



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 17 за 2023 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

И.Р. Хайталиев, Е.В. Шильников

Решение уравнений
конвекции-диффузии
локальным разрывным
методом Галеркина

Статья доступна по лицензии
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Хайталиев И.Р., Шильников Е.В. Решение уравнений конвекции-диффузии локальным разрывным методом Галеркина // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2023. № 17. 27 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2023-17>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2023-17>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

И.Р. Хайталиев, Е.В. Шильников

**Решение уравнений конвекции-
диффузии локальным разрывным
методом Галеркина**

Москва — 2023

Хайталиев И.Р., Шильников Е.В.

Решение уравнений конвекции-диффузии локальным разрывным методом Галеркина

В работе локальный разрывный метод Галеркина (ЛРГ) применяется к решению линейных и нелинейных задач конвекции-диффузии. Идея этого метода состоит в том, чтобы преобразовать уравнения высокого порядка в систему уравнений первого порядка, а затем применить к ней классический разрывный метод Галеркина (РГ). В качестве системы базисных функций выбрана ортогональная система полиномов Лежандра. Рассматриваются случаи как непрерывных, так и разрывных решений задачи. Исследована зависимость точности и устойчивости метода от шага пространственной сетки и количества базисных функций. Исследовано применение параллельных вычислений к алгоритму. В дальнейшем предлагается применить метод ЛРГ для решения задач моделирования течений газовых смесей.

Ключевые слова: локальный разрывный метод Галеркина, полиномы Лежандра, уравнение Бюргерса, точность решения, устойчивость алгоритма, параллельные вычисления.

Ismatullo Ramazanovich Khaytaliev, Evgeny Vladimirovich Shilnikov

Solution of convection-diffusion equations by local discontinuous Galerkin method

In the work, the local discontinuous Galerkin method (LDG) is applied to solving linear and nonlinear convection-diffusion problems. The idea of this method is to transform high-order equations into a system of first-order equations, and then apply the classical discontinuous Galerkin method (DG) to this system. An orthogonal system of Legendre polynomials is chosen as the system of basis functions. The cases of both continuous and discontinuous solutions of the problem are considered. The dependence of the accuracy and stability of the method on the step of the spatial grid and the number of basis functions is investigated. The application of parallel computing to the algorithm is investigated. In the future, it is proposed to apply the LRG method for solving the problems of modeling gas mixtures flows.

Key words: local discontinuous Galerkin method, Legendre polynomials, Burgers' equation, solution accuracy, algorithm stability, parallel calculations.

1. Введение

В настоящее время для решения задач вычислительной газовой динамики широко используется метод Галеркина с разрывными базисными функциями (РГ) [1-3]. Этот метод характеризуется высоким порядком точности на гладких решениях. Как известно, для обеспечения монотонности решения, полученного этим методом, необходимо вводить так называемые ограничители наклона, особенно если решение содержит сильные разрывы, такие как, например, ударные волны. Однако использование ограничителей может негативно сказаться на точности получаемого решения. Поэтому исследование сохранения порядка точности решения и обеспечения монотонности решения остается актуальным и в настоящее время. Вопросы влияния ограничителей на сохранение или уменьшение порядка точности и монотонности решения исследованы в [4-6]. Еще более серьезные проблемы возникают при моделировании вязких течений на основе системы уравнений Навье-Стокса, которая, в отличие от уравнений Эйлера, содержит пространственные производные второго порядка. В этом случае потоки на границах ячеек содержат производные от искомым функций. Это вызывает серьезные трудности при их аппроксимации с помощью базисных функций, имеющих разрывы на границах ячеек расчетной сетки.

В связи с этим был предложен класс методов РГ для решения дифференциальных уравнений с высшими производными, который был назван локальным разрывным методом Галеркина (ЛРГ). Идея методов ЛРГ заключается в том, чтобы преобразовать уравнения высокого порядка в систему уравнений первого порядка, а затем применить классический метод РГ к этой системе. В результате в выражениях для потоков на границах ячеек отсутствуют производные от искомым переменных. Существует мнение, что при таком подходе ограничители не нужны. Первый метод ЛРГ был разработан для решения уравнения, содержащего вторые производные [7]. Позже этот подход был обобщен на случаи уравнений более высоких порядков [8, 9]. Обычно в качестве базисных функций в каждой ячейке сетки выбираются функции базиса Тейлора $\{(x-x_c)^n, n=0,1,2,\dots\}$. Здесь x_c – центр ячейки сетки. Однако используются и другие базисные функции, например, экспоненциальные или тригонометрические [10]. Отметим, что в результате использования метода ЛРГ получается система зависящих от времени обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решается методом Рунге-Кутты. Эта система имеет простейшую форму в случае ортогональной системы базисных функций.

Как и другие явные разновидности методов конечных элементов, как, например, разрывный метод Галеркина Рунге-Кутты, ЛРГ удобен для параллельной реализации [7]. Поэтому были проведены параллельные

вычисления (ПВ) для решения задачи для квазилинейного уравнения Бюргера на подробных сетках.

Целью данной работы является исследование точности и устойчивости метода ЛРГ на примере решения линейных и нелинейных задач конвекции-диффузии. В качестве системы базисных функций выбрана ортогональная система полиномов Лежандра. Рассматриваются случаи как непрерывных, так и разрывных решений задачи. В дальнейшем предлагается применить метод ЛРГ для решения задач моделирования течений газовых смесей на основе квазигазодинамической (КГД) системы уравнений.

2. Линейное уравнение конвекции-диффузии

Освоение локального разрывного метода Галеркина на первом этапе проводится на примере решения начально-краевой задачи для линейного уравнения конвекции-диффузии:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - a \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (2.1)$$

$$u(x, 0) = F(x), \quad (2.2)$$

$$u(x_L, t) = v_L(t), \quad (2.3)$$

$$u(x_R, t) = v_R(t), \quad (2.4)$$

$$t \in (0, T), x \in (x_L, x_R). \quad (2.5)$$

Здесь $a \geq 0$, $c \geq 0$ – константы; $v_L(t)$ и $v_R(t)$ – граничные условия; $x_L = 0$, $x_R = 2\pi$, t – время; x – пространственная координата; $u(x, t)$ – искомое решение.

Преобразуем уравнение второго порядка (2.1) к системе уравнений первого порядка. Для этого введем новую переменную:

$$q(x, t) = -cu + a \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.6)$$

Тогда (2.1) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial x}. \quad (2.7)$$

Уравнения (2.6) и (2.7) образуют систему, которую мы будем решать.

Заметим, что при этом

$$q(x, t = 0) = -c \cdot F(x) + a \cdot F'(x). \quad (2.8)$$

В расчетной области $x \in (0, 2\pi)$ введем разностную сетку $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_M = 2\pi$. На отрезке $I_k : [x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0, M-1}$ сделаем замену $x = x_k + \frac{h_k}{2}(\xi + 1)$, где $h_k = x_{k+1} - x_k$. Тогда I_k отображается в отрезок $-1 \leq \xi \leq 1$, и система (2.6) – (2.7) принимает на этом отрезке следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{2}{h_k} \frac{\partial q}{\partial \xi}, \quad (2.9)$$

$$q = -cu + a \frac{2}{h_k} \frac{\partial u}{\partial \xi}. \quad (2.10)$$

Пусть $\varphi_j(\xi)$ – базис в пространстве функций, непрерывных на отрезке $[-1, 1]$. Будем искать приближенное решение системы (2.9) – (2.10) в виде проекции точного решения на линейную оболочку конечного числа первых базисных функций:

$$u^k = \sum_{j=0}^N \alpha_j^k(t) \cdot \varphi_j(\xi), \quad (2.11)$$

$$q^k = \sum_{j=0}^N \beta_j^k(t) \cdot \varphi_j(\xi). \quad (2.12)$$

Умножив каждое уравнение системы на $\varphi_i(\xi)$ и проинтегрировав его по ξ от -1 до 1 , получим систему уравнений, связывающую коэффициенты $\alpha_j^k(t)$ и $\beta_j^k(t)$.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-1}^1 u \varphi_i d\xi = \frac{2}{h_k} \int_{-1}^1 \frac{\partial q}{\partial \xi} \varphi_i d\xi, \quad (2.13)$$

$$\int_{-1}^1 q \varphi_i d\xi = \int_{-1}^1 \left(-cu + a \frac{2}{h_k} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \varphi_i d\xi. \quad (2.14)$$

Рассмотрим уравнение (2.13). Подставив в него представления (2.11) и (2.12), для левой части получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-1}^1 \left(\sum_{j=0}^N \alpha_j^k(t) \cdot \varphi_j(\xi) \right) \cdot \varphi_i d\xi &= \frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=0}^N \alpha_j^k(t) \int_{-1}^1 \varphi_j(\xi) \varphi_i(\xi) d\xi \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=0}^N \alpha_j^k(t) \cdot D_{ij}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

В правой части стоит производная функции, представленной рядом. Известно, что дифференцирование ухудшает сходимость рядов. Поэтому, чтобы избежать дифференцирования ряда (2.12), применим интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{\partial q}{\partial \xi} \varphi_i d\xi &= \left(q^k \varphi_i \right) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \sum_{j=0}^N \beta_j^k(t) \varphi_j \varphi_i' d\xi \\ &= q_+^k \varphi_i(1) - q_-^k \varphi_i(-1) - \sum_{j=0}^N \beta_j^k(t) \cdot R_{ij}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Здесь $D_{ij} = \int_{-1}^1 \varphi_i(\xi) \varphi_j(\xi) d\xi$, $R_{ij} = \int_{-1}^1 \varphi_j(\xi) \varphi_i'(\xi) d\xi$. В результате вместо уравнений (2.13) получаем следующую систему ($i = \overline{0, N}$):

$$\frac{h_k}{2} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=0}^N \alpha_j^k(t) \cdot D_{ij} = q_+^k \varphi_i(1) - q_-^k \varphi_i(-1) - \sum_{j=0}^N \beta_j^k(t) \cdot R_{ij}. \quad (2.17)$$

