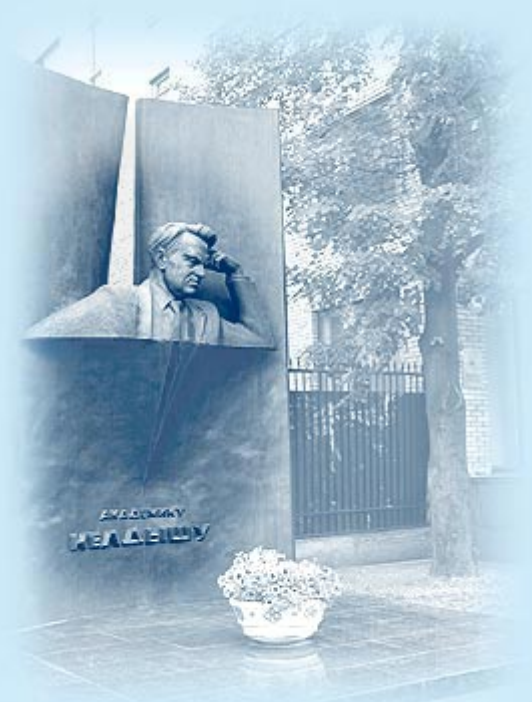




ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

П.С. Аронов, А.С. Родин

Сравнение эффективности
методов решения систем
линейных уравнений в
задаче моделирования
контактного взаимодействия
элементов твэла в
термоупругой постановке

Статья доступна по лицензии
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Аронов П.С., Родин А.С. Сравнение эффективности методов решения систем линейных уравнений в задаче моделирования контактного взаимодействия элементов твэла в термоупругой постановке // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2022. № 55. 25 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2022-55>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2022-55>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. Келдыша
Российской академии наук**

П. С. Аронов, А. С. Родин

**Сравнение эффективности методов решения систем
линейных уравнений в задаче моделирования
контактного взаимодействия элементов твэла
в термоупругой постановке**

Москва — 2022

Аронов П. С., Родин А. С.

Сравнение эффективности методов решения систем линейных уравнений в задаче моделирования контактного взаимодействия элементов топлива в термоупругой постановке

Рассмотрены различные алгоритмы решения систем линейных алгебраических уравнений, возникающих при моделировании контактного взаимодействия термоупругих тел с изменяющейся конфигурацией контактной поверхности. Представлены реализации модифицированных итерационных методов, метода Узавы, а также алгоритмов, основанных на использовании метода Гаусса и обобщенного метода минимальных невязок (GMRES) с двумя вариантами итерационного уточнения, позволяющих учитывать выход из контакта отдельных участков контактной границы. Осуществлено сравнение эффективности представленных алгоритмов применительно к задаче, моделирующей термомеханические процессы в участке тепловыделяющего элемента, включающем в себя до 100 топливных таблеток.

Ключевые слова: контактная задача теории упругости, метод конечных элементов, mortar-метод, модифицированный метод верхней релаксации, метод Узавы, тепловыделяющий элемент.

Aronov P. S., Rodin A. S.

Comparison of the effectiveness of methods for solving systems of linear equations in the problem of modeling the contact interaction of fuel elements in a thermoelastic formulation

Various algorithms for solving systems of linear algebraic equations that arise when modeling problems of contact interaction of thermoelastic bodies with a changing configuration of the contact surface are considered. The implementations of modified iterative methods, the Uzawa method, as well as algorithms based on the use of the Gauss method and the generalized method of minimal residuals (GMRES) with two iterative refinement options allowing for the exit from contact of individual sections of the contact boundary are presented. The efficiency of the presented algorithms is compared in relation to a problem simulating thermomechanical processes in a section of a fuel element that includes up to 100 fuel pellets.

Key words: contact problem of the elasticity theory, finite element method, mortar-method, modified method of over relaxation, Uzawa method, fuel element.

