ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 20 за 2023 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

В.В. Веденяпин, Д.А. Когтенев

О выводе и свойствах уравнений типа Власова

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Веденяпин В.В., Когтенев Д.А. О выводе и свойствах уравнений типа Власова // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2023. № 20. 18 с.
https://doi.org/10.20948/prepr-2023-20
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2023-20

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

В.В. Веденяпин, Д.А. Когтенев

Об уравнениях типа Власова

Москва — 2023

Веденяпин В.В., Когтенев Д.А.

Об уравнениях типа Власова

Рассматривается вывод уравнений гравитации и электродинамики в форме Власова-Максвелла-Эйнштейна. Рассматриваются свойства уравнения Власова-Пуассона и его приложения к построению периодических решений – волн Бернштейна-Грина-Крускала.

Ключевые слова: уравнения типа Власова, гидродинамическая подстановка, задача Шварцшильда.

Victor Valentinovich Vedenyapin, Dmitry Aleksandrovich Kogtenev

About Vlasov-type equations

Derivation of the gravity and electrodynamics equations in the Vlasov-Maxwell-Einstein form is considered. Properties of Vlasov-Poisson equation and its application to construction of periodic solutions – Bernstein-Greene-Kruskal waves – are considered.

Key words: Vlasov-type equations, hydrodynamic substitution, Schwarzschild problem.

Оглавление

Введение

Кинетические уравнения типа Больцмана и Власова хорошо подходят для описания гетерогенных сред при соответствующем незначительном обобщении: нужно функцию распределения сделать зависящей от параметров, описывающих эту гетерогенность, в первую очередь по массе. Мы также положим, что функция распределения зависит от заряда. Итак, пусть $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e)$ – функция распределения частиц по пространству $\mathbf{x} \in \mathrm{R}^3$, по скоростям $\mathbf{v} \in \mathrm{R}^3$, массам $\mathrm{m} \in \mathrm{R}$ и заряду $\mathrm{e} \in \mathrm{R}$ в момент времени $\mathrm{t} \in \mathrm{R}$. Это означает, что число частиц в объеме $\mathrm{d}\mathbf{x}\mathrm{d}\mathbf{v}\mathrm{dmde}$ равно $\mathrm{f}(\mathrm{t}, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathrm{m}, \mathrm{e})\mathrm{d}\mathbf{x}\mathrm{d}\mathbf{v}\mathrm{dmde}$. Известно, что уравнения типа Больцмана описывают короткодействующие взаимодействия [1-5], а уравнения типа Власова – дальнодействующие. Уравнение Больцмана было выведено, как это ни странно, Максвеллом [1], но почему оно называется уравнением Больцмана – предмет отдельного разговора. В любом случае, Больцман трижды в яркой форме отказывается от этого уравнения в пользу Максвелла на одной странице [2]. Короткий ответ на этот вопрос – Больцман обессмертил это уравнение, доказав H-теорему, теорему о росте энтропии [2]. В этой же работе [2] он заложил основы химической кинетики, обобщая дискретные модели уравнения Больцмана, как мы сказали бы сейчас, и доказывая для этих обобщений H-теорему. В последующих исследованиях эта теорема обобщалась во многих направлениях, в частности для уравнений коагуляции-фрагментации с обобщением уравнений Смолуховского, для квантовых уравнений Больцмана и их дискретных моделей (см. [3-5]). Уравнение Власова [6] прекрасно описывает дальнодействие, поэтому используется в различных формах: существуют уравнения Власова-Пуассона (для гравитации, плазмы и электронов), уравнение Власова-Максвелла, уравнение Власова-Эйнштейна и другие приставки к этому классу уравнений: все эти уравнения были введены за рубежом, и названия прижились. Уравнения типа Власова удобно выводить из принципа наименьшего действия. Здесь мы применим этот способ для вывода уравнения гравитации и электродинамики в форме уравнений Власова-Максвелла-Эйнштейна, а потом покажем его применение в более простых ситуациях. В классических работах (см. [6,7,26-28]) уравнения для электромагнитных и гравитационных полей даются без вывода правых частей. Здесь мы предлагаем вывод правых частей уравнений Максвелла и Эйнштейна в рамках уравнений Власова-Максвелла-Эйнштейна из классического, но немного более общего принципа наименьшего действия и применяем уравнения Гамильтона-Якоби для получения космологических решений.

Действие в общей теории относительности и уравнения для полей

Пусть $f(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e)$ – функция распределения частиц по пространству $\mathbf{x} \in R^3$, по скоростям $\mathbf{v} \in R^3$, массам $m \in R$ и заряду $e \in R$ в момент времени $t \in R$. Это означает, что число частиц в объеме $d\mathbf{x}d\mathbf{v}dmde$ равно $f(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e)d\mathbf{x}d\mathbf{v}dmde$. Рассмотрим действие

$$\begin{aligned} S = &-c\int mf(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e)\sqrt{g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu}d^3\mathbf{x}\, d^3\mathbf{v}dmdedt - \\ &-\frac{1}{c}\int ef(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e)\, A_\mu u^\mu d^3\mathbf{x}\, d^3\mathbf{v}dmdedt + \\ &+k_1\int (R+\Lambda)\sqrt{-g}\, d^4\mathbf{x} + k_2\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{-g}\, d^4\mathbf{x}, \end{aligned} \tag{1}$$

где c – скорость света, $u^0 = c$, $u^i = v^i$ $(i = 1,2,3)$ – трехмерная скорость, $x^0 = ct$, x^i – координата, $g_{\mu\nu}(\mathbf{x},t)$ – метрика $(\mu,\nu = 0,1,2,3)$, $A_\mu(\mathbf{x},t)$ – 4-потенциал электромагнитного поля, $F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu(\mathbf{x},t)}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu(\mathbf{x},t)}{\partial x^\mu}$ – электромагнитные поля. Здесь R – полная кривизна, Λ – лямбда-член Эйнштейна, $k_1 = -\frac{c^3}{16\pi\gamma}$ и $k_2 = -\frac{1}{16\pi c}$ – константы [7-10], g – определитель метрики $g_{\mu\nu}$, γ – постоянная тяготения. По повторяющимся индексам, как обычно, идёт суммирование.

