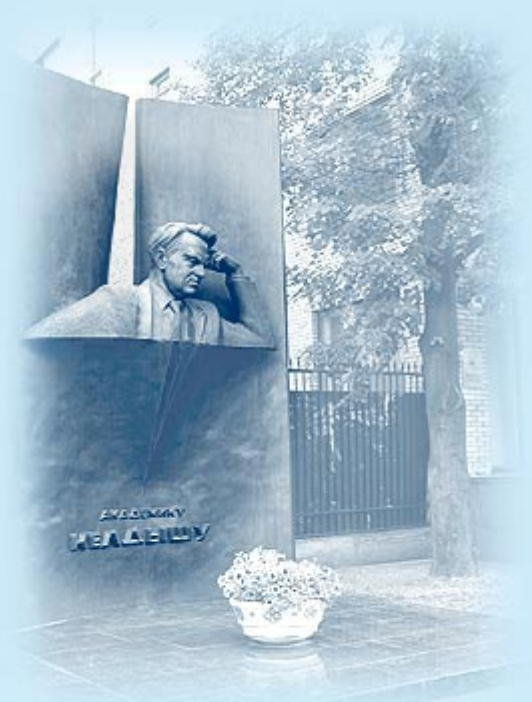




ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 10 за 2023 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Р.Ш. Кальметьев

Усреднение по Чернову
линейных
дифференциальных
уравнений

Статья доступна по лицензии
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Кальметьев Р.Ш. Усреднение по Чернову линейных дифференциальных уравнений // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2023. № 10. 12 с.
<https://doi.org/10.20948/prepr-2023-10>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2023-10>

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

Р.Ш. Кальметьев

**Усреднение по Чернову линейных
дифференциальных уравнений**

Москва — 2023

Кальметьев Р.Ш.

Усреднение по Чернову линейных дифференциальных уравнений

Рассматриваются усреднения по Чернову случайных операторнозначных функций, порождаемых решениями линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами на вещественной прямой. Получены достаточные условия для сходимости последовательности усреднений по Чернову к полугруппе, разрешающей задачу Коши для соответствующего уравнения Фоккера-Планка. Рассмотрен случай нестационарных случайных параметров.

Ключевые слова: операторнозначный случайный процесс, случайная полугруппа, итерации Фейнмана-Чернова, уравнение Фоккера-Планка.

Rustem Shainurovich Kalmetev

Chernoff Averages of Linear Differential Equations

Chernoff averages for random operator-valued functions generated by solutions of linear differential equations with variable coefficients on the real line are considered. Sufficient conditions are obtained for the convergence of the sequence of the Chernoff averages to a semigroup solving the Cauchy problem for the corresponding Fokker-Planck equation. The case of non-stationary random parameters is considered.

Key words: operator-valued random process, random semigroup, Feynman-Chernoff iterations, Fokker-Planck equation.

Оглавление

Введение	3
1. Усреднение по Чернову линейных дифференциальных уравнений.....	4
2. Вероятностные аппроксимации полугрупп.....	7
3. Винеровский и геометрический винеровский процессы, процесс Орнштейна-Уленбека	8
4. Нестационарный случай.....	10
Литература	12

Введение

В данной работе изучаются композиции независимых случайных операторнозначных функций со значениями в пространстве ограниченных операторов, действующих в $L_2(\mathbb{R})$. При этом рассматриваемые функции порождаются решениями случайных линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами на вещественной прямой. Приводятся достаточные условия для сходимости последовательности математических ожиданий итераций Фейнмана-Чернова к сильно непрерывной полугруппе, разрешающей задачу Коши для соответствующего уравнения Фоккера-Планка. Рассматриваемая постановка является частным случаем по отношению к задаче, рассматриваемой в [1], где изучаются случайные аффинные преобразования в евклидовом пространстве произвольной конечной размерности.

Также рассмотрена возможность построения сильно состоятельной статистической оценки для усредняющей полугруппы на основе конечной выборки для случайной операторнозначной функции. Отклонения значений композиций независимых случайных полугрупп от их математического ожидания и их вероятностные свойства уже рассматривались в [2], и результаты, полученные в данной работе, являются их дальнейшим развитием.