1. Введение

При моделировании напряженно-деформированного состояния тепловыделяющего элемента (далее — твэл) ядерного реактора заранее неизвестно, какие участки контактных поверхностей топливных таблеток и оболочки будут участвовать в контакте. Поэтому актуальной является проблема создания эффективных алгоритмов для численного решения контактных задач с изменяющейся конфигурацией контактной поверхности. Численное решение подобных задач осуществляется с помощью различных алгоритмов, среди которых можно выделить метод декомпозиции области [1], метод штрафа [2], различные варианты метода множителей Лагранжа [3], в частности mortar-метод [4, 5], основанный на построении достаточно подробной вспомогательной сетки для определения множителей Лагранжа. Данная работа является продолжением серии публикаций, посвященных моделированию контактного взаимодействия элементов твэла: в [6] представлены результаты применения предложенных алгоритмов к демонстрационной задаче, моделирующей термомеханические процессы в участке тепловыделяющего элемента, включающем в себя от 2 до 10 топливных таблеток, с учетом ползучести, а в [7] осуществлено сравнение различных методов решения систем линейных уравнений, возникающих в задаче, моделирующей термомеханические процессы в участке тепловыделяющего элемента, включающем в себя две таблетки и фрагмент оболочки.

В работе приведена постановка задачи контактного взаимодействия элементов твэла и представлены алгоритмы численного решения подобных задач с учетом изменения конфигурации контактных поверхностей. Для учета контактного взаимодействия тел использован mortar-метод. Для решения возникающей в ходе дискретизации методом конечных элементов плохо обусловленной системы линейных уравнений использованы несколько алгоритмов: модифицированный метод симметричной последовательной верхней релаксации (MSSOR), модифицированный метод верхней релаксации (MSOR), модифицированный метод Якоби (MJOR), метод Узавы, а также два варианта метода Гаусса и обобщенный метод минимальных невязок (GMRES) с итерационным уточнением конфигурации контактных поверхностей. Предложенные алгоритмы применены к задаче, моделирующей некоторые процессы в тепловыделяющем элементе (твэле), который работает в режиме постоянной мощности тепловыделения.

Авторы выражают глубокую благодарность Михаилу Павловичу Галанину за помощь в постановке задачи и обсуждении методов ее решения.

2. Математическая постановка задачи

Рассмотрим осесимметричную задачу, моделирующую термомеханические процессы, происходящие в твэле, который имеет следующую конструкцию:

внутри цилиндрической оболочки G_N расположен столб из $N - 1$ поставленных друг на друга одинаковых цилиндрических таблеток $G_1, \dots, G_{N-1}$, имеющих внутреннее отверстие и фаски на обоих торцах. На рис. 1 показана область моделирования, соответствующая половине продольного сечения участка твэла. Введем следующие обозначения для поверхностей тел: S_1 — участок поверхности, на котором поставлено граничное условие 1-го рода для нормальной компоненты перемещения, S_2 — внутренняя поверхность таблеток, S_3 — верхний торец верхней таблетки, S_4 — внешняя поверхность таблеток, S_5 — внутренняя поверхность оболочки, S_6 — внешняя поверхность оболочки.

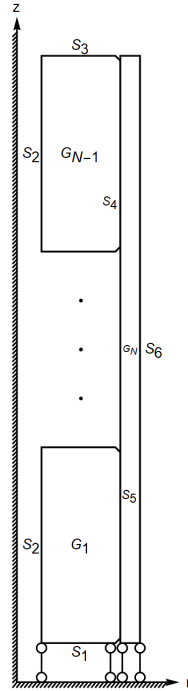


Рис. 1. Схема области моделирования

Предположим, что эффектом связанности можно пренебречь, поэтому задачу теплопроводности будем решать отдельно, а полученное температурное поле использовать при решении контактной задачи термомеханики.