Вид действия (1) удобен для получения уравнений Эйнштейна и Максвелла при варьировании по полям $g_{\mu\nu}$ и A_μ. Такой способ вывода уравнений Власова-Максвелла и Власова-Эйнштейна использовался в работах [8-12]. При варьировании (1) по $g_{\mu\nu}$ получим уравнение Эйнштейна:

$$\begin{aligned} &k_1\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(R+\Lambda)\right)\sqrt{-g} = \\ &= -\int m\frac{f(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e)}{2\sqrt{g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta}}u^\mu u^\nu d^3\mathbf{v}dmde - \\ &-k_2(-2F^{\beta\nu}F^{\alpha\mu}g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}g^{\mu\nu})\sqrt{-g}. \end{aligned} \tag{2}$$

Первое слагаемое правой части этого уравнения и является, по определению Гильберта, тензором энергии-импульса для материи. Он выписан впервые в таком виде в работах [11-12], в менее общем виде без распределения по массам и зарядам. Попытки выписать тензор энергии-импульса через функцию распределения предпринимались, насколько нам известно, только в релятивистской кинетической теории для уравнения Власова-Эйнштейна. Постановка задачи о выводе уравнений типа Власова из принципа наименьшего действия, особенно для уравнений поля и особенно правой части (2), судя по всему – только в США. Обзор 1992 года [13] по выводу уравнения Власова содержит 5 принципов наименьшего действия. Что касается европейских исследователей, то такая задача не ставилась [14-16] и уравнения постоянно теряли корень в первом слагаемом правой части уравнения (2). Таким образом, уравнения Власова-Эйнштейна оказались прекрасным тестом на схему вывода уравнений типа Власова из принципа наименьшего действия. Отметим постоянные усилия Филиппа Моррисона [17-20], который, видимо, единственный такую задачу поставил и осознал ее важность. Однако уравнения Власова-Эйнштейна не поддались: схема вывода оказалась недостаточно простой. Наш подход, по сути, дает самый простой и прямой вывод уравнений электродинамики и общей теории относительности(ОТО), упрощая всю ОТО.

Мы получили кинетическую форму тензора энергии-импульса, но обычно используют его гидродинамическую форму, записывая ее в абстрактной форме

$$\mathrm{T}^{\mu\nu} = (\mathrm{p} + \mathrm{E})\mathrm{U}^{\mu}\mathrm{U}^{\nu} + p\mathrm{g}^{\mu\nu}.$$

Здесь p – давление, E – энергия, U – макроскопическая (гидродинамическая) скорость. Такое выражение появляется в кинетической теории из нерелятивистской формы первого слагаемого (2)

$$\int \mathrm{m}\mathrm{f}(\mathrm{t}, \mathrm{x}, \mathrm{v}, \mathrm{m}, \mathrm{e})\mathrm{u}^{\mu}\mathrm{u}^{\nu}\mathrm{d}^{3}\mathrm{v}\mathrm{dm}.$$

Сравнение явной формулы (2) с этим выражением показывает, что такое выражение получается после гидродинамической подстановки в правую часть формулы (2)

$$\mathrm{f}(\mathrm{t}, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathrm{m}, \mathrm{e}) = \rho(x, t, m, e)\delta\big(\mathbf{v} - \mathrm{V}(\mathrm{t}, \mathrm{x}, \mathrm{m}, \mathrm{e})\big),$$

где $\mathrm{U}(\mathrm{t}, \mathrm{x}, \mathrm{m}, \mathrm{e}) = (\mathrm{c}, \mathrm{V}(\mathrm{t}, \mathrm{x}, \mathrm{m}, \mathrm{e}))$, а δ – дельта-функция Дирака. Кроме того, появился хороший кандидат вместо Лямбды Эйнштейна $\frac{\mathrm{k}_2}{\mathrm{k}_1}\,(\mathrm{F}_{\alpha\beta}\mathrm{F}^{\alpha\beta})$. Это означает, что лямбду можно положить равной нулю, а наблюдающееся ускоренное расширение вселенной обеспечивается энергией взаимодействия электромагнетизма и гравитации, что, может быть, и является темной энергией. Позже мы это проверим в слаборелятивистском и нерелятивистском вариантах. Плазмы во вселенной много (как солнечный ветер), и для нее электрические поля больше магнитных. Не исключено, что этим можно объяснить и темную материю: в масштабах галактики электромагнитные поля могут быть неоднородными, а в масштабах вселенной выглядят однородными. Введение лямбды Эйнштейн считал главной ошибкой своей жизни. Но сейчас эта лямбда стала основным способом объяснять ускоренное расширение Вселенной. Избавиться от лямбды и есть основная задача тех, кто объясняет темную энергию. Наш анализ тензора энергии-импульса показывает, что в качестве темной энергии может быть энергия взаимодействия гравитационного поля с другими полями, в первую очередь с электромагнитным.

