishing Company. New York. Oxford. 1980

Havas P., Swenson R.J. Relativistic thermodynamics of fluids. I. // Annals of Physics.1979. V. 118. P. 259-306.

Hiscock W.A., Lindblom L. Generic instabilities in first-order dissipative relativistic fluid theories//// Physical Review D 1985, V 31, № 4, P.725-733

Israel W. Relativistic kinetic theory of a simple gas // J. Math. Phys. 1963. V. 4. P. 1163-1181.

Israel W. Nonstationary irreversible thermodynamics: a causal relativistic theory // Ann. Physic. 1976. V. 100. P. 310-331.

Jou D., Casas-Vazquez J., Lebon G. Extended Irreversible Thermodynamics // Springer Berlin. 1993.

Jüttner F. Das Maxwellsche Gesetz der Geschwindigke its verteilung in der Relativtheorie //Annalen der Physik 1911. Bd 34. S.856-882.

Kluitenberg G. A., de Groot S. R., Mazur P. Relativistic thermodynamics of irreversible processes I. Heat conduction, diffusion, viscous flow and chemical reactions; Formal part // Physica. 1953. V. 19. P. 689-794.

Kluitenberg G.A., de Groot S.R., Mazur P. Relativistic thermodynamics of irreversible processes II. Heat conduction and diffusion; Physical part // Physica 1953. V.19. P. 1079-1094.

Landau L.D., Lifshitz E.M. Fluid Mechanics // Pergamon, Oxford. 1959. 499 p.

Liu I-S., Muller T., Ruggeri B. Relativistic Thermodynamics of Gases // Annals of Physics. 1986. V. 169. P. 191-219.

Meixner J. The entropy concept in non-equilibrium thermodynamics // J. Phys. Soc. Japan. 1969. V. 26 Suppl., Proc. Int. Conf. Stat. Mech. 1968.

Müller I. Thermodynamics of diffusive and reacting mixtures of fluids // Physica 20D. 1968. V. 20. P. 35-66.

Müller I., Ruggeri T. Rational extended thernodynamics.Soringer. New York 1998.

Weinberg S. Entropy Generation and the Survival of Protogalaxies in an Expanding Universe // Astrophysical Journal. 1971. V. 168. P. 175-194.

Weinberg S. Gravitation and cosmology. Principles and applications of the theory of relativity.New York. J. Wiley and Sons 1972.

ОГЛАВЛЕНИЕ