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу для нелинейного уравнения теплопроводности в области $G = \bigcup_{\alpha=1}^N G_\alpha$, [8]:

$$c(T)\rho \frac{\partial T}{\partial t} = (k_{ij}(T)T_{,j})_{,i} + q(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in G, \quad t > 0; \quad (1)$$

$$T(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G; \quad (2)$$

$$T(\mathbf{x}, t) = T_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_6 \quad t > 0; \quad (3)$$

$$-n_i k_{ij}(T)T_{,j}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial G_p \setminus S_4 \quad t > 0; \quad (4)$$

$$-n_i k_{ij}(T)T_{,j}(\mathbf{x}, t) = \alpha[T(\mathbf{x}, t) - T_f(\bar{\mathbf{x}}, t)], \quad \mathbf{x} \in S_4, \quad \bar{\mathbf{x}} \in S_5, \quad t > 0, \quad (5)$$

где $c(T)$ — удельная массовая теплоемкость среды, ρ — плотность среды, $\mathbf{x}$ — вектор пространственных координат, t — время, k_{ij} — компоненты тензора теплопроводности, $T_{,j} = \frac{\partial T}{\partial x_j}$, $q(\mathbf{x}, t)$ — мощность внутренних источников тепла (отлична от нуля в таблетках), $T_0(\mathbf{x})$ — начальная температура, $T_1(\mathbf{x}, t)$ — температура на поверхности S_6 , $T(\mathbf{x}, t)$ — температура в момент времени t , n_i — компоненты единичного вектора внешней нормали к границе ∂G , α — коэффициент теплоотдачи на поверхностях S_4 и S_5 , $T_f(\mathbf{x})$ — температура в сходственной точке, лежащей на внутренней поверхности оболочки.

Математическая формулировка статической задачи механики деформируемого твердого тела для случая, когда объемные силы отсутствуют, включает в себя [9] следующие соотношения для каждого тела с номером α ($i, j = \overline{1, 3}$):

- уравнения равновесия

$$\sigma_{ji,j}(\mathbf{u}) = 0, \quad \mathbf{x} \in G_\alpha; \quad (6)$$

- кинематические граничные условия

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_D; \quad (7)$$

- силовые граничные условия

$$\sigma_{ji}(\mathbf{u})n_j = p_i(\mathbf{x}), \quad x \in S_N; \quad (8)$$

- соотношения Коши для линейного тензора полной деформации

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(u_{i,j}(\mathbf{x}) + u_{j,i}(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in G_\alpha; \quad (9)$$

- определяющие уравнения (закон Гука)

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl}(\mathbf{x}) - \varepsilon_{kl}^0(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in G_\alpha, \quad (10)$$

где x_i — координаты вектора $x \in G_\alpha$; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; ε_{kl} — компоненты тензора полной деформации; ε_{kl}^0 — компоненты тензора неупругой деформации; u_i — компоненты вектора перемещения; C_{ijkl} — компоненты тензора упругих постоянных; p_i — компоненты вектора поверхностных сил; n_j — компоненты вектора внешней нормали к соответствующей поверхности S_j ; S_D и S_N — объединение поверхностей, на которых заданы кинематические и силовые граничные условия соответственно.

В модели учитывалось, что каждая таблетка (кроме G_1 и G_{N-1}) вступает в контакт с двумя соседними (сверху и снизу) таблетками и оболочкой (считается, что начального зазора между ними нет). На контактных поверхностях поставлены условия скольжения без трения.

Рассмотрим пару потенциально контактных поверхностей, относящихся к телам с номерами α_1 и α_2 . Для упрощения записи будем использовать индекс «1» вместо « α_1 » и «2» вместо « α_2 ». Тогда дополнительные условия на поверхности S_k^1 для случая контакта без трения выглядят следующим образом (для поверхности S_k^2 условия записываются аналогичным образом):

$$\sigma_\tau^1(\mathbf{x}_1) = 0; \quad (11)$$

$$\sigma_n^1(\mathbf{x}_1) = \sigma_n^2(\bar{\mathbf{x}}_2) \leq 0; \quad (12)$$

$$u_n^1(\mathbf{x}_1) + u_n^2(\bar{\mathbf{x}}_2) \leq \delta_{0n}(\mathbf{x}_1); \quad (13)$$

$$\sigma_n^1(\mathbf{x}_1) (u_n^1(\mathbf{x}_1) + u_n^2(\bar{\mathbf{x}}_2) - \delta_{0n}(\mathbf{x}_1)) = 0. \quad (14)$$