Уравнение электромагнитных полей получается варьированием (1) по A_μ и называется системой уравнений Максвелла:

$$k_2 \frac{\partial\sqrt{-g}F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{1}{c^2}\int e\,u^\mu f(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e)d^3\mathbf{v}dmde. \tag{3}$$

Покажем, что вид действия (1) является более общим, чем в [6-7]. Для получения стандартного вида действия возьмем функцию распределения в виде δ-функции для одной частицы:

$$f(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e) = \delta\big(\mathbf{x}-\mathbf{x}'(t)\big)\delta\big(\mathbf{v}-\mathbf{v}'(t)\big)\delta(m-m')\delta(e-e'). \tag{4}$$

Подставив (4) в действие (1) и опустив штрихи, получаем стандартные [6-7] выражения для всех слагаемых:

$$\begin{gathered} S = -cm\int\sqrt{g_{\mu\nu}(x,t)u^\mu u^\nu}\,dt - \frac{e}{c}\int A_\mu(\mathbf{x},t)u^\mu dt + \\ + k_1\int(R+\Lambda)\sqrt{-g}d^4\mathbf{x} + k_2\int\big(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\big)\sqrt{-g}d^4\mathbf{x}. \end{gathered} \tag{5}$$

В роли частиц могут быть электроны и ионы в плазме, планеты в галактиках, галактики в супергалактиках, скопление галактик во Вселенной. В равенстве (4) мы можем взять сумму дельта-функций и получить обычное действие [6-7] для конечной системы частиц: этим обосновывается единственность выбора более общего действия (1).

Этой же подстановкой (4) получаются уравнения для гравитационного и электрического полей движущейся заряженной массивной частицы:

$$\begin{gathered} k_1\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(R+\Lambda)\right)\sqrt{-g} = \\ m\frac{\delta\big(\mathbf{x}-\mathbf{x}'(t)\big)}{2\sqrt{g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta}}u^\mu u^\nu - k_2(-2F^{\beta\nu}F^{\alpha\mu}g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}g^{\mu\nu})\sqrt{-g}, \end{gathered} \tag{6}$$

$$k_2\frac{\partial\sqrt{-g}F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{1}{c^2}eu^\mu\delta\big(\mathbf{x}-\mathbf{x}'(t)\big). \tag{7}$$

Это система уравнений на метрику и электромагнитные поля точечной заряженной массы. Выпишем теперь уравнение для гравитационного поля точечной заряженной покоящейся массы (задача Шварцшильда):

$$k_1\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(R+\Lambda)\right)\sqrt{-g}=$$
$$=mc\frac{\delta(\mathbf{x})}{2\sqrt{g^{00}}}\delta^{\mu0}\delta^{\nu0}-k_2(-2F^{\beta\nu}F^{\alpha\mu}g_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}g^{\mu\nu})\sqrt{-g}, \qquad (8)$$
$$k_2\frac{\partial\sqrt{-g}F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=\frac{1}{c}e\delta^{\mu0}\delta(\mathbf{x}).$$

Хорошо видно: чтобы замкнуть уравнения (2-3) для полей, нужно получить уравнение на функцию распределения. Для функции распределения по скоростям это сделано в работах [11-13, 23-25]: так получаются символы Кристоффеля в четырехмерной геометрии, и требуется процедура Вейнберга-Фока, чтобы перейти к трехмерной функции распределения, как это диктуют уравнения для полей (2-3). Это был путь европейской физики [14-16], и трудности оказались непреодолимыми не только для уравнений для полей, но и для уравнений для частиц с переходом к функции распределения. В США усилиями Окабе, Моррисона, Фридрихсена и Шепли (*Okabe T., Morrison P.J., Friedrichsen III J.E., Shepley L.C.)* уравнения для частиц и соответствующее уравнение Лиувилля были выписаны очень хорошо в импульсах и с использованием гамильтонова подхода [19]. Мы пойдем несколько дальше и получим Гамильтон-Якобиеву форму уравнений Власова-Максвелла-Эйнштейна. Что касается уравнений для полей, то мы воспользуемся нашим выражением в скоростях (2-3) и перейдем к импульсам: это, видимо, простейший путь. Проясняется смысл уравнений типа Власова: это единственный способ получить замкнутую систему уравнений гравитации и электродинамики и при этом вывести эту систему из классического принципа наименьшего действия (1) или (5). Фактически при выводе мы пользовались стандартной схемой [6-7,26-28]: выводили уравнения для частиц в заданных полях и уравнения для полей в заданных конфигурациях частиц. Несколько усовершенствований этого подхода уравнение Власова сразу и предлагает: вместо уравнений сплошной среды уравнения Лиувилля. Так и действовали специалисты по уравнению Власова [13-20].

Переход к гидродинамике и уравнению Гамильтона-Якоби в релятивистском случае уравнения Власова-Максвелла-Эйнштейна

Для вывода уравнений Власова-Максвелла-Эйнштейна в форме Гамильтона-Якоби нужно вывести его в импульсах [7-8]. Схема вывода уравнений типа Власова – это вывод уравнений для полей при заданном движении частиц и вывод уравнений движения частиц в заданных полях с переходом к уравнениям Лиувилля – следует общей схеме классических учебников [7]. Имея часть действия (5) для движения частиц в заданных полях:

$$S = -cm\int\sqrt{g_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu}}dt - \frac{e}{c}\int A_{\mu}u^{\mu}dt,$$

мы получим уравнение движения:

$$-cm\frac{d}{dt}\left[\frac{g_{i\beta}u^{\beta}}{\sqrt{g_{\eta\xi}u^{\eta}u^{\xi}}} + \frac{e}{c}A_i\right] = -cm\frac{1}{\sqrt{g_{\eta\xi}u^{\eta}u^{\xi}}}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^i}u^{\mu}u^{\nu} - \frac{e}{c}\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^i}u^{\mu}.$$

Латинские индексы $i, j, k, \ldots$ пробегают значения $1, 2, 3$, а греческие $\mu, \nu, \ldots$ пробегают значения $0, 1, 2, 3$.