В третьем разделе данной работы показано, что усреднение с помощью эквивалентных по Чернову полугрупп в качестве частных случаев позволяет получить обыкновенный и геометрический винеровские процессы со сносом и процесс Орнштейна-Уленбека. Возможность моделирования основных (винеровского, Орнштейна-Уленбека и др.) случайных процессов с помощью пределов случайных блужданий изучалась еще в классических трудах Донскера [3] и Колмогорова [4], и в современном изложении соответствующие результаты изложены в [5]. В данной же работе рассматриваются некоммутативный аналог случайных блужданий и сходимость в пространстве сильно непрерывных операторнозначных функций.

В приложениях часто возникают задачи моделирования нестационарных случайных процессов в различных постановках [6]. По отношению к рассматриваемой в данной работе модели для случая нестационарных параметров доказано, что в случаях обыкновенного и геометрического случайных блужданий предел итераций Фейнмана-Чернова для конкретного момента времени может быть получен с помощью усреднения по маргинальной по времени мере, в отличие от общего случая не коммутирующих случайных аффинных преобразований, для которого приведены результаты численного моделирования.

Математические модели, в которых возникают композиции случайных операторнозначных функций, возникают в задачах классической и квантовой механики для систем, находящихся в случайных нестационарных полях. Усредненная динамика таких систем имеет как теоретический, так и

практический интерес с точки зрения анализа средних значений наблюдаемых. В частности, важно представлять, в какой мере усреднение решений некоторого эволюционного уравнения с нестационарными параметрами связано с решением уравнения, усредненного по этим параметрам. Использование для этой цели процедуры усреднения с помощью построения эквивалентных по Чернову полугрупп является весьма эффективным методом, который был развит в [7-9].

1. Усреднение по Чернову линейных дифференциальных уравнений

Пусть (Ω, A, μ) – некоторое вероятностное пространство, а функции $f(t)$ и $g(t)$ являются случайными непрерывными абсолютно интегрируемыми функциями на интервале $(0, T)$, то есть отображениями вида $\Omega \rightarrow CL_1(0, T)$, измеримыми относительно A при каждом $t \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим случайное линейное неоднородное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами

$$\dot{x} = f(t)x + g(t), \quad t \in (0, T). \quad (1)$$

При фиксированном $\omega \in \Omega$ общим решением уравнения (1) является семейство функций вида

$$x(t) = F(t)x_0 = e^{A(t)}x_0 + e^{A(t)} \int_0^t e^{-A(\xi)} g(\xi) d\xi, \quad t \in (0, T), \quad (2)$$

где $A(t) = \int_0^t f(\xi) d\xi$. Причем функции $x(t)$ по непрерывности могут быть продолжены на отрезок $[0, T]$.

Иными словами, уравнение (1) задает однопараметрическую сильно непрерывную операторнозначную функцию $F(t): [0, T] \rightarrow \text{Aff}(\mathbb{R})$ со значениями в группе аффинных (неоднородных линейных) преобразований вещественной прямой.

На рисунке 1 приведен пример интегральных кривых для уравнения $2\sqrt{t}\dot{x} = x + 1 - \sqrt{t}$, задаваемых как $(t, F(t)x_0)$ при различных значениях x_0 .

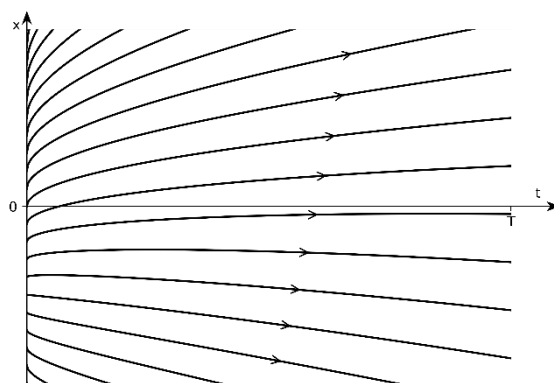


Рис. 1. Интегральные кривые $F(t)x_0$.

Заметим, что если коэффициенты $f(t)$ и $g(t)$ определены и непрерывны на всей вещественной прямой, то соответствующее неавтономное линейное уравнение будет определять (неавтономный) фазовый поток (рис. 2).