Здесь $\mathbf{x}_1$ — некоторая точка, лежащая на поверхности S_k^1 , а $\bar{\mathbf{x}}_2$ — соответственная точка, т.е. находящаяся напротив (по нормали к S_k^1) точки $\mathbf{x}_1$ на поверхности S_k^2 , $\delta_{0n}(\mathbf{x}_1) \geq 0$ — функция, задающая начальный зазор (участки поверхности в начальный момент могли не соприкасаться друг с другом), $u_n^\alpha = \mathbf{u}^\alpha \cdot \mathbf{n}^\alpha$, $\sigma_\tau^\alpha = (\sigma(\mathbf{u}^\alpha) \cdot \mathbf{n}^\alpha) \cdot \boldsymbol{\tau}^\alpha$, $\sigma_n^\alpha = (\sigma(\mathbf{u}^\alpha) \cdot \mathbf{n}^\alpha) \cdot \mathbf{n}^\alpha$.

Условия (11)–(14) гарантируют, что если на некотором участке S_k^{12} поверхности S_k^1 и S_k^2 будут совпадать (заранее конфигурация и положение этого участка неизвестны), то при этом на контактирующие участки будут действовать сжимающие контактные силы.

Для рассмотренной задачи не существует аналитического решения, поэтому необходимо использовать численные методы. Для этого перейдем от исходной дифференциальной постановки к слабой (или вариационной). Переход к слабой постановке можно осуществлять различными способами. Приведем способ, основанный на рассмотрении энергии системы из N деформируемых тел, которая выглядит следующим образом:

$$\Pi = \sum_{\alpha=1}^N \Pi_\alpha + \Pi_c, \quad (15)$$

где

$$\Pi_\alpha = \frac{1}{2} \int_{G_\alpha} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^e dG - \int_{S_{\alpha N}} u_i p_i dS, \quad (16)$$

а Π_c отвечает за вклад в потенциальную энергию распределенных контактных сил, которые действуют на поверхностях контактирующих тел, его конкретный вид зависит от используемого метода, среди которых можно выделить классический и расширенный метод множителей Лагранжа, метод штрафа, комбинацию метода множителей Лагранжа и метода штрафа, методы типа Неймана — Дирихле, метод Ницше, метод барьерных функций, различные комбинации метода барьерных функций и штрафа и другие.

В работе использован метод множителей Лагранжа, для которого Π_c вы-

глядит следующим образом:

$$\Pi_c = \int_{S_k} (\lambda_n(\mathbf{x})g_n(\mathbf{x}) + \lambda_\tau(\mathbf{x})g_\tau(\mathbf{x})) dS, \quad (17)$$

где $g_n = (\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^1) \cdot \mathbf{n}$, $g_\tau = (\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^1) \cdot \boldsymbol{\tau}$ — функции зазора (в трехмерном случае нужно рассматривать касательную плоскость, и функция g_τ будет векторной). Если на контактных поверхностях задано условие скольжения без трения, то $\lambda_\tau = 0$.

Решение задачи (6)–(14) эквивалентно [10] минимизации функционала

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_G \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dG - \int_{S_N} \mathbf{u}^T \mathbf{p} dS + \int_{S_k} \lambda_n (u_{2n}(\mathbf{x}) + u_{1n}(\mathbf{x}) - \delta_{0n}) dS \quad (18)$$

при выполнении кинематических граничных условий (7), где λ_n — множители Лагранжа, являющиеся проекциями векторов напряжений на направления внешних нормалей, $u_n = u_r n_r + u_z n_z$.

3. Решение системы линейных уравнений, полученной после дискретизации задачи

Для пространственной дискретизации функционала (18) использован метод конечных элементов, в расчетах применены элементы второго порядка на четырехугольной сетке. Дискретизация интеграла по контактным поверхностям выполнена с помощью mortar-метода.