Мы получаем выражение для импульсов:

$$q_{\mu} = \frac{\partial L}{\partial u^{\mu}} = -mc\frac{g_{\mu\alpha}u^{\alpha}}{\sqrt{g_{\eta\xi}u^{\eta}u^{\xi}}} - \frac{e}{c}A_{\mu}.$$

Здесь выражение для q_0 получается формальным дифференцированием по $u^0 = c$.

Это выражения для длинных или канонических импульсов, но понадобятся и малые импульсы $p_{\mu} = q_{\mu} + \frac{e}{c}A_{\mu} = -mc\frac{g_{\mu\alpha}u^{\alpha}}{\sqrt{g_{\eta\xi}u^{\eta}u^{\xi}}}$: формулы связи со скоростями проще для малых импульсов, а при переходе к уравнению Гамильтона-Якоби мы обязаны пользоваться каноническими.

Переходя к верхним индексам умножением на обратную матрицу $g^{\mu\beta}$, получаем

$$p^{\beta} = -mc\frac{u^{\beta}}{\sqrt{g_{\eta\xi}u^{\eta}u^{\xi}}}.$$

Теперь требуется обратить эту формулу, выразив скорости через импульсы, чтобы написать уравнение движения через импульсы (а затем перейти к уравнению Гамильтона и Гамильтона-Якоби). Для этого в последней формуле поделим β-ю компоненту на нулевую:

$$\frac{p^{\beta}}{p^0} = \frac{u^{\beta}}{c}.$$

В последней формуле необходимо исключить импульс с нулевой компонентой через массовое уравнение $p_{\alpha}p_{\beta}g^{\alpha\beta} = (mc)^2$ и его решение относительно p_0:

$$p_0 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad (9)$$

где $a = g^{00}$, $b = 2p_i g^{0i}$, $c = p_i p_j g^{ij} - (mc)^2$. При этом для согласования с нерелятивистской динамикой берется знак минус.

Уравнение для полей останется тем же самым (2) с заменой на интегрирование по импульсам с использованием формул $f(t,x,v,m,e)dvdmde = f(t,x,q,m,e)dqdmde = f(t,x,p,m,e)dpdmde$. Каждая из трех этих величин – это число частиц в элементе объема, что является инвариантом при замене переменных.

$$k_1\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(R+\Lambda)\right)\sqrt{-g} =$$

$$= \int m\frac{f(t,x,q,m,e)}{2\sqrt{g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu}}u^\mu u^\nu d^3q dmde - \frac{1}{2}k_2 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}g^{\mu\nu}\sqrt{-g},$$

$$k_2\frac{\partial\sqrt{-g}F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{1}{c^2}\int e\, u^\mu f(t,x,q,m,e)d^3q dmde.$$

Или

$$k_1\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(R+\Lambda)\right)\sqrt{-g} =$$

$$= -\int \frac{f(t,x,p,m,e)}{2}\frac{p^\mu p^\nu}{(p^0)}d^3p dmde - \frac{1}{2}k_2 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}g^{\mu\nu}\sqrt{-g}, \qquad (10)$$

$$k_2\frac{\partial\sqrt{-g}F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{1}{c^2}\int e\,\frac{cp^\mu}{p^0} f(t,x,p,m,e)d^3p dmde.$$

Теперь напишем эти уравнения для определения поля движущегося заряда с заданным импульсом. Функция распределения в таком случае имеет вид

$$f(t,x,q,m,e) = \delta(e - e')\delta\big(x - x'(t)\big)\delta(m - m')\delta\big(p - P(t)\big).$$

Подставим функцию распределения в (10) и, опустив штрихи, получим

$$k_1\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(R+\Lambda)\right)\sqrt{-g} = -\frac{P^\mu P^\nu}{2P^0}\delta\big(x - x'(t)\big) - \frac{1}{2}k_2 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}g^{\mu\nu}\sqrt{-g},$$

$$k_2\frac{\partial\sqrt{-g}F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{e}{c}\frac{P^\mu}{P^0}\,\delta\big(x - x'(t)\big).$$

Здесь P^0 зависит от P^i $(i = 1,2,3)$ по выведенной формуле (9). В случае неподвижной частицы последние уравнения принимают вид

$$k_1\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(R+\Lambda)\right)\sqrt{-g}=$$
$$=-\frac{P^0\delta^{\mu 0}\delta^{\nu 0}}{2}\,\delta(x)-k_2(2F^{\beta\nu}F^{\alpha\mu}g_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}g^{\mu\nu})\sqrt{-g},$$
$$k_2\frac{\partial\sqrt{-g}F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=\frac{e}{c}\delta^{\mu 0}\delta(x).$$

Учитывая, что для неподвижной частицы $P^0=\frac{-mc}{\sqrt{g_{00}}}$ (формула (9)), получим окончательный вид уравнений для полей в случае неподвижной частицы

$$k_1\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(R+\Lambda)\right)\sqrt{-g}=\ mc\frac{\delta^{\mu 0}\delta^{\nu 0}}{2\sqrt{g_{00}}}\,\delta(x)-k_2(2F^{\beta\nu}F^{\alpha\mu}g_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$$
$$g^{\mu\nu})\sqrt{-g},$$
$$k_2\frac{\partial\sqrt{-g}F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=\frac{e}{c}\delta^{\mu 0}\delta(x).$$