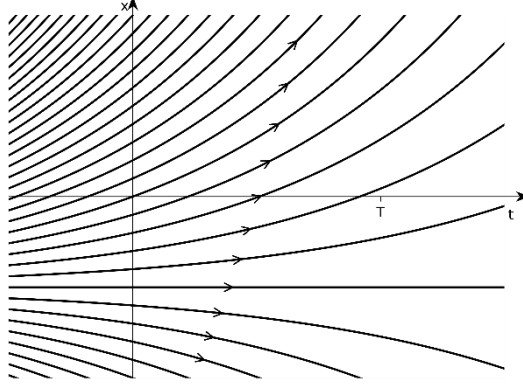


Рис. 2. Преобразование потока для уравнения $\dot{x} = x + 1$.

Таким образом, на вероятностном пространстве (Ω, A, μ) определена случайная операторнозначная функция $F(t): \Omega \rightarrow ([0, T] \rightarrow \text{Aff}(\mathbb{R}))$.

Случайная функция $F(t)$ в свою очередь порождает соответствующую случайную операторнозначную функцию $\hat{U}_F(t)$ со значениями в пространстве линейных ограниченных операторов, действующих в $L_2(\mathbb{R})$, таким образом, что выполняется равенство $\hat{U}_F(t)u(x) = u(F(t)x)$.

Пространство сильно непрерывных операторнозначных функций вида $[0, T] \rightarrow B(X)$, где $B(X)$ – пространство линейных ограниченных операторов в некотором банаховом пространстве X , будем обозначать как $C_s([0, T], X)$. В этих обозначениях случайная функция $\hat{U}_F(t)$ является отображением $\Omega \rightarrow C_s([0, T], B(L_2(\mathbb{R})))$.

Согласно теореме 1 в работе [1], при условии

$$\int_{\Omega} |e^{-A(t)}|^{1/2} d\mu(\omega) < +\infty, \quad \forall t \in [0, T] \quad (3)$$

существует математическое ожидание $\hat{U}_F(t)$:

$$\mathbb{E} \hat{U}_F(t)u = \int_{\Omega} u \circ F(t) d\mu(\omega) \in H, \quad \forall u \in L_2(\mathbb{R}), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4)$$

Для последовательности $\{F_k(t)\}, k \in \mathbb{N}$ независимых одинаково распределенных случайных функций вида (2) определены последовательности итераций Фейнмана-Чернова (рис. 3):

$$F_n\left(\frac{t}{n}\right) \circ \dots \circ F_1\left(\frac{t}{n}\right), \quad t \in [0, T], n \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

Математическое ожидание $\mathbb{E} \hat{U}_{F_n(t/n) \circ \dots \circ F_1(t/n)}$ будем называть усреднением по Чернову.

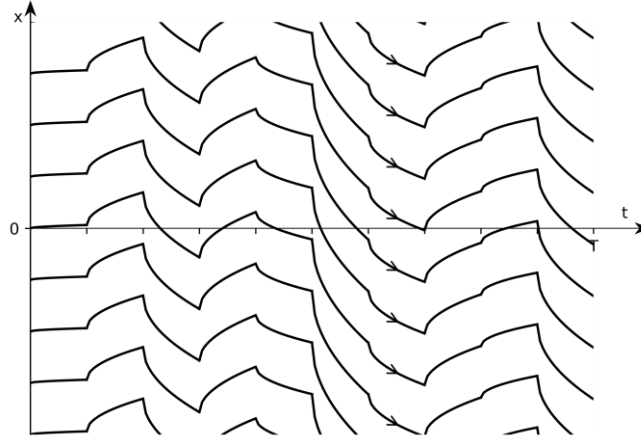


Рис. 3. Случайная реализация итераций Фейнмана-Чернова для $n = 10$.

В данной работе рассматривается случай, когда случайная функция $F(t)$ является простой, то есть конечной суммой индикаторных случайных величин, и при каждом фиксированном ω представима в виде

$$F(t)x = x \exp(at + b\sqrt{t} + o(t)) + ct + d\sqrt{t} + o(t), \quad t \in [0, T], \quad (6)$$

то есть порождается дифференциальным уравнением

$$2\sqrt{t}\dot{x} = (2a\sqrt{t} + b + o(\sqrt{t}))x + 2c\sqrt{t} + d + o(\sqrt{t}), \quad t \in (0, T), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Неавтономное векторное поле, соответствующее уравнению (1), продолжается по непрерывности на $[0, T] \times \mathbb{R}$ только при $b = d = 0$. При этом поле направлений, соответствующее этому же уравнению, всегда можно продолжить по непрерывности на $[0, T] \times \mathbb{R}$.