Mortar-метод решения контактных задач теории упругости предполагает независимую конечно-элементную дискретизацию непересекающихся подобластей [11]. Сетки на этих подобластях являются, вообще говоря, несогласованными на линии контакта, а непрерывность решения достигается за счет использования множителей Лагранжа. Среди основных преимуществ mortar-метода можно отметить возможность независимого выбора различных типов конечных элементов и функций формы как на границах контактирующих тел, так и при интегрировании вдоль линии контакта [5].

Линию контакта со стороны тела G_m обозначим через Γ_m , а со стороны тела G_s — Γ_s (рис. 2). Рассмотрим одномерные конечные элементы второго порядка на линиях контакта Γ_m и Γ_s . Из узлов этих элементов на линии контакта Γ_m проведем нормали на линию контакта Γ_s . Используя узлы поверхности Γ_s , а также новые точки, образованные при пересечении указанных нормалей и Γ_s , сформируем новую поверхностную сетку Γ_{m-s} , состоящую из одномерных квадратичных элементов с аналогичными функциями формы [12]. В случае если поверхности тел смещаются относительно друг друга, то необходимо определять конфигурацию контактных поверхностей в

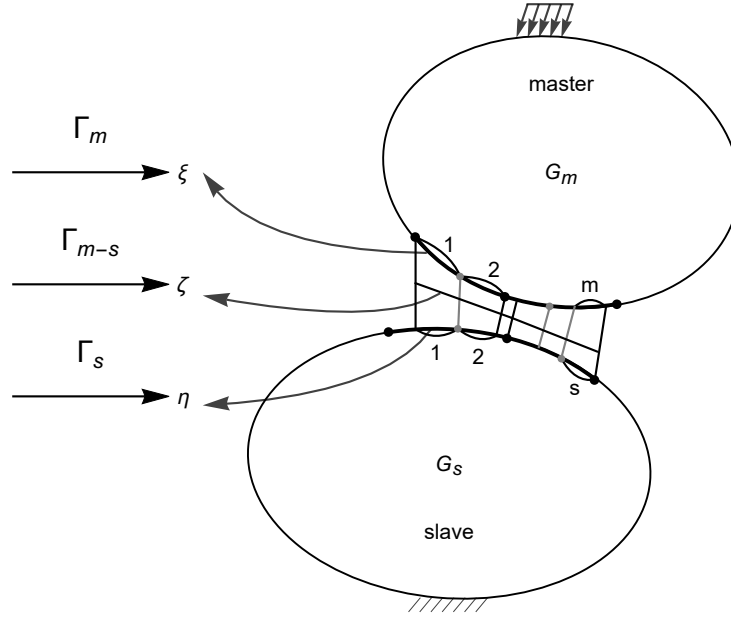


Рис. 2. Различные виды конечных элементов на линии контакта

ходе итерационного процесса и перестраивать сетку на Γ_{m-s} . Введем функции формы одномерных квадратичных конечных элементов с номерами (em) , (es) и (e) , записанные в локальной системе координат, в которой соответствующие координаты ξ , η , ζ изменяются от -1 до 1:

$$\begin{cases} N_{s1}^{(em)} = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1), \\ N_{s2}^{(em)} = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1), \\ N_{s3}^{(em)} = 1 - \xi^2, \end{cases} \quad \begin{cases} N_{s1}^{(es)} = \frac{1}{2}\eta(\eta - 1), \\ N_{s2}^{(es)} = \frac{1}{2}\eta(\eta + 1), \\ N_{s3}^{(es)} = 1 - \eta^2, \end{cases} \quad \begin{cases} L_{\lambda 1}^{(e)} = \frac{1}{2}\zeta(\zeta - 1), \\ L_{\lambda 2}^{(e)} = \frac{1}{2}\zeta(\zeta + 1), \\ L_{\lambda 3}^{(e)} = 1 - \zeta^2. \end{cases} \quad (19)$$