Проведя аналогичные преобразования с уравнениями (2.14), получим вместо них уравнения

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^N \beta_j^k(t) \cdot D_{ij} &= -c \sum_{j=0}^N \alpha_j^k(t) \cdot D_{ij} \\ &+ a \frac{2}{h_k} \left(u_+^k \varphi_i(1) - u_-^k \varphi_i(-1) - \sum_{j=0}^N \alpha_j^k(t) \cdot R_{ij} \right). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Система (2.17) – (2.18) имеет наиболее простой вид в случае ортогонального базиса. Поэтому в качестве базисных функций $\varphi_j(\xi)$ выберем ортогональную на отрезке $[-1, 1]$ систему полиномов Лежандра $P_j(\xi)$:

$$P_0 = 1, P_1 = \xi, P_{n+1}(\xi) = \frac{2n+1}{n+1} \xi \cdot P_n(\xi) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(\xi). \quad (2.19)$$

Поскольку $D_{ij} = \int_{-1}^1 P_i(\xi)P_j(\xi)d\xi = \frac{2\delta_{ij}}{2i+1}$, $P_j(1) = 1$, $P_j(-1) = (-1)^j$, получаем основные уравнения

$$\frac{h_k}{2i+1} \frac{\partial}{\partial t} \alpha_i^k(t) = q_+^k - q_-^k (-1)^i - \sum_{j=0}^N \beta_j^k(t) \cdot R_{ij}, \quad (2.20)$$

$$\beta_i^k = -c \cdot \alpha_i^k(t) + a \frac{2i+1}{h_k} \left(u_+^k - u_-^k (-1)^i - \sum_{j=0}^N \alpha_j^k(t) \cdot R_{ij} \right). \quad (2.21)$$

Для производных полиномов Лежандра можно записать рекуррентное соотношение [11]:

$$P'_{n+1}(\xi) - P'_{n-1}(\xi) = (2n+1)P_n(\xi). \quad (2.22)$$

Если перенести $P'_{n-1}(\xi)$ в правую часть уравнения, умножить обе части на $P_l(\xi)$ и проинтегрировать от -1 до 1 , то получим

$$\begin{aligned} R_{n+1,l} &= (2n+1) \int_{-1}^1 P_n(\xi)P_l(\xi)d\xi + \int_{-1}^1 P_{n-1}'(\xi)P_l(\xi)d\xi \\ &= 2\delta_{n,l} + R_{n-1,l}, l \leq n. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Для $l > n$ все $R_{n+1,l} = 0$. Учитывая, что $R_{0,l} = 0$, и полагая формально $R_{-1,l} = 0$ для всех l , мы имеем рекуррентную формулу для вычисления $R_{n,l}$.

Значения функций на границах ячеек будем вычислять следующим образом, используя представления (2.11) и (2.12):

$$\begin{aligned} u_-^k &= \frac{u^k(x_k) + u^{k-1}(x_k)}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=0}^N \alpha_j^k(t) \cdot (-1)^j + \sum_{j=0}^N \alpha_j^{k-1}(t) \right), \\ q_-^k &= \frac{q^k(x_k) + q^{k-1}(x_k)}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=0}^N \beta_j^k(t) \cdot (-1)^j + \sum_{j=0}^N \beta_j^{k-1}(t) \right). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Интегрирование системы уравнений (2.20) – (2.21) проводится методом Рунге-Кутты второго порядка. Таким образом, общий алгоритм решения задачи выглядит следующим образом:

1) Для $t=0$: вычисляем все $\alpha_i^k(0)$ и $\beta_i^k(0)$ для $k = \overline{0, M-1}$ из начальных условий (2.2) и (2.6) по формулам:

$$\int_{-1}^1 F(x_k + \frac{h_k}{2}(\xi+1))\varphi_i d\xi = \frac{2}{2i+1} \alpha_i^k, \quad (2.25)$$

$$\int_{-1}^1 (-c * F(x_k + \frac{h_k}{2}(\xi + 1)) + a * F'(x_k + \frac{h_k}{2}(\xi + 1))) \varphi_i d\xi = \frac{2}{2i+1} \beta_i^k. \quad (2.26)$$

2) Вычисляем значения q в момент времени t на внутренних границах ячеек по формулам (2.24). Значения на границах расчетной области берем из граничных условий:

$$\begin{aligned} q_-^0 &= \sum_{j=0}^N \beta_j^0(t) \cdot \varphi_j(-1), \\ q_+^{M-1} &= \sum_{j=0}^N \beta_j^{M-1}(t) \cdot \varphi_j(1). \end{aligned} \quad (2.27)$$

3) Первый этап метода Рунге-Кутты: находим значения всех коэффициентов $\tilde{\alpha}_i^k$ в момент времени $t + \tau/2$, где τ – шаг по времени:

$$\tilde{\alpha}_i^k = \alpha_i^k + \frac{\tau}{2} \frac{2i+1}{h_k} \left(q_+^k - q_-^k (-1)^i - \sum_{j=0}^N \beta_j^k(t) \cdot R_{ij} \right). \quad (2.28)$$

Пересчитываем u_-^k по формулам (2.24) с новыми значениями $\tilde{\alpha}_i^k$, а на границах – по формулам $u_-^0 = v_L(t)$, $u_+^{M-1} = v_R(t)$ для $t + \tau/2$. Теперь по формуле (2.21) можно вычислить все $\tilde{\beta}_i^k$.

$$\tilde{\beta}_i^k = -c \cdot \tilde{\alpha}_i^k + a \frac{2i+1}{h_k} \left(u_+^k - u_-^k (-1)^i - \sum_{j=0}^N \tilde{\alpha}_j^k(t) \cdot R_{ij} \right). \quad (2.29)$$

И пересчитываем q_-^k по формулам из (2.24) с новыми значениями $\tilde{\beta}_i^k$, а на границах – по формулам (2.27) для $t + \tau/2$.

Теперь у нас есть все значения u и q на границах ячеек в момент времени $t + \tau/2$ (значения с тильдой).

4) Второй этап метод Рунге-Кутты. Аналогичным образом по формулам (2.30) и (2.31) вычисляем все величины на момент времени $t + \tau$ (значения с крышкой).

$$\hat{\alpha}_i^k = \alpha_i^k + \tau \frac{2i+1}{h_k} \left(q_+^k - q_-^k (-1)^i - \sum_{j=0}^N \tilde{\beta}_j^k(t) \cdot R_{ij} \right), \quad (2.30)$$

$$\hat{\beta}_i^k = -c \cdot \hat{\alpha}_i^k + a \frac{2i+1}{h_k} \left(u_+^k - u_-^k (-1)^i - \sum_{j=0}^N \hat{\alpha}_j^k(t) \cdot R_{ij} \right). \quad (2.31)$$

5) После этого надо обновить все значения α_i^k и β_i^k , на этом цикл по времени кончается. Значения u и q уже обновились при расчетах 4).

2.1 Линейное уравнение конвекции-диффузии. Непрерывный случай

Рассмотрим случай непрерывного начального условия:

$$F(x) = \sin(x). \quad (2.32)$$

Зададим следующие граничные условия:

$$v_L(t) = v_R(t) = -e^{-at} \sin(ct). \quad (2.33)$$

Тогда наша задача имеет следующее аналитическое решение:

$$u(x,t) = e^{-at} \sin(x-ct). \quad (2.34)$$

Заметим, что при этом

$$q(x,t=0) = -c \cdot \sin(x) + a \cdot \cos(x). \quad (2.35)$$

Из (2.25) и (2.26) получаем для первых коэффициентов:

$$2\alpha_0^k = \frac{4}{h_k} \left(\sin\left(\frac{2x_k + h_k}{2}\right) \sin\left(\frac{h_k}{2}\right) \right), \quad (2.36)$$

$$\frac{2}{3}\alpha_1^k = \frac{4}{h_k^2} \cos\left(\frac{2x_k + h_k}{2}\right) \sin\left(\frac{h_k}{2}\right) - \frac{4}{h_k} \cos\left(\frac{2x_k + h_k}{2}\right) \cos\left(\frac{h_k}{2}\right), \quad (2.37)$$

$$2\beta_0^k = -4 \frac{c}{h_k} \sin\left(\frac{2x_k + h_k}{2}\right) \sin\left(\frac{h_k}{2}\right) + 4 \frac{a}{h_k} \cos\left(\frac{2x_k + h_k}{2}\right) \sin\left(\frac{h_k}{2}\right), \quad (2.38)$$

$$\frac{2}{3}\beta_1^k = c \left(-4 \cos\left(\frac{x_k}{h_k}\right) + 2 \sin(x_k) \right) - a \left(\sin\left(\frac{x_k}{h_k}\right) - 2 \cos(x_k) \right). \quad (2.39)$$

Данная задача имеет аналитическое решение (2.34), поэтому, подставляя его в (2.6), можно получить точные значения на границах:

$$q_-^0 = q_-^{M-1} = e^{-at} (c \cdot \sin(ct) + a \cdot \cos(ct)). \quad (2.40)$$

Результат расчета для $M = 100, N = 1, \tau = 5 \cdot 10^{-4}$ при параметрах $a = 1$ и $c = 1$ представлен на рис. 1. Сравнение с точным решением (2.34) проводилось в точках $x_k + h_k/2, k = \overline{0, M-1}$, в которых полученное численное решение $u_{\text{числ}} = \alpha_0^k$. Погрешность в норме C для этого случая составила $\delta = 6.2 \cdot 10^{-5}$. При увеличении шага по пространству погрешность возрастает практически квадратично, в частности: при $M = 50$ получилось $\delta = 2.48 \cdot 10^{-4}$, при $M = 25$ получилось $\delta = 9.85 \cdot 10^{-4}$. Таким образом, можно сделать вывод, что локальный разрывный метод Галеркина обеспечивает хорошую точность для задачи с непрерывным начальным условием.