Частными случаями полей направлений, соответствующих дифференциальным уравнениям вида (7), являются:

- 1) постоянные поля направлений;
- 2) поля направлений, соответствующие однородному и неоднородному линейным уравнениям первого порядка с постоянным коэффициентом;
- 3) поля направлений, соответствующие уравнениям с разделяемыми переменными $2t^{1/2}\dot{x} = bx$.

Теорема 1: Пусть задана простая случайная операторнозначная функция $F : \Omega \rightarrow C_s([0, T], B(L_2(\mathbb{R})))$ вида (6), причем $\mathbb{E}d = 0$, $\mathbb{E}d^2 > 0$, $\mathbb{E}(bd)^2 < (\mathbb{E}b^2)(\mathbb{E}d^2)$ и распределение b является симметричным.

Тогда для любого $T > 0$ и любого $u_0 \in L_2(\mathbb{R})$ выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \| (\mathbb{E}\hat{U}_{F_n(t/n) \circ \dots \circ F_1(t/n)} - \hat{W}(t))u_0 \|_{L_2(\mathbb{R})} = 0, \quad (8)$$

где $\hat{W}$ – полугруппа, порождаемая решениями задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathbb{E} \left(c + ax + \frac{1}{2}bx \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbb{E} (b^2x^2 + 2bdx + d^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u|_{t=0} = u_0. \quad (9)$$

Теорема 1 является непосредственным следствием из теоремы 4.1 работы [1]. Доказательство в [1], в свою очередь, существенно использует теорему Чернова [11].

2. Вероятностные аппроксимации полугрупп

Пусть $\hat{U}_1(t), \dots, \hat{U}_k(t)$ — сильно непрерывные операторнозначные функции $[0, T] \rightarrow B(X)$, являющиеся выборкой из распределения случайной операторнозначной функции $\hat{U} : \Omega \rightarrow C_s([0, T], B(X))$, определим выборочное среднее $\bar{\hat{U}}(t)$ как:

$$\bar{\hat{U}}(t)u = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \hat{U}_i(t)u, \quad \forall u \in X. \quad (10)$$

Теорема 2: Пусть задана простая случайная операторнозначная функция $F : \Omega \rightarrow C_s([0, T], B(\mathbb{R}))$, тогда при произвольном фиксированном n почти наверное выполнено равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \|\bar{\hat{U}}_{F_n(t/n) \circ \dots \circ F_1(t/n)} - \mathbb{E} \hat{U}_{F_n(t/n) \circ \dots \circ F_1(t/n)}\| = 0. \quad (11)$$

Доказательство:

Так как F является простой случайной величиной, то $\hat{U}_{F_n(t/n) \circ \dots \circ F_1(t/n)}$ представима в виде конечной суммы:

$$\hat{U}_{F_n(t/n) \circ \dots \circ F_1(t/n)} = \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{\Omega_i}(\omega) \hat{U}_i(t), \quad (12)$$

где совокупность Ω_i является конечным разбиением Ω , а $\hat{U}_i$ — некоторые функции из $C_s([0, T], B(X))$. Тогда

$$\bar{\hat{U}}_{F_n(t/n) \circ \dots \circ F_1(t/n)} - \mathbb{E} \hat{U}_{F_n(t/n) \circ \dots \circ F_1(t/n)} = \sum_{i=1}^N (\tilde{p}_i - p_i) \hat{U}_i(t), \quad (13)$$

где $\tilde{p}_i$ являются сильно состоятельными оценками вероятностей p_i .

Цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \|\bar{\hat{U}}_{F_n(t/n) \circ \dots \circ F_1(t/n)} - \mathbb{E} \hat{U}_{F_n(t/n) \circ \dots \circ F_1(t/n)}\| &\leq \sup_{t \in [0, T]} \left(\sum_{i=1}^N (\tilde{p}_i - p_i) \|\hat{U}_i(t)\| \right) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^N (\tilde{p}_i - p_i) \sup_{t \in [0, T], i=1 \dots N} \|\hat{U}_i(t)\| \leq \alpha \sum_{i=1}^N (\tilde{p}_i - p_i) \end{aligned} \quad (14)$$

доказывает теорему. $\square$

Теорема 2.1 показывает, что $\bar{\hat{U}}_{F_n(t/n) \circ \dots \circ F_1(t/n)}$ является сильно состоятельной статистической оценкой для операторнозначной функции $\mathbb{E} \hat{U}_{F_n(t/n) \circ \dots \circ F_1(t/n)}$.