Рассмотрим элемент с номером (e) новой конечно-элементной сетки. Он лежит внутри элемента с номером (es) , относящегося к Γ_s , и напротив элемента с номером (em) , относящегося к Γ_m (рис. 3). Внутри него значения λ_n , u_m и u_s выражаются следующим образом:

$$\lambda_n = [L_\lambda]^{(e)} \{\lambda\}^{(e)}, \quad (20)$$

$$u_m = [N_m]^{(em)} \{u_m\}^{(em)}, \quad (21)$$

$$u_s = [N_s]^{(es)} \{u_s\}^{(es)}, \quad (22)$$

где $[L_\lambda]^{(e)}$, $[N_s]^{(em)}$, $[N_s]^{(es)}$ — матрицы функций формы соответствующих одномерных квадратичных элементов.

Минимизация функционала (18), включающего в себя интеграл по контактной поверхности в случае, когда зазор δ_{0n} равен нулю, приводит к формированию следующей системы линейных алгебраических уравнений [12]:

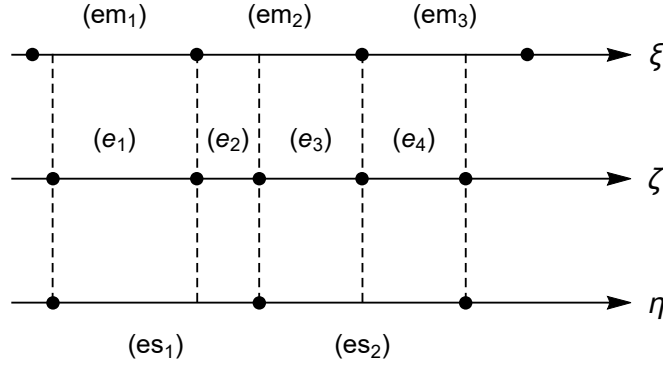


Рис. 3. Расположение элемента с номером e новой конечно-элементной сетки

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad (23)$$

где

$$\mathbf{A} = \text{diag}(\mathbf{A}_{11}, \dots, \mathbf{A}_{NN}), \quad (24)$$

$$\mathbf{M} = (\mathbf{M}_1 \ \dots \ \mathbf{M}_N)^T, \quad (25)$$

$$\mathbf{M}_i = (\mathbf{M}_{i1} \ \dots \ \mathbf{M}_{iq}), \quad (26)$$

$$\mathbf{R} = (\mathbf{R}_1 \ \dots \ \mathbf{R}_N), \quad (27)$$

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1 \ \dots \ \mathbf{u}_N)^T, \quad (28)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_{q-1} \ \lambda_q)^T, \quad (29)$$

где N — количество тел, q — количество контактных пар, $\mathbf{A}_{ii}$ — стандартные матрицы жесткости для i тела, которые имеют размерности $n_i \times n_i$, матрица $\mathbf{M}_i$ имеет размерность $n_i \times m$ (m — общее количество вводимых множителей Лагранжа).

Рассмотрим матрицу $\mathbf{M}_i$, соответствующую телу с номером i . Тогда матрица $\mathbf{M}_{ij}$, являющаяся блоком матрицы $\mathbf{M}_i$ и отвечающая за j -ю контактную пару поверхностей, является нулевой ($\mathbf{M}_{ij} = 0$), если i -е тело не входит в j -ю контактную поверхность, а если входит, то $\mathbf{M}_{ij} \neq 0$.

Блочная система уравнений (23) соответствует задаче с седловой точкой. В матрице есть нулевой блок на диагонали, поэтому для ее решения нельзя использовать большую часть классических итерационных методов решения систем линейных уравнений (методы Якоби, Гаусса — Зейделя, SOR, сопряженных градиентов). Для решения подобных систем используют либо прямые методы (варианты метода Гаусса), либо специальные итерационные методы. Ситуация осложняется тем, что полученная матрица является плохо обусловленной, поэтому для получения приемлемой скорости сходимости нужно использовать предобуславливатели. Поскольку конфигурация

контактных поверхностей в системе тел может меняться, то численный алгоритм в любом случае (даже при использовании прямых методов) является итерационным.

