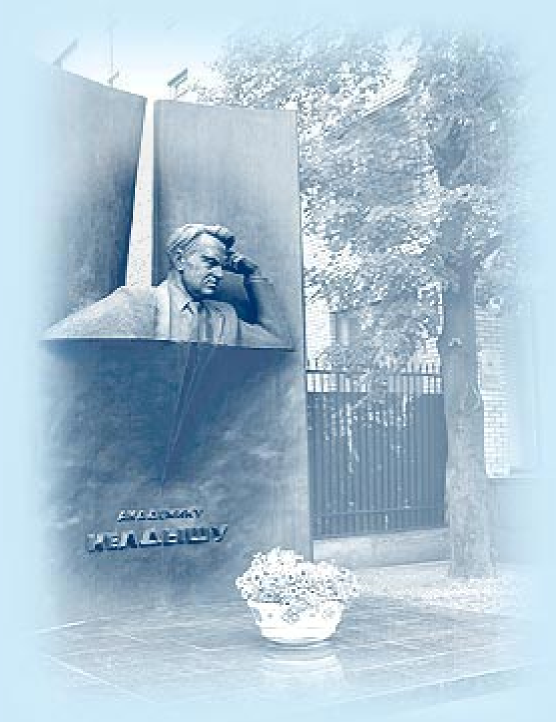
ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 23 за 2023 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

А.В. Колесниченко

К выводу в рамках статистики Тсаллиса релятивистских гидродинамических уравнений для разреженной неидеальной газовой системы высокоэнергетических частиц

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Колесниченко А.В. К выводу в рамках статистики Тсаллиса релятивистских гидродинамических уравнений для разреженной неидеальной газовой системы высокоэнергетических частиц // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2023. № 23. 40 с. **https://doi.org/10.20948/prepr-2023-23**
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2023-23

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

А.В. Колесниченко

К выводу в рамках статистики Тсаллиса релятивистских гидродинамических уравнений для разреженной неидеальной газовой системы высокоэнергетических частиц

Москва — 2023

Колесниченко А.В.

К выводу в рамках статистики Тсаллиса релятивистских гидродинамических уравнений для разреженной неидеальной газовой системы высокоэнергетических частиц.

Аннотация. В работе обсуждается конструирование неэкстенсивной релятивистской диссипативной гидродинамики аномальной адронной жидкости на основе релятивистского кинетического уравнения, полученного ранее в контексте статистики Тсаллиса, характеризуемой параметром неэкстенсивности q, и с учетом корреляционных эффектов (путем отказа от стандартной гипотезы молекулярного хаоса) в столкновительном члене для тяжелых ионов. Показано, что некая специфическая форма локального неэкстенсивного равновесия кварк-глюонной материи описывается обобщенной версией релятивистского распределения Юттнера, с помощью которого определены в явном виде термодинамические параметры состояния. Линейные определяющие соотношения и транспортные коэффициенты, такие как сдвиговая вязкость, объемная вязкость и теплопроводность, найдены на основе линеаризованного интеграла столкновений, записанного в форме Андерсона−Виттинга и получены с использованием релаксационных эффектов. Сконструированная неэкстенсивная релятивистская гидродинамика предназначена для моделирования широкого круга явлений в астрофизике, космологии и физике высоких энергий.

Ключевые слова: неэкстенсивная статистика Тсаллиса, релятивистская гидродинамика, коэффициенты переноса.

Kolesnichenko Aleksander Vladimirovich

On the derivation, in the framework of the Tsallis statistics, of relativistic hydrodynamic equations for a rarefied non-ideal gas system of high-energy particles

Abstract. The paper discusses the construction of non-extensive relativistic dissipative hydrodynamics of an anomalous hadronic fluid on the basis of relativistic kinetic equation, obtained earlier in the context of the Tsallis statistics, characterized by the nonextensivity parameter q, and taking into account correlation effects (by rejecting the standard hypothesis of molecular chaos) in the collision term for heavy ions. It is shown that some specific form of local thermal equilibrium quark-gluon matter is described by a generalized version of the relativistic Yüttner distribution. With the help of this distribution all thermodynamic parameters of state are defined in explicit form. Linear constitutive relations and transport coefficients such as shear viscosity, bulk viscosity and heat conductivity are derived from the linearized collision integral written in the Anderson-Witting form and evaluated using a relaxation time approximation. The designed non-extensive relativistic fluid dynamics is designed to simulate a wide range of phenomena in astrophysics, cosmology and high-energy physics.

Key words: non-extensive Tsallis statistics, relativistic hydrodynamics, transport coefficients.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время появляется все больше доказательств того, что неэкстенсивная статистическая механика Тсаллиса (Tsallis, 1988), используемая для описания статистического и кинетического поведения аномальных неаддитивных систем различной природы, может рассматриваться как наиболее подходящая основа теоретической базы для моделирования огромного числа физических явлений и процессов. Эти явления включают ситуации, когда система проявляет эффект памяти любого рода, испытывает дальнодействующие корреляции (когда ее размер сопоставим с диапазоном действующих в ней сил), испытывает некоторые внутренние флуктуации, и фазовое пространство, в котором она функционирует, ограничено или имеет фрактальную структуру.

Напомним, что принадлежащая Тсаллису модифицированная версия энтропии Больцмана-Гиббса (БГ) в случае неэкстенсивной газовой системы имеет вид (см., например, Tsallis, 1988; Колесниченко, 2019):

$$S_q := -k_B \int f^q(\mathbf{r}) \ln_q f(\mathbf{r})\, d\Omega = -k_B \left\langle \ln_q f \right\rangle_q, \qquad q \in [0,2],$$

где k_B − постоянная Больцмана; $f(\mathbf{r})$, $d\Omega$ − соответственно функция распределения и элемент объема в фазовом пространстве; q − параметр деформации (параметр неаддитивности энтропии S_q), связанный с некоторыми дополнительными степенями свободы, присущими аномальным системам, и который должен определяться *a posteriori*; $\ln_q z$ − деформированная q-логарифмическая функция, обратная для которой является деформированной q-экспонентой, $\exp_q z$. Обе эти функции определяются следующим образом:

$$\ln_q z := (1-q)^{-1}(z^{1-q} - 1), \quad (z > 0),$$

$$\exp_q z := [1 + (1-q)z]^{1/(1-q)}, \ \left(z > (q-1)^{-1}\right);$$

причем $\exp_q(\ln_q z) = \ln_q(\exp_q z) = z$. Из приведенных формул следует, что для системы, состоящей из двух подсистем A и B, суммарная неаддитивная энтропия Тсаллиса определяется соотношением

$$S_q(\mathrm{A+B}) = S_q(\mathrm{A}) + S_q(\mathrm{B}) + (1-q) S_q(\mathrm{A}) S_q(\mathrm{B}),$$

из которого ясно, что для $q \to 1$ логарифмическая экстенсивная энтропийная мера, связанная с классическим подходом БГ, восстанавливается, $S_q \to S_{BG}$. При написании второй формы определения энтропии Тсаллиса использовано осреднение $\langle ... \rangle_q := \int (...) f^q d\Omega$ с ненормированным распределением f^q для любой микроскопической физической величины, свойственное статистике Курадо-Тсаллиса[1)] (см. Колесниченко, 2018).

Энтропия Тсаллиса широко исследована как в теоретическом, так и в прикладном контексте (см., например, Gell-Mann, Tsallis, 2004; Tsallis, 2009; Колесниченко, 2019). В частности, неэкстенсивный статистический формализм оказался полезной конструкцией для анализа многих астрофизических и космологических явлений (см., например, Колесниченко, 2015, 2019; Kolesnichenko, 2017, 2020a,b, 2021). Недавно было найдено еще одно из неожиданных применений неэкстенсивной статистической механики Тсаллиса, связанное с физикой высоких энергий (Wilk, Włodarczy, 2000, 2009; Osada, Wilk, 2008a; Biro и др., 2017; Cleyman и др, 2013). Оказалось, что экспериментальные спектры частиц на релятивистском коллайдере тяжелых ионов (*Relativistic Heavy Ions Collider*) и на Большом адронном коллайдере (*Large Hadron Collider*) могут быть успешно описаны распределениями энергии по так называемому расширенному степенному закону Тсаллиса-Парето (типичным для канонического равновесного распределения, связанного с энтропийной мерой Тсаллиса) в широком диапазоне энергий, размеров сталкивающихся систем и производимых сортов адронов[2)]. Другими

[1)] В неэкстенсивной статистической механике Тсаллиса возможно осреднение микроскопических физических величин по трем распределениям, которые имеют свои преимущества и недостатки, определяя совершенно разные q-термодинамики, соответствующие тем или иным термодинамически аномальным системам. В данной работе мы будем использовать ненормированное осреднение Курадо-Тсаллиса, поскольку это единственное осреднение, которое не приводит к переопределению понятия температуры q-системы. Только в этой статистике температура T является интенсивным параметром, а не функционалом T_q, как, например, при осреднении с помощью нормированного эскортного распределения $f^q / \int d\Omega f^q$ Тсаллиса-Мендеса-Пластино (см. Зарипов, 2010).

[2)] Адроны – *бесцветные* составные частицы (протоны и нейтроны), построенные из кварков и глюонов (безмассовых частиц, являющихся переносчиками сильного *цветового* взаимодействия между кварками).

словами, математическое моделирование процессов производства вторичных частиц внутри газовых потоков при адронных релятивистских столкновениях тяжелых ионов (в результате которых происходит образование нового адронного состояния материи кварк-глюонной плазмы (QGP)) приводит к наиболее адекватным результатам только при использовании неэкстенсивной статистической механики Тсаллиса (или Реньи), в то время как условия, необходимые для применения классической статистики БГ и релятивистской кинетической теории (Israel, 1963; de Groot и др., 1968; Muronga, 2007a,b; Ландау, Лифшиц, 1988 ; Колесниченко, 2023а), выполняются в этом случае весьма приближенно.

Указанное неэкстенсивное распределение в физике высоких энергий связано, предположительно, с тем, что адронизирующие системы характеризуются сильными внутренними флуктуациями и дальними корреляциями, которые могут быть истолкованы как проявление некоторых внутренних динамических, неравновесных процессов (подобных распаду резонансов или возникновению температурных флуктуаций). В результате вместо обычного локального теплового равновесия (имеющего место во всех приложениях классической статистики) в рассматриваемых аномальных системах возникает некое «стационарное состояние» (так называемое неэкстенсивное равновесие, зависящее от параметра деформации q), которое неявно учитывает разного рода внутренние динамические эффекты (Kodama и др., 2005; Osada, Wilk, 2008a,b; Urmossy и др., 2012; Bíró и др., 2017). В работах (Silva, Lima 2005; Lavagno и др. 2009; Santos и др., 2017) также было установлено, что в аномальных релятивистских системах подобные явления могут быть эффективно описаны (без привлечения каких-либо соображений относительно динамических источников различных флуктуаций) в рамках концепции неэкстенсивной кинетики в виде обобщенной версии распределения Юттнера (Jüttner, 1911) − общего решения нулевого порядка релятивистского кинетического уравнения (см. de Groot и др., 1980).

По этой причине стало ясно, что важным шагом на пути успешного решения обсуждаемой проблемы является аккуратное конструирование неэкстенсивной релятивистской гидродинамики, которая полностью согласуется с статистическим подходом Тсаллиса и на основе которой возможно эффективное моделирование широкого круга динамических явлений в системах с релятивистскими ядерными столкновениями высоких энергий. В ряде зарубежных работ (см., например, Kodama и др., 2005; Urmossy и др., 2012; Bíró и др., 2017) была разработана в q-*неэкстенсивном* контексте Тсаллиса релятивистская кинетическая теория, в которой дана новая интерпретация параметра неэкстенсивности q, как количественной меры внутренних флуктуаций, характерных для адронизирующих систем[3)].

Вместе с тем следует отметить, что почти во всех известных автору работах по обсуждаемой проблеме отсутствует сколько-нибудь детальный кинетический вывод неэкстенсивного релятивистского уравнения переноса, описывающего эффекты, связанные с ультрарелятивистскими скоростями движения частиц. При этом формулировки привлекаемых предположений делаются обычно без подробных пояснений, а приведенные формулы часто даются без соответствующего математического обоснования. По этой причине автор синопсиса (Колесниченко, 2023*c*) предпринял попытку более детального вывода неэкстенсивного релятивистского кинетического уравнения с учетом включения корреляционных эффектов (путем отказа от гипотезы молекулярного хаоса «*Boltzmann' Stosszahlansatz*») в столкновительный член. Это обобщенное кинетическое уравнение позволяет получить законы сохранения плотности, импульса и энергии для аномальных q-систем, подтвердить справедливость второго закона термодинамики, согласно которому возникновение σ_q энтропии нигде и никогда не бывает отрицательным, а также сконструировать неэкстенсивную релятивистскую гидродинамику, описывающую широкий круг явлений, возникающих при больших скоростях (сравнимых со скоростью света) макроскопического движения составляющих жидкость частиц.