Уравнение движения для частиц получаем уже в гамильтоновой форме, где функция Гамильтона $H=-c\frac{\partial L}{\partial u^0}=\ -cq_0$. Эта формула получается из-за того, что лагранжиан для действия $S=-cm\int\sqrt{g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu}dt-\frac{e}{c}\int\ A_\mu u^\mu dt$ есть функция первой степени по скоростям, и формулы Эйлера $u^\mu\frac{\partial L}{\partial u^\mu}-L=0$. Так как по определению $H=u^i\frac{\partial L}{\partial u^i}-L$, получаем: $c\frac{\partial L}{\partial u^0}+H=0$. Здесь имеется в виду суммирование по $i=1,2,3$ и по $\mu=0,1,2,3$. Отсюда находим выражения для скоростей $u^i=\frac{\partial H}{\partial q_i}=u^i(q)=-c\frac{\partial q_0}{\partial q_i}$.

Выписываем через этот гамильтониан уравнение Лиувилля

$$\frac{\partial f}{\partial t}-c\frac{\partial q_0}{\partial q_i}-c\frac{\partial q_0}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial q_i}. \tag{11}$$

И получаем замкнутую систему уравнений гравитации и электродинамики Власова-Максвелла-Эйнштейна в импульсах (10-11). По общей схеме работ [8-12] получаем гидродинамическое следствие системы Власова-Максвелла-Эйнштейна (10-11) гидродинамической подстановкой $f(t,x,q\,,m,e)=\rho(x,t\,,m,e)\delta(q-Q(q,t,m,e))$:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\ \frac{\partial}{\partial x^i}\left(u^i(Q)\rho\right)=0, \tag{12}$$

$$\frac{\partial Q_k}{\partial t}-c\frac{\partial q_0}{\partial q_i}(x,Q)\frac{\partial Q_k}{\partial x^i}+\ c\frac{\partial q_0}{\partial x^k}. \tag{13}$$

Подстановкой $Q_\alpha = \frac{\partial W}{\partial x^\alpha}$ или $P_\alpha = \frac{\partial W}{\partial x^\alpha} - \frac{e}{c} A_\alpha$ получаем затем уравнение Гамильтона-Якоби

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x^\alpha} - \frac{e}{c} A_\alpha\right)\left(\frac{\partial W}{\partial x^\beta} - \frac{e}{c} A_\beta\right) g^{\alpha\beta} = (mc)^2. \tag{14}$$

Мы также должны переписать уравнение (12) неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(u^i(\nabla W)\rho\right) = 0. \tag{15}$$

Чтобы получить замкнутую форму уравнений Гамильтона-Якоби-Власова-Максвелла-Эйнштейна, необходимо и в уравнениях для полей выполнить ту же гидродинамическую подстановку $f(t, x, q, m, e) = \rho(x, t, m, e)\delta(q - Q(x, t, m, e))$:

$$\begin{gathered} k_1\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu}(R + \Lambda)\right)\sqrt{-g} = \\ = \int -\frac{\rho(t, x, m, e)}{2} \frac{P^\mu P^\nu}{(P^0)} dmde - \frac{1}{2} k_2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} g^{\mu\nu} \sqrt{-g}, \end{gathered} \tag{16}$$

$$k_2 \frac{\partial \sqrt{-g} F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{1}{c^2} \int e \frac{cP^\mu}{P^0} \rho(t, x, m, e) dmde. \tag{17}$$

Здесь макроскопические импульсы P^μ и P_μ связаны обычными соотношениями $P_\mu = g_{\mu\nu} P^\nu$. При этом в форме Гамильтона-Якоби нужно учитывать, что $P_\alpha = \frac{\partial W}{\partial x^\alpha} - \frac{e}{c} A_\alpha$.

Мы получили уравнение Власова-Максвелла-Эйнштейна как в редукции к гидродинамическим переменным (16, 17), так и в редукции к уравнениям Гамильтона-Якоби (14). Ранее система уравнений Власова Максвелла-Эйнштейна была получена для скоростей [11-12], а здесь для импульсов, что дает возможность исследовать космологические решения переходом к уравнению Гамильтона-Якоби. Интерес представляют стационарные решения полученных уравнений, как это делалось для уравнений Власова-Пуассона [8-10] и как это сделано здесь. Важно отметить, что в цикле работ [11-12, 23-25, 32-33] были впервые получены выражения для тензора энергии-импульса из принципа наименьшего действия. В принципе можно рассматривать космологическую задачу и в общем случае, но выражения будут громоздкими, поэтому рассмотрим примеры специальных слаборелятивистских систем.

Пример 1. Рассмотрим простейшее релятивистское действие с метрикой Лоренца:

$$S = -mc\int\left(\sqrt{c^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} + \frac{U}{c}\right)dt - \frac{1}{8\pi\gamma}\int(\nabla U)^2 dxdt - \frac{c^2\Lambda}{8\pi\gamma}\int Udxdt.$$

Варьируя по координатам $x(t)$, получаем обычные релятивистские уравнения в метрике Лоренца с гамильтонианом [7]

$$H(x, q) = c\sqrt{(mc)^2 + q^2} + U.$$

Переходим к действию, пригодному к варьированию по полям по нашей обычной схеме:

$$S = -mc\int\left(\sqrt{c^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} + \frac{U}{c}\right)f(x, p, m, t)dt - \frac{1}{8\pi\gamma}\int(\nabla U)^2 dxdt - \frac{c^2\Lambda}{8\pi\gamma}\int Udxdt.$$

Варьируя его по потенциалу U, получаем уравнения для полей

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x^i}(v^i(\nabla W)\rho) = 0 \\ \dfrac{\partial W}{\partial t} + c\sqrt{(mc)^2 + (\nabla W)^2} + U = 0 \\ \Delta U = 4\pi\gamma\displaystyle\int m\rho dmde - \dfrac{c^2\Lambda}{2}, \end{cases}$$

где $v^i(q) = \frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{cq^i}{\sqrt{(mc)^2+q^2}}$.