Для учета интеграла по контактной поверхности в (17) использовано два способа. В первом из них считается, что в интеграл всегда входят все узлы сетки, лежащие на рассматриваемых потенциально контактных поверхностях. Этот подход применен для модифицированных итерационных методов и метода Узавы и позволяет учитывать изменение конфигурации контактной поверхности без дополнительного вмешательства в алгоритм. Во втором способе в конце каждой итерации необходимо корректировать список узлов, относящихся к контактным поверхностям. Этот подход применен для метода Гаусса, а также обобщенного метода минимальных невязок.

В работе для численного решения задачи (6)–(14) использованы различные итерационные методы [13]: модифицированные итерационные методы, такие как модифицированный метод Якоби (MJOR), модифицированный метод последовательной верхней релаксации (MSOR), модифицированный метод симметричной последовательной верхней релаксации (MSSOR), метод Узавы, а также обобщенный метод минимальных невязок (GMRES). В модифицированных методах на каждой итерации нужно решить два (для MSSOR — три) блока уравнений: первый блок состоит из систем уравнений, соответствующих каждому из рассматриваемых тел (в качестве искоемых неизвестных выступают перемещения), второй блок — из систем уравнений, соответствующих каждой паре контактных поверхностей (в качестве искоемых неизвестных выступают множители Лагранжа). Отметим, что каждая локальная система уравнений решается по отдельности с помощью метода сопряженных градиентов. В перечисленных выше методах для учета интеграла по контактной поверхности применен первый способ. Также в работе использованы два итерационных процесса для двух способов учета интеграла по контактной поверхности, в которых на каждой итерации глобальная система уравнений решается с помощью метода Гаусса.

3.1. Прямые методы

Рассмотрим два варианта метода Гаусса с итерационным уточнением, в каждом из которых реализован один из вариантов учета интеграла по контактной поверхности (18).

1-й вариант метода Гаусса (с обнулением множителей Лагранжа)

На каждой итерации решается следующая система уравнений (ее размерность остается постоянной):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{M}^l \\ \mathbf{M}^{lT} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}^{l+1} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda}^{l+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R} - \mathbf{A} \mathbf{u}^l - \mathbf{M}^l \boldsymbol{\lambda}^l \\ -\mathbf{M}^{lT} \boldsymbol{\lambda}^l \end{Bmatrix}, \quad (30)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\tau} \mathbf{A}_{11} \left(\mathbf{u}_1^{k+\frac{1}{2}} - \mathbf{u}_1^k \right) + \mathbf{A}_{11} \mathbf{u}_1^k + M_1 \boldsymbol{\lambda}^k = \mathbf{R}_1, \\ & \dots\dots\dots \\ & \frac{1}{\tau} \mathbf{A}_{NN} \left(\mathbf{u}_N^{k+\frac{1}{2}} - \mathbf{u}_N^k \right) + \mathbf{A}_{NN} \mathbf{u}_N^k + \mathbf{M}_N \boldsymbol{\lambda}^k = \mathbf{R}_N, \\ & -\frac{\alpha}{2\tau} \mathbf{B}_1 \left(\boldsymbol{\lambda}_1^{k+1} - \boldsymbol{\lambda}_1^k \right) + \sum_{t=1}^N \mathbf{M}_{t1}^T \mathbf{u}_t^{k+\frac{1}{2}} = \mathbf{0}, \\ & \dots\dots\dots \\ & -\frac{\alpha}{2\tau} \mathbf{B}_q \left(\boldsymbol{\lambda}_q^{k+1} - \boldsymbol{\lambda}_q^k \right) + \sum_{t=1}^N \mathbf{M}_{tq}^T \mathbf{u}_t^{k+\frac{1}{2}} = \mathbf{0}, \\ & \frac{1}{\tau} \mathbf{A}_{11} \left(\mathbf{u}_1^{k+1} - \mathbf{u}_1^{k+\frac{1}{2}} \right) + \mathbf{A}_{11} \mathbf{u}_1^{k+\frac{1}{2}} + \mathbf{M}_1 \boldsymbol{\lambda}^{k+1} = \mathbf{R}_1, \\ & \dots\dots\dots \\ & \frac{1}{\tau} \mathbf{A}_{NN} \left(\mathbf{u}_N^{k+1} - \mathbf{u}_N^{k+\frac{1}{2}} \right) + \mathbf{A}_{NN} \mathbf{u}_N^{k+\frac{1}{2}} + \mathbf{M}_N \boldsymbol{\lambda}^{k+1} = \mathbf{R}_N. \end{aligned} \right. \quad (32)$$