1. ОСНОВНЫЕ МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ

Некоторые исходные определения. Приведем сначала статистические выражения для основных макроскопических физических величин, записанных на языке неэкстенсивной релятивистской кинетической теории[4)]. В неоднородной среде релятивистского газа, состоящего из одинаковых частиц, макроскопические величины являются функциями пространственно-временных координат $x := x^{\mu} := (t, \mathbf{x})$, где индекс μ принимает 4 значения: $\mu = 0,1,2,3$; t − время. Далее будем использовать метрический тензор $g^{\mu\nu}$=$\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$, где

[3)] Заметим, что предположение, связывающее параметр q с флуктуациями формализовано в виде новой ветви статистической механики, называемой суперстатистикой Бека-Коэна (см. Beck, 2000; Tsallis, Souza, 2003).

[4)] В этой работе, если не оговорено особо, будем для простоты выкладок использовать единицы, в которых постоянная Планка $\hbar$ и скорость света c равны единице.

$\mu, \nu = 0,1,2,3$, а оператор ковариантного дифференцирования будем обозначать как[5)]

$$\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) =: (\partial_0, \nabla) . \tag{1}$$

Макроскопическое состояние неэкстенсивного релятивистского газа характеризуется 4-вектором потока частиц $N_q^\mu(x)$, 4-тензором энергии-импульса $\mathcal{T}_q^{\mu\nu}(x)$ и 4-вектором потока энтропии $S_q^\mu(x)$. Эти макроскопические величины определяются в кинетической q-теории как статистические средние с помощью ненормированной функции распределения f^q, где $f(t, \mathbf{x}, p^0, \mathbf{p})$ − функция распределения фазового пространства одной частицы (локальная плотность вероятности), которая нормирована на число частиц в системе, т.е. определена таким образом, что произведение $\mathrm{d}\mathcal{N} = f \,\mathrm{d}^3|\mathbf{x}|\, \mathrm{d}^3|\mathbf{p}|$ дает среднее число частиц, которые в момент времени t находятся в элементе объема $\mathrm{d}^3|\mathbf{x}|$ с центром в точке $\mathbf{x}$ и имеют импульсы частиц в пределах $(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \Delta\mathbf{p})$. Эта функция зависит от пространственно-временных координат $x := x^\mu = (t, \mathbf{x})$ и 4-вектора энергии-импульса $p := p^\mu = (p^0, \mathbf{p}) := (E, \mathbf{p})$, где $m = \sqrt{p^\mu p_\mu}$, $\mathbf{p}$, $\mathrm{E} = p^0 = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$ − соответственно релятивистские масса, импульс и энергия частицы, находящейся в элементе пространственного объема $\mathrm{d}^3|\mathbf{x}|$ в точке $\mathbf{x}$ в момент времени t. С помощью функции $f^q(x,p)$ фундаментальные полевые величины $N^\mu(x)$, $\mathcal{T}^{\mu\nu}(x)$ и $S^\mu(x)$ (здесь $\mu = 0,1,2,3$) записываются в ковариантной форме следующим образом (Колесниченко, 2023a):

$$N_q^\mu(x) = \langle p^\mu \rangle_q := \int p^\mu f^q(x,p) \mathrm{d}P , \quad (\mu = 0,1,2,3) , \tag{2}$$

$$\mathcal{T}_q^{\mu\nu}(x) = \langle p^\mu p^\nu \rangle_q := \int p^\mu p^\nu f^q(x,p) \mathrm{d}P , \quad (\mu, \nu = 0,1,2,3) , \tag{3}$$

$$S_q^\mu(x) := -k_B \int p^\mu \Big[f^q(x,p) \ln_q f(x,p) - f(x,p) \Big] \mathrm{d}P , \quad (\mu = 0,1,2,3) . \tag{4}$$

[5)] Это определение ковариантного дифференцирования справедливо только при отсутствии гравитационного поля (см. Weinberg, 1972).

Здесь $\mathrm{d}P := g\dfrac{\mathrm{d}^3 p}{p^0(2\pi)^3}$ –инвариантный объем пространства с импульсом, где $g = 2j+1$ обозначает число внутренних степеней свободы (j– спин частицы); k_B – постоянная Больцмана. По поводу формулы (4) сразу отметим следующее: в немногочисленной литературе по неэкстенсивной релятивистской кинетической теории существуют различные не эквивалентные друг другу определения 4-вектора потока q-энтропии $S_q^{\mu}(x)$, которые приводят к различным термодинамическим соотношениям (см., например, Lima и др., 2001; Lavagno и др., 2009; Osada, Wilk, 2008b). В данной работе мы будем использовать определение, предложенное в работе (Osada, Wilk, 2008b), поскольку только оно соответствует статистической квантовой q-энтропии, учитывающей поправки, касающиеся термодинамической согласованности в случае релятивистских квантовых распределений частиц высоких энергий (Cleymans, Worku, 2012).

Гидродинамическая 4-скорость. Важным понятием при конструировании релятивистской кинетической теории является гидродинамическая 4-скорость $u^{\mu}(x)$, которая используется при определении ряда физических параметров, играющих важную роль при формулировании макроскопических законов сохранения. 4-скорость $u^{\mu}(x)$ обычно задается в виде времениподобного вектора с модулем равным единице в каждой пространственно-временной точке: $u^{\mu}(x)u_{\mu}(x) = 1$. С помощью вектора гидродинамической скорости определяется так называемый *тензор-проектор*

$$\Delta^{\mu\nu}(x) := g^{\mu\nu} - u^{\mu}(x)u^{\nu}(x), \tag{5}$$

который при свертке с произвольным 4-вектором действует как проекционный оператор, уничтожая параллельную скорости $u^{\mu}(x)$ часть этого вектора, $\Delta^{\mu\nu}(x)u_{\nu}(x) = 0$; кроме этого проекционный оператор характеризуется следующими свойствами: $\Delta^{\mu\nu} = \Delta^{\nu\mu}$, $\Delta^{\mu\nu}\Delta_{\nu\sigma} = \Delta^{\mu}_{\sigma}$, $\Delta^{\mu}_{\mu} = 3$.

Поскольку гидродинамическая скорость $u^{\mu}(x)$ является времениподобным вектором, то возможно в каждой пространственно-временной точке ввести локальную систему покоя (называемую также сопутствующей системой координат), обозначаемую индексом *LR* (*local rest*). Гидродинамическая скорость в этой системе имеет следующие компоненты: $u^{\mu}_{LR} = (1, 0, 0, 0)$, а $\Delta^{\mu\nu}_{LR} = \Delta_{LR\mu\nu} = \mathrm{diag}(0, -1, -1, -1)$, $\Delta^{\mu}_{LR\nu} = \mathrm{diag}\,(0,1,1,1)$. Чтобы зафиксировать выбор гидродинамической скорости $u^{\mu}(x)$, далее будем использовать следующее удобное ее определение: $u^{\mu} := N^{\mu}/\sqrt{N^{\nu}N_{\nu}}$, данное Эккартом (Eckart, 1940).

Оператор ковариантного дифференцирования ∂^{μ} может быть разложен по отношению к гидродинамической 4-скорости $u^{\mu}(x)$ на времениподобную и пространственноподобную части в соответствии с соотношением

$$\partial^{\mu} = u^{\mu}\,\mathrm{D} + \nabla^{\mu}, \tag{6}$$

где символ $\mathrm{D} := u^{\nu}\partial_{\nu}$ означает конвекционную производную по времени с $(\mathrm{D}_{LR} = \partial / \partial t)$, а символ $\nabla^{\mu} := \Delta^{\mu\nu}\partial_{\nu}$ есть оператор-градиент, который в локальной системе координат является чисто пространственным, $u^{\mu}\nabla_{\mu} = 0$ (или с $\nabla^{0}_{LR} = 0,\ \nabla^{i}_{LR} = -\nabla_{LR\,i} = -\partial / \partial\mathbf{x}$).

Основные макроскопические параметры неэкстенсивной релятивистской жидкости. С помощью основных полевых величин $N^{\mu}_{q}(x)$, $\mathcal{T}^{\mu\nu}_{q}(x)$ и $S^{\mu}_{q}(x)$ и гидродинамической скорости $u^{\mu}(x)$ можно определить следующие макроскопические параметры системы из одинаковых релятивистских частиц: плотность частиц $n_{q}(x)$, плотность энергии $\varepsilon_{q}(x)$, локальное гидростатическое давление $P_{q}(x)$, тепловой поток $J^{\mu}_{q}(x)$, тензор давления $P^{\mu\nu}_{q}(x)$ и плотность энтропиис s_{q}. Так,

(i) плотность частиц $n_{q}(x)$ задается ковариантным выражением

$$n_{q}(x) := N^{\mu}_{q}u_{\mu}; \tag{7}$$

(ii) плотность энергии $\varepsilon_{q}(x)$ определяется выражением

$$\varepsilon_{q}(x) := e_{q}n_{q} := u_{\mu}\mathcal{T}^{\mu\nu}_{q}u_{\nu}, \tag{8}$$

где e_q − средняя энергия на одну частицу; $\tilde{h}_q(x) := \varepsilon_q + P_q = h_q n_q$ − плотность энтальпии, $P_q(x)$ – локальное статическое давление;

(iii) поток тепла $J_q^{\mu}(x)$, определяемый как разность потока энергии $W_q^{\mu}(x) := u_{\nu} \mathcal{T}^{\nu\sigma} \Delta_{\sigma}^{\mu}$ и потока энтальпии, переносимых частицами, задается выражением

$$J_q^{\mu}(x) := (u_{\nu} \mathcal{T}^{\nu\sigma} - h_q N^{\sigma}) \Delta_{\sigma}^{\mu}, \quad (\mu = 0,1,2,3), \tag{9}$$

где $h_q = \tilde{h}_q / n_q$ − энтальпия, приходящаяся на одну частицу; в ковариантной формулировке имеет место условие ортогональности $J_q^{\mu} u_{\mu} = 0$ для потока тепла;

(iv) тензор давления $P_q^{\mu\nu}(x)$ определяется формулой

$$P_q^{\mu\nu}(x) := \Delta_{\sigma}^{\mu} \, \mathcal{T}_q^{\sigma\tau} \, \Delta_{\tau}^{\nu}, \quad (\mu, \nu = 0,1,2,3), \tag{10}$$

из которой следует, что этот тензор симметричен, поскольку тензор энергии-импульса симметричен; для дальнейших целей тензор давления удобно разбить на «обратимую» и «необратимую» части: $P_q^{\mu\nu} = -P_q \Delta^{\mu\nu} + \Pi_q^{\mu\nu}$, где тензор $\Pi^{\mu\nu}(x)$ называется тензором вязкого давления;

(v) плотность энтропии $\tilde{s}_q(x)$ определяется как скаляр

$$\tilde{s}_q = s_q n_q := S_q^{\mu} u_{\mu}, \tag{11}$$

где s_q − энтропия на одну частицу.

С учетом определений плотности энергии (8), потока тепла (9) и тензора давления можно записать следующие соотношения (de Groot и др.,1980):

$$\varepsilon_q(x) = u_{\mu} \mathcal{T}_q^{\mu\nu} u_{\nu}, \quad J_q^{\mu}(x) = u_{\nu} \mathcal{T}_q^{\nu\sigma} \Delta_{\sigma}^{\mu}, \quad \Pi_q^{\mu\nu}(x) - P_q(x) \Delta^{\mu\nu} = \Delta_{\sigma}^{\mu} \mathcal{T}_q^{\sigma\lambda} \Delta_{\lambda}^{\nu}. \tag{12}$$

Разложение тензора энергии-импульса. С помощью определения (6) для проекционного оператора $\Delta^{\mu\nu}$ можно доказать следующее тождество (см., например, Колесниченко, 2023b)

$$\mathcal{T}_q^{\mu\nu}(x) = \mathcal{T}_{q(0)}^{\mu\nu} + \mathcal{T}_{q(1)}^{\mu\nu}, \tag{13}$$

где $\mathcal{T}_{q(0)}^{\mu\nu}(x)$ − обратимая часть: $\mathcal{T}_{q(0)}^{\mu\nu} := \varepsilon_{q0} u^\mu u^\nu - P_{q0}\Delta^{\mu\nu}$, а $\mathcal{T}_{q(1)}^{\mu\nu}(x)$ − необратимая часть: $\mathcal{T}_{q(1)}^{\mu\nu} := \left[J_q^\mu u^\nu + J_q^\nu u^\mu \right] + \Pi_q^{\mu\nu}$.

Разложение (13) играет важную роль при выводе макроскопических законов сохранения.

2. ОБОБЩЕННОЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЕ КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Обобщенное кинетическое уравнение, описывающее поведение скалярной функции распределения $f^q(x,p)$ в пространстве-времени, имеет вид (см. Lava agno и др., 2009; Osada, Wilk, 2008*b*; Колесниченко, 2023a)[6)]:

$$p^\mu \partial_\mu f^q(x,p) \equiv p^\mu \left[u_\mu \mathrm{D} + \nabla_\mu \right] f^q(x,p) = C_q\left[f, f_1 \right], \quad (\alpha = 0,1,2,3), \tag{14}$$

где

$$C_q\left[f, f_1 \right] \equiv \frac{1}{2} \int R_q[f, f_1]\, W_{p,p_1 \leftrightarrow p',p_1'} \,\mathrm{d}P_1 \,\mathrm{d}P' \mathrm{d}P_1' . \tag{15}$$

− интеграл столкновений (*collision term*).

При выводе этого уравнения в неэкстенсивной релятивистской кинетической теории, наряду с требованиями ковариантности были сделаны те же предположения, что и в чисто релятивистском подходе, а именно:

i) учитывались только двухчастичные столкновения;

ii) использована величина скорости перехода $W_{p,p_1 \to p',p_1'}$, являющаяся мерой вероятности процессов столкновения;

---

[6]) Для простоты изложения внешняя сила в кинетическом уравнении (14) не учитывалась.

iii) использовано предположение, что функция распределения медленно меняется в пространстве-времени, т.е. ее изменения на характерной длине взаимодействия и в течение характерного времени взаимодействия частиц пренебрежимо малы;

iv) наконец, самое главное, использовано q-расширение гипотезы молекулярного хаоса, позволяющее учитывать влияние статистических корреляций на вид столкновительного члена.

Скорость перехода $W_{p,p_1 \to p',p_1'}$, зависящая только от 4-импульсов двух частиц до и после столкновения, представляет собой лоренцев скаляр. Очевидно, что оба аргумента до и после стрелки в этом обозначении могут располагаться в произвольном порядке. В соответствии с принятым условием медленного изменения функции распределения на расстояниях и временах порядка характеристических длин и времен силового взаимодействия предполагается, что разностью пространственно-временных координат $x = (t, \mathbf{x})$ сталкивающихся частиц до и после столкновения можно пренебречь. Величина $W_{p,p_1 \to p',p_1'}$ является функцией десяти скалярных инвариантов, которые можно построить из 4-импульсов $p^{\mu}, p_1^{\mu}, p'^{\mu}, p_1'^{\mu}$. Кроме этого, поскольку должен выполняться закон сохранения энергии-импульса, то справедливо равенство $p^{\mu} + p_1^{\mu} = p'^{\mu} + p_1'^{\mu}$. Отсюда следует, что вероятность перехода симметрична для обращения во времени процессов столкновения, т.е. замена $p, p_1 \leftrightarrow p', p_1'$ оставляет это выражение неизменным. Таким образом, имеет место принцип детального равновесия

$$W_{p,p_1 \to p',p_1'} = W_{p',p_1' \to p,p_1} = W_{p,p_1 \leftrightarrow p',p_1'} . \qquad (16)$$

Фигурирующая в интеграле столкновений (15) величина $R_q[f' f_1']$, описывающая в неэкстенсивной релятивистской кинетике среднее число столкновений коррелирующих между собой частиц, записывается здесь в следующей форме (Lima и др., 2001; Biro, Kaniadakis, 2006; Lavagno и др., 2009):

$$R_q[f, f_1] = \exp_q\left[\ln_q f' + \ln_q f_1'\right] - \exp_q\left[\ln_q f + \ln_q f_1\right]. \qquad (17)$$

Заметим, что, когда $q \to 1$, соотношение (17) соответствует стандартной гипотезе Больцмана о молекулярном хаосе: $\lim\limits_{q\to 1} R_q = R_1 = \left[f' f_1' - f f_1 \right]$. Таким образом *анзац-функция* [7] (17) учитывающая влияние статистических корреляций на столкновительный член в неэкстенсивном случае, является таким образом q-расширением гипотезы молекулярного хаоса. При этом параметр неэкстенсивности q лежит в интервале [0,2].

Определим теперь следующую корреляционную (положительную и симметричную по аргументам) функцию

$$H_q\left[f, f_1 \right] := \exp_q\left[\ln_q f + \ln_q f_1 \right] \ge 0, \qquad (18)$$

связанную с двумя частицами, находящимися в одном пространственно-временном положении x, но с различными 4-векторами энергии-импульса p^μ и p_1^μ соответственно. Эта формула, приводящая к справедливости H-теоремы для статистически коррелирующих между собой частиц, является постулируемой. Для $q=1$ она возвращает классический интеграл столкновений, где число бинарных столкновений вокруг пространственно-временных координат x пропорционально $H_1\left[f, f_1 \right] = f f_1$. Как уже было сказано выше, могут быть приняты и другие постулаты. Однако в данной работе мы не будем обсуждать эту проблему.

С учетом функции (18) неэкстенсивное релятивистское уравнение переноса (14) может быть записано в виде

$$p^\mu u_\mu \mathrm{D} f^q + p^\mu \nabla_\mu f^q = C_q\left[f, f_1 \right] \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2} \int \left\{ H_q\left[f', f_1' \right] - H_q\left[f, f_1 \right] \right\} W_{p,p_1 \leftrightarrow p',p_1'} \, \mathrm{d}P_1 \, \mathrm{d}P' \mathrm{d}P_1'. \qquad (19)$$

3. МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ. H−ТЕОРЕМА

Некоторые свойства интеграла столкновений. Можно показать, что имеет место *лемма*, согласно которой (вследствие того, что при столкновениях

---

[7] Напомним, что анзац-функция представляет собой не что иное, как основанное на эвристических соображениях существенное предположение, которое может подтвердиться лишь после получения всех следствий из сконструированного уравнения переноса.

частиц должен выполняться микроскопический закон сохранения энергии-импульса $p'^{\mu}+p_1'^{\mu}=p^{\mu}+p_1^{\mu}$) интеграл столкновений (30) обладает следующим свойством:

$$\mathcal{F}_{\psi}:=\int\psi(x,p)C_q\left[f,f_1\right]\mathrm{d}P\equiv 0, \qquad (20)$$

где $\psi(x,p^{\mu})$ − сумматорный инвариант (линейная комбинация некого скаляра $\alpha(x)$и 4-вектора p^{μ}):

$$\psi(x,p^{\mu}):=\alpha(x)+\beta_{\mu}(x)p^{\mu}. \qquad (21)$$

Пространственно-временные функции $\alpha(x)$ и $\beta_{\mu}(x)$ произвольны, с одним лишь ограничением: функции $\alpha(x)$ должны аддитивно сохраняться при столкновениях. Любая аддитивная функция импульсов является линейной комбинацией сумматорных инвариантов (21).

Для доказательства леммы (20) подставим явное выражение (15) в (20):

$$\mathcal{F}_{\psi}=\frac{1}{2}\int\psi_p\left\{H_q\left[f',f_1'\right]-H_q\left[f,f_1\right]\right\}W_{p,p_1\to p',p_1'}\,\mathrm{d}P\,\mathrm{d}P_1\,\mathrm{d}P'\,\mathrm{d}P_1'. \qquad (22)$$

Этот интеграл очевидно равен интегралу

$$\mathcal{F}_{\psi}=\frac{1}{2}\int\psi_{p'}\left\{H_q\left[f,f_1\right]-H_q\left[f',f_1'\right]\right\}W_{p',p_1'\to p,p_1}\,\mathrm{d}P\,\mathrm{d}P_1\,\mathrm{d}P'\,\mathrm{d}P_1'. \qquad (23)$$

Выполняя почленное сложение этих двух интегралов, получим

$$\mathcal{F}_{\psi}=\frac{1}{2}\int[\psi_p-\psi_{p'}]\left\{H_q\left[f',f_1'\right]-H_q\left[f,f_1\right]\right\}W_{p,p_1\leftrightarrow p',p_1'}\mathrm{d}P\,\mathrm{d}P_1\,\mathrm{d}P'\mathrm{d}P_1'. \quad (24)$$

Интеграл (23) симметричен относительно p и p_1. Поэтому

$$\mathcal{F}_{\psi}=\frac{1}{2}\int[\psi_{p_1}-\psi_{p_1'}]\left\{H_q\left[f',f_1'\right]-H_q\left[f,f_1\right]\right\}W_{p,p_1\leftrightarrow p',p_1'}\,\mathrm{d}P\,\mathrm{d}P_1\,\mathrm{d}P'\,\mathrm{d}P_1'. \quad (25)$$

Складывая (25) и (26), получим

$$\mathcal{F}_{\psi}=\frac{1}{4}\int[\psi_p+\psi_{p_1}-\psi_{p'}-\psi_{p_1'}]\times$$

$$c\times\left\{H_q\left[f',f_1'\right]-H_q\left[f,f_1\right]\right\}W_{p,p_1\leftrightarrow p',p_1'}\,\mathrm{d}P\,\mathrm{d}P_1\,\mathrm{d}P'\,\mathrm{d}P_1'=0. \qquad (26)$$

Здесь учтено, что в силу определения (21) функции $\psi(x,p^{\mu})$, выражение $\psi_p+\psi_{p_1}-\psi_{p'}-\psi_{p_1'}$ обращается в нуль, если учесть ограничение на функции $\alpha(x)$ и сохранение энергии-импульса в бинарном столкновении: $p'^{\mu}+p_1'^{\mu}=p^{\mu}+p_1^{\mu}$. Этим завершено доказательство леммы (20).

Общий вид уравнений движения неэкстенсивной релятивистской жидкости. Уравнение переноса (19) позволяет вывести общий вид справедливых на макроскопическом уровне законов сохранения числа частиц и сохранения энергии и импульса.

Используя лемму (20), положим функцию $\beta_{\mu}(x)$ равной нулю, а все функции $\alpha(x)$ – равными одной произвольной функции α. В результате получим выражение

$$\int C_q\left[f,f_1\right]\mathrm{d}P=0, \qquad (27)$$

которое с учетом уравнения переноса (19) может быть записано в виде

$$\int C_q\left[f,f_1\right]\mathrm{d}P=\int p^{\mu}\partial_{\mu}f^{q}(x,p)\,\mathrm{d}P=\partial_{\mu}\int p^{\mu}f^{q}(x,p)\,\mathrm{d}P=0. \qquad (28)$$

Выражение (28) с помощью осредненного 4-вектора потока частиц $N_q^{\mu}(x)$, определенного формулой (2), может быть переписано в виде макроскопического закона сохранения числа частиц

$$\partial_{\mu}N_q^{\mu}(x)=\partial_{\mu}\int p^{\mu}f^{q}(x,p)\,\mathrm{d}P=\int C_q\left[f,f_1\right]\mathrm{d}P=0,\quad(\mu=0,1,2,3). \qquad (29)$$

Если положить теперь функции $\alpha(x)$ в (21) равными нулю, то получим $\psi_p=\beta_{\mu}(x)p^{\mu}$; тогда из леммы (20), с учетом уравнения переноса (19), найдем

$$\int p^{\mu}C_q\left[f,f_1\right]\mathrm{d}P=\int p^{\mu}p^{\nu}\partial_{\nu}f^{q}(x,p)\,\mathrm{d}P=0. \qquad (30)$$

Отсюда следует макроскопический закон сохранения 4-тензора энергии-импульса

$$\partial_\nu \mathcal{T}_q^{\mu\nu}(x) = \int p^\mu C_q\left[\,f\,,\,f_1\right] \mathrm{d}P = 0\,, \quad (\mu = 0,1,2,3)\,, \tag{31}$$

где тензор $\mathcal{T}_q^{\mu\nu}(x)$ определяется формулой (2). В случае $\mu = 0$ уравнение (31) есть закон сохранения энергии, а для $\mu = 1,2,3$ − это закон сохранения импульса.

Динамические законы для плотности, импульса и энергии. Неэкстенсивные релятивистские гидродинамические уравнения следуют непосредственно из выведенных выше законов сохранения числа частиц и энергии-импульса.

Используя закон сохранения числа частиц (29) и оператор конвекционной производной по времени $\mathrm{D} = u^\nu \partial_\nu$, получим следующее уравнение непрерывности для плотности $n_q(x)$ (de Groot и др. 1980)

$$\mathrm{D} n_q = -n_q \nabla_\mu u^\mu. \tag{32}$$

Уравнение движения получается из закона сохранения энергии-импульса (31) путем свертывания его с проекционным оператором $\Delta^{\mu\nu}$. Учитывая разложение тензора энергии-импульса (13), получим (см. de Groot и др., 1980)

$$\tilde{h}_q \, \mathrm{D} u^\mu = \nabla^\mu P_q - \Delta^\mu_\nu \nabla_\sigma \Pi_q^{\nu\sigma} + \tilde{h}_q^{-1} \, \Pi_q^{\mu\nu} \nabla_\nu P_q -$$
$$-\left(\Delta^\mu_\nu \, \mathrm{D} J_q^\nu + J_q^\mu \nabla_\nu u^\nu + J_q^\nu \nabla_\nu u^\mu\right), \tag{33}$$

в котором, как и прежде, с$\tilde{h}_q = h_q n_q = (\varepsilon_q + P_q)$ − плотность энтальпии. Из этого уравнения видно, что ускорение среды обусловлено градиентами давления и, кроме того, рядом членов чисто релятивистского происхождения. Если пренебречь диссипативными потоками $\Pi_q^{\mu\nu}$ и J_q^α, то уравнение движения сведется к уравнению нулевого порядка

$$\mathrm{D} u^\mu = \tilde{h}_q^{-1} \, \nabla^\mu P_q, \tag{34}$$

которое справедливо для идеальной релятивистской жидкости. Это соотношение между ускорением и градиентом давления играет определенную роль при выводе подходящих форм гидродинамических уравнений в нашем случае, когда рассматриваются только уравнения, линейные по величинам, связанным с явлениями переноса.