Мы получили выражение для скорости, из которого видно Хаббловское расширение, замкнутую систему уравнений и возможность переходить к космологическим решениям в изотропном случае и когда плотность не зависит от пространства. Лямбда-член в правой части уравнения Пуассона должен обеспечивать ускоренное расширение.

Пример 2. Еще одно релятивистское действие, но с метрикой не Лоренца, а слаборелятивистской:

$$g_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}\left(1 + \frac{2U}{c^2}, -1, -1, -1\right).$$

При этом потенциал вносится в действии под корень:

$$S = -cm\int\sqrt{c^2 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2U}\,dt - \frac{1}{8\pi\gamma}\int(\nabla U)^2 dxdt - \frac{c^2\Lambda}{8\pi\gamma}\int Udxdt.$$

Действуя так же, получаем гамильтониан

$$H = -cp_0(x, q, t) = c\sqrt{((mc)^2 + q^2)\left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)}$$

и систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}(v^i(\nabla W)\rho) = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial t} + c\sqrt{((mc)^2 + (\nabla W)^2)(1 + \frac{2U}{c^2})} = 0, \\ \Delta U = 4\pi\gamma \int \frac{m\rho(m,x,t)}{\sqrt{c^2 - (v(\nabla W))^2 + 2U}} dm - \frac{c^2\Lambda}{2} \end{cases}$$

где $v^i(q) = \frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{cq^i\sqrt{1+\frac{2U}{c^2}}}{\sqrt{(mc)^2+q^2}}$.

Получаем уравнение для определения поля точечной массы (модельное уравнение для задачи Шваршильда): $\rho(m, x, t) = \delta(x)\delta(m - M)$,

$$\Delta U = 4\pi\gamma \frac{M\delta(x)}{\sqrt{c^2+2U}} - \frac{c^2\Lambda}{2}.$$

Рассмотрим более общее уравнение

$$\Delta U = T(U)\delta(x) + \alpha, \tag{18}$$

где функция $T : R \cup \{\infty\} \to R$, $\alpha \in R$.

Решением уравнения (18) будем называть непрерывную функцию $U: R^3 \to R \cup \{\infty\}$, такую, что функция T определена в точке $U(0)$ и выполнено равенство

$$\Delta U = T(U(0))\delta(x) + \alpha.$$

Теорема. Если $T(\infty) = 0, T(x) \neq 0$ при $x \neq \infty$, то уравнение (18) не имеет сферически симметричных решений в классе $C^2(R^3 / \{0\})$.

Доказательство. Будем доказывать от противного. Пусть существует решение уравнения (18), удовлетворяющее описанным выше условиям. При $x \neq 0$ имеем $\Delta U = \alpha$. Переходя в сферические координаты, получаем

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) = \alpha, r > 0.$$

Следовательно,

$$U = \frac{\alpha r^2}{6} + \frac{c_1}{r} + c_2, r > 0.$$

Пусть $c_1 = 0$, тогда $U = \frac{\alpha r^2}{6} + c_2$ при $r > 0$ и, в силу непрерывности, $U(0) = c_2$. Правая часть уравнения (18) принимает вид $T(c_2)\delta(x) + \alpha$ и по условиям теоремы $T(c_2) \neq 0$. С другой стороны, $\Delta U = \alpha$ и при $x = 0$, противоречие.

Пусть теперь $c_1 \neq 0$, тогда в силу непрерывности $U(0) = \infty$ и $T(U(0)) = 0$ и правая часть уравнения (18) равна α при всех $x \in R^3$. С другой стороны, $\Delta U = 4\pi c_1 \delta(x) + \alpha$, снова получили противоречие.

Теорема доказана.

Здесь уместно отметить, что модель Фридмана нестационарной Вселенной послужила основанием для пересмотра решения основного вопроса философии. Это было отмечено в докладе Я.Б.Зельдовича на семинаре М.В.Келдыша в 1972 году фразой: мы вернулись к библейскому взгляду на мир. Она означает, что современные астрофизические воззрения следуют первой главе книги Бытия (Шестоднев или шесть дней творения). Академик В.В.Струминский в беседе с одним из авторов (В.В.) привел еще один довод: «Ты же понимаешь, что Бог есть. Ну да, ты же занимался вторым законом термодинамики, значит, как такой сложный мир может получиться». (См. о взглядах В.В.Струминского в [21-22]). Речь идет о фундаментальности и всеобщности закона о росте энтропии ([3]), этот закон запрещает любое усложнение, а астрофизика в яркой форме подтверждает множественное усложнение от элементарных частиц к клетке, растительному и животному миру и человеку. Наука именно так доказала, что Бог есть, в 20 веке, естественнонаучным способом. Завершены вековые усилия выдающихся философов и ученых Фомы Аквинского, Эммануила Канта, Исаака Ньютона, Карла Маркса, Леонарда Эйлера, Александра Зиновьева, Альберта Эйнштейна, Макса Планка и многих других. В США и Англии это направление активно развивается, имея специальное наименование естественнонаучное богословие, в рамках которого обсуждаются особенности решений уравнений Эйнштейна.