Теорема 3: Пусть задана простая случайная операторнозначная функция $F : \Omega \rightarrow C_s([0, T], B(L_2(\mathbb{R})))$ вида (6), причем $\mathbb{E}d = 0$, $\mathbb{E}d^2 > 0$, $\mathbb{E}(bd)^2 < (\mathbb{E}b^2)(\mathbb{E}d^2)$ и распределение b является симметричным.

Тогда для любого $T > 0$ и любого $u_0 \in L_2(\mathbb{R})$ выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \| (\hat{U}_{F_n(t/n) \circ \dots \circ F_1(t/n)} - \hat{W}(t)) u_0 \|_{L_2(\mathbb{R})} = 0 \quad (15)$$

почти наверное, и где $\hat{W}$ — полугруппа, порождаемая решениями задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathbb{E} \left(c + ax + \frac{1}{2} bx \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbb{E} (bx^2 + 2bdx + d^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u|_{t=0} = u_0. \quad (16)$$

Доказательство:

Заметим, что

$$\begin{aligned} \| (\hat{U}_{F_n(t/n) \circ \dots \circ F_1(t/n)} - \hat{W}(t)) u_0 \|_{L_2(\mathbb{R})} &\leq \| (\hat{U}_{F_n(t/n) \circ \dots \circ F_1(t/n)} - \mathbb{E} \hat{U}_{F_n(t/n) \circ \dots \circ F_1(t/n)}) u_0 \|_{L_2(\mathbb{R})} + \\ &+ \| (\mathbb{E} \hat{U}_{F_n(t/n) \circ \dots \circ F_1(t/n)} - \hat{W}(t)) u_0 \|_{L_2(\mathbb{R})}, \end{aligned} \quad (17)$$

и тогда теорема 2.2 непосредственно следует из теоремы 1.1 и теоремы 2.1, примененных для первого и второго слагаемых в правой части. $\square$

Теорема 2.2 обосновывает возможность при аппроксимации полугруппы $\hat{W}$ использовать не само математическое ожидание $\mathbb{E} \hat{U}_{F_n(t/n) \circ \dots \circ F_1(t/n)}$, а его статистическую сильно состоятельную оценку (10).

3. Винеровский и геометрический винеровский процессы, процесс Орнштейна-Уленбека

В случае $a=b=0$ случайное аффинное преобразование прямой вида (6) является случайным сдвигом с точностью до бесконечно малых добавок. При этом итерации Фейнмана-Чернова (5) при действии на элемент $\mathbb{R}$ порождают обыкновенное случайное блуждание в $\mathbb{R}$. А предел по распределению таких итерации в случае $\mathbb{E}c=0$ является стандартным броуновским движением, также называемым винеровским процессом (рис. 4).

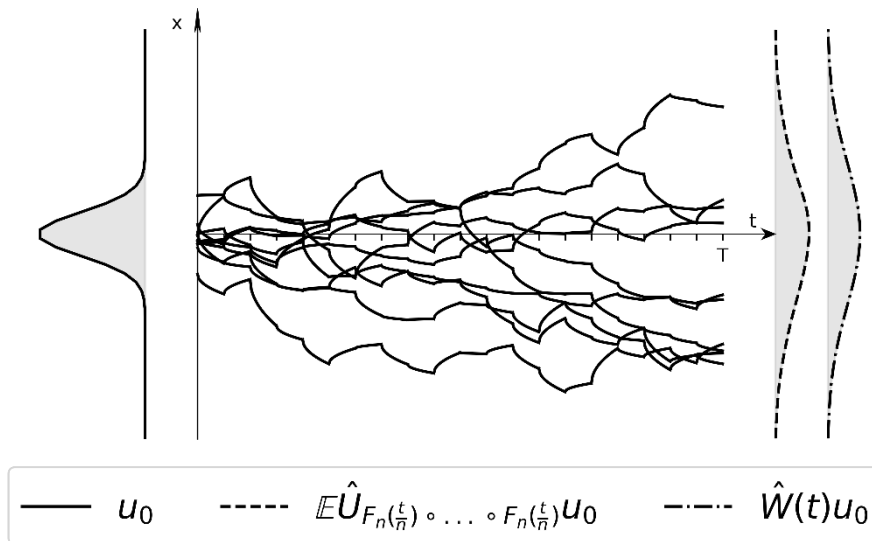


Рис. 4. Аппроксимация винеровского процесса итерациями Фейнмана-Чернова.