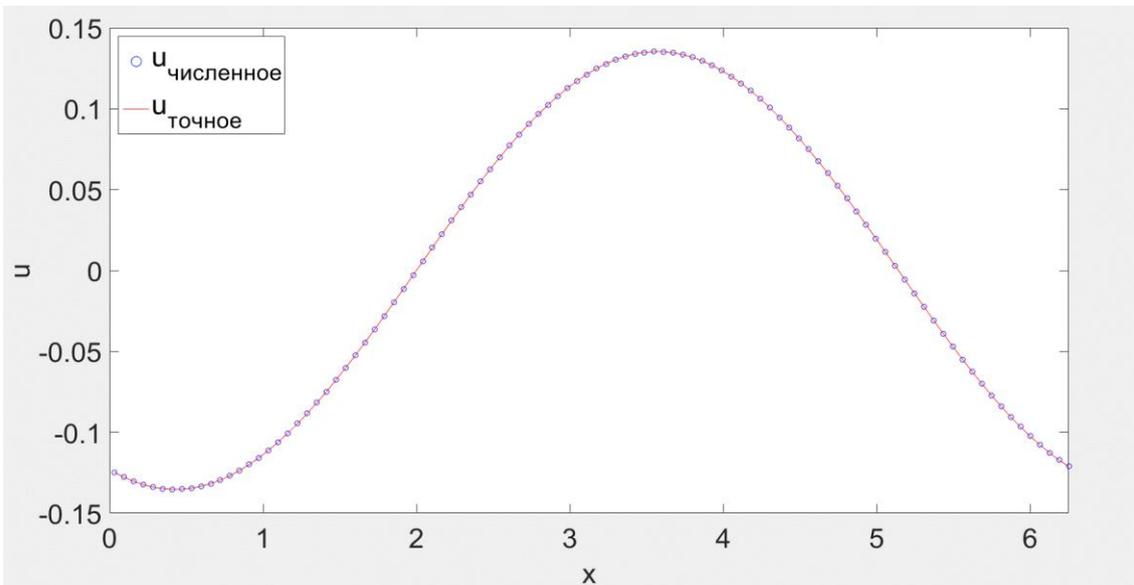


Рис. 1. Непрерывное начальное условие. Сопоставление численного и точного решения при $T = 2; M = 100; \tau = 5 \cdot 10^{-4}$

На рис. 2 представлены результаты исследования устойчивости алгоритма. Для разных значений параметра диссипации a и скорости звука c приведены зависимости в двойном логарифмическом масштабе максимально допустимого шага по времени τ от количества шагов по пространству M .

При $a = 0, c = 1$ эта зависимость, изображенная на рис. 2 (линия 1), оказалась практически линейной. Это представляется естественным, поскольку уравнение (2.1) в этом случае становится уравнением переноса. При малом параметре диссипации линейный характер зависимости нарушается, но в целом при $a = 0.01$ меняется не очень существенно. Этому случаю соответствует линия 2. При дальнейшем увеличении параметра a (параметр c при этом не меняется) максимально допустимые значения τ убывают с ростом M все

быстрее. При $a=1$ зависимость становится практически квадратичной. Этому случаю соответствует линия 3. Для сравнения на линии 4 приведены результаты расчетов для случая $c=0$, при котором уравнение (2.1) становится уравнением теплопроводности. Линии 3 и 4 практически совпадают. Отметим, что характерным условием устойчивости явных схем для параболического уравнения является как раз условие $\tau \sim h^2$. Таким образом, можно сделать вывод, что условие устойчивости используемого алгоритма подстраивается под тип уравнения. В случае превалирующей конвекции оно оказывается близким к характерному условию для гиперболических уравнений, а в случае сильной диффузии – для параболических.

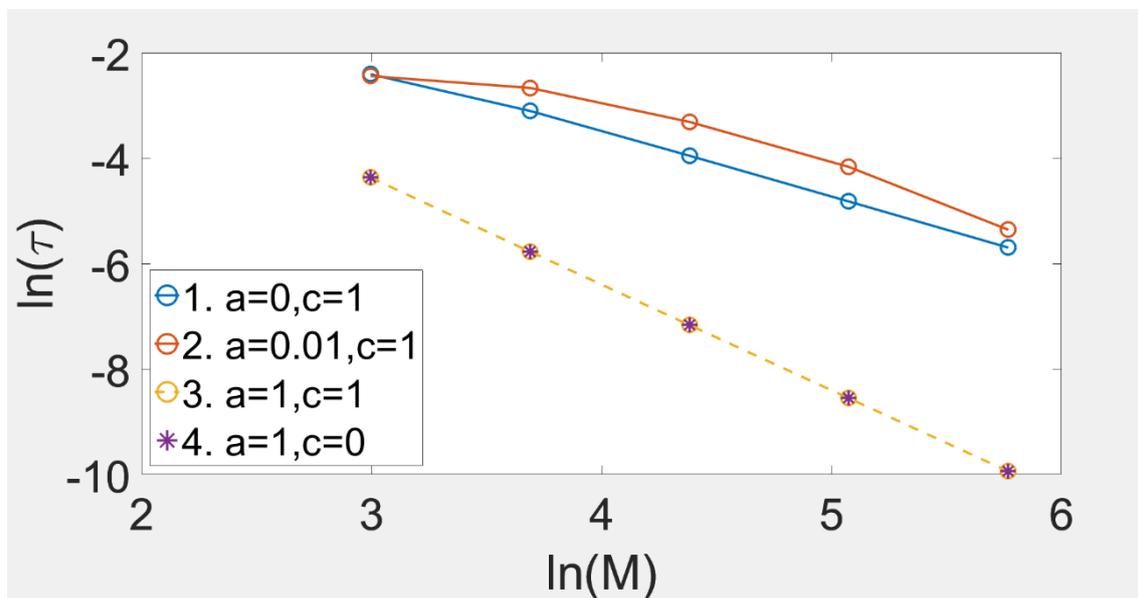


Рис. 2. Непрерывное начальное условие. Зависимость максимального τ , при котором сохраняется устойчивость, от числа ячеек M

2.2 Линейное уравнение конвекции-диффузии. Разрывной случай

Теперь рассмотрим случай разрывного начального условия:

$$F(x) = \begin{cases} 0.2, & x < 1; \\ 1, & 1 \leq x \leq 4; \\ 0.2, & x > 4. \end{cases} \quad (2.41)$$

Замена переменных $y = x - c \cdot t, \tau = t$ в уравнении (2.1) превращает его в уравнение теплопроводности. Аналитическое решение задачи Коши для этого уравнения с начальным условием (2.41) дается интегралом Пуассона. Таким образом, аналитическое решение для задачи (2.1) – (2.2) имеет следующий вид:

$$u_{ex}(x,t) = 0.2 + \frac{1-0.2}{2} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{4-x+c \cdot t}{2\sqrt{at}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{1-x+c \cdot t}{2\sqrt{at}} \right) \right). \quad (2.42)$$

Решение мы будем искать в области $0 \leq x \leq 8, 0 < t \leq T$. Тогда выражение (2.46) дает аналитическое решение начальной краевой задачи (2.1) – (2.4) при следующих граничных условиях: $v_L(t) = u_{ex}(0,t), v_R(t) = u_{ex}(8,t)$. Однако если выбрать $T = 2$, то возмущение до границы практически не доходит и граничные условия можно считать постоянными и равными: $u(0,t) = u(8,t) = 0.2$ и $q(0,t) = q(8,t) = -c \cdot 0.2$.

Из (2.30) и (2.31) получаем для первых коэффициентов (решаем для $N = 1$):

$$\alpha_0^k = u(x,0), \quad (2.43)$$

$$\alpha_1^k = 0, \quad (2.44)$$

$$\beta_0^k = q(x,0), \quad (2.45)$$

$$\beta_1^k = 0. \quad (2.46)$$

Как видно из результатов расчетов, представленных на рис. 3-5, решение уравнения конвекции-диффузии (2.1) с разрывным начальным условием сильно зависит от параметра диффузии a , в отличие от случая непрерывного начального условия, при котором отличия не столь велики. При увеличении параметра a исходно вертикальные границы возмущения все больше «размываются», и решение все больше отличается от решения уравнения переноса – уравнение (2.1) при $a = 0$. При этом форма возмущения остается симметричной относительно его середины, и скорость движения возмущения оказывается правильной. Таким образом, локальный разрывный метод Галеркина и для случая разрывного начального условия тоже показывает хорошую точность.