Уравнение Власова-Пуассона и его стационарные решения

Уравнение Власова-Пуассона весьма активно используется для описаний квантовых приборов (плазменные двигатели, токамаки, диод Ленгмюра) и может быть записано в виде [6,9-10]:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_i}{\partial t} + \left(v, \frac{\partial f_i}{\partial x}\right) - \frac{e_i}{m_i}\left(\nabla\varphi, \frac{\partial f_i}{\partial v}\right) = 0, \\ \Delta\varphi = -\sum_i 4\pi e_i \int f_i(t, v, x) dv \end{cases}. \quad (19)$$

Рассмотрим подстановку [6,9-10] (энергетическая подстановка, которая сводит систему (9) к нелинейному эллиптическому уравнению)

$$f_i(v, x) = g_i\left(\frac{m_i v^2}{2} + e_i\varphi\right).$$

Тогда первое уравнение системы (19) удовлетворяется, и мы получаем эллиптическое уравнение

$$\Delta\varphi = \psi(\varphi),$$

где $\psi(\varphi) = -\sum_i 4\pi e_i \int g_i\left(\frac{m_i v^2}{2} + e_i\varphi\right) dv.$

Если $v \in R^d$, то $\psi'(\varphi) \geq 0$ при $d \geq 2$ или если $g_i{}' \leq 0$ [9-10]. Тогда граничная задача корректна, и мы имеем также отсутствие периодических решений. Это очень важное свойство стационарных решений уравнения Власова-Пуассона именно для двумерной и трехмерной по скоростям функции распределения.

Пусть, однако, мы имеем одномерную задачу, когда потенциал $\varphi(x)$ и функция распределения зависят только от одной пространственной переменной x_i: $\varphi(x) = \Phi(x_1)$, $f(x, v) = F(x_1, v)$. В этом случае мы можем перейти к одномерной по v системе для функции

$$G(x_1, v_1) = \int F(x_1, v_1, v_2, v_3) dv_2 dv_3,$$

что полезно для численного расчета.

В этом случае существуют нетривиальные периодические по x_1 решения, которые называются волнами Бернштейна-Грина-Крускала (БГК):

$$G_1(x_1, v_1) = g_i\left(\frac{v_1^2}{2} + \varphi(x_1)\right).$$

При этом функции $g_i(E)$ не могут быть монотонно убывающими, например, максвелловскими распределениями, а должны быть, например, вида $\delta(E - E_0)$. Все это налагает значительные ограничения на поведение функций распределения, которые дают волны БГК и которые сейчас хотят получить экспериментально. Трудности здесь заключаются и в том, что среда не может быть квазинейтральной. Вопросы квазинейтральности важны и должны быть тщательно исследованы: во втором из уравнений (19) правая часть оказывается равной нулю, и требуется установить, насколько это совместимо с первым из уравнений. Много решений такого типа построено в работах [34-35]. В частности, можно предложить модель горения как решение уравнения Власова-Пуассона именно с квазинейтральной плазмой с правой частью в виде интегралов столкновений химической кинетики [3,29-30]. Тогда стационарное решение описывается вместо нелинейного уравнения (18) нелинейным функциональным

$$\psi(u) = -\sum 4\pi e_i \int g_i\left(\frac{m_i v^2}{2} + e_i u\right) dv.$$

Неравенство $\psi'(\varphi) \geq 0$ означает единственность такого решения, но в любом случае это будут постоянные по пространству потенциалы: на то плазма и квазинейтральна, когда электрические поля спрятаны внутрь Дебаевского радиуса. В принципе такие решения должны дать форму пламени, и мы получили, что стационарные решения квазинейтральной плазмы сводятся к стационарным решениям химической кинетики.

Заключение

Итак, мы получили уравнения электродинамики и гравитации в замкнутой форме из принципа наименьшего действия в форме уравнения Власова. Проясняется смысл уравнений типа Власова: это единственный пока способ получить и уравнение гравитации и уравнения электродинамики из принципа наименьшего действия, а также единственный пока способ замкнуть систему уравнений гравитации и электродинамики с помощью принципа наименьшего действия, используя функцию распределения объектов (электронов, ионов, звёзд в галактиках, галактик в супергалактиках или Вселенной) по скоростям и пространству. Соответствующие уравнения гидродинамического уровня (например, уравнения магнитной гидродинамики или гравитирующей газодинамики) также естественно получать из уравнений типа Власова гидродинамической подстановкой (пока единственный способ связи с классическим действием и для этих уравнений).

Здесь мы исследовали эти выражения в частных случаях точечной массы и космологических решений – для самых известных решений Шваршильда и Фридмана: их совпадение при вычислении для скоростей и импульсам уверенно показывает согласованность наших действий. Мы получаем автоматически классификацию различных типов записи тензора энергии-импульса (кинетическая, гидродинамическая, Гамильтон-Якобиева) и такую же классификацию уравнений Эйнштейна и Власова-Максвелла-Эйнштейна (да и всех типов уравнения Власова). Предложено уравнение Власова-Пуассона с правой частью интегралов химической кинетики как модель горения в случае квазинейтральной плазмы. Показаны особенности стационарных решений в этом случае.

Список литературы

1. Максвелл Дж. К. О динамической теории газов // Труды по кинетической теории. Пер. с англ. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2011. С. 173–230.

2. Больцман Л. Дальнейшие исследования теплового равновесия между молекулами газа // Избранные труды. М.: Наука, 1984. С. 125–189; пер. с нем.: Boltzmann L. Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen // Wien. Ber. 1872. 66. 275–370; Wissenschaftliche Abhandlungen. V. 1. Barth, Leipzig. 1909. P. 316–402.

3. Веденяпин В. В., Аджиев С. З. Энтропия по Больцману и Пуанкаре // Успехи математических наук. — 2014. — Т. 69. № 6. — С. 45–80.

