ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 31 за 2023 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

А.В. Бобылев, С.Б. Куксин

Уравнение Больцмана и волновые кинетические уравнения

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Бобылев А.В., Куксин С.Б. Уравнение Больцмана и волновые кинетические уравнения // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2023. № 31. 20 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2023-31
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2023-31

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук

А.В. Бобылев, С.Б. Куксин

Уравнение Больцмана и волновые кинетические уравнения

Москва
2023

Бобылев А.В., Куксин С.Б.

Уравнение Больцмана и волновые кинетические уравнения

Известные нелинейные кинетические уравнения (в частности, волновое кинетическое уравнение и квантовые кинетические уравнения Нордхейма – Улинга – Уленбека) рассматриваются как естественное обобщение классического пространственно-однородного уравнения Больцмана. Для этого вводится обобщенное кинетическое уравнение, зависящее от некоторой функции четырех действительных переменных $F(x_1, x_2; x_3, x_4)$, подчиняющейся определенным перестановочным соотношениям. Исследуются свойства этого уравнения. Показывается, что указанные выше кинетические уравнения соответствуют разным формам функции (полинома) F. Затем рассматриваются вопросы дискретизации обобщенного кинетического уравнения на основе тех же идей, которые используются для построения дискретных моделей уравнения Больцмана. Особое внимание уделяется дискретным моделям волнового кинетического уравнения. Показано, что эти модели обладают монотонным функционалом, подобным больцмановской H-функции. Поведение решений простейшей модели Бродуэлла для волнового кинетического уравнения подробно обсуждается.

Ключевые слова: уравнение Больцмана, волновые кинетические уравнения, модель Бродуэлла

Bobylev A.V., Kuksin S.B.

Boltzmann equation and wave kinetic equations

The well-known nonlinear kinetic equations (in particular, the wave kinetic equation and the quantum Nordheim – Uehling – Uhlenbeck equations) are considered as a natural generalization of the classical spatially homogeneous Boltzmann equation. To this goal we introduce the generalized kinetic equation that depends on a function of four real variables $F(x_1, x_2; x_3, x_4)$. The function F is assumed to satisfy certain commutation relations. The general properties of this equation are studied. It is shown that the above mentioned kinetic equations correspond to different forms of the function (polynomial) F. Then the problem of discretization of the generalized kinetic equation is considered on the basis of ideas which are similar to those used for construction of discrete models of the Boltzmann equation. The main attention is paid to discrete models of the wave kinetic equation. It is shown that such models posses a monotone functional similar to Boltzmann H-function. The behaviour of solutions of the simplest Broadwell model for the wave kinetic equation is discussed in detail.

Key words: Boltzmann equation, wave kinetic equations, Broadwell model

Оглавление

1. Введение

Цель статьи - рассмотреть с единой точки зрения различные обобщения классического пространственно-однородного уравнения Больцмана, которые часто используются в литературе независимо одно от другого. Говоря более конкретно, мы имеем в виду два таких обобщения: (a) кинетическое уравнение для волн, используемое в теории слабой турбулентности (см., например, [11, 13] и ссылки в этих работах) и (б) кинетическое уравнение с учётом квантовой статистики, предложенное независимо в работах Нордхейма [15], а также Улинга и Уленбека [17]. Последнее уравнение вызвало большой интерес в последние годы в связи с явлением Бозе-конденсации. Математические результаты по этому уравнению можно найти, например, в статьях [4, 2, 3] и цитируемой там литературе. Наш подход в определенном смысле близок по идеологии к работе Аркерида [1].

Материал статьи изложен в следующем порядке. В разделе 2 мы начинаем с классического уравнения Больцмана, а затем определяем обобщённое кинетическое уравнение (ОКУ), которое включает как частные случаи упомянутые выше квантовое и волновое кинетические уравнения. Построены различные формы этого уравнения для трехмерного случая (Предложение 1) и обобщение ОКУ для случая произвольной размерности. Слабая форма ОКУ (уравнение для средних значений) и законы сохранения обсуждаются в разделе 3 (Предложение 2, в которое также включена знаменитая H-теорема в случае уравнения Больцмана). Наши обозначения и преобразования в разделах 2 и 3 близки к применяемым для уравнения Больцмана в книге [5].

В разделе 4 кратко обсуждаются конкретные формы ОКУ, важные для физики: квантовое уравнение Нордхейма–Улинга–Уленбека и волновое кинетическое уравнение. В разделе 5 вводятся в рассмотрение дискретные кинетические модели ОКУ по аналогии с известными моделями, основанными на уравнении Больцмана, также называемыми в литературе моделями дискретных скоростей (discrete velocity models). Грубо говоря, эти модели основнаны на (a) замене фазового пространства $\mathbb{R}^d$ на конечный набор $n \geq 4$ фазовых точек и (b) последующей замене (формальной аппроксимации) интегралов в ОКУ суммами по фазовым точкам. В результате получается система n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, формально аппроксимирующая ОКУ при $n \to \infty$. В то же время такая система уравнений обладает при любом $n \geq 4$ всеми основными свойствами ОКУ (положительность решения, законы сохранения и т. п.) и поэтому называется его дискретной моделью. Разделы 6 и 7 посвящены дискретным моделям волнового кинетического уравнения. Доказано,что эти модели любого порядка $n \geq 4$ имеют монотонный функционал, подобно H-функции для моделей уравнения Больцмана. Этот функционал построен в явном виде (Предложение 3). В разделе 7 изучается дискретная модель волнового кинетического уравнения, имеющая минимальный порядок $n = 4$. Используя указанный монотонный функционал, мы показываем в этом разделе, что любое положительное решение этой модели стремится к единственному устойчивому стационарному состоянию при больших временах (Предложение 4). В Заключении проведён краткий обзор результатов статьи.