Уравнения баланса для энергии $e_q(x)$ на одну частицу системы выводятся из закона сохранения энергии-импульса (31) при учете соотношений (9), (10), а также разложения (13) для 4-тензора $\mathcal{T}_q^{\alpha\nu}$; в результате будем иметь (de Groot и др., 1980)

$$n_q \,\mathrm{D} e_q = -P_q \nabla_\mu u^\mu + \Pi^{\mu\nu}\partial_\nu u_\mu - \nabla_\mu J_q^\mu + 2J_q^\mu \,\mathrm{D} u_\mu . \qquad (35)$$

Если пренебречь в уравнениях (33) и (35) диссипативными членами, то получим релятивистские уравнения Эйлера

$$\mathrm{D} n_q = -n_q \nabla_\mu u^\mu, \quad \mathrm{D} u^\mu = (h_q n_q)^{-1}\nabla^\mu P_q, \qquad n_q \,\mathrm{D} e_q = -P_q \nabla_\mu u^\mu . \quad (36)$$

***H*-теорема**. В первом разделе формулой (4) был определен макроскопический 4-вектор потока энтропии

$$S_q^\mu(x) = -k_B \int p^\mu \Big[f(x,t)^q \ln_q f(x,t) - f(x,t) \Big] \mathrm{d} P ,$$

а формулой (11) введена плотность энтропии $\tilde{s}_q(x) := s_q n_q := S_q^\mu u_\mu$, где s_q – энтропия на одну частицу. Получим здесь формальное выражение для баланса энтропии, используя тождество $n_q u^\mu \partial_\mu s_q = \partial_\mu (s_q N_q^\mu)$, которое является следствием закона сохранения (29) числа частиц и определения (1) для оператора дифференцирования по пространственно-временным координатам, ∂_μ. Добавляя и вычитая одну и ту же величину $\partial_\mu S_q^\mu$, перепишем это тождество в виде $n_q u^\mu \partial_\mu s_q = -\partial_\mu (S_q^\mu - s_q N_q^\mu) + \partial_\mu S_q^\mu$, которое может быть истолковано, как уравнение баланса для энтропии, приходящейся на одну частицу. Действительно, его можно переписать в виде

$$n_q u^\mu \partial_\mu s_q = -\partial_\mu J_{q,s}^{\ \mu} + \sigma_q , \qquad (37)$$

где

$$J_{q,s}^\mu(x) := S_q^\mu(x) - s_q(x) N_q^\mu(x)$$

– поток энтропии (по определению), а величина $0 \le \sigma_q := \partial_\mu S_q^\mu$, являясь постулируемым законом возрастания q-энтропии, описывает здесь интенсивность ее источника. Локальное математическое выражение (37) второго закона релятивистской термодинамики не содержит никаких физических положений, кроме закона сохранения числа частиц, и потому носит здесь чисто формальный характер.

Из определения 4-вектора потока энтропии (4) и кинетического уравнения (19) следует, что для неэкстенсивной системы прирост энтропии $\sigma_q := \partial_\mu S_q^\mu$ определяется формулой

$$\sigma_q(x) := \partial_\mu S_q^\mu = -k_B \int p^\mu \partial_\mu \left\{ f^q(x,p) \ln_q \left[f(x,p) \right] - f(x,p) \right\} \mathrm{d}P =$$

$$= -k_B \int \left[\ln_q f(x,p) \right] p^\mu \partial_\mu f^q(x,p) \mathrm{d}P = -k_B \int \left[\ln_q f(x,p) \right] C_q \left[f_p, f_{p1} \right] \mathrm{d}P. \tag{38}$$

При написании этого выражения использовано свойство дифференцирования деформированного логарифма $\partial \ln_q z / \partial z = 1/z^q$ (см., например, Колесниченко, 2019). Прирост энтропии (38) с помощью обозначения (20) может быть записан в виде

$$\sigma_q(x) = -k_B \mathcal{F} \left[\ln_q f(x,p) \right],$$

который с помощью леммы (27) может быть представлен как

$$\sigma_q(x) = \frac{k_B}{8} \int \left\{ \left[\ln_q f_{p'} + \ln_q f_{p_1'} - \ln_q f_p - \ln_q f_{p_1} \right] \times \right.$$

$$\left. \times \left(H_q[f', f_1'] - H_q[f, f_1] \right) \right\} W_{p,p_1 \leftrightarrow p',p_1'} \mathrm{d}P \, \mathrm{d}P_1 \, \mathrm{d}P' \, \mathrm{d}P_1' \ge 0. \tag{39}$$

Этот результат можно сопоставить с экстенсивным релятивистским выражением, приведенным, например, в работе (de Groot и др., 1980). Как известно, необратимый характер термодинамики, возникающей при молекулярных столкновениях, восстанавливается, если вышеуказанная величина положительно определена, т.е. $\sigma_q \ge 0$. В данном случае это условие справедливо в силу наличия двух причин:

(i) во-первых, положительной определенности величины

$$\left(\ln_q f_{p'} + \ln_q f_{p_1'} - \ln_q f_p - \ln_q f_{p_1} \right) \times \left(H_q[f', f_1'] - H_q[f, f_1] \right)$$

для любой пары распределений $(f_{p'}, f_{p'_1})$ и (f_p, f_{p_1}); при этом знак источника четырех энтропий полностью определяется знаком неэкстенсивного параметра с q, который, как было показано в работе (Silva, Lima, 2005), лежит в интервале с $q \in [0, 2]$);

(ii) во-вторых, удачного определения (4) для 4-вектора потока q-энтропии.

Неэкстенсивное q-равновесие. Если предположить, что функция распределения $f(x,p)$ с течением времени стремится к определенному пределу, то состояние неэкстенсивной q-системы будет переходить вместо строгого (локального) теплового равновесия (что является прерогативой идеальной газовой среды) в неэкстенсивное стационарное состояние. Это состояние включает некоторые микроскопические динамические взаимодействия и флуктуации, которые обобщенно характеризуются параметром деформации q (Abe, Rajagopal, 2003; Osada, Wilk, 2008a). Следует заметить, что в установившемся состоянии энтропия q-системы достигает своего максимального значения. Необходимым условием подобного состояния является обращение в нуль всюду в пространстве-времени величины производства энтропии (39)

$$\sigma_q(x) = -k_B \mathcal{F}\left[\ln_q f_p\right] = 0.$$

Получим теперь в качестве следствия неэкстенсивной релятивистской H-теоремы (38) условие неэкстенсивного стационарного состояния, которое является обобщенной версией релятивистского распределения Юттнера (см. de Groot и др., 1980). Как и в классическом случае, равенство $\sigma_q = 0$ является необходимым и достаточным условием существования как локального, так и глобального равновесия. Интеграл (39) является положительно определенным, что возможно лишь тогда и только тогда, когда имеет место равенство

$$\ln_q f_{p'} + \ln_q f_{p'_1} - \ln_q f_p - \ln_q f_{p_1} = 0,$$

где импульсы связаны законом сохранения $p^\mu + p_1^\mu = p'^\mu + p_1'^\mu$, справедливым для упругих парных столкновений.

Таким образом, величина $\psi = \ln_q f_p$ является сумматорным инвариантом столкновения молекул и потому должна иметь вид $\ln_q[f_{p0}] = \alpha_0 + \beta_0^{\mu} p_{\mu}$, где α_0 и β_0^{μ} – инварианты столкновений, приведенные ранее. Функцию распределения f_p, для которой выполняется это условие, далее будем обозначать символом f_{p0}. Таким образом, равновесная функция распределения f_{p0} определяется выражением

$$f_{(0)}(p) = f_{p0} = \left\{1 + (1-q)\left[\alpha_0 + \beta_0^{\mu} p_{\mu}\right]\right\}^{1/(1-q)} = \exp_q\left[\alpha_0 + \beta_0^{\mu} p_{\mu}\right]. \qquad (40)$$

Далее параметр β_0^{μ} будем отождествлять с выражением $\beta_0^{\mu} \equiv -\beta_0 u_0^{\mu}$ (где u_0^{μ} – 4-скорость системы как целого; $\beta_0 = 1/k_B T$, T – температурное поле), а величину α_0 положим равной $\alpha_0 \equiv \mu_q \beta_0 = \mu_q / k_B T$ (где μ_q – химический потенциал). Здесь все термодинамические параметры являются глобальными, т.е. не зависят от x. Тогда выражение (40) может быть записано в виде обобщенной функции распределения (по импульсам) Юттнера (Jüttner, 1911) для однородной равновесной релятивистской среды

$$f_{p0} = \left\{1 + (1-q)(\alpha_0 - \beta_0 p_{\mu} u_0^{\mu})\right\}^{1/(1-q)} = \exp_q\left[\frac{\mu_q - p_{\mu} u_0^{\mu}}{k_B T}\right].$$

Будем далее предполагать, что для неоднородных систем, находящихся в термодинамическом равновесии, функция распределения по пространственно-временным координатам и импульсам $f_{(0)}(x,p)$ имеет такую же функциональную форму (40), как и для случая глобального равновесия сложной q-системы, но с параметрами $\alpha_0(x)$, $\beta_0(x)$ и $u^{\mu}(x)$, зависящими от x. Тогда с помощью локальной равновесной функции

$$f_0(\alpha,\beta) = \left\{1 + (1-q)\left[\alpha_0(x) - \beta_0(x) p_{\mu} u^{\mu}(x)\right]\right\}^{1/(1-q)} \qquad (41)$$

неэкстенсивной релятивистской q-системы можно определить в явном виде все равновесные термодинамические переменные.

4. РАВНОВЕСНОЕ СОСТОЯНИЕ

Напомним, что индексы поднимаются и опускаются с помощью пространственно-временной метрики $g^{\mu\nu}$. Заметим также, что при решении релятивистского уравнения переноса удобно использовать следующие тензоры:

$$\begin{cases} a^{\overline{\mu}} := \Delta^{\mu\nu} a_\nu, \quad b^{\overline{\mu}\overline{\nu}} := \frac{1}{2}(\Delta^\mu_\sigma \Delta^\nu_\tau + \Delta^\nu_\sigma \Delta^\mu_\tau) b^{\sigma\tau}, \\ \overset{\circ}{b}{}^{\overline{\mu}\overline{\nu}} := b^{\overline{\mu}\overline{\nu}} - \frac{1}{3}\Delta^{\mu\nu}\Delta_{\sigma\tau} b^{\sigma\tau} = \left[\frac{1}{2}(\Delta^\mu_\sigma \Delta^\nu_\tau + \Delta^\nu_\sigma \Delta^\mu_\tau) - \frac{1}{3}\Delta^{\mu\nu}\Delta_{\sigma\tau}\right] b^{\sigma\tau}, \\ A^{\langle\mu\nu\rangle} = \left[\frac{1}{2}(\Delta^\mu_\sigma \Delta^\nu_\tau + \Delta^\mu_\tau \Delta^\nu_\sigma) - \frac{1}{3}\Delta^{\mu\nu}\Delta_{\sigma\tau}\right] A^{\sigma\tau}, \\ \overset{\circ}{\overline{p^\mu p^\nu}} := \left(\Delta^\mu_\sigma \Delta^\nu_\tau - \frac{1}{3}\Delta^{\mu\nu}\Delta_{\sigma\tau}\right) p^\sigma p^\tau. \end{cases} \tag{42}$$

Кроме этого заметим, что любой 4-вектор A^μ, в частности 4- импульс частицы p^μ, может быть разложен при использовании произвольной гидродинамической 4-скорости потока u^μ на две части следующим образом:

$$p^\mu = E_p u^\mu + p^{\overline{\mu}}.$$

Здесь $E_p := p^\nu u_\nu$ – энергия частицы в локальной системе координат (*LR*), а слагаемое $p^{\overline{\mu}} := \Delta^{\mu\nu} p_\nu$ является импульсом в сопутствующей системой координат (*Anderson*, 1974).