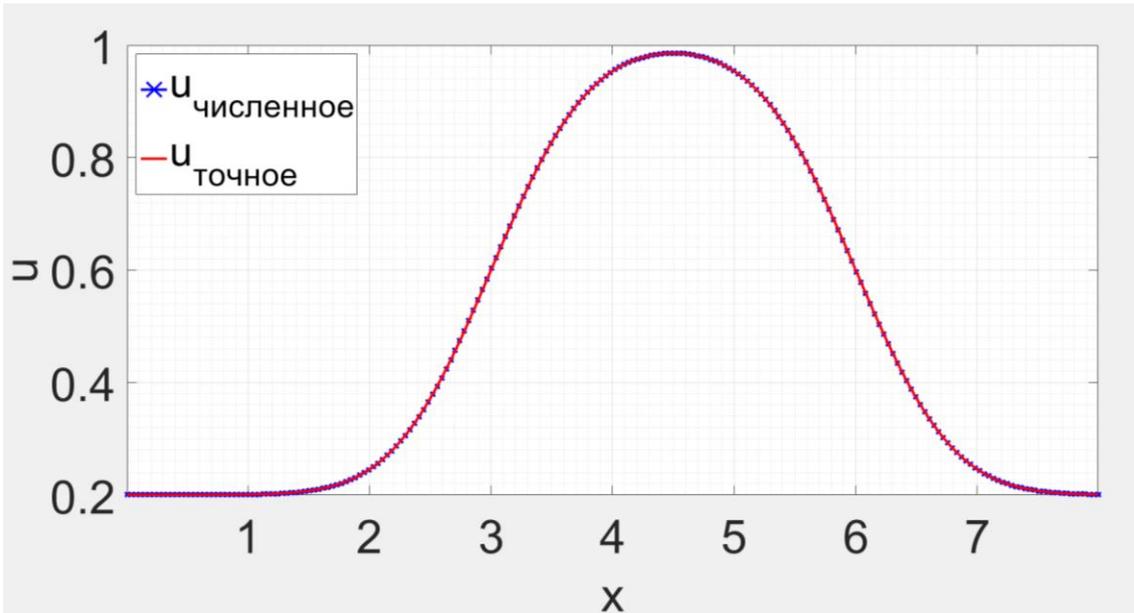


Рис. 3. Разрывное начальное условие. Сопоставление численного и точного решения при $T = 2$; $M = 640$; $\tau = 10^{-5}$; $a = 0.1$; $c = 1$

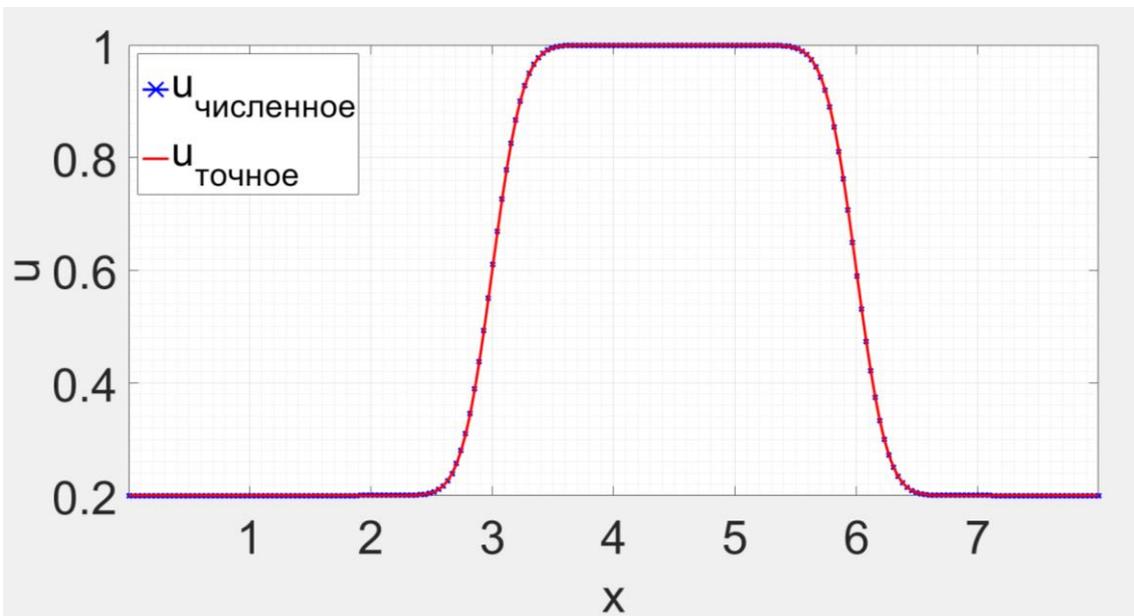


Рис. 4. Разрывное начальное условие. Сопоставление численного и точного решения при $T = 2$, $M = 640$, $\tau = 1.2 \cdot 10^{-4}$, $a = 0.01$, $c = 1$

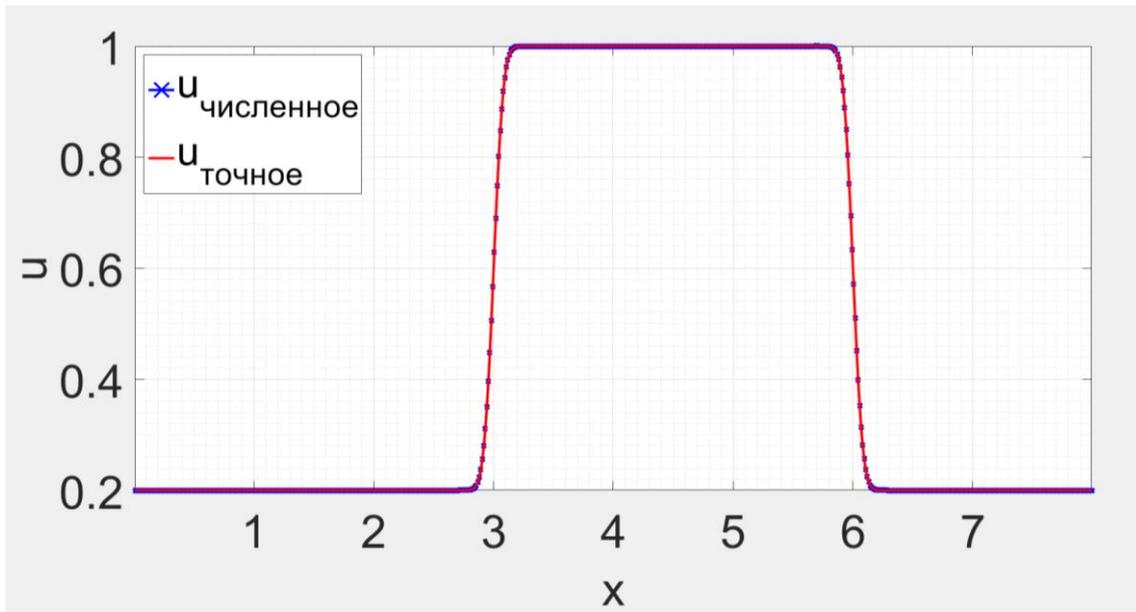


Рис. 5. Разрывное начальное условие. Сопоставление численного и точного решения при $T = 2$, $M = 640$, $\tau = 4.1 \cdot 10^{-4}$, $a = 0.001$, $c = 1$

Аналогично тому, как это было сделано в предыдущем разделе, было проведено исследование устойчивости схемы. Его результаты представлены на рис. 6. В целом условие устойчивости оказалось примерно таким же, как и в случае непрерывных начальных данных. Так, при достаточно больших значениях a зависимость максимально допустимого τ от шага по пространству практически квадратичная (линия 1). При уменьшении a зависимость становится более сложной, однако на подробных пространственных сетках она также становится почти линейной (правые части 2 и 3 линий). Абсолютные значения τ при больших M на этих рисунках заметно больше, чем на 1 линии. Немонотонное поведение графиков при малых M объясняется, по-видимому, способом определения максимального допустимого значения τ . Мы требовали отсутствия осцилляций, а на грубой сетке точность решения низкая, и осцилляции могут возникать не из-за неустойчивости, а из-за плохого качества решения. Отличить эти два случая непросто, поэтому допустимые τ при малых числах M оказываются заниженными.

На рис. 7-8 показана зависимость абсолютной ошибки (δ) от количества ячеек сетки (M) для различного количества базисных функций. Ошибка в норме C представлена на рис. 7, а в норме L_1 – на рис. 8. Видно, что ошибка уменьшается как с увеличением числа ячеек сетки, так и с увеличением числа базисных функций. Таким образом, метод ЛРГ показывает хорошую точность и для случая разрывного начального условия.

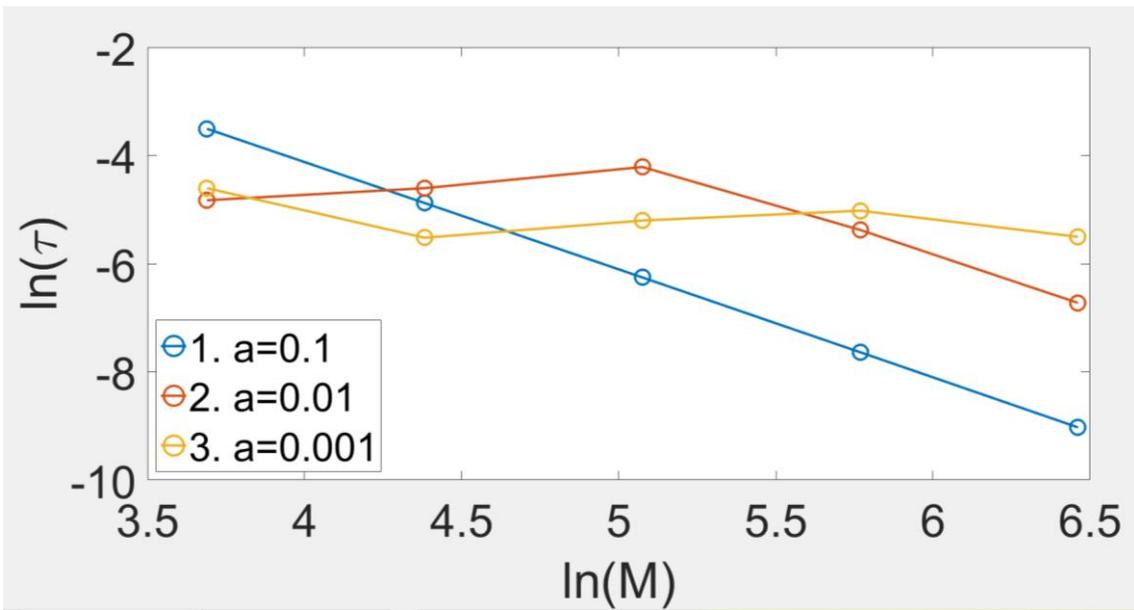


Рис. 6. Зависимость максимального τ , при котором сохраняется устойчивость, от числа ячеек M . Параметр $c = 1$