2. Определение обобщённого кинетического уравнения (ОКУ)

Начнём с классического пространственно-однородного уравнения Больцмана для функции распределения $f(v,t)$, где $v \in \mathbb{R}^3$ и $t \in \mathbb{R}_+$ обозначают скорость частицы и время соответственно. Это уравнение имеет вид:

$$f_t(v,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3 \times S^2} dw\, d\omega\, g(|u|, \hat{u}\cdot\omega)[f(v',t)f(w',t) - f(v,t)f(w,t)], \qquad (1)$$

где

$$w \in S^2,\ u = v - w, \hat{u} = u/|u|,\ v' = \frac{1}{2}(v + w + |u|w),\ w' = \frac{1}{2}(v + w - |u|w). \quad (2)$$

Ядро $g(|u|, \cos\theta)$ интегрального оператора имеет вид:

$$g(|u|, \cos\theta) = |u|\sigma_{diff}(|u|, \theta),\ 0 \leq \theta \leq \pi, \qquad (3)$$

где $\sigma_{diff}(|u|, \theta)$ – дифференциальное сечение рассеяния на угол θ [20]. Обозначения и многие рассуждения здесь и ниже близки к книге [5]. Предполагается, что частицы взаимодействуют по законам классической механики с парным потенциалом $U(r)$, где $r > 0$ – расстояние между двумя взаимодействующими частицами. В математических работах ядро $g(|u|, \mu)$, $|\mu| \leq 1$, считается просто заданной функцией. Если частицы являются твёрдыми шарами диаметра $d > 0$, то получаем

$$g(|u|, \cos\theta) = |u| d^2/4, \tag{4}$$

т. е. ядро не зависит от угла рассеяния θ. Поскольку $d = const$, уравнение (1) для твердых шаров можно записать в виде

$$f_t(v,t) = C \int\limits_{\mathbb{R}^3 \times S^2} dw\, d\omega\, |u|\, [f(v',t)f(w',t) - f(v,t)f(w,t)], \quad C = d^2/4, \tag{5}$$

где использованы обозначения (2). Ниже мы опускаем аргумент t (время) функции $f(v,t)$, поскольку он играет роль параметра.

Теперь перейдём к определению обобщённого кинетического уравнения, частным случаем которого является уравнение (5), а также более общее уравнение (1). Для этого введём функцию $F(x_1, x_2; x_3, x_4)$ четырёх действительных переменных, удовлетворяющую следующим перестановочным соотношениям:

$$F(x_1, x_2 | x_3, x_4) = F(x_2, x_1 | x_3, x_4) = F(x_1, x_2 | x_4, x_3) = -F(x_3, x_4 | x_1, x_2). \tag{6}$$

Зададим также неотрицательную функцию пары векторов $R(u_1, u_2)$ и $u_{1,2} \in \mathbb{R}^3$. Будем предполагать, что эта функция изотропна, т. е. инвариантна относительно вращений пространства $\mathbb{R}^3$. Тогда известно, что

$$R(u_1, u_2) = R_1(|u_1|^2, |u_2|^2, u_1 \cdot u_2), \tag{7}$$

т. е. такая функция сводится к функции трёх скаляров (это верно в случае любого числа измерений).

После этого определим обобщенное кинетическое уравнение равенством

$$f_t(v,t) = K[f](v), \tag{8}$$

где обобщенный кинетический оператор K определяется равенством

$$K[f](v) = \int\limits_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} dv_2 dv_3 dv_4\, \delta[v + v_2 - v_3 - v_4]\, \delta\left[|v|^2 + |v_2|^2 - |v_3|^2 - |v_4|^2\right] \times$$
$$\times R(v - v_2, v_3 - v_4) F[f(v), f(v_2); f(v_3), f(v_4)]. \tag{9}$$

Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы упростить этот интеграл для произвольной функции $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ и, в частности, показать, что $K[f]$, по существу, совпадает с интегралом столкновений Больцмана, если

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3 x_4 - x_1 x_2. \tag{10}$$

Проведя интегрирование по v_4 в (9), получим

$$K[f](v) = \int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} dv_2 dv_3 G(v, v_2; v_3, v + v_2 - v_3)$$

где

$$G(v, v_2; v_3, v_4) = \delta\left[|v|^2 + |v_2|^2 - |v_3|^2 - |v_4|^2\right] R(v - v_2, v_3 - v_4)\times$$
$$\times F[f(v), f(v_2); f(v_3), f(v_4)].$$

Заметим, что

$$\delta(\alpha x) = |\alpha|^{-1}\delta(x),$$
$$|v|^2 + |v_2|^2 - |v_3|^2 - |v + v_2 - v_3|^2 = -2(v_3 - v_2)\cdot(v_3 - v).$$

Поэтому

$$K[f](v) = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} dv_2\, dv_3\, \delta\left[(v_3 - v_2)\cdot(v_3 - v)\right]\times$$
$$\times R(v - v_2, 2v_3 - v - v_2)\;\; G_1(v, v_2; v_3, v + v_2 - v_3),$$
$$G_1(v, v_2; v_3, v_4) = F[f(v), f(v_2); f(v_3), f(v_4)]. \qquad (11)$$

Замена переменных интегрирования (v_2, v_3) на (w, k) по формулам

$$v_2 = w, \quad v_3 = v + k/2$$

приводит этот интеграл к виду

$$K[f](v) = \frac{1}{8}\int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} dw\, dk\, \delta(k\cdot u + |k|^2/2) R(u, u + k)\times$$
$$\times G_1(v, w; v + k/2, w - k/2), \quad u = v - w. \qquad (12)$$