Сначала определим равновесную числовую плотность n_{q0}. С учетом формул (2), (7) и (28) находим

$$n_{q0}(x) := N^\mu_{q0} u_\mu = \int E_p \ f^q_0(\alpha,\beta)\,\mathrm{d}P = \mathcal{J}_{10}. \tag{43}$$

Подобным же образом определим q-равновесную плотность энергии ε_{q0} и гидростатическое давление P_{q0}. Используя разложение (13) для равновесного тензора энергии-импульса $T^{\mu\nu}_{q0} = \varepsilon_q u^\mu u^\nu - P_q \Delta^{\mu\nu}$, получим следующие выражения для величин ε_{q0} и P_{q0}:

$$\varepsilon_{q0}(x)=\int E_p^2\ f_0^q(\alpha,\beta)\,\mathrm{d}P=\mathcal{J}_{20}\,, \tag{44}$$

$$P_{q0}(x)=-\frac{1}{3}T_{q0}^{\mu\nu}\Delta_{\mu\nu}=-\frac{1}{3}\int \mathrm{d}P(\Delta_{\mu\nu}p^{\mu}p^{\nu})\ f_0^q(\alpha,\beta)=-\mathcal{J}_{21}. \tag{45}$$

При написании соотношений (43)-(45) были использованы следующие моментные интегралы (см. Muronga, 2007a,b; Biro, Molnar, 2012):

$$\mathcal{I}_{\mathrm{nk}}(\alpha,\beta)=\frac{2^{\mathrm{k}}\,\mathrm{k}!}{(2\mathrm{k}+1)!}\int_0^{\infty}\mathrm{d}P(E_p)^{\mathrm{n}-2\mathrm{k}}(\Delta^{\mu\nu}p_{\mu}p_{\nu})^{\mathrm{k}}f_0\,(\alpha,\beta)\,, \tag{46}$$

$$\mathcal{J}_{\mathrm{nk}}(\alpha,\beta)=\frac{2^{\mathrm{k}}\,\mathrm{k}!}{(2\mathrm{k}+1)!}\int_0^{\infty}\mathrm{d}P(E_p)^{\mathrm{n}\text{-}2\mathrm{k}}(\Delta^{\mu\nu}p_{\mu}p_{\nu})^{\mathrm{k}}f_0^q(\alpha,\beta)\,, \tag{47}$$

$$\mathcal{K}_{\mathrm{nk}}(\alpha,\beta)=q\frac{2^{\mathrm{k}}\,\mathrm{k}!}{(2\mathrm{k}+1)!}\int_0^{\infty}\mathrm{d}P(E_p)^{\mathrm{n}\text{-}2\mathrm{k}}(\Delta^{\mu\nu}p_{\mu}p_{\nu})^{\mathrm{k}}f_0^{2q-1}(\alpha,\beta)\,, \tag{48}$$

где $\mathrm{n},\mathrm{k}\geq 0$.

Используя производные $(\partial f_{0p}/\partial\alpha_0)_{\beta_0}=f_{p0}^q$ и $(\partial f_{p0}^q/\partial\alpha_0)_{\beta_0}=q\,f_{p0}^{2q-1}$, получим

$$\mathcal{J}_{\mathrm{nk}}(\alpha,\beta)=\left(\partial\mathcal{I}_{\mathrm{nk}}/\partial\alpha_0\right)_{\beta_0},\quad \mathcal{K}_{\mathrm{nk}}(\alpha,\beta)=\left(\mathcal{J}_{\mathrm{nk}}/\partial\alpha_0\right)_{\beta_0}. \tag{49}$$

Кроме этого, конвекционные производные по времени D от функций $\mathcal{J}_{\mathrm{nk}}$ и $\mathcal{I}_{\mathrm{nk}}$ могут быть выражены в терминах $\mathrm{D}\alpha_0$ и $\mathrm{D}\beta_0$:

$$\mathrm{D}\mathcal{J}_{\mathrm{nk}}=\mathcal{K}_{\mathrm{nk}}\,\mathrm{D}\alpha_0-\mathcal{K}_{(\mathrm{n+1,\,k})}\,\mathrm{D}\beta_0\,, \tag{50}$$

$$\mathrm{D}\mathcal{I}_{\mathrm{nk}}=\mathcal{J}_{\mathrm{nk}}\,\mathrm{D}\alpha_0-\mathcal{J}_{(\mathrm{n+1,\,k})}\,\mathrm{D}\beta_0\,. \tag{51}$$

Можно также показать (применяя интегрирование по частям), что в глобальной системе покоя ($U_{\mathrm{LR}}^{\mu}=1,0,0,0$) имеют место следующие рекурсивные соотношения (Muronga, 2007b; Biro, Molnar, 2012):

$$\begin{cases} \mathcal{I}_{(n+2,k)} = m^2\mathcal{I}_{(n,k)} - (2k+3)\mathcal{I}_{(n+2,k+1)}, \\ \mathcal{J}_{(n,k)} = -\beta_0^{-1}\mathcal{I}_{(n-1,k-1)} + \beta_0^{-1}(n-2k)\mathcal{I}_{(n-1,k)}, \\ \mathcal{J}_{(n+2,k)} = m^2\mathcal{J}_{(n,k)} - (2k+3)\beta_0^{-1}\mathcal{J}_{(n+2,k+2)}, \\ \mathcal{K}_{(n,k)} = -\beta_0^{-1}\mathcal{J}_{(n-1,k-1)} + \beta_0^{-1}(n-2k)\mathcal{J}_{(n-1,k)}, \\ \mathcal{K}_{(n+2,k)} = m^2\mathcal{K}_{(n,k)} - (2k+3)\mathcal{K}_{(n+2,k+1)}. \end{cases} \tag{52}$$

Для завершения описания равновесного состояния неэкстенсивной системы найдем равновесную плотность энтропии $s_{q0}(x)$, для чего подставим в формулу (4) выражение (40); в результате получим

$$S^{\mu}_{q0}(x) = -k_B \int p^{\mu}\left\{f_0^q(x,p)\ln_q\left[f_0(x,p)\right] - f_0(x,p)\right\} \mathrm{d}P =$$

$$= k_B\beta_0(x)\int p^{\mu}\left\{f_0^q(x,p)\left[\mu_q(x) - p_{\nu}u^{\nu}(x)\right] - f_0(x,p)\right\}\mathrm{d}P. \tag{53}$$

Свертывание этого выражения со скоростью $u^{\mu}(x)$ дает для плотности энтропии, определяемой формулой (11), следующее равенство:

$$\tilde{s}_{q0}(x) = k_B\int \mathrm{d}P\, E_p\left\{\beta_0(x)\left[\mu_q(x) - u^{\mu}(x)\,p_{\mu}\right]f_0^q(x,p) - f_0(x,p)\right\} =$$

$$= \frac{\mathcal{J}_{20}}{T} - \frac{\mu_q}{T}\mathcal{J}_{10} + k_B\mathcal{I}_{10}, \tag{54}$$

которое, при учете вытекающего из формул (45) и (50) соотношения

$$\mathcal{I}_{10} = -\beta_0\mathcal{J}_{21} = \beta_0 P_{q0}$$

и формулы (44), может быть записано в форме следующего фундаментального термодинамического равенства[8]: $T(x)\,\tilde{s}_{q0}(x) = \varepsilon_{q0}(x) + P_{q0}(x) - \mu_q(x)\,n_{q0}(x)$.

[8] Заметим, что $P_{q0} \neq k_B T_q n_{q0}$, поскольку $n_{q0} = \mathcal{J}_{10} \neq \mathcal{I}_{10}$. Однако если число частиц сохраняется, то интегралы от $\mathcal{I}_{10}$ и $\mathcal{J}_{10}$ должны приводить к одному и тому же числу частиц на единицу объема, хотя нормировки функций распределения различны.

Если взять теперь ковариантную производную от этого равенства, то получим уравнение

$$T\,\partial_\mu s_{q0} = \partial_\mu e_{q0} + n_{q0}^{-1}\,\partial_\mu P_{q0} + P_{q0}\,\partial_\mu n_{q0}^{-1} - s_{q0}\,\partial_\mu T - \partial_\mu \mu_q\,,$$

которое приводит к двум термодинамическим уравнениям:

(i) к релятивистскому уравнению Гиббса (для энтропии на одну частицу)

$$T\,\partial_\mu s_{q0} = \partial_\mu e_{q0} + P_{q0}\,\partial_\mu (1/n_{q0})\,, \tag{55}$$

или в виде, записанном для плотности энтропии $\tilde{s}_{q0} = s_{q0} n_{q0}$,

$$\partial_\mu \tilde{s}_{q0} = \beta_0 \partial_\mu \varepsilon_{q0} + \frac{\beta_0}{n_{q0}}\left(\frac{1}{\beta_0}\tilde{s}_{q0} - \varepsilon_{q0} - P_{q0}\right)\partial_\mu n_{q0} = \beta_0 \partial_\mu \varepsilon_{q0} - \alpha_0\,\partial_\mu n_{q0}\,;$$

(ii) к релятивистскому уравнениям Гиббса-Дюгема:

$$n_{q0}^{-1}\,\partial_\mu P_{q0} = \partial_\mu \mu_q + s_{q0}\,\partial_\mu T\,, \tag{56}$$

или в другом виде

$$\partial_\mu P_{q0} = \frac{n_{q0}}{\beta_0}\partial_\mu \alpha_0 - \frac{\varepsilon_{q0} + P_{q0}}{\beta_0}\partial_\mu \beta_0\,.$$

Соотношение Гиббса (55) с помощью оператора D может быть представлено также в виде

$$T(x)\,\mathrm{D}s_{q0}(x) = \mathrm{D}e_{q0}(x) + P_{q0}(x)\,\mathrm{D}[n_{q0}(x)]^{-1}. \tag{57}$$

Это соотношение имеет фундаментальное значение для нахождения явного вида интенсивности производства энтропии $\sigma(x)$.

Наконец, используя рекурсивные соотношения (52), можно с помощью моментных интегралов (46)-(48) и после некоторых алгебраических преобразований получить используемые далее соотношения

$$\mathrm{D}\alpha_0 = \left(\mathrm{D}\varepsilon_{q0} + \mathcal{K}_{30}\,\mathrm{D}\beta_0\right)/\,\mathcal{K}_{20}\,,\quad \mathrm{D}\beta_0 = -(\mathrm{D}\varepsilon_{q0} - \mathcal{K}_{20}\,\mathrm{D}\alpha_0)\,/\,\mathcal{K}_{30}\,, \tag{58}$$

а также формулы для гидростатического давления P_{q0}

$$P_{q0} = \frac{1}{3}\left(\varepsilon_{q0} - m^2 \mathcal{J}_{(0,0)}\right), \tag{59}$$

для энтальпии на одну частицу

$$h_{q0} = (\varepsilon_{q0} + P_{q0}) / n_{q0} = \mathcal{K}_{31} / \mathcal{K}_{21} , \tag{60}$$

а также для квадрата релятивистской скорости звука $c_{qs}^2 = (\partial P_{q0} / \partial \varepsilon_{q0})$ (при фиксированной релятивистской энтропии на частицу, s_{q0} / n_{q0})

$$c_{qs}^2 = \left(\frac{\partial P_{q0}}{\partial \varepsilon_0}\right) = \frac{1}{3}\left[1 + \frac{m^2}{\mathcal{D}_{20}}\left(\mathcal{D}_{10} - \frac{\mathcal{K}_{30}\mathcal{K}_{00} - \mathcal{K}_{20}\mathcal{K}_{10}}{h_{q0}}\right)\right]. \tag{61}$$

Здесь $m := \sqrt{p^{\mu} p_{\mu}}$ – релятивистская масса частицы,

$$\mathcal{D}_{\mathrm{nk}} := \mathcal{K}_{(\mathrm{n}-1,\mathrm{k})}\mathcal{K}_{(\mathrm{n}+1,\mathrm{k})} - \mathcal{K}_{\mathrm{nk}}^2 . \tag{62}$$

5. ОТКЛОНЕНИЕ ОТ РАВНОВЕСИЯ

Отклонение неэкстенсивной системы от равновесия. Если система находится вне q-равновесия, то функция распределения отличается от равновесного распределения, $f_p^q \neq f_{p0}^q$. Это приводит в общем случае к появлению дополнительных членов при определении макроскопических параметров состояния и к возникновению ненулевого источника энтропии $\sigma_q > 0$.

В Разд. 4 была рассмотрена идеальная неэкстенсивная релятивистская газовая система, в которой сохраняется тепловое равновесие, т.е. отсутствуют любые диссипативные процессы. Для равновесных идеальных жидкостей тензор энергии-импульса определяется следующим общековариантным выражением $\mathcal{T}_{q0}^{\mu\nu} = \varepsilon_{q0} u^{\mu} u^{\nu} - P_{q0}\, \Delta^{\mu\nu}$. Для неравновесной среды слабые пространственные и временные градиенты приводят к изменению вектора потока частиц и тензора энергии-импульса на малые добавки ΔN_q^{μ} и $\Delta \mathcal{T}_q^{\mu\nu}$. В результате все эффекты, связанные с диссипацией, проявляются как малые вклады в 4-вектор N_q^{μ} и 4-тензор $\mathcal{T}_q^{\mu\nu} = \varepsilon_{q0} u^{\mu} u^{\nu} - P_{q0}\,\Delta^{\mu\nu} + \Delta\mathcal{T}_q^{\mu\nu}$. Следовательно, дальнейшая задача состоит в том, чтобы найти явные выражения для ΔN_q^{μ} и $\Delta\mathcal{T}_q^{\mu\nu}$.