Следствие 1: Пусть задана простая случайная операторнозначная функция $F : \Omega \rightarrow C_s([0, T], B(L_2(\mathbb{R})))$ вида

$$F(t)x = x + ct + d\sqrt{t} + o(t), \quad t \in [0, T], \quad (18)$$

где c и d — совместно распределенные вещественные простые случайные величины на вероятностном пространстве (Ω, A, μ) , причем $\mathbb{E}c = 0$ и $\mathbb{E}d^2 > 0$.

Тогда для любого $T > 0$ и любого $u_0 \in L_2(\mathbb{R})$ выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \| (\mathbb{E} \hat{U}_{F_n(t/n) \circ \dots \circ F_1(t/n)} - \hat{W}(t)) u_0 \|_{L_2(\mathbb{R})} = 0, \quad (19)$$

где $\hat{W}$ — полугруппа, порождаемая решением задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathbb{E}c \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbb{E}d^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u|_{t=0} = u_0. \quad (20)$$

В случае $c = d = 0$ случайное аффинное преобразование прямой становится линейным и является просто умножением на число. При этом итерации Фейнмана-Чернова (5) при действии на элемент $\mathbb{R}$ порождают геометрическое случайное блуждание в $\mathbb{R}$. А предел по распределению таких итерации является геометрическим винеровским процессом со сносом.

Следствие 2: Пусть задана случайная операторнозначная функция $F : \Omega \rightarrow C_s([0, T], B(L_2(\mathbb{R})))$ вида

$$F(t)x = xe^{at+b\sqrt{t}+o(t)}, \quad t \in [0, T], \quad (21)$$

причем распределение b является симметричным, $\mathbb{E}b^2 > 0$.

Тогда для любого $T > 0$ и любого $u_0 \in L_2(\mathbb{R}_+)$ выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \| (\mathbb{E} \hat{U}_{F_n(t/n) \circ \dots \circ F_1(t/n)} - \hat{W}(t)) u_0 \|_{L_2(\mathbb{R}_+)} = 0, \quad (22)$$

где $\hat{W}$ — полугруппа, порождаемая решением задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathbb{E} \left(a + \frac{b}{2} \right) x \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbb{E}b^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u|_{t=0} = u_0. \quad (23)$$

В случае $b = c = 0$ предел по распределению итерации Фейнмана-Чернова (5) является процессом Орнштейна-Уленбека.

Следствие 3: Пусть задана случайная операторнозначная функция $F : \Omega \rightarrow C_s([0, T], B(L_2(\mathbb{R})))$ вида

$$F(t)x = xe^{at+o(t)} + d\sqrt{t} + o(t), \quad t \in [0, T], \quad (24)$$

где $\mathbb{E}d = 0$.

Тогда для любого $T > 0$ и любого $u_0 \in L_2(\mathbb{R})$ выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \| (\mathbb{E} \hat{U}_{F_n(t/n) \circ \dots \circ F_1(t/n)} - \hat{W}(t)) u_0 \|_{L_2(\mathbb{R})} = 0, \quad (25)$$

где $\hat{W}$ — полугруппа, порождаемая решением задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathbb{E}ax \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbb{E}d^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u|_{t=0} = u_0. \quad (26)$$

4. Нестационарный случай

Рассмотрим случай, когда мера μ_t распределения функции $F(t)$ не является стационарной, а меняется со временем. Маргинальную по t меру обозначим за μ . В этом контексте возникает вопрос, как связаны пределы последовательностей итераций Фейнмана-Чернова с нестационарными параметрами, генерируемыми мерой μ_t , и со стационарными параметрами, генерируемыми мерой μ .