Проведём теперь замену переменных во внутреннем интеграле по k по формуле $k = u' - u$, где u' – новая переменная интегрирования. В результате получим после простых вычислений

$$K[f](v) = \frac{1}{4}\int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} dw\, du'\, \delta(|u'|^2 - |u|^2) R(u, u') G_1(v, w; v', w'),$$

где

$$u = v - w, \quad v' = (v + w + u')/2, \quad w' = (v + w - u')/2. \qquad (13)$$

Наконец, полагая
$$u' = r\omega, \quad r = |u|, \quad \omega \in S^2,$$
используем известную общую формулу для произвольной функции $\Phi(u)$
$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} du'\,\delta(|u'|^2 - |u|^2)\Phi(u') =$$
$$= 2\int\limits_0^\infty dr\, r^2\delta(r^2 - |u|^2)\int\limits_{S^2} d\omega\,\Phi(r\omega) = |u|\int\limits_{S^2} d\omega\,\Phi(|u|\omega) \qquad (14)$$
и получим, используя обозначения (11), (13), где $u' = |u|\omega$, другое представление обобщённого кинетического оператора K:
$$K[f](v) = \frac{1}{8}\int\limits_{\mathbb{R}^3\times S^2} dw\,d\omega\,|u|R(u,|u|\omega)F[f(v),f(w);f(v'),f(w')]. \qquad (15)$$
Эта формула справедлива для произвольной функции $R(u_1,u_2)$. Если же эта функция изотропна, как предполагалось выше, то её можно представить в виде (7) и ввести обозначение
$$R(u,|u|\,\omega) = 8|u|^{-1}g(|u|,\hat{u}\cdot\omega), \quad u\in\mathbb{R}^3, \quad \omega\in S^2, \quad \hat{u} = u/|u|. \qquad (16)$$
Тогда
$$K[f](v) = \int\limits_{\mathbb{R}^3\times S^2} dw\,d\omega\,g(|u|,\hat{u}\cdot\omega)F[f(v),f(w);f(v'),f(w')], \qquad (17)$$
где использованы те же обозначения (2), что в уравнении Больцмана (1). Если функция F даётся формулой (10), то $K[f](v)$ совпадает с интегралом столкновений Больцмана. Заметим, что случай твёрдых шаров (4), (5) для уравнения Больцмана соответствует случаю постоянного ядра в обобщённом кинетическом уравнении (8), (9).

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Предложение 1. Обобщённое кинетическое уравнение (8), (9) с изотропным ядром (7) формальными преобразованиями приводится к уравнению типа Больцмана (8), (17). Связь между ядрами соответствующих интегральных операторов указана в (16). Если функция $F(x_1,x_2;x_3,x_4)$ в операторе K (9) даётся формулой (10), то уравнение (8), (17) совпадает с уравнением Больцмана (1) (в тех же обозначениях (2)).

Случай произвольной размерности $d \geq 2$ в определении (9) интеграла $K[f](v)$, $v\in\mathbb{R}^d$, сводится, очевидно, к замене $\mathbb{R}^3$ на $\mathbb{R}^d$ в определении области интегрирования. Все выкладки для формального доказательства d-мерного аналога Предложения 1 проводятся в точно так же, как для $d = 3$. Разница возникает только в двух формулах (12) и (14). В (12) множитель 1/8 перед интегралом по области $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ становится равен 2^{-d}. Обобщение же формулы (14) на d–мерный случай имеет вид

$$2 \int\limits_{\mathbb{R}^d} du' \, \delta(|u'|^2 - |u|^2) \Phi(u') = |u|^{d-2} \int\limits_{S^{d-1}} d\omega \, \Phi(|u|\omega)$$

в аналогичных обозначениях. В результате d–мерный аналог равенства (15) выглядит как

$$K[f](v) = 2^{-d} \int\limits_{\mathbb{R}^3 \times S^{d-1}} dw \, d\omega \, |u|^{d-2} R(u, |u| \, \omega) \; F[f(v), f(w); f(v'), f(w')]. \quad (18)$$

в обозначениях, аналогичных (2). Если предположить, что ядро $R(u_1, u_2)$ инвариантно относительно вращений векторов $u_{1,2} \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, то формула (7) остаётся справедливой. Поэтому мы можем положить

$$R(u, |u|\omega) = 2^d |u|^{2-d} g(|u|, \hat{u} \cdot \omega), \quad \hat{u} = u/|u| \quad (19)$$

и получить ту же формулу (17), в которой область интегрирования $\mathbb{R}^3 \times S^2$ заменена на $\mathbb{R}^3 \times S^{d-1}$. Эти рассуждения устанавливают справедливость (на формальном уровне) аналога Предложения 1 для случая произвольной размерности $d = 2, 3, \ldots$ Для простоты мы рассматриваем ниже только случай $d = 3$.

3. Законы сохранения и H-теорема

Укажем также некоторые другие формы записи интеграла (12), отличающиеся от (9) и (15). Заменяя в (12) w по формуле $w = \tilde{w} + k/2$ и опуская тильды в конечных результатах, получим

$$K[f](v) = \frac{1}{8} \int\limits_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} dw \, dk \, \delta(k \cdot u) R(u - k/2, u + k/2) \times$$
$$\times G_1(v, w + k/2; w + k/2, w), \quad u = v - w. \quad (20)$$

Понятно, что внутренний интеграл по k сводится в этом случае к интегралу по плоскости, перпендикулярной вектору $u \in \mathbb{R}^3$. Преобразование такого типа было впервые использовано для уравнения Больцмана Карлеманом [19].