Для удобства выполнения надлежащих операций разобьем тензор вязких напряжений $\Pi_q^{\mu\nu}$ следующим образом:

$$\Pi_q^{\mu\nu} = \overset{\circ}{\Pi}{}_q^{\mu\nu} - \Pi_q \Delta^{\mu\nu}. \qquad (63)$$

Здесь $\overset{\circ}{\Pi}{}_q^{\mu\nu}$ – тензор вязкого давления с нулевым следом для q-системы;

$$\Pi_q = -\tfrac{1}{3}\Pi_q^{\mu\nu}\Delta_{\mu\nu} = -\tfrac{1}{3}\Pi_q^{\mu\nu} g_{\nu\mu} = -\tfrac{1}{3}\Pi_{q,\mu}^{\mu} \qquad (64)$$

– объемное вязкое давление, определяемое как взятая со знаком минус одна треть следа тензора вязкого давления.

Предположим теперь, что

$$f_p = f_{0p} + \Delta f_p, \qquad (\Delta f_p << f_{0p}), \qquad (65)$$

где через Δf_p обозначено малое отклонение от q-равновесия. Это выражение может быть аппроксимировано разложением в ряд функции f_p относительно равновесия, которое в свою очередь определяется сумматорным инвариантом столкновения

$$\psi_{p0} = \ln_q f_{p0} = \left(\alpha_0 - \beta_0\, p_{\mu} u^{\mu}\right); \qquad (66)$$

в результате получим

$$f_p(\psi) = f_{0p}(\psi_0) + \frac{\partial f_{0p}(\psi_{p0})}{\partial \psi_{p0}}\Delta\psi_p + \ldots = f_{0p} + (f_{0p})^q \Delta\psi_p + \ldots, \qquad (67)$$

где символом $\Delta\psi_p := (\psi - \psi_{p0})$ обозначено соответствующее малое отклонение. Сравнивая выражения (66) и (67) и ограничившись членами линейными по с $\Delta\psi_p$, найдем

$$\Delta f_p = (f_{0p})^q \Delta\psi_p. \qquad (68)$$

Поскольку в неэкстенсивной релятивистской теории все макроскопические величины связаны с функцией распределения $f^q(x,p)$, то отклонение $\Delta f_p^q := f_p^q - f_{p0}^q$ от равновесного распределения f_0^q также найдем из ряда

$$f_p^q = \left[f_{0p} + (f_{0p})^q \Delta\psi_p + \ldots \right]^q = (f_{0p})^q + q(f_{0p})^{2q-1} \Delta\psi_p + \ldots;$$

в результате в линейном приближении получим

$$\Delta f_p^q = q(f_{0p})^{2q-1} \Delta\psi_p . \tag{69}$$

Для дальнейших целей необходимо также иметь разложение в ряд по малому параметру Δf_{p0} функции $H_q[f, f_1] = \exp_q[\ln_q f + \ln_q f_1]$; в результате будем иметь

$$H_q[f_p, f_{p_1}] = H_q[f_{p0}, f_{p_10}] + \frac{\partial H_q[f_{p0}, f_{p_10}]}{\partial f_{p0}} \Delta f_{p0} + \frac{\partial H_q[f_{p0}, f_{p_10}]}{\partial f_{p_10}} \Delta f_{p_10} + \ldots, \tag{70}$$

где, в силу свойства дифференцирования деформированного логарифма, справедливы соотношения

$$\frac{\partial H_q[f_{p0}, f_{p_10}]}{\partial f_{p_10}} = \Big(H_q[f_{p0}, f_{p_10}] \Big)^q (f_{p_10})^{-q}, \tag{71}$$

$$\frac{\partial H_q[f_{p0}, f_{p_10}]}{\partial f_{p0}} = \Big(H_q[f_{p0}, f_{p_10}] \Big)^q (f_{p0})^{-q}. \tag{72}$$

Подставляя (71) и (72) в ряд (70), получим

$$H_q[f_p, f_{p_1}] \simeq H_q[f_{p0}, f_{p_10}] + \Big(H_q[f_{p0}, f_{p_10}] \Big)^q (\Delta\psi_p + \Delta\psi_{p_1}) . \tag{73}$$

Таким образом, интеграл столкновений в уравнении переноса (19) аппроксимируется вплоть до первого порядка в отклонениях от q-равновесия, как

$$C_q[f_p] = C_q[f_{p0}] + C_q[\Delta f_p]. \tag{74}$$

Поскольку слагаемое $C_q[f_{p0}] \propto \left\{ H_q\left[f'_{p0}, f'_{p_1 0} \right] - H_q\left[f_{p0}, f_{p_1 0} \right] \right\}$ равно нулю, то $C_q[f_p] = C_q[\Delta f]$ и, следовательно, уравнение переноса (19) в случае малого линейного отклонения неэкстенсивной релятивистской системы от равновесия ($f_{0p} >> \Delta f_p$) принимает следующий вид[9] :

$$p^{\mu}\,\partial_{\mu}(f_{p0})^q \cong C_q[\Delta f_p]. \tag{75}$$

Здесь интеграл столкновений $C_q[\Delta f_p]$ определяется выражением

$$C_q[\Delta f] := \frac{1}{2}\int W_{p,p_1 \leftrightarrow p',p'_1}\left(H_q[f_{p0}, f_{p_1 0}] \right)^q \times$$

$$\times\left(\Delta\psi_{p'} + \Delta\psi_{p'_1} - \Delta\psi_p - \Delta\psi_{p_1} \right) \mathrm{d}P_1\, \mathrm{d}P'\, \mathrm{d}P'_1. \tag{76}$$

Определение макроскопических параметров состояния в неравновесном случае. Используя неравновесную функцию распределения $f^q(x,p)$ для вычисления плотности частиц, энергии и полного давления системы можно получить следующие выражения:

$$n_q(x) = u_{\mu} N_q^{\mu} = \int (u_{\mu} p^{\mu})\, f_p^q\, \mathrm{d}P = \int E_p\, f_p^q\, \mathrm{d}P, \tag{77}$$

$$\varepsilon_q(x) = u_{\mu} u_{\nu} \mathcal{T}^{\mu\nu} = u_{\mu} u_{\nu} \int p^{\mu} p^{\nu}\, f_p^q\, \mathrm{d}P = \int E_p^2\, f_p^q\, \mathrm{d}P, \tag{78}$$

$$P_q(x) = -\tfrac{1}{3}\Delta_{\mu\nu}\mathcal{T}^{\mu\nu} = -\tfrac{1}{3}\int (\Delta_{\mu\nu} p^{\mu} p^{\nu})\, f_p^q\, \mathrm{d}P, \tag{79}$$

Вместе с тем плотность числа частиц n_q и плотность энергии ε_q полностью определяются только равновесной функцией распределения f_p^q:

$$n_q = \int E_p\, f_p^q\, \mathrm{d}P = \int E_p\, f_{p0}^q\, \mathrm{d}P = n_{q0}, \tag{80}$$

$$\varepsilon_q = \int E_p^2\, f_p^q\, \mathrm{d}P = \int E_p^2\, f_{p0}^q\, \mathrm{d}P = \varepsilon_{q0}, \tag{81}$$

---

[9]) Заметим, что члены более высокого порядка не играют роли в линейной теории.

в то время как изотропное давление P_q разделяется на две части: на гидростатическое давление

$$P_{q0} = -\frac{1}{3}\int (\Delta_{\mu\nu} p^{\mu} p^{\nu})\, f_{p0}^{q}\, \mathrm{d}P \tag{82}$$

и на объемное вязкое давление

$$\Pi_q = -\frac{1}{3}\int (\Delta_{\mu\nu} p^{\mu} p^{\nu}) \Delta f_{p0}^{q}\, \mathrm{d}P, \tag{83}$$

так что $P_q = P_{q0} + \Pi_q$. Заметим, что соотношения (80) и (81) удовлетворяются, если на добавки Δf_p^q наложить так называемые условиями фита

$$\int E_p \Delta f_p^q\, \mathrm{d}P = 0, \quad \int E_p^2 \Delta f_{p0}^q\, \mathrm{d}P = 0, \tag{84}$$

которые обеспечивают то, что на любой стадии процедуры решения уравнения переноса это решение зависит только от параметров $n_{q0}(x)$, $\varepsilon_{q0}(x)$, $u^{\mu}(x)$ и их градиентов.

Кроме этого, ясно, что, поскольку моменты равновесного распределения приводят к исчезновению диссипативных величин то, только отклонения Δf_{p0}^q от равновесной функции распределения f_{p0}^q могут описывать диссипативные процессы. Следовательно, справедливы следующие соотношения:

$$\Delta N_q^{\mu} = \Delta_{\nu}^{\mu} N_q^{\nu} = \int p^{\bar{\mu}} f_p^q\, \mathrm{d}P \simeq \int p^{\bar{\mu}} \Delta f_p^q\, \mathrm{d}P, \tag{85}$$

$$W_q^{\mu} = \Delta_{\sigma}^{\mu} u_{\nu} \mathcal{T}^{\sigma\nu} = \int p^{\bar{\mu}} E_p f_p^q\, \mathrm{d}P \simeq \int p^{\bar{\mu}} E_p \Delta f_p^q\, \mathrm{d}P, \tag{86}$$

$$\Pi^{\mu\nu} = \Delta_{\alpha}^{\mu} \Delta_{\beta}^{\nu} \mathcal{T}^{\alpha\beta} + \Delta^{\mu\nu} P_q = \int \overset{\circ}{\overline{p^{\mu} p^{\nu}}}\, f_p^q\, \mathrm{d}P \simeq \int \overset{\circ}{\overline{p^{\mu} p^{\nu}}}\, \Delta f_p^q\, \mathrm{d}P \tag{87}$$

которые справедливы до первого порядка в отклонениях Δf_p^q неравновесной функции f_p^q от ее равновесного значения f_{p0}^q. Отсюда следует, что малая добавка $\Delta \mathcal{T}_q^{\mu\nu}$ к равновесному тензору энергии-импульса $\mathcal{T}_{q0}^{\mu\nu}$ имеет вид

$$\Delta \mathcal{T}_q^{\mu\nu} = W_q^{\mu} u^{\nu} + W_q^{\nu} u^{\mu} + \Pi_q^{\mu\nu}. \tag{88}$$

Для полноты исследования отклонения системы от равновесия вычислим 4-поток энтропии $S_q^{\mu}[f_p]$ до первого порядка в отклонениях Δf_p функции f_p от f_{p0}. Полученное в этом случае выражение имеет вид

$$S_q^{\mu}[f_p^q] = S_{q0}^{\mu} - k_B \int p^{\mu} \left[\Delta f_p^q \ln_q f_p - \Delta f_p \right] \mathrm{d}P \simeq$$

$$\simeq S_{q0}^{\mu} + k_B \left(\beta_0 J_q^{\mu} - \alpha_0 \Delta N_q^{\mu} \right) + \mathcal{O}[(\Delta f_p^q)^2], \tag{89}$$

в котором выражение для равновесной энтропии определяется соотношением

$$S_{q0}^{\mu} = k_B \int p^{\mu} \left[f_{p0} + \beta_0 f_{p0}^q p^{\nu} u_{\nu} - \alpha_0 f_{p0}^q \right] \mathrm{d}P =$$

$$= k_B \left[-\alpha_0 \Delta N_{q0}^{\mu} + \beta_0 \mathcal{T}_{q0}^{\mu\nu} u_{\nu} + \beta_0 P_{q0} u^{\mu} \right]. \tag{90}$$

При написании (90) учитывалось уже использованной нами выше выражение

$$\mathcal{I}_{10} \equiv \int p^{\mu} u_{\mu} f_p \, \mathrm{d}P = -\beta_0 \mathcal{J}_{21} = \beta_0 P_{q0}.$$

6. НЕЭКСТЕНСИВНАЯ РЕЛЯТИВИСТСКАЯ *BGK* МОДЕЛЬ И ТРАНСПОРТНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ПЕРЕНОСА

Для решения неэкстенсивного релятивистского уравнения переноса для неравновесных процессов может быть использован, в частности, метод моментов Грэда (Israel, 1963; Anderson, 1974; Muronga, 2007b; Betz и др., 2011). Этот метод, однако, страдает от невозможности оценить некоторые результирующие интегралы (даже численно), если только он не ограничится разложениями по равновесному распределению. Вместе с тем эта проблема может быть преодолена с помощью известной модели *BGK* (*Bhatnagar, Gross, and Krook*) с использованием времени релаксации τ, которая позволяет ограничиться только равновесными распределениями, хотя за это приходится расплачиваться меньшей точностью. В данной работе предлагается использовать релаксационный подход к выводу замкнутых неэкстенсивных релятивистских уравнений гидродинамики, разработанный для чисто релятивистского случая в работе (Anderson, Witting, 1974).