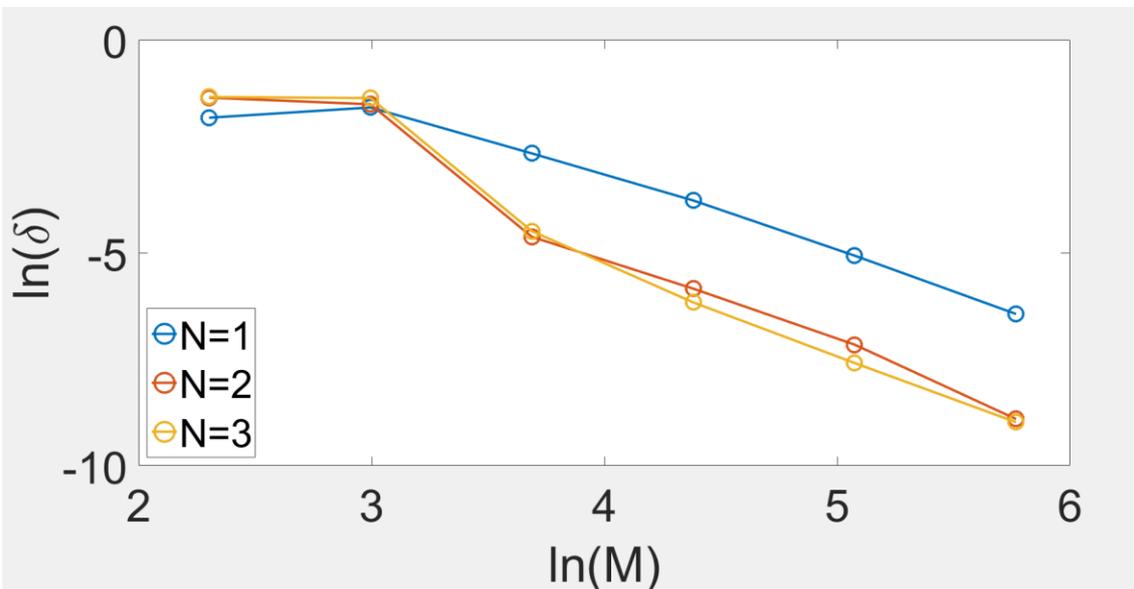


Рис. 7. Зависимость ошибки δ в норме C_1 от количества ячеек M для различного количества базисных функций N .
Параметры $T = 2.0$, $a = 0.001$, $c = 1$

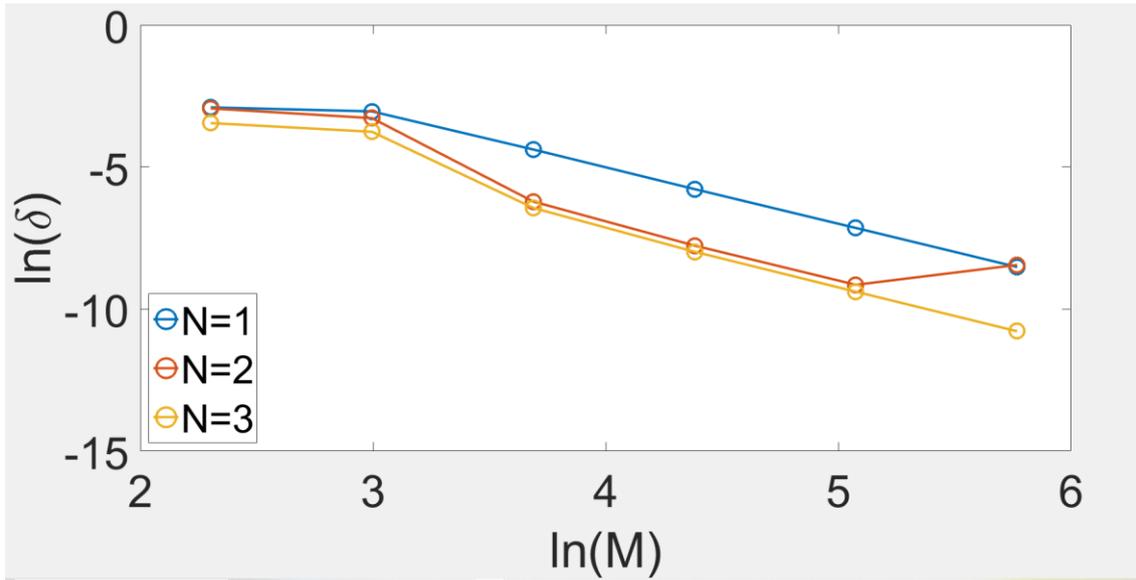


Рис. 8. Зависимость ошибки δ в норме L_1 от количества ячеек M для различного количества базисных функций N .
 Параметры $T = 2.0$, $a = 0.001$, $c = 1$

3. Квазилинейное уравнение Бюргерса

Освоение локального разрывного метода Галеркина на втором этапе проводится на примере решения начально-краевой задачи для квазилинейного уравнения Бюргерса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - a \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (3.1)$$

$$u(x, 0) = F(x), \quad (3.2)$$

$$u(-10, t) = v_L(t) = 0, \quad (3.3)$$

$$u(10, t) = v_R(t) = 0, \quad (3.4)$$

$$t \in (0, T), x \in (-10, 10). \quad (3.5)$$

Здесь $a \geq 0$ – параметр вязкости; $v_L(t)$ и $v_R(t)$ – граничные условия; t – время; x – пространственная координата; $u(x, t)$ – искомое решение. В формуле (3.2) задано начальное условие, имеющее вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-10, -1]; \\ x + 1, & x \in [-1, 0]; \\ -x + 1, & x \in (0, 1]; \\ 0, & x \in (1, 10]. \end{cases} \quad (3.6)$$

Уравнение Бюргера можно линеаризовать преобразованием Хопфа-Коула [12]. Для этого нужно сделать замену функции:

$$u = a \frac{\partial \ln w}{\partial x} = a \frac{w_x}{w}. \quad (3.7)$$

В результате этой замены уравнение (3.1) превращается в уравнение теплопроводности, чье решение записывается в виде интеграла Пуассона:

$$w(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{a\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4at}} w_0(y) dy. \quad (3.8)$$

Здесь

$$w_0(x) = w(x, 0) = e^{\frac{1}{a} \int_{-\infty}^x u_0(y) dy}. \quad (3.9)$$

Подставим решение (3.8) в выражение (3.7), получим аналитическое решение задачи Коши для уравнения (3.1).

Решение мы будем искать в области $-10 \leq x \leq 10, 0 < t \leq T$. При условии, что возмущение не доходит до границы области, полученное в результате подстановки (3.8) в (3.7) решение практически совпадает с аналитическим решением начально краевой задачи (3.1) – (3.4) при следующих граничных условиях: $v_L(t) = 0, v_R(t) = 0$ для $T < 1$ (до наступления градиентной катастрофы).

Преобразуем уравнение второго порядка (3.1) к системе уравнений первого порядка. Для этого введем новую переменную

$$q(x, t) = -\frac{u^2}{2} + a \cdot \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (3.10)$$

Дальше действуем так же, как и в Главе 2. Уравнения (2.7) и (3.10) образуют систему, которую мы будем решать.

Заметим, что при этом

$$q(x, t = 0) = -\frac{F^2(x)}{2} + a \cdot F'(x). \quad (3.11)$$

И уравнение (2.14) заменено на

$$\int_{-1}^1 q\varphi_i d\xi = \int_{-1}^1 \left(-\frac{u^2}{2} + a \cdot \frac{2}{h_k} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \varphi_i d\xi. \quad (3.12)$$

Тогда уравнение (2.18) примет вид

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^N \beta_j^k(t) \cdot D_{ij} &= Q_i^k \\ + a \frac{2}{h_k} &\left(u_+^k \varphi_i(1) - u_-^k \varphi_i(-1) - \sum_{j=0}^N \alpha_j^k(t) \cdot R_{ij} \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Здесь

$$Q_i^k = \int_{-1}^1 \left(-\frac{u^2}{2} \right) \varphi_i d\xi = \int_{-1}^1 \left(-\frac{1}{2} \left(\sum_{j=0}^N \alpha_j^k(t) \cdot \varphi_j(\xi) \right)^2 \right) \varphi_i d\xi. \quad (3.14)$$

Вместо уравнения (2.21) получим

$$\beta_i^k = Q_i^k + a \frac{2i+1}{h_k} \left(u_+^k - u_-^k (-1)^i - \sum_{j=0}^N \alpha_j^k(t) \cdot R_{ij} \right). \quad (3.15)$$

Интегрирование системы уравнений (2.20) и (3.15) по времени проводится аналогичным образом, как и в случае линейного уравнения.

Численные решения для двух различных моментов времени показаны на рис. 9 и рис. 10. Расчеты проводились при $N = 1$. На этих рисунках легенда содержит информацию об области под кривой. Сохранение этой области соответствует закону сохранения, который справедлив для уравнения Бюргера в дифференциальной форме. До момента времени $t = 1$, соответствующего моменту градиентной катастрофы, мы имеем аналитическое решение задачи. Для момента времени, показанного на рис. 9, погрешность решения составляет примерно $6.5 \cdot 10^{-4}$ в норме C .

На рис. 10 решение представлено для момента времени $t = 10$. Вертикальная линия соответствует теоретическому положению и амплитуде ударной волны, если параметр вязкости a равен нулю.

Результаты исследования устойчивости для квазилинейного случая представлены на рис. 11. Из результатов видно, что τ пропорционален пространственному шагу почти в квадратичной степени для параметра вязкости, равного единице. Для случая преобладающей конвекции (параметр вязкости равен 0,001) эта зависимость почти линейна.