4. Adzhiev S. Z., Melikhov I. V., Vedenyapin V. V. The H-theorem for the physico-chemical kinetic equations with explicit time discretization // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. — 2017. — V. 481. — P. 60–69.

5. Adzhiev S. Z., Melikhov I. V., Vedenyapin V. V. The H-theorem for the physico-chemical kinetic equations with discrete time and for their generalizations // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. — 2017. — V. 480. — P. 39–50.
6. Власов А.А. Статистические функции распределения. М.: Наука, 1966. 356 с.
7. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука. 1986.
8. Веденяпин В.В., Негматов М.А. О выводе и классификации уравнений типа Власова и МГД. Тождество Лагранжа и форма Годунова // Теоретическая и математическая физика. – 2012. Т. 170. № 3. С. 468–480.
9. Веденяпин В.В., Негматов М.-Б. А., Фимин Н.Н. Уравнения типа Власова и Лиувилля, их микроскопические, энергетические и гидродинамические следствия // Изв. РАН. Сер. матем. 2017. Т. 81. № 3. С. 45–82.
10. Веденяпин В.В., Негматов М.А. О выводе и классификации уравнений типа Власова и магнитной гидродинамики. Тождество Лагранжа, форма Годунова и критическая масса // СМФН, 2013, том 47, С. 5–17.
11. Веденяпин В.В., Воронина М.Ю., Руссков А.А. О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия. // Доклады РАН, 2020, том 495, с. 9–13.
12. Vedenyapin V.V., Fimin N.N., Chechetkin V.M. The generalized Friedman model as a self–similar solution of Vlasov–Poisson equations system // European Physical Journal Plus, 136, № 670 (2021).
13. Huanchun Ye and Morrison P. J. Action principles for the Vlasov equations // Phys Fluids B. 1992. V. 4. № 4. P. 771–777.
14. Choquet-Bruhat Y. Introduction to general relativity, black holes and cosmology. New York: Oxford, University Press. 2015.
15. Cercigniani C., Kremer G.M. The relativistic Boltzmann equation: theory and applications. Berlin: Birkhauser, 2002.
16. Rein G., Rendall A.D. Smooth static solutions of the spherically symmetric Vlasov–Einstein system // Ann. del'Inst. H. Poincarre, Physique Theorique. 1993. V. 59. P. 383–397.
17. Kandrup H.E., Morrison P.J. Hamiltonian structure of the Vlasov–Einstein system and the problem of stability for spherical relativistic star clusters // Ann. Phys. 1993. V. 225. P. 114–166
18. Pegoraro F., Califano F., Manfredi G., Morrison P.J. Theory and Applications of the Vlasov Equation. European Journal of Physics D **69**, 68 (3pp) (2015). March.
19. Okabe T., Morrison P.J., Friedrichsen III J.E., Shepley L.C. Hamiltonian Dynamics of Spatially-Homogeneous Vlasov-Einstein Systems. Physical Review D 84, 024011 (11pp) (2011).
20. Brizard A. J., Morrison P. J., Burby J. W., de Guillebon L. and Vittot M. Lifting of the Vlasov-Maxwell bracket by Lie-transform method. J. Plasma Phys. (2016), vol. 82, 905820608 c Cambridge University Press 2016. doi:10.1017/S0022377816001161
21. Академик В.В.Струминский. М., Наука, 2018.

22. Струминский В.В. Новое мировоззрение // Вестник Российской Академии Наук, 1993, т. 63, № 2, стр. 108-112.
23. Веденяпин В.В. Уравнение Власова-Максвелла-Эйнштейна // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 188. 20 с.
24. Vedenyapin V.V., Fimin N.N., Chechetkin V.M. The system of Vlasov–Maxwell–Einstein-type equations and its nonrelativistic and weak relativistic limits // International Journal of Modern Physics D, 2020. V. 29. № 1. 23 p.
25. Vedenyapin, V., Fimin, N., Chechetkin, V. The properties of Vlasov–Maxwell–Einstein equations and its applications to cosmological models // European Physical Journal Plus. 2020. № 400. 14 c.
26. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. М.: ЛКИ, 2007.
27. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1988.
28. Вейнберг С. Гравитация и космология. М.: Мир, 1975, 696 стр.
29. Аджиев С.З., Веденяпин В.В., Волков Ю.А., Мелихов И. В. Обобщенные уравнения типа Больцмана для агрегации в газе // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 12. С. 2065–2078.
30. Аджиев С.З., Веденяпин В.В., Филиппов С.С. Об Н-теореме для систем химической кинетики с непрерывным и дискретным временем и о системе уравнений нуклеосинтеза // ЖВМ и МФ. 2017. Т. 58. № 9. С. 1515–1528.
31. Orlov Yu.N., Pavlotsky I.P. BBGKY hierarchies and Vlasov’s equations in postgalilean aproximation // Physica A. 1988. V. 151. P. 318.
32. Веденяпин В. В. О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия, методе Гамильтона–Якоби и космологических решениях // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр., 504 (2022), 51–55.
33. Веденяпин В. В., Парёнкина В. И., Свирщевский С. Р. О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 62:6 (2022), 1016–1029.
34. Скубачевский А.Л. Уравнения Власова–Пуассона для двухкомпонентной плазмы в однородном магнитном поле // УМН. - 2014. - 69, №2. - С. 107-148.
35. Belyaeva Y. O. and Skubachevskii A. L. Unique solvability of the first mixed problem for the Vlasov-Poisson system in infinite cylinder // J.Mathem. Sciences, 244 (2020), 930-947.