Уравнение переноса в приближении *BGK*, линейные определяющие соотношения. Предположим, что неравновесные вклады от диссипативных потокового пренебрежимо малы вблизи равновесия $\Delta f_p^q << f_{p0}^q$, т.е что $p^\mu \partial_\mu \Delta f_p^q \to 0$.

Поскольку имеет место приближенное равенство $p^\mu \partial_\mu f_p^q \simeq p^\mu \partial_\mu f_{p0}^q$, то все неравновесные моменты исчезают из левой части уравнения переноса (19), которое в приближении *BGK* принимает следующий вид (Anderson, Witting, 1974):

$$p^\mu \partial_\mu (f_{p0})^q \simeq -p^\nu u_\nu \frac{f_p^q - f_{p0}^q}{\tau} = -\frac{p^\nu u_\nu \nabla f_p^q}{\tau}, \tag{91}$$

где τ – время релаксации неравновесной функции распределения f_p^q к равновесию.

Используя формулу $f_0(x,p) = \left\{1 + (1-q)\left[\alpha_{0(x)} - \beta_0(x) p^\nu u_\nu(x)\right]\right\}^{1/(1-q)}$ для обобщенной равновесной функции распределения $f_0(x,p)$, получим потоковый член в равновесии в виде

$$p^\mu \partial_\mu (f_{p0})^q = q p^\mu (f_{p0})^{q-1} \partial_\mu f_{p0} =$$

$$= q (f_{p0})^{2q-1} \left\{ p^\mu \partial_\mu \alpha_0 - E_p p^\mu \partial_\mu \beta_0 - \beta_0 p^\mu p^\nu \partial_\mu u_\nu) \right\}. \tag{92}$$

Комбинируя уравнения (91) и (92), получим

$$\Delta f_p^q = \tau q f_{p0}^{2q-1} \left[\left(\frac{\beta_0}{E_p} \frac{\theta}{3} (p^\alpha p^\beta \Delta_{\alpha\beta}) - \mathrm{D}\alpha_0 + E_p \mathrm{D}\beta_0 \right) + \right.$$

$$+\left(h_0^{-1}-E_p^{-1}\right)p^{\mu}\nabla_{\mu}\alpha_0+\frac{\beta_0}{E_p}p^{\langle\alpha}p^{\beta\rangle}\sigma_{\alpha\beta}\Bigg]. \qquad (93)$$

Здесь использовано разложение $\partial_{\mu}u_{\nu}=u_{\mu}\,\mathrm{D}u_{\nu}+\frac{1}{3}\theta\Delta_{\mu\nu}+\sigma_{\mu\nu}+\omega_{\mu\nu}$ и введены следующие обозначения: $\omega^{\mu\nu}:=(\nabla^{\mu}u^{\nu}-\nabla^{\nu}u^{\mu})/2$ – ковариантный ротор, $\sigma_{\mu\nu}=\nabla^{\langle\mu}u^{\nu\rangle}=\sigma_{\mu\nu}\equiv\frac{1}{2}(\nabla_{\mu}u_{\nu}+\nabla_{\nu}u_{\mu}-\frac{2}{3}\Delta_{\mu\nu}\nabla_{\sigma}u^{\sigma})$ –тензор сдвига, $\theta:=\nabla_{\mu}u^{\mu}$ – ковариантная дивергенция гидродинамической скорости.

Заметим, что при получении выражения (93) были использованы законы сохранения равновесной системы для вычисления соответствующих производных по времени, которые могут быть записаны в терминах градиентов. Применяя соотношения (50)-(52) при различных значениях n и k, в результате получим

$$\mathrm{D}\alpha_0=\mathrm{n}_0\,\theta\left[h_0\mathcal{K}_{20}-\mathcal{K}_{30}\right]/\mathcal{D}_{20}, \qquad (94)$$

$$\mathrm{D}\beta_0=\mathrm{n}_0\,\theta\left[h_0\mathcal{K}_{10}-\mathcal{K}_{20}\right]/\mathcal{D}_{20}, \qquad (95)$$

$$\mathrm{D}u^{\mu}=\beta_0^{-1}\left[h_0^{-1}\nabla^{\mu}\alpha_0-\nabla^{\mu}\beta_0\right], \qquad (96)$$

где $\mathcal{D}_{\mathrm{nk}}:=\mathcal{K}_{(\mathrm{n}-1,\mathrm{k})}\,\mathcal{K}_{(\mathrm{n}+1,\mathrm{k})}-\mathcal{K}_{\mathrm{nk}}^2$.

Зная отклонения Δf_{p0}^{q} от равновесной функции распределения f_{p0}^{q}, можно найти обобщенные линейные соотношения в q-системе между градиентами и необратимыми потоками, определенными формулами (85)-(87). Так, линейная связь между тензором напряжений в первом приближении $\Pi^{\mu\nu}$ (формула (87)) и тензором сдвига $\sigma^{\mu\nu}$, полученная с использованием соотношения (93) и соответствующих моментных интегралов (47), принимает вид:

$$\Pi^{\mu\nu}(x)=\int p^{\langle\mu}p^{\nu\rangle}\,\Delta f_p^{q}\,\mathrm{d}P=$$

$$=\tau\beta_0\sigma^{\alpha\beta}\left[q\int\mathrm{d}P\,f_{p0}^{2q-1}E_p^{-1}p^{\langle\mu}p^{\nu\rangle}p_{\langle\alpha}p_{\beta\rangle}\right]=\tau(2\beta_0\mathcal{K}_{32})\sigma^{\mu\nu}, \qquad (97)$$

или

$$\Pi^{\mu\nu}(x) = \eta\sigma^{\mu\nu} = \eta\left[\tfrac{1}{2}(\nabla_\mu u_\nu + \nabla_\nu u_\mu) - \tfrac{1}{3}\Delta_{\mu\nu}\theta\right], \qquad (98)$$

где $\eta = 2\tau\,\beta_0 \dfrac{q}{15}\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{d}P\,(f_{0p})^{2q-1} E_p^{-1}(p^\mu p^\nu \Delta^{\mu\nu})^2 = 2\tau\,\beta_0\,\mathcal{K}_{32} > 0$ – коэффициент сдвиговой вязкости.

Аналогично сдвиговой вязкости можно получить линейное уравнение для скалярного вязкого давления Π_q и рассчитать коэффициент объемной вязкости

$$\Pi_q(x) = -\frac{1}{3}\int \mathrm{d}P(\Delta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu)\,\Delta f_{p0}^q = -\tau\frac{\theta}{3}\Bigg[\beta_0\frac{q}{3}\int \mathrm{d}P\, f_{p0}^{2q-1}E_p^{-1}(\Delta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu)^2 +$$

$$+q n_{q0}\left(\frac{\mathcal{K}_{30} - h_{q0}\mathcal{K}_{20}}{\mathcal{D}_{20}}\right)\int \mathrm{d}P\, f_{p0}^{2q-1}(\Delta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu) -$$

$$-q n_{q0}\left(\frac{\mathcal{K}_{20} - h_{q0}\mathcal{K}_{10}}{\mathcal{D}_{20}}\right)\int \mathrm{d}P\, f_{p0}^{2q-1}E_p(\Delta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu)\Bigg] =$$

$$= \tau\frac{\theta}{\mathcal{D}_{20}}\left[\tfrac{5}{3}\beta_0\,\mathcal{K}_{32}\,\mathcal{D}_{20} + n_{q0}\mathcal{K}_{21}\left(\mathcal{K}_{30} - h_{q0}\mathcal{K}_{20}\right) - n_{q0}\mathcal{K}_{31}\left(\mathcal{K}_{20} - h_{q0}\mathcal{K}_{10}\right)\right]. \qquad (99)$$

Отсюда следует релятивистская версия классического результата Стокса

$$\Pi_q(x) = -\eta_u \nabla_\mu u^\mu \equiv -\eta_u\theta, \qquad (100)$$

где для коэффициента объемной вязкости имеет место следующее представление (Biro, Molnar,2012):

$$\eta_u = \tau\frac{n_{q0}}{\mathcal{D}_{20}}\left[\tfrac{5}{3}\beta_{q0}n_{q0}^{-1}\mathcal{D}_{20}\mathcal{K}_{32} + \mathcal{K}_{21}\left(\mathcal{K}_{30} - h_{q0}\mathcal{K}_{20}\right) - \mathcal{K}_{31}\left(\mathcal{K}_{20} - h_{q0}\mathcal{K}_{10}\right)\right] > 0\,. \qquad (101)$$

Найдем теперь выражение для потока энергии W_q^μ, определяемого формулой (96); в результате получим следующее приближенное соотношение

$$W_q^\mu(x) = \int p^{\bar\mu} E_p \Delta f_p^q\,\mathrm{d}P \sim \frac{q}{3}\int_0^\infty \mathrm{d}P\, f_{p0}^{2q-1}(\Delta^{\mu\nu}p^\mu p^\nu) -$$

$$-h_0\frac{q}{3}\int_0^\infty \mathrm{d}P E_p f_{p0}^{2q-1}(\Delta^{\mu\nu}p^\mu p^\nu) = \mathcal{K}_{21} - h_{q0}\mathcal{K}_{31} \simeq 0\,. \qquad (102)$$

Наконец, используя (9), определим выражение для потока тепла, которое в случае первого порядка в отклонениях Δf_p функции f_p от f_{p0} принимает вид

$$J_q^{\mu}(x) = -h_{q0} N_q^{\nu} \Delta_{\nu}^{\mu} \simeq -h_{q0} \int p^{\bar{\mu}} \Delta f_p^q \,\mathrm{d}\, P\,.$$

Подставляя сюда (93), получим

$$J_q^{\mu}(x) = \tau(\nabla^{\mu}\alpha_0)\left[h_{q0}\left(\frac{q}{3}\int \mathrm{d}P\, f_{p0}^{2q-1} E_p^{-1}(p^{\mu} p^{\nu}\Delta_{\mu\nu})\right) - \right.$$

$$\left. -\frac{q}{3}\int_0^{\infty} \mathrm{d}P\, f_{p0}^{2q-1}(p^{\mu} p^{\nu}\Delta_{\mu\nu})\right] = -\tau\left[\mathcal{K}_{21} - h_0\mathcal{K}_{11}\right]\nabla^{\mu}\alpha_0. \qquad (103)$$

Таким образом, в рассматриваемом линейном случае, закон Фурье для по тока тепла в неэкстенсивной среде принимает вид:

$$J_q^{\mu}(x) = -\tau h_0 T^{-2}\,(\mathcal{K}_{21} - h_0\mathcal{K}_{11})\left(-\nabla^{\mu}T + T\,\mathrm{D}u^{\mu}\right) =$$

$$= \lambda\left(-\nabla^{\mu}T + (h_q n_q)^{-1} T\nabla^{\mu}P_q\right), \qquad (104)$$

где $\lambda = \tau\, h_0 T^{-2}\,(h_0\,\mathcal{K}_{11} - \mathcal{K}_{21}) > 0$ − коэффициент теплопроводности. При написании формулы (104) было использовано соотношение (96) и уравнение движения нулевого порядка (34).

Баланс энтропии, основанный на соотношении Гиббса. Найдем теперь явную форму уравнения баланса энтропии (37), для чего подставим в соотношение Гиббса (57) уравнения неразрывности (32) и энергии (35); в результате получим

$$\mathrm{D}s_q + \partial_{\mu}\left(\mathsf{J}_q^{\mu}/T\right) = \sigma_q \equiv$$

$$= \frac{1}{T}\left\{ -\Pi_q \nabla^{\mu}u_{\mu} + \overset{\circ}{\Pi}{}_q^{\mu\nu}\,\overbrace{\overset{\circ}{\nabla_{\mu}u_{\nu}}} - \mathsf{J}_q^{\mu}\left(\frac{\nabla_{\mu}T}{T} - \frac{\nabla_{\mu}P_q}{hn}\right)\right\}, \qquad (105)$$

где

$$\sigma_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}(\nabla_{\mu}u_{\nu} + \nabla_{\nu}u_{\mu}) - \tfrac{2}{3}\Delta_{\mu\nu}\nabla_{\sigma}u^{\sigma}$$

– симметризованная пространственноподобная и обладающая нулевым следом часть градиента гидродинамической скорости, известная как тензор сдвига.