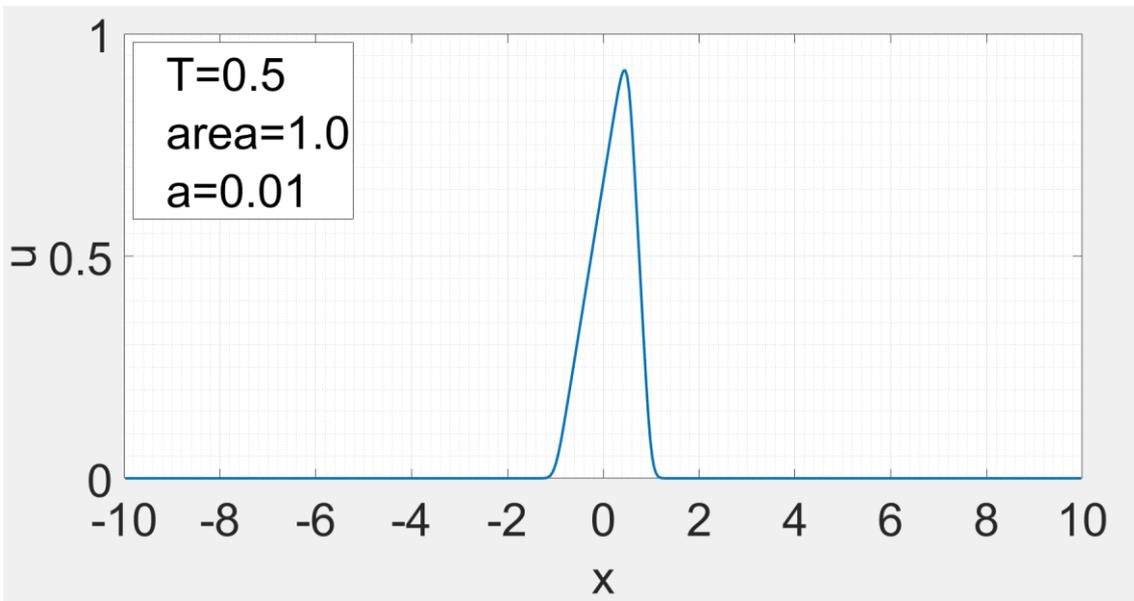


Рис. 9. Результат расчетов со следующими параметрами:
кинематическая вязкость $a = 0.01$; количество ячеек $M = 500$;
шаг по времени $\tau = 0.01$

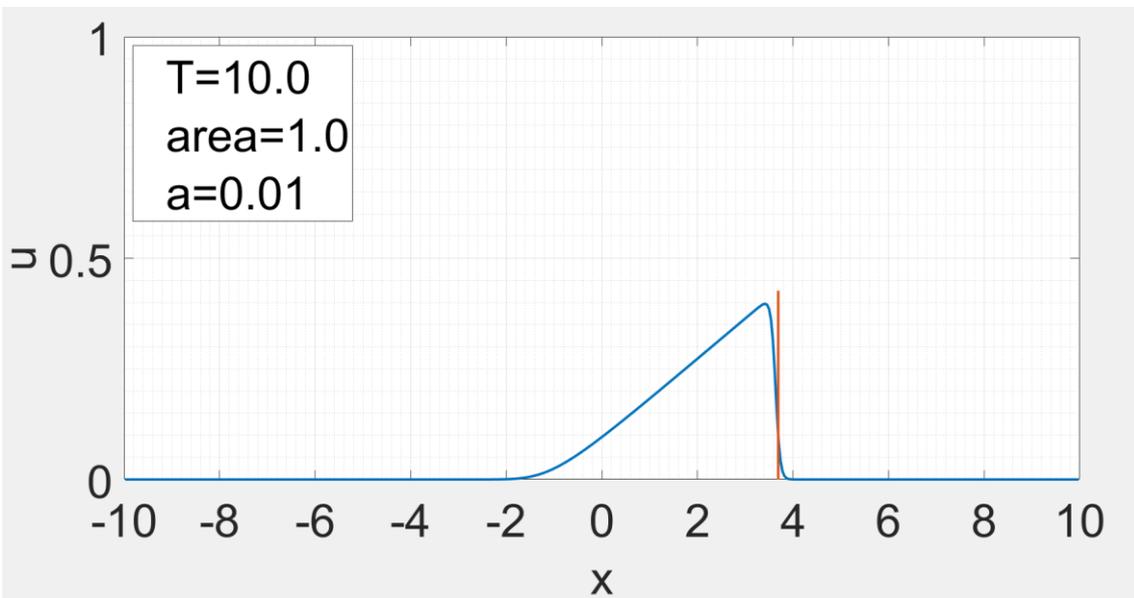


Рис. 10. Результат расчетов со следующими параметрами:
кинематическая вязкость $a = 0.01$; количество ячеек $M = 500$;
шаг по времени $\tau = 0.01$

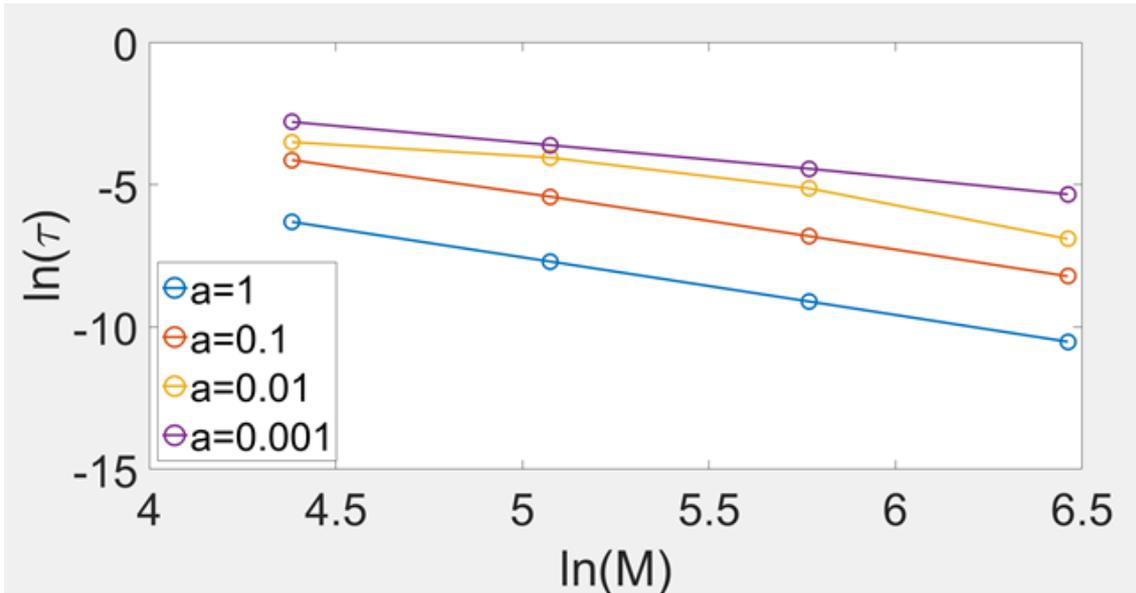


Рис. 11. Зависимость максимального τ , при котором сохраняется устойчивость, от числа ячеек M

На рис. 12 представлены решения для различных значений параметра вязкости a . На рис. 12 (а) параметр $a = 0.1$. На рис. 12 (б) параметр $a = 0.01$. На рис. 12 (в) параметр $a = 0.001$. Видно, что чем больше параметр вязкости, тем более размытым получается профиль решения.

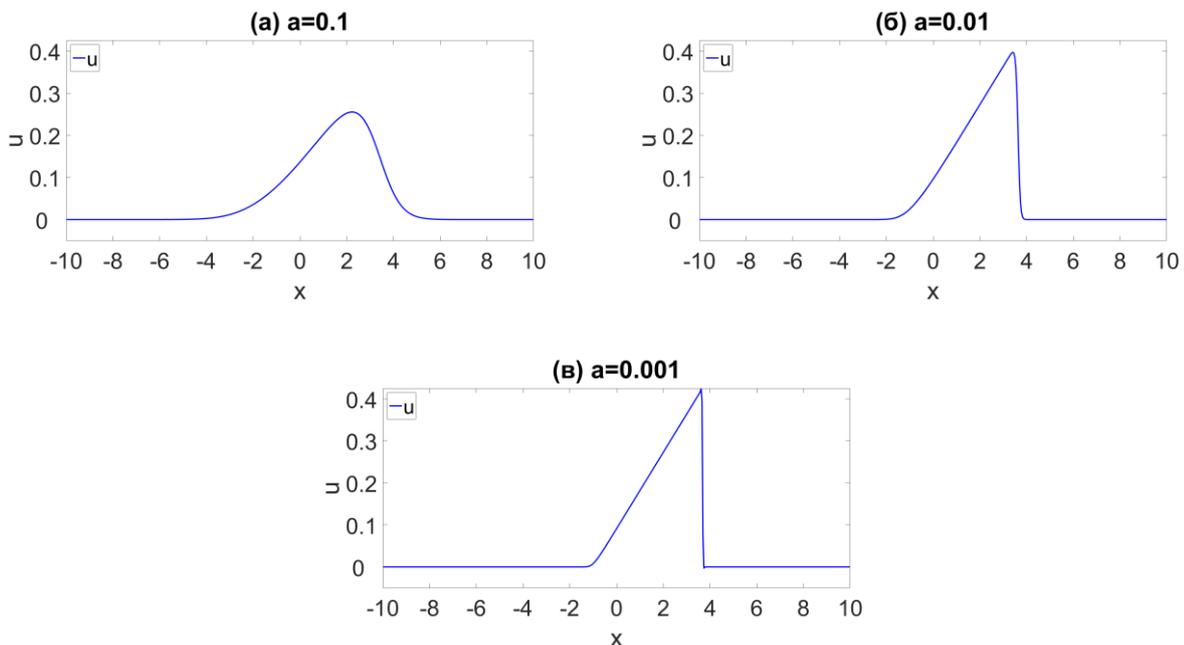


Рис. 12. Графики численного решения $N = 1$ с разными a при $M = 500, \tau = 10^{-4}, T = 10$

На рис. 13-14 показаны графики с различным количеством базисных функций. Рис. 13 с параметрами $M = 640$, $a = 0.01$, $\tau = 0.001$, $T = 0.7$. Рис. 14 с параметрами $M = 500$, $a = 0.01$, $\tau = 10^{-4}$, $T = 10$. Показано, что решения для разного числа базисных функций хорошо совпадают для обеих временных точек T .