Ещё одну форму записи интеграла (12) можно также легко получить, полагая в нем

$$k = rn, \quad r = |k|, \quad n \in S^2$$

и используя следующую общую формулу для произвольной функции $\Phi(k)$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} dk\, \delta(k \cdot u + |k|^2/2)\Phi(k) = \int\limits_0^\infty dr\, r^2 \int\limits_{S^2} dn\delta(rn \cdot u + r^2/2)\Phi(rn) =$$

$$= 4 \int\limits_{S^2_-} dn\, |nu|\Phi[-2(n \cdot u)n] = 2 \int\limits_{S^2} dn\, |n \cdot u|\Phi[-2(n \cdot u)n],$$

где

$$S^2_- = \{n \in S^2 : \; n \cdot u < 0\}.$$

Отсюда и из (12) получаем

$$K[f](v) = \frac{1}{4} \int\limits_{\mathbb{R}^3 \times S^2} dw\, dn\, |u \cdot n| R(u, u') G_1(v, w; v', w'); \; u = r - w, \tag{21}$$

$$v' = v - (u \cdot n)n, \quad w' = w + (u \cdot n)n, \quad u' = v' - w' = u - 2(u \cdot n)n.$$

Если положить здесь, как в (10), (12),

$$G_1(v, w; v', w') = F[f(v), f(w); f(v'), f(w')] = f(v')f(w') - f(v)f(w),$$

то получим хорошо известную формулу для интеграла столкновений Больцмана (см., например, [21]). В этом случае, как и в (1), векторы v и w интерпретируются как скорости частиц газа. Преобразование $(v, w) \to (v', w')$ интерпретируется как парное столкновение частиц со скоростями v и w, которые переходят в результате столкновения в скорости v' и w' соответственно. Заметим, что подстановка ядра (16) в интеграл (21) даёт

$$K[f](v) = \int\limits_{\mathbb{R}^3 \times S^2} dw\, dn\, B(|u|, \hat{u} \cdot n)\, G_1(v, w; v', w'), \tag{22}$$

где использованы те же обозначения и

$$B(|u|, \hat{u} \cdot n) = 2|\hat{u} \cdot n|\, g[|u|, 1 - 2(\hat{u} \cdot n)^2], \qquad \hat{u} = u/|u|.$$

Для произвольной пробной функции $h(v)$ обозначим

$$\langle f, h \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^3} dv\, f(v)h(v) \tag{23}$$

в предположении, что этот интеграл существует. Если $f(v,t) \geq 0$ удовлетворяет уравнению (8), то формально получаем

$$\frac{d}{dt}\langle f, h\rangle = \langle K[f], h\rangle. \tag{24}$$

Заметим, что функция $\langle f, h\rangle(t)$ пропорциональна среднему (по $v \in \mathbb{R}^3$) значению $h(v)$. Используя, например, форму записи (22) оператора K, легко показать, что

$$\begin{gathered} \langle K[f], h\rangle = -\frac{1}{4} \int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times S^2} dv\, dw\, dn\, B(|u|, \hat{u}\cdot n)\; G_1(v, w; v', w')\times \\ \times[h(v') + h(w') - h(v) - h(w)], \\ G_1(v, w; v', w') = F[f(v), f(w); f(v'), f(w')], \end{gathered} \tag{25}$$

для любой функции $F(x_1, x_2; x_3, x_4)$, удовлетворяющей перестановочным соотношениям (6). Рассмотрев функциональное уравнение

$$h(v') + h(w') - h(v) - h(w) = 0$$

в обозначениях (21), легко убедиться, что скалярные функции $h_1 = 1$ и $h_3 = |v|^2$, а также векторная функция $h_2 = v \in \mathbb{R}^3$ являются его линейно независимыми решениями. Единственность этих решений в различных классах функций доказана многими авторами (см. обсуждение этого вопроса в [10]). Таким образом, для уравнения (8), (9) в предположениях (6), (7) имеют место законы сохранения интегралов

$$\langle f, 1\rangle = \mathrm{const},\;\; \langle f, v\rangle = \mathrm{const},\;\; \langle f, |v|^2\rangle = \mathrm{const}, \tag{26}$$

которые в случае уравнения Больцмана интерпретируются как величины, пропорциональные соответственно полному числу частиц газа, его средней скорости и средней кинетической энергии.

Наконец, в случае уравнения Больцмана (10) можно положить в (25) $h(v) = \ln f(v)$, где аргумент t, как обычно, опущен. Тогда получим

$$\begin{aligned} G_1(v, w; v', w')[h(v') + h(w') - h(v) - h(w)] &= \\ = [f(v')f(w') - f(v)f(w)] \ln\frac{f(v')f(w')}{f(v)f(w)} &\geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда формально следует, что

$$\begin{gathered} \frac{dH}{dt} = \langle K(f), (\ln f + 1)\rangle = \langle K(f), \ln f\rangle \leq 0 \\ \text{где} \quad H(t) = \langle f(v,t),\; \ln f(v,t)\rangle, \end{gathered} \tag{27}$$

т. е. знаменитая H-теорема Больцмана. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Предложение 2. Уравнение типа Больцмана (8), (17) может быть записано в эквивалентной форме (8), (22). Если функция удовлетворяет соотношениям (6), то слабая форма (24) этого уравнения приводится к виду (24), (25), из которого следуют законы сохранения (26). В случае уравнения Больцмана (10) его решение $f(v,t)$ удовлетворяет также H–теореме (27).

В следующем параграфе мы рассмотрим конкретные формы обобщенного кинетического уравнения (8), (9), отличные от уравнения Больцмана и представляющие интерес для приложений.