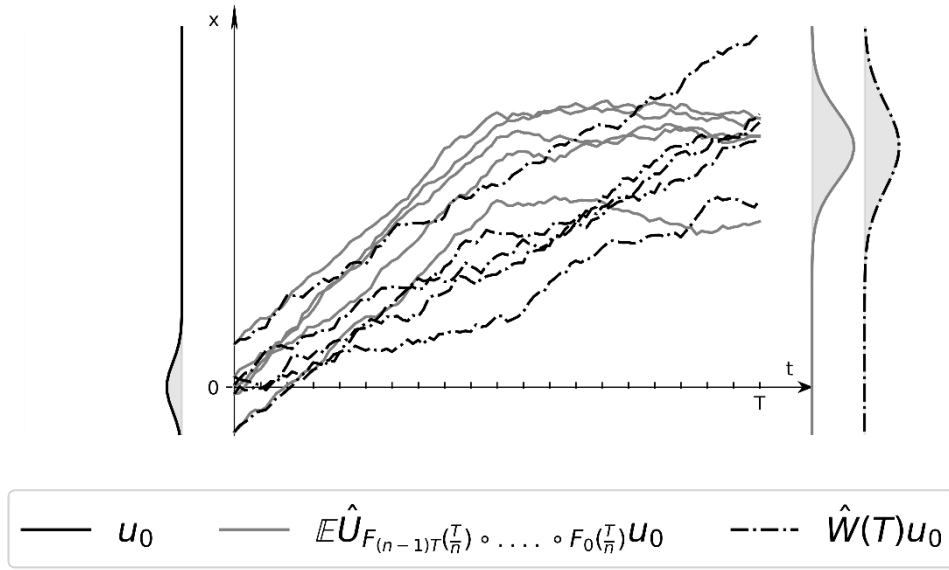


Рис. 5. Линейное случайное блуждание с нестационарным параметром сноса.

Теорема 4: Пусть задано семейство $\{F_\tau\}, \tau \in [0, T]$ простых случайных операторнозначных функций таких, что для каждого τ функция F_τ , параметры которой определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mu_\tau)$, удовлетворяет условиям следствия 4.1.

Тогда для любого $u_0 \in L_2(\mathbb{R})$ выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| (\mathbb{E} \hat{U}_{F_{(n-1)T}(T/n) \circ \dots \circ F_0(T/n)} - \hat{W}(T)) u_0 \|_{L_2(\mathbb{R})} = 0, \quad (27)$$

где $\hat{W}$ — полугруппа, порождаемая решением задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathbb{E}_\mu c \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbb{E}_\mu d^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u|_{t=0} = u_0. \quad (28)$$

Доказательство:

Определим случайную операторнозначную функцию

$$F(t)x = x + ct + d\sqrt{t} + o(t), \quad t \in [0, T], \quad (29)$$

у которой (c, d) распределены с маргинальной по τ мерой μ , и соответствующую последовательность независимых $\{G_k(t)\}, k \in \mathbb{N}$.

В условиях теоремы $F_{(n-1)T}(T/n) \circ \dots \circ F_0(T/n)x$ и $G_n(T/n) \circ \dots \circ G_1(T/n)x$ являются суммами независимых случайных величин, удовлетворяющих

условиям центральной предельной теоремы Ляпунова и поэтому сходятся в пределе $n \rightarrow \infty$ по распределению к $\mathcal{N}(\mathbb{E}_\mu cT, \mathbb{E}_\mu d^2T)$. Тогда для любого $u_0 \in L_2(\mathbb{R})$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\mathbb{E}\hat{U}_{F_{(n-1)T}(T/n) \circ \dots \circ F_0(T/n)} - \mathbb{E}\hat{U}_{G_n(T/n) \circ \dots \circ G_1(T/n)})u_0\|_{L_2(\mathbb{R})} = 0. \quad (30)$$

Применение следствия 3.1 для $G(t)$ и неравенства треугольника доказывает требуемое утверждение. $\square$

Аналогичным образом доказывается следующее утверждение

Теорема 5: Пусть задано семейство $\{F_\tau\}, \tau \in [0, T]$ простых случайных операторнозначных функций таких, что для каждого τ функция F_τ , параметры которой определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mu_\tau)$, удовлетворяет условиям следствия 3.2.

Тогда для любого $u_0 \in L_2(\mathbb{R}_+)$ выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\mathbb{E}\hat{U}_{F_{(n-1)T}(T/n) \circ \dots \circ F_0(T/n)} - \hat{W}(T))u_0\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} = 0, \quad (31)$$

где $\hat{W}$ — полугруппа, порождаемая решением задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\mathbb{E}_\mu a_1 x + \frac{1}{2} \mathbb{E}_\mu a_2^2 x^2 \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbb{E}_\mu a_2^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u|_{t=0} = u_0. \quad (32)$$

Аналогичное утверждение для общего случая нестационарного распределения функции $F(t)$, удовлетворяющего условиям Теоремы 1, оказывается неверным из-за некоммутативности аффинных преобразований и может быть проверено с помощью численного моделирования (рис. 6).