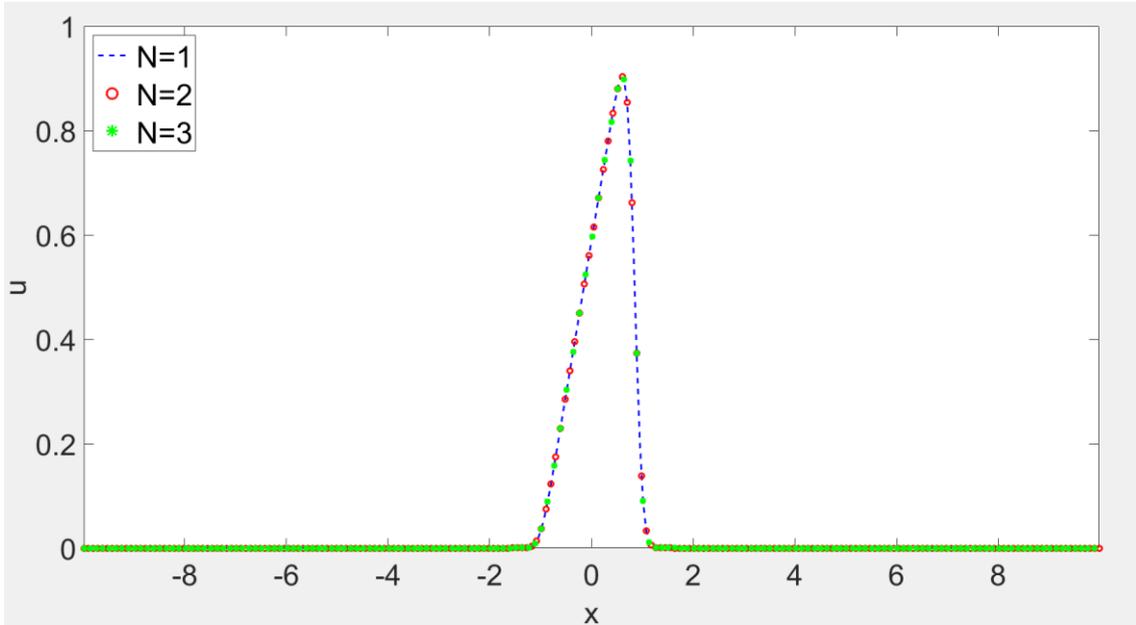


Рис. 13. Графики численного решения для различных $N = 1 \dots 3$.
Параметры: $M = 500$, $a = 0.01$, $\tau = 0.001$, $T = 0.7$

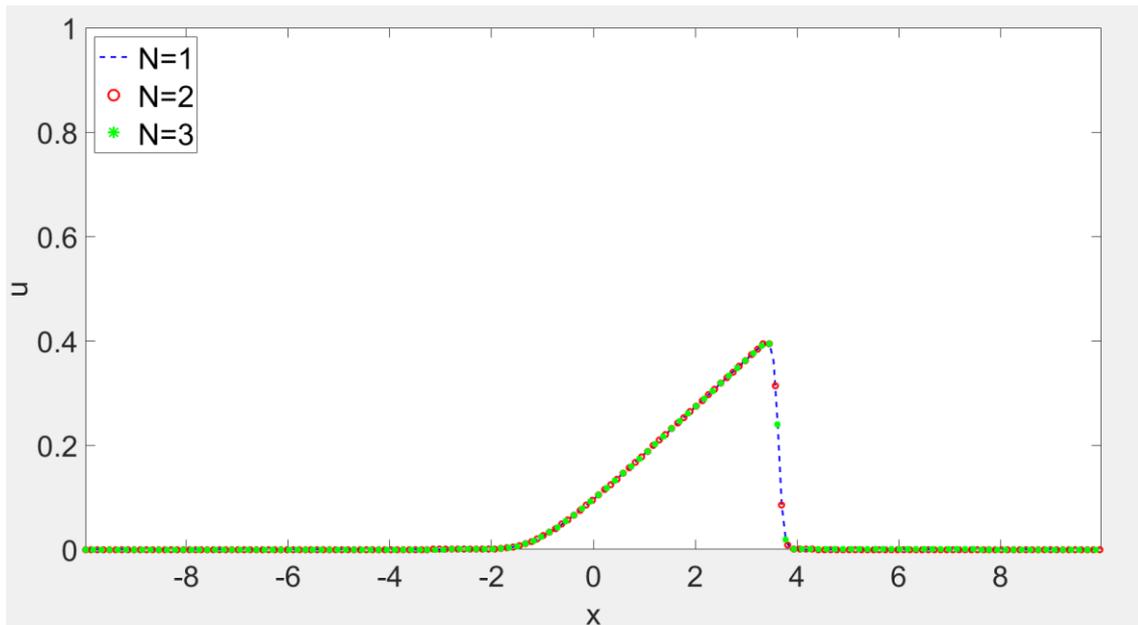


Рис. 14. Графики численного решения для различных $N = 1 \dots 3$.
Параметры: $M = 640$, $a = 0.01$, $\tau = 10^{-4}$, $T = 10$

4. Исследования применения параллельных вычислений к алгоритму

На данном этапе работы уже реализована программа на языке C с использованием ПВ. Была использована библиотека MPI, которая позволила передавать данные между процессами. Это дало значительную прибавку в скорости вычислений.

Используется учебный кластер IMM10 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. Кластер содержит 16 узлов (4 ядра, 8 потоков на каждом). Коммуникационная сеть Gigabit Ethernet. Суммарная производительность 3.2 TFlops.

Ниже на рис. 15 изображены результаты последовательной и параллельной программ. На них показано, что результаты выполнения программ совпадают.

Все расчеты производились при одних и тех же условиях:

- начальная x_a и конечная x_b точки – -10.0 и 10.0;
- кинематическая вязкость α – 0.01;
- шаг по времени dt – $2.5 \cdot 10^{-6}$;
- количество шагов по времени t_{fin} – $4 \cdot 10^6$;
- количество шагов по пространству n_x – 40000.

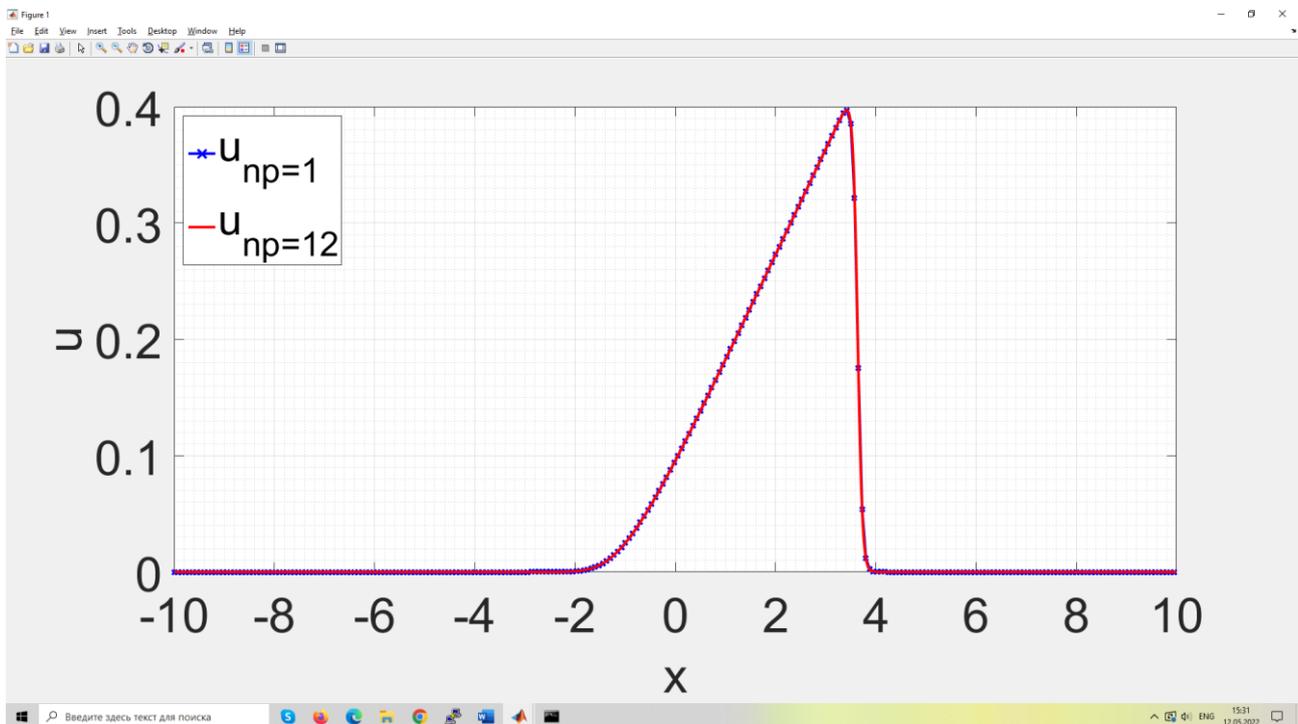


Рис. 15. Идентичность результатов расчетов программ

1. Ускорение

Ускорение параллельного алгоритма определяется величиной $S(np) = T(1)/T(np)$, где $T(1)$ – время выполнения алгоритма на одном процессоре, $T(np)$ – время выполнения алгоритма на np процессорах, np – количество процессоров в системе. На рис. 16 представлен график ускорения.