4. Уравнение Нордхейма – Улинга – Уленбека и волновое кинетическое уравнение

Приведём примеры уравнений рассматриваемого типа, встречающихся в физической литературе. Из вида уравнения (8), (9) ясно, что конкретные уравнения отличаются видом функции $F(x_1,x_2;x_3,x_4)$ подчиняющейся "законам"(6). Ядро $R(u_1,u_2)$ в (9) менее важно. Во всех интересных случаях функция F имеет структуру разности двух функций

$$F(x_1,x_2;x_3,x_4) = P(x_3,x_4;x_1,x_2) - P(x_1,x_2;x_3,x_4). \tag{28}$$

Имеется, по крайней мере, три таких случая, которые можно классифицировать по функции P из этого равенства. Это следующие случаи:
(A) Классическое кинетическое уравнение Больцмана

$$P_B(x_1,x_2;x_3,x_4) = x_1x_2; \tag{29}$$

(B) Квантовое кинетическое уравнение Нордхейма–Улинга–Уленбека [15, 17]

$$P_{NUU}(x_1,x_2;x_3,x_4) = x_1x_2(1+\theta x_3)(1+\theta x_4), \tag{30}$$

где $\theta = 1$ для бозонов и $\theta = -1$ для фермионов;
(C) Волновое кинетическое уравнение [13, 11]

$$P_W(x_1,x_2;x_3,x_4) = x_1x_2(x_3+x_4). \tag{31}$$

Используя аналогичные обозначения для функции F, легко проверить, что

$$F_{NUU}(x_1,x_2;x_3,x_4) = F_B(x_1,x_2;x_3,x_4) + \theta F_W(x_1,x_2;x_3,x_4),$$

поскольку $\theta^2 = 1$ и поэтому члены четвёртой степени в $F_{NUU}(x_1, x_2; x_3, x_4)$ (28) взаимно сокращаются. Обзор математических результатов для пространственно однородного NUU-уравнения можно найти в [1, 4]. Там же обсуждается интересное обобщение этого уравнения на случай так называемых анионов (anyons) – квазичастиц с дробным спином. Эта модель соответствует также формуле (29) в (9), где

$$P(x_1, x_2; x_3, x_4) = x_1 x_2 \Phi(x_3)\Phi(x_4),$$
$$\Phi(x) = (1 - \alpha x)^{\alpha}[1 + (1 - \alpha)x]^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (32)$$

Предельные значения $\alpha = 0, 1$ соответствуют NUU-уравнению для бозонов ($\alpha = 0$) и фермионов ($\alpha = 1$). Для случая функции F в операторе (9), представленной формулами (29), (32), доказано существование глобального решения задачи Коши для уравнения (8) в $L^1 \cap L^\infty$ при некоторых ограничениях на начальные условия и ядро B оператора (в форме (22)).

В следующем параграфе мы кратко рассмотрим вопрос о дискретных моделях обобщенного кинетического уравнения.

5. Дискретные кинетические модели ОКУ

Идея применения дискретных скоростей к качественному описанию решений уравнения Больцмана восходит к Карлеману [19] и самому Больцману [18]. В развитии этой идеи большую роль сыграл Кабан [9]. Наконец в 1990$^{\text{х}}$ годах было доказано, что дискретными моделями можно аппроксимировать уравнение Больцмана (см. [7, 16] и ссылки в этих работах), т. е. такие модели можно использовать не только для качественного, но и для количественного описания решений уравнения Больцмана.

Применим аналогичную схему дискретизации к уравнению (8), (9). Пусть пространство "скоростей" V состоит из n точек:

$$V = \{v_i \in \mathbb{R}^d,\ i = 1, \ldots, n\},\ d = 2, 3.$$

Вместо функции $f(v, t)$ рассматриваем вектор

$$f(t) = \{f_1(t), \ldots, f_n(t)\}, \quad f_i(t) = f(v_i, t), \quad i = 1, \ldots, n. \quad (33)$$

Уравнение (8) заменяется системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{df_i}{dt} = \sum_{j,k,l}^{n} \Gamma_{ij}^{kl} F(f_i, f_j; f_k, f_l), \quad (34)$$

$i = 1, \dots, n;\ 1 \le j \le n,\ 1 \le k \le n,\ 1 \le l \le n$. При этом неотрицательные постоянные Γ_{ij}^{kl} отличны от нуля только для таких индексов $(i, j; k, l)$, для которых

$$v_i + v_j = v_k + v_l, \quad |v_i|^2 + |v_j|^2 = |v_k|^2 + |v_l|^2. \tag{35}$$

Кроме того, выполняются условия симметрии

$$\Gamma_{ij}^{kl} = \Gamma_{ji}^{kl} = \Gamma_{kl}^{ij} \tag{36}$$

для всех натуральных значений индексов, не превышающих n. Дискретные модели уравнения Больцмана имеют вид (34), где функция F определена равенствами (28), (29). Эти модели хорошо изучены в литературе. Отметим, в частности, два обстоятельства.

Во-первых, "пространство скоростей" $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ должно быть выбрано так, чтобы обеспечить отсутствие "лишних"(spurious) законов сохранения вида

$$\sum_{i=1}^{n} f(v_i, t) h(v_i) = \text{const.}, \quad f(v_i, t) = f_i(t), \tag{37}$$

для системы уравнений (34). Иначе говоря, из равенства (37) должно следовать, что

$$h(v) = \alpha + \beta \cdot v + \gamma |v|^2,$$

где $\alpha, \gamma \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}^d$ – произвольные постоянные коэффициенты. Вопрос о выборе таких допустимых множеств $V \subset \mathbb{R}^d$, состоящих из n точек $v_1, \dots, v_n$, хорошо изучен в связи с дискретными моделями уравнения Больцмана для любых значений $d \ge 2$ и $n \ge 4$ (см. [6] и ссылки в этой работе). Поэтому будем считать, что условие отсутствия лишних инвариантов выполнено.