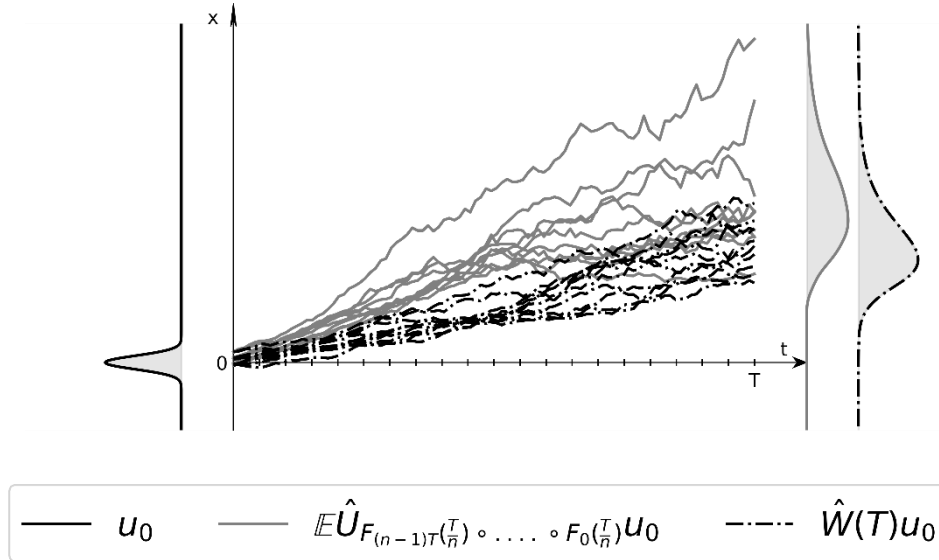


Рис. 6. Аффинное случайное блуждание с нестационарным параметром линейного сноса.

Литература

1. *Кальметьев Р.Ш., Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж.* Усреднение случайных аффинных преобразований аргумента функций (готовится к публикации).
2. *Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г.* Формулы Фейнмана и закон больших чисел для случайных однопараметрических полугрупп // Труды МИАН. 2019. Т. 306. С. 210-226. <https://doi.org/10.4213/tm400>
3. *Donsker M.D.* Justification and extension of Doob's heuristic approach to the Kolmogorov–Smirnov theorems // *Annals of Mathematical Statistics*, 1952, 23 (2): 277–281. <https://doi.org/10.1214/aoms/1177729445>
4. *Kolmogorov A.N.* On Skorokhod convergence // *Theory Probab. Appl.*, 1956 1, 215–222. <https://doi.org/10.1137/1101017>
5. *Dudley R.M.* Uniform Central Limit Theorems. Cambridge University Press, 1999. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511665622>
6. *Орлов Ю.Н., Осминин К.П.* Нестационарные временные ряды. М.: УРСС, 2011.
7. *Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г.* Формулы Фейнмана как метод усреднения случайных гамильтонианов // Тр. МИАН. 2014. Т. 285. С. 232–243. <https://doi.org/10.1134/S0371968514020150>
8. *Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г.* Неограниченные случайные операторы и формулы Фейнмана // Изв. РАН. Сер. матем. 2016. Т. 80. № 6. С. 141-172. <https://doi.org/10.1070/IM8402>
9. *Гоф Дж., Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г.* Рандомизированное квантование гамильтоновых систем// Доклады РАН. 2021. Т. 498, № 1. С. 31-36. <https://doi.org/10.31857/S2686954321030085>
10. *Кальметьев Р.Ш., Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж.* Итерации Чернова как метод усреднения случайных аффинных преобразований // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 62:6 (2022), 1030–1041. <https://doi.org/10.31857/S0044466922060114>
11. *Chernoff P.* Note on product formulas for operator semigroups // *J. Funct. Anal.* 1968. V. 2. № 2. P. 238–242. [https://doi.org/10.1016/0022-1236\(68\)90020-7](https://doi.org/10.1016/0022-1236(68)90020-7)