Если теперь исключить с помощью линейных законов термодинамические потоки из соотношения (105), то можно получить следующее выражение для прироста энтропии

$$T\sigma_q \equiv \eta_u \theta^2 + \eta(\sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}) + \lambda\left(\frac{\nabla_\mu T}{T} - \frac{\nabla_\mu P_q}{h_q n_q}\right)\left(\frac{\nabla^\mu T}{T} - \frac{\nabla^\mu P_q}{h_q n_q}\right) \geq 0. \quad (106)$$

Отсюда следует, что обобщенные линейные законы совместимы с неотрицательным приростом энтропии. Выражение (106) для σ_q имеет знакомый вид, но включает только первое приближение для коэффициентов переноса. При этом единственная явная зависимость от параметра деформации q имеет место в определениях термодинамических интегралов (46)-(48). Чтобы этот результат согласовывался с релятивистской термодинамикой необратимых процессов, приближенные здесь значения коэффициентов переноса должны находиться в хорошем согласии с коэффициентами, полученными в рамках более сложной теории. И наоборот, полученные коэффициенты первого порядка могут служить хорошим критерием правильности метода диссипативной гидродинамики второго порядка, выводимой из релятивистского уравнения Больцмана, при использовании четырнадцати моментов с линеаризованным интегралом столкновений (Muronga, 2007b**;** Betz и др., 2011).

ВЫВОДЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ

Современные ускорители высокоэнергетических частиц уже достигли энергетического диапазона, в котором сформировалась материя ранней Вселенной. В частности, при столкновениях тяжелых ионов на коллайдерах *RHIC* и *LHC* образуется ядерная материя, обладающая экстремальной температурой и плотностью. Это так называемая кварк-глюонная плазма (*КГП*), которая существовала вскоре после Большого взрыва. Ее свойства измеряются в ультрарелятивистских столкновениях тяжелых ионов, где плотность энергии достаточно высока, чтобы сформировать *КГП* за короткое время. К сожалению, из-за природы сильного взаимодействия не существует метода прямого наблюдения этой материей. Как было установлено в экспериментах, характеристика идентифицированных спектров адронов с помощью термодинамического подхода Больцмана-Гиббса недостаточна. Вместо этого спектры частиц, измеренные при столкновениях с высокой энергией, хорошо описываются неэкстенсивными распределениями Тсаллиса-Парето, полученными из неэкстенсивной статистической термодинамики Тсаллиса. В связи с этим целью представленной работы является конструирование q-модифицированной релятивистской гидродинамики, на базе которой возможна разработка различных адекватных моделей в физике элементарных частиц для описания широкого круга явлений в космосе и в процессах производства высокоэнергетических частиц в эволюционирующей жидкости на современных ускорителях, особенно при ядро-ядерных столкновениях.

В работе на основе выведенного ранее обобщенного кинетического уравнения Больцмана сконструирована неэкстенсивная релятивистская гидродинамика для диссипативной жидкости. Релятивистская термодинамика представлена здесь как теория поля. Линейные определяющие соотношения и коэффициенты переноса, такие как сдвиговая вязкость, объемная вязкость и теплопроводность, получены на основе линеаризованного интеграла столкновений, записанного в форме Бхатнагара-Гросса-Крука и оцениваются с использованием аппроксимации времени релаксации. Эти соотношения связывают диссипативные потоки с термодинамическими силами линейно с положительными коэффициентами переноса, зависящими от параметра деформации q через термодинамические интегралы, введенные в работах (Muronga, 2007b; Biro, Molnar, 2012) .

Вместе с тем важно иметь в виду, что рассмотренный здесь подход к конструированию неэкстенсивной релятивистской гидродинамики содержит известный фундаментальный недостаток, который приводит к параболическим дифференциальным уравнениям (и, следовательно, к бесконечным скоростям распространения потоков тепла и вязкости) и к неустойчивости аномальной q-системы, что не подходит для многих явлений в астрофизике высоких энергий, связанных с крутыми градиентами термодинамических параметров или с их быстрыми пространственно-временными изменениями. Этот эффект объясняется (как и в классической гидродинамике) тем, что традиционный термодинамический подход к их выводу основан на слишком ограничительной гипотезе относительно взаимосвязи между потоками и термодинамическими силами. В частности, в случае рассматриваемой здесь простой жидкости предполагалось, что поток энтропии просто пропорционален потоку тепла, а также, что плотность энтропии не зависит от потоков тепла и вязкости. Однако это предположение справедливо только в случае первого порядка по отклонениям от равновесия.

Пренебрежение членами второго порядка в плотности и потоке энтропии приводит к ошибкам того же порядка в производстве энтропии, за исключением случая, когда пространственно-временные градиенты теплового и вязкого потоков пренебрежимо малы, т.е. в квазистационарных условиях. К сожалению, проблема, связанная с гиперболичностью системы, не исчезает с введением параметра деформации q. Более совершенные, но и значительно более сложные неэкстенсивные релятивистские гидродинамические уравнения, чем представленные в данной работе, могут быть получены методом Грэда, при использовании 14- моментного приближения.

Работа выполнена в рамках Госзадания ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Зарипов Р.Г. Принципы неэкстенсивной статистической механики и геометрия мер беспорядка и порядка // Казань: Изд-во Казан. Гос. техн. ун-та. 2010. 404 с.

Колесниченко А.В. Модификация в рамках статистики Тсаллиса критериев гравитационной неустойчивости астрофизических дисков с фрактальной структурой фазового пространства // Mathematica Montisnigri. 2015. V. 32. P. 93-118.

Колесниченко А.В. К построению неаддитивной термодинамики сложных систем на основе статистики Курадо-Тсаллиса // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. № 25. 40 с.

Колесниченко А.В. Статистическая механика и термодинамика Тсаллиса неаддитивных систем. Введение в теорию и приложения. М.: ЛЕНАНД. 2019. 360 с.

Колесниченко А.В. Конструирование релятивистской гидродинамики многокомпонентной жидкости. 1. Метод релятивистской необратимой термодинамики // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2023a. № 2. 44 с.

Колесниченко А.В. К выводу в рамках статистики Тсаллиса релятивистского кинетического уравнения для разреженной идеальной газовой системы высокоэнергетических частиц // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2023b. № 13. 30 с.

Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. Том VI. // Москва: Изд-во «Наука», 1988. 733 с.

Anderson J.L. Relativistic Grad polynomials // Phys. 1974 V.15. № 7. P. 1116-1119.

Abe S., Rajagopal A.K. Validity of the Second Law in Nonextensive Quantum Thermodynamics // Phys. Rev. Lett. 2003. V. 91. № 12. P. 120601 (1-3).

Alberico W. M., Lavagno A. Non-extensive statistical effects in high-energy collisions // The European Physical Journal A, 2009. V. 40. № 3. P. 313-323.

Beck C. Non-extensive statistical mechanics and particle spectra in elementary interactions // Physica A. 2000. V. 286. P.164-180.

Betz B., Denicol G.S, Koide T., Moln´ar E., Niemi H., Rischke D.H. Second order dissipative fluid dynamics from kinetic theory // HCBM 2010 - International Workshop on Hot and Cold Baryonic Matter, Budapest, Hungary, Edited by T.S. Biró; G.G. Barnaföldi; EPJ Web of Conferences.011. V.13. P. id.07005.

Biro T.S., Kaniadakis G. Two generalizations of the Boltzmann equation // Eur. Phys. J. B. 2006. V. 50. P. 3-6.

BiroT.S., Molnar E. Non-extensive statistics, relativistic kinetic theory and fluid dynamics // Eur. Phys. J. A 2012. V. 48: P.172 (1-11).

Bíró G., Barnaföldi G. G., Biró T.S., Ürmössy K. Application of the non-extensive statistical approach to high energy particle collisions // AIP Conference Proceedings. 2017. V.1853. №1. P. id. 080001 (1-7).

Cleymansa J., Worku D. Relativistic thermodynamics: Transverse momentum distributions in high-energy physics // Eur. Phys. J. A. 2012. V. 48. P. 160 (1-8).

Cleymans J., Lykasov G.I., Parvan A.S.,. Sorin A.S, Teryaev O.V., Worku D. Systematic properties of the Tsallis distribution: Energy dependence of parameters in high energy p-p collisions // Physics Letters B. 2013.V.723. P.351-354.

de Groot S.R., van Weert C.G., Hermens W.T, van Leeuwen W.A. On relativistic kinetic gas theory I. The second law for a gas mixture outside equilibrium // Physica. 1968. V. 40. P. 257-276.

de Groot S.R., van Leeuwen W.A., van Weert Ch. G. Relativistic kinetic theory: principles and applications. North-Holland Publishing Company Amsterdam-New York-Oxford. 1980. 417 p.

Eckart C. The thermodynamics of irreversible processes III. Relativistic theory of the simple fluid // Phys. Rev. 1940. V. 58. P. 919-928.

Gell-Mann M., Tsallis C. (Eds.), Nonextensive Entropy: Interdisciplinary Applications, Oxford University Press, New York, 2004.

Jüttner F. Das Maxwellsche Gesetz der Geschwindigke its verteilung in der Relativtheorie // Annalen der Physik 1911. Bd 34. S. 856-882.

Israel W. Relativistic kinetic theory of a simple gas // J. Math. Phys. 1963. V. 4. P. 1163-1181.

Kodama T., Elze H.-T., Aguiar C.E., Koide T. Dynamical correlations as origin of nonextensive entropy // Europhys. Lett. 2005. V. 70. № 4. P. 439-445.

Kolesnichenko A.V. Thermodynamics of the Bose Gas and Blackbody Radiation in Non-Extensive Tsallis Statistics // Solar System Research, 2020a.V. 54. № 5. P. 420-431.

Kolesnichenko A.V. Jeans Instability of a Protoplanetary Circular Disk Taking into Account the Magnetic Field and Radiation in Nonextensive Tsallis Kinetics // Solar System Research, 2021. V. 55. № 2. P.132-149.

Kolesnichenko A.V. Jeans Instability of a Protoplanetary Gas Cloud with Radiation in Nonextensive Tsallis Kinetics // Solar System Research, 2020b. V. 54. № 2. P.137-149.

Kolesnichenko A.V. Power distributions for self-gravitating astrophysical systems based on nonextensive Tsallis kinetics // Solar System Research, 2017. V. 51. № 2. P.127-144.

Lavagno A., Quarati P., Scarfone A.M. Nonextensive relativistic nuclear and subnuclear equation of state // Brazilian Journal of Physics. 2009. V. 39. № 2A. P. 457-463.

Lima A.S., Silva R., Plastino A. R. Nonextensive Thermostatistics and the H Theorem // Physical Review Letters. 2001. V.86. №14. P. 2938-2941.

Muronga A. Relativistic dynamics of nonideal fluids: Viscous and heat-conducting fluids. I. General aspects and 3+1 formulation for nuclear collisions // Physical Review C. 2007a. V. 76. P. 014909 (1-20).

Muronga A. Relativistic dynamics of non-ideal fluids: Viscous and heat-conducting fluids. II. Transport properties and microscopic description of relativistic nuclear matter // Physical Review C. 2007b. V. 76. P. 014910 (1-20).

Osada T., Wilk G. Nonextensive/Dissipative Correspondence in Relativistic Hydrodynamics // Prog. Theor. Phys. Supp. 2008a. V. 174. P. 168-172.

OsadaT., Wilk G. Nonextensive hydrodynamics for relativistic heavy-ion collisions // Physical Review C. 2008b. V.77. P. 044903 (1-20).

Santos A.P., Silva R., Alcaniz J.S., Lima J.A.S. Nonextensive kinetic theory and *H*-theorem in general relativity //Annals of Physics. 2017. V. 386. P. 158-164.

Silva R., Lima J. A. S. Relativity, nonextensivity, and extended power law distributions // Physical Review E. 2005. V. 72. P. 057101 (1-4).

Tsallis C. Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs-Statistics // J. Stat. Phys. 1988. V. 52. № 1-2. P. 479-487. (a regular updated bibliography is accessible at http: /tsallis. cat.cbpf.br/biblio.htm).

Tsallis C., Souza A. M. C. Constructing a statistical mechanics for Beck-Cohen superstatistics // PhysicaL Review E. 2003. V. 67. P. 026106 (1-5)

Tsallis C. Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics. Approaching a Complex World. New York: Springer, 2009. 382 p.

Urmossy K., Barnaföldi G.G., Biró T.S. Microcanonical jet-fragmentation in proton–proton collisions at LHC energy // Physics Letters B. 2012. V. 718. № 1. P.125-129.

Weinberg S. Gravitation and cosmology. Principles and applications of the theory of relativity (J. Wiley and Sons, New York, 1972). [Имеется перевод: Вейнберг С. Гравитация и космология // М.: Мир. 1976].

Wilk G., Włodarczyk Z. Interpretation of the Nonextensivity Parameter *q* in Some Applications of Tsallis Statistics and Lévy Distributions // Physical Review Letters. 2000. V. 84. № 13. P. 2770-2773.

Wilk G., Włodarczyk Z. Power laws in elementary and heavy-ion collisions A story of fluctuations and nonextensivity? // Eur. Phys. J. A. 2009. V. 40. P. 299–312.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 3

1. Основные макроскопические величины 6
2. Обобщенное релятивистское кинетическое уравнение 11
3. Макроскопические законы сохранения. *H*-теорема 13
4. Равновесное состояние 21
5. Отклонение от равновесия 25
6. Неэкстенсивная релятивистская модель *BGK* и транспортные коэффициенты переноса 30

Выводы и перспективы 35

Список литературы 37