Второе обстоятельство связано с построением последовательности дискретных моделей вида (34), аппроксимирующих обобщенное кинетическое уравнение (8), (9). Здесь также можно воспользоваться известными результатами для уравнения Больцмана (см., в частности, достаточно подробную статью [16]) и следовать той же самой схеме для построения дискретных моделей на равномерной сетке в пространстве скоростей (т. е. переменной $v \in \mathbb{R}^d$). Доказательство из [16] апроксимации интеграла (17) суммами вида правой части (34), основанное на одной тонкой теореме из теории чисел [14], переносится со случая уравнения Больцмана (10) на случай более общей полиномиальной по переменным $x_i,\ i = 1, \dots, 4$, функции $F(x_1, x_2; x_3, x_4)$ практически без изменений. Отметим также недавнюю работу, результаты которой позволяют усилить теоретико-числовую теорему из [12] (будет опубликована в "Математическом Сборнике").

Ниже мы рассмотрим вопрос о применении дискретных моделей к волновому кинетическому уравнению. Понятно, что интерес к дискретным кинетическим моделям связан с тем, что их свойства очень похожи на свойства соответствующих кинетических уравнений. В частности, для системы (34) легко доказываются аналоги тождеств типа (25), откуда следуют законы сохранения (26), в которых интегралы заменены суммами. Например, легко получить следующее тождество

$$\sum_{i=1}^{n} h_i \sum_{j,k,l\geq 1}^{n} \Gamma_{ij}^{kl} F(f_i, f_j; f_k, f_l) = \tag{38}$$
$$= \frac{1}{4} \sum_{j,k,l\geq 1}^{n} \Gamma_{ij}^{kl} F(f_i, f_j; f_k, f_l)(h_i + h_j - h_k - h_l),$$

справедливое для любого набора действительных чисел $\{h_1, \ldots, h_n\}$. Это тождество будет использовано в следующем параграфе.

6. Волновое кинетическое уравнение и его модели

В соответствии со сказанным выше, волновое кинетическое уравнение определяется формулами (8), (9), где функция F определена в (28), (31). Т. е. мы получаем

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2; x_3, x_4) &= x_3 x_4 (x_1 + x_2) - x_1 x_2 (x_3 + x_4) = \\ &= x_1 x_2 x_3 x_4 (x_1^{-1} + x_2^{-1} - x_3^{-1} - x_4^{-1}). \end{aligned} \tag{39}$$

Рассмотрим дискретную модель этого уравнения для некоторого допустимого "пространства скоростей"

$$V = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{R}^d. \tag{40}$$

Используя обозначения (39), получаем уравнения (34), которые в этом случае имеют вид

$$\frac{df_i}{dt} = \sum_{j,k,l}^{n} \Gamma_{ij}^{kl} [f_k\, f_l\, (f_i + f_j) - f_i\, f_j\, (f_k + f_l)], \quad i = 1, \ldots, n, \tag{41}$$

где коэффициенты $\Gamma_{ij}^{kl} \geq 0$ удовлетворяют условиям симметрии (36). Пусть $h_1, \ldots, h_n$ – любой набор действительных чисел. Применяя тождество (38) к уравнениям (41), получим

$$\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{df_i}{dt} = \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l\geq 1}^{n} \Gamma_{ij}^{kl}\, f_i\, f_j\, f_k\, f_l\, (f_i^{-1} + f_j^{-1} - f_k^{-1} - f_l^{-1})(h_i + h_j - h_k - h_l).$$

Предполагая, что $f_i(t) > 0$, отсюда получим

$$\frac{d}{dt} \ln \prod_{i=1}^{n} f_i(t) = \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l \geq 1}^{n} \Gamma_{ij}^{kl}\, f_i\, f_j\, f_k\, f_l\, (f_i^{-1} + f_j^{-1} - f_k^{-1} - f_l^{-1})^2 \geq 0.$$

Следовательно, справедливо следующее утверждение

Предложение 3. Если функции $\{f_1(t), \dots, f_n(t)\}, \quad n \geq 4$, удовлетворяют уравнению (41) с любыми неотрицательными коэффициентами, удовлетворяющими условиям (36), на интервале $0 < t < T$ и положительны на этом интервале, то произведение этих функций

$$S(t) = \prod_{i=1}^{n} f_i(t)$$

не убывает при всех $t \in (0, T)$.

Для завершения доказательства достаточно заметить, что логарифм является монотонно возрастающей функцией.

К сожалению, не вполне понятно, как обобщить этот монотонный функционал на само волновое кинетическое уравнение (8), (9) с функцией F, определеной равенством (39). С другой стороны, если для определенности взять $d = 3$ и интеграл $K[f]$ в виде (22), то из равенства (25), при $h = f^{-1}(v,t)$ формально следует, что

$$\int_{\mathbb{R}^3} dv \frac{\partial}{\partial t} \ln f(v,t) = \frac{1}{4} \int\limits_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times S^2} dv\, dw\, dn\, \mathsf{B}(|u|, u \cdot n) \times$$
$$\times\, f(v)\, f(w)\, f(v')\, f(w')\ \left[f^{-1}(v) + f^{-1}(w) - f^{-1}(v') - f^{-1}(w')\right]^2 \geq 0,$$

где использованы обозначения (21). Для краткости мы не будем обсуждать условия сходимости интегралов в этом равенстве.

Вместо этого мы рассмотрим ниже простейшую дискретную модель волнового кинетического уравнения.