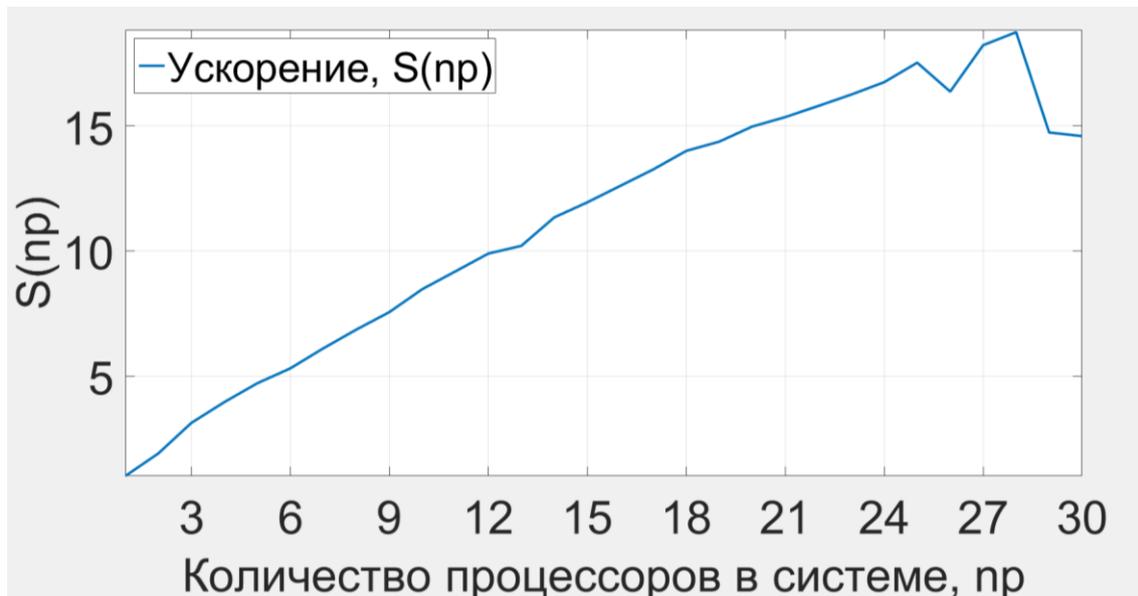


Рис. 16. График ускорения

2. Эффективность

Эффективность параллельного алгоритма определяется величиной $E(np) = S(np)/np = T(1)/(npT(np))$, где $S(np)$ – ускорение данного параллельного алгоритма, np – количество процессоров в системе. На рис. 17 представлен график эффективности.

Для программного обеспечения масштабируемость иногда называют эффективностью распараллеливания.

Выше рассматривалась сильная масштабируемость. Там не менялся размер задачи, только увеличивалось количество процессоров. Рассмотрим слабую масштабируемость – пропорционально меняются и размер задачи, и количество процессоров. Вычисляется эффективность по той же формуле. Ввиду того, что размеры задач разные, у каждой свой $T(1)$.

На рис. 18 представлен график слабой масштабируемости.

Исходя из полученных данных можно увидеть, что после распараллеливания алгоритма больше чем на 2 процессора происходит падение эффективности. Это связано с тем, что время обменов между процессами сопоставимо со временем работы программы. Можно остановиться на 26 процессоре, т.к. время выполнения стало больше, чем на предыдущем.

Также для одномерной задачи необходимо намного большее количество точек. При этом для многомерных задач это играет существенную роль.



Рис. 17. График эффективности

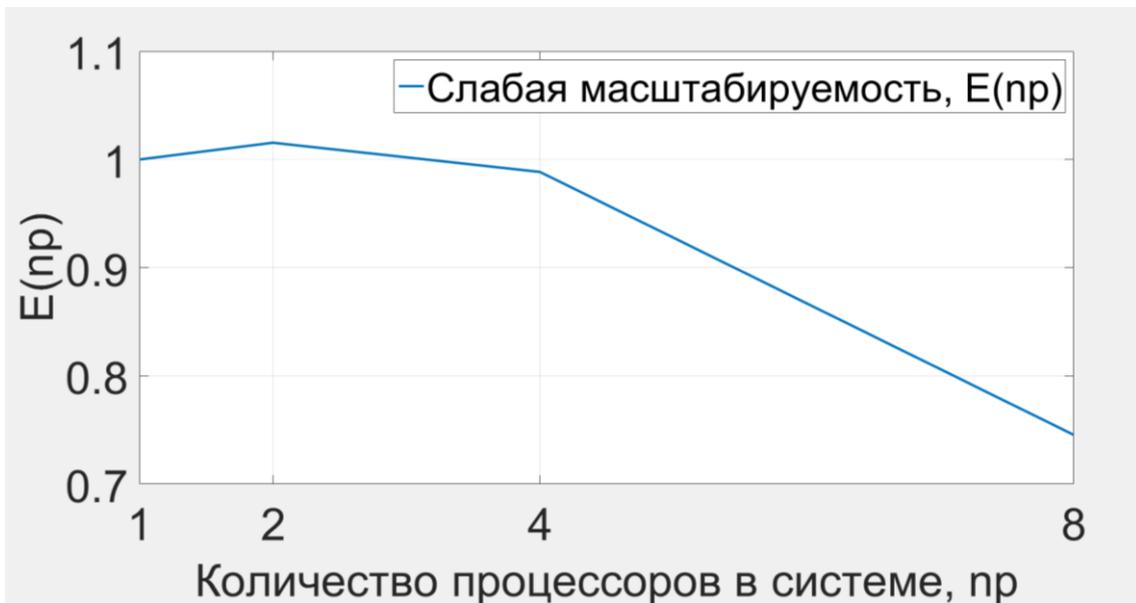


Рис. 18. График слабой масштабируемости

Заключение

Проведено исследование точности и устойчивости метода ЛРГ при решении начальных краевых задач для линейного уравнения конвекции-диффузии и квазилинейного уравнения Бюргера. Оцениваются погрешности

при изменении числа базисных функций. Показано, что как для непрерывных, так и для разрывных решений увеличение числа базисных функций улучшает качество численного решения даже на достаточно грубых сетках.

На примере решения начально-краевой задачи для квазилинейного уравнения Бюргерса проведено исследование эффективности параллельной реализации на основе технологий MPI. Проведено исследование ускорения, производительности и эффективности при разном количестве процессоров. Это показало, что на подробных сетках требуются большие затраты по времени – время сократилось, но эффективность ухудшилась после 2 процессоров.

Получили, что при определенном числе процессоров затраты на передачу коэффициентов для вычисления граничных условий становятся больше, чем время выполнение программы. Таким образом, вопрос о применимости технологий ПВ зависит от требуемой точности: если требуется высокая точность на большой сетке, то рекомендуется использовать распараллеливание.

В дальнейшем необходимы всестороннее исследование и разработка алгоритма моделирования течений газовой смеси на основе квазигазодинамической системы уравнений с использованием локального прерывистого метода Галеркина в многомерном случае. Отдельной проблемой, возникающей при этом, является построение ортогональной системы полиномов в многомерном случае, особенно на неортогональных разностных сетках.

Предполагается, что из-за сложности вычислений в работе будут использоваться технологии параллельных вычислений. Отметим, что метод ЛРГ очень удобен для параллельной реализации благодаря локальности данных. Для любого числа базисных функций значения искомых величин связаны друг с другом только в соседних ячейках разностной сетки. Это отличает метод ЛРГ от других методов построения схем высокого порядка точности, в которых закономерность возрастает с увеличением порядка разностной схемы.

Параллельные вычисления проводились на учебном кластере IMM10 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.

Список литературы

1. Cockburn B. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection – Dominated Problems, *Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations // Lecture Notes in Mathematics*. 1998. Vol. 1697. P. 151-268.
2. Cockburn B., Shu C.-W. Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods for convection dominated problems // *Journal of Scientific Computing*. 2001. Vol. 16. P. 173-261.
3. Cockburn B., Shu C.-W. Foreword for the special issue on discontinuous Galerkin method // *Journal of Scientific Computing*. 2005. Vol. 22. P. 1-3.

4. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф. Исследование влияния лимитера на порядок точности решения разрывным методом Галеркина // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 34. С. 31.
5. Ladonkina M. E., Neklyudova O. A., Tishkin V. F. Impact of different limiting functions on the order of solution obtained by RKDG // *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2013. Vol. 5. P. 346-349.
6. Ladonkina M.E., Neklyudova O.A., Tishkin V.F. Application of the RKDG method for gas dynamics problems // *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2014. Vol. 6. P. 397-407.
7. Cockburn B., Shu C.-W. The local discontinuous Galerkin method for time-dependent convection-diffusion systems // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1998. Vol. 35. P. 2440-2463.
8. Yan J., Shu C.-W. A local discontinuous Galerkin method for KdV type equations // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 2002. Vol. 40. P. 769–791.
9. Yan J., Shu C.-W. Local discontinuous Galerkin methods for partial differential equations with higher order derivatives // *Journal of Scientific Computing*. 2002. Vol. 17. P. 27-47.
10. Yuan L., Shu C.-W.: Discontinuous Galerkin method based on non-polynomial approximation spaces // *Journal of Computational Physics*. 2006. Vol. 218. P. 295-323.
11. Кошляков Н.С, Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. Учеб. пособие для мех.-мат. фак. ун-тов, М.: Высшая школа. 1970. 712 с.
12. Tai-Ping Liu Hopf-Cole transformation. *Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica (New Series)*. 2017. <http://dx.doi.org/10.21915/BIMAS.2017103>

Оглавление

1. Введение	3
2. Линейное уравнение конвекции-диффузии.....	4
2.1 Линейное уравнение конвекции-диффузии. Непрерывный случай	9
2.2 Линейное уравнение конвекции-диффузии. Разрывной случай.....	11
3. Квазилинейное уравнение Бюргерса.....	16
4. Исследования применения параллельных вычислений к алгоритму	22
Заключение.....	24
Список литературы.....	25