7. Дискретная модель типа Бродуэлла

Возвращаясь к дискретным кинетическим моделям общего вида (34), отметим, что наиболее простая модель соответствует значению $n = 4$. При этом 4 "скорости" $v_i \in \mathbb{R}^d,\ i = 1, \dots, 4$ удовлетворяют законам сохранения

$$v_1 + v_2 = v_3 + v_4, \quad |v_1|^2 + |v_2|^2 = |v_3|^2 + |v_4|^2.$$

Возьмем минимальное значение $d = 2$ и положим

$$v_1 = (1,0),\ v_2 = (-1,0),\ v_3 = (0,1),\ v_4 = (0,-1);$$
$$f(v_i,t) = f_i(t),\ i = 1,\dots,4;\ \Gamma_{12}^{34} = \Gamma_{21}^{34} = \Gamma_{34}^{12} = 1. \tag{42}$$

В результате получим из (34) систему уравнений

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{\partial f_2}{\partial t} = -\frac{\partial f_3}{\partial t} = -\frac{\partial f_4}{\partial t} = F(f_1, f_2; f_3, f_4), \tag{43}$$

где использованы свойства (6) функции F. Отсюда сразу следуют законы сохранения, специфические именно для этой простой системы

$$f_1 - f_2 = A, \quad f_1 + f_3 = B, \quad f_1 + f_4 = C, \tag{44}$$

где A, B, C – постоянные, определяемые из начальных условий. Для уравнения Больцмана функция F (10) сводит (43) к известным уравнениям модели Бродуэлла [8]. В общем случае функции F (10) мы можем выразить $f_{2,3,4}$ через f_1 и свести (43) к одному уравнению для $f(t) = f_1(t)$

$$f_t = F[f, f-A; B-f, C-f], \quad f_{|t=0} = f_1(0). \tag{45}$$

Для модели Бродуэлла уравнения Больцмана подставляем в это уравнение F (6) и получаем

$$f_t = (B-f)(C-f) - f(f-A) = BC - f(B+C-A). \tag{46}$$

Из формул (37) ясно, что $B > 0$, $C > 0$ и $B + C - A = f_1(0) + f_2(0) + f_3(0) + f_4(0) > 0$ для любых положительных начальных условий $f_i(0)$, $i = 1,\dots,4$. Понятно, что линейное уравнение (46) описывает экспоненциальную по времени t релаксацию $f(t)$ к своему равновесному значению.

Теперь рассмотрим функцию F (39) в задаче Коши (45) и получим простейшую модель волнового кинетического уравнения в виде

$$f_t = (B-f)(C-f)(2f-A) - f(f-A)(B+C-2f) =$$
$$= 4f^3 - 3(A+B+C)f^2 + 2(AB+AC+BC)f - ABC, \quad f_{|t=0} = f_1(0).$$

Легко проверить, что это уравнение приводится к виду

$$f_t = P'(f), \quad P(f) = f(f-A)(f-B)(f-C), \tag{47}$$

где $P'(f)$ производная по f полинома $P(f)$. Отсюда сразу следует, что

$$\frac{d}{dt}P[f(t)] = P'(f)\frac{df}{dt} = [P'(f)]^2 \geq 0.$$

Но это неравенство нам уже известно, так как в наших первоначальных обозначениях (см. (44), (45))

$$f_1 = f, \quad f_2 = f - A, \quad f_3 = B - f, \quad f_4 = C - f. \tag{48}$$

Следовательно, $P(f) = f_1\, f_2\, f_3\, f_4$. Монотонность этого функционала следует из доказанного выше Предложения 3.

Поведение решения $f(t)$ уравнения (46) для неотрицательных начальных условий $f_i(0) \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 4$, в обозначениях (48) легко исследовать. Ясно, что должно выполняться неравенство

$$\mathrm{Max}(0, A) \leq f(0) \leq \mathrm{Min}(B, C). \tag{49}$$

Для краткости ограничимся случаем общего положения, когда

$$\mathrm{Max}(0, A) < B < C, \quad A \neq 0. \tag{50}$$

Имеется всего два различных случая зависимости от знака A. Пусть $A > 0$, тогда полином $P(f)$ имеет 3 положительных и один нулевой корень. При этом $P(f) \approx f^4$ при $f \to \infty$, а начальное значение $f(0)$ расположено внутри интервала (A, B) в соответствии с неравенством (49). На этом интервале полином $P(f)$ положителен и имеет единственный максимум в точке f. Поскольку $P[f(t)]$ не убывает по t, то

$$f(t) \underset{t\to\infty}{\to} f_*, \tag{51}$$

монотонно возрастая, если $f(0) < f_*$, или убывая, если $f(0) > f_*$.

Случай $A < 0$ рассматривается совершенно аналогично с единственным отличием: интервал (A, B) заменяется на $(0, B)$. Именно в этом интервале тогда находится точка f_* единственного локального максимума полинома $P(f)$, к которой и сходится (монотонно по t) решение $f(t)$ при $t \to \infty$.

Это простое рассуждение (читая его, удобно иметь перед глазами график функции $y = P(x)$ (47)) доказывает следующее утверждение.

<u>Предложение 4.</u> Решение уравнений (42), (38) с заданными начальными условиями $\{f_i(0) \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 4\}$ сводится с помощью законов сохранения (49) к решению одного уравнения (47) для функции $f(t) = f_1(t)$. В случае общего положения, когда выполняются условия (50) и, кроме того, неравенства

$$f(0) \neq \mathrm{Max}(0, A), \quad f(0) \neq B,$$

решение $f(t)$ уравнения (47) с таким начальным условием удовлетворяет неравенству

$$\mathrm{Max}(0, A) < f(t) < B$$

для всех $t \geq 0$. При этом $f(t)$ является строго монотонной функцией для всех $t \geq 0$ и стремится при больших t к пределу (51), где f_* – единственная точка максимума полинома $P(f)$ (47) на отрезке $\mathrm{Max}(0, A) \leq f \leq B$.

Для краткости мы ограничиваемся случаем общего положения. Таким образом, неотрицательные начальные условия релаксируют к единственному устойчивому положению равновесия, как и в случае более простой модели Бродуэлла (46) для уравнения Больцмана. Конечно, эта модель слишком проста для того, чтобы делать какие-то общие заключения.

8. Заключение

В статье рассмотрен с единой точки зрения широкий класс нелинейных кинетических уравнений, используемых в современной математической физике. Этот класс включает, в частности,

(а) классическое пространственно-однородное уравнение Больцмана,

(б) квантовое кинетическое уравнение Нордхейма-Улинга-Уленбека,

(в) волновое кинетическое уравнение, используемое в теории слабой турбулентности.

Все эти уравнения можно рассматривать как различные формы обобщенного кинетического уравнения (ОКУ), введенного в разделе 2 статьи. Исследованы общие свойства этого уравнения (законы сохранения, монотонные функционалы).

На основе идей классической кинетической теории уравнения Больцмана построены дискретные модели ОКУ. Модель порядка $n \geq 4$ – это просто система n нелинейных ОДУ первого порядка, сохраняющая главные свойства моделируемого кинетического уравнения. Ожидается, что при $n \to \infty$ решение этой системы сходятся к решению ОКУ.

Особое внимание уделено волновым кинетическим уравненим. Рассмотрена наиболее распространённая форма такого уравнения, исследованы соответствующие дискретные модели. Доказано существование монотонного по времени функционала (аналога энтропии) на решении модели любого порядка $n \geq 4$ для волнового кинетического уравнения. Этот функционал построен в Предложении 3 раздела 2. На основе такого свойства исследовано качественное поведение решения для случая $n = 4$, который для уравнения Больцмана соответствует известной модели Бродуэлла. Доказана сходимость решения к равновесию при неограниченном возрастании времени.

Конечно, модель типа Бродуэлла слишком проста, чтобы делать общие заключения о поведении решения при больших временах. Но качественно решение этой модели ведёт себя правильно. Мы планируем вернуться к обсуждению вопроса о долговременной асимптотике решений общих дискретных моделей волнового кинетического уравнения в следующей публикации. Другие вопросы, которые здесь возникают:

(1) Что дают дискретные модели для понимания асимптотики решения самого волнового кинетического уравнения?

(2) Нельзя ли получить эти дискретные модели как определённую аппроксимацию (в широком смысле этого термина) тех сумм, которые входят в фурье-представление исходного нелинейного уравнения Шредингера?

Эти вопросы мы также надеемся прояснить в последующих публикациях.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (мегагрант, соглашение № 075-15-2022-1115).

Библиографический список

[1] Arkeryd L. On low temperature kinetic theory; spin diffusion, Bose – Einstein condensates, anyons. *Journal of Statistical Physics*, 150:1063–1079, 2013.

[2] Arkeryd L., Nouri A. Bose condensates in interaction with excitations: A kinetic model. *Communications in Mathematical Physics*, 310:765–788, 2012.

[3] Arkeryd L., Nouri, A. A linearized kinetic problem on the half-line with collision operator from a Bose condensate with excitations. *Kinetic and Related Models*, 6(4):671–686, 2013.

[4] Arkeryd L., Nouri A. On a Boltzmann equation for Haldane statistics. arXiv: 1711.10357, 2[math-phys](12 Jul), 2018.

[5] Bobylev A.V. *Kinetic Equations; Volume 1: Boltzmann Equation, Maxwell Models and Hydrodynamics beyond Navier-Stokes.* De Gruyter Series in Applied and Numerical Mathematics 5/1. De Gruyter, Berlin/Boston, 2020.

[6] Bobylev A. V. and Vinerean M. C. Construction of discrete kinetic models with given invariants. *Journal of Statistical Physics*, 132:153–170, 2008.

[7] Bobylev A.V., Palczewski A., Schneider J. On approximation of the Boltzmann equation by discrete velocity models. *Comptes rendus de l'Acad´emie des sciences.* S´erie I, Math´ematique, 320(5):639–644, 1995.

[8] Broadwell J. E. Study of rarefied shear flow by the discrete velocity method. *Journal of Fluid Mechanics*, 19(3):401–414, 1964.

[9] Cabannes H. The Discrete Boltzmann Equation: (Theory and Applications); Lecture Notes Given at the University of California, Berkeley. University of California, Berkeley, 1980.

[10] Illner R., Cercignani C. and Pulvirenti M. The Mathematical Theory of Dilute Gases. *Applied Mathematical Sciences.* Springer New York, 1994.

[11] Dymov A., Kuksin S. Formal expansions in stochastic model for wave turbulence 1: Kinetic limit. *Communications in Mathematical Physics*, 382:951–1014, 2021.

[12] Dymov A., Kuksin S., Maiocchi A. and Vladut S. A refinement of Heath-Brown's theorem on quadratic forms. Препринт, будет опубликован в *"Математическом Сборнике"* в 2023 г.

[13] Escobedo M. and Velazquez J.J. On the theory of weak turbulence for the nonlinear Schrödinger equation. *Memoirs of the American Mathematical Society,* 238, 2013.

[14] Iwaniec H. Fourier coefficients of modular forms of half-integral weight. *Iventiones mathematicae*, 87:385–401, 1987.

[15] Nordheim L. W. On the kinetic method in the new statistics and application in the electron theory of conductivity. *Proceedings of the Royal Society of London.* Series A, 119(783):689–698, 1928.

[16] Palczewski A., Schneider J. and Bobylev A.V. A consistency result for a discrete-velocity model of the Boltzmann equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 34(5):1865–1883, 1997.

[17] Uehling E. A. and Uhlenbeck G. E. Transport phenomena in Einstein-Bose and Fermi-Dirac gases. *Physical Review*, 43(7):552–561, 1933.

[18] Больцман Людвиг. Избранные труды. Наука, Москва, 1984.

[19] Карлеман Т. Математические задачи кинетической теории газов. Издательство иностранной литературы, Москва, 1960.

[20] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. Наука, Москва, 1973.

[21] Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. Мир, Москва, 1978.