4. Метод Узавы

Решение системы (23) можно осуществлять и с помощью варианта метода Узавы [15], в котором на каждой итерации неизвестные значения вычисляются следующим образом:

$$\mathbf{u}_i^{k+1} = \mathbf{A}_i^{-1} (\mathbf{R}_i - \mathbf{M}_i \boldsymbol{\lambda}^k), \quad (35)$$

$$\boldsymbol{\lambda}^{k+1} = \boldsymbol{\lambda}^k + \omega \mathbf{B}^{-1} \mathbf{M}^T \mathbf{u}^{k+1}, \quad (36)$$

где $\mathbf{B}$ — матрица-предобуславливатель, ω — итерационный параметр. Для случая двух тел в качестве предобуславливателя используется матрица $\mathbf{B} = \mathbf{M}_1^T \text{diag} \{ \mathbf{A}_{11}^{-1} \} \mathbf{M}_1$.

Данный вариант метода Узавы совпадает с MSOR при следующем выборе итерационных параметров: $\tau = 1$, $\alpha = \frac{1}{\omega}$. Некоторые условия сходимости получены в [14].

5. Обобщенный метод минимальных невязок (GMRES)

Обобщённый метод минимальных невязок — итерационный метод численного решения системы линейных алгебраических уравнений с невырожденной матрицей. Метод основан на минимизации квадратичного функционала невязки на подпространствах Крылова [15]. Метод GMRES приближает точное решение системы $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ вектором $\mathbf{x}_k$, который минимизирует евклидову норму невязки $\mathbf{r}_k = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}$ на подпространстве Крылова $K_k = K_k(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \text{span} \{ \mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{A}^2\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{b} \}$.

На каждой итерации метода решение уточняется поправкой, представленной в виде разложения по ортонормированному базису пространства K_k : $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0 + \mathbf{z}_k$, где $\mathbf{x}_0$ — некоторое начальное приближение, $\mathbf{z}_k \in K_k$ — поправка решения.

Модифицированные методы и метод Узавы работают только тогда, когда блок $\mathbf{A}$ является симметричным и положительно определенным. При этом может возникнуть ситуация, когда отдельно рассматриваемое i -е тело не имеет закрепления в направлении одной из осей, поэтому задача для этого тела становится некорректной и матрица $\mathbf{A}_{ii}$ является вырожденной. Для исправления этой ситуации предположим, что систему тел можно пронумеровать таким образом, чтобы сначала решить уравнения для тел, которые имеют нужное количество закреплений (для них матрицы не вырождены), а потом последовательно решать задачи для тел, которые контактируют с предыдущими телами, для которых перемещения на текущей итерации уже получены. Используя эти перемещения, можно поставить дополнительные условия 1-го рода на контактных границах данных тел, в результате соответствующие матрицы становятся невырожденными, для них при необходимости можно провести процедуру, приводящую их к симметричному виду. Закрепление можно осуществлять либо в одном узле, либо в одном элементе (второй вариант дает меньшее количество итераций, для него далее приведены графики), либо в ряде элементов. Пусть тело с номером i_2 контактирует с телом с номером i_1 ($i_2 > i_1$), для i_1 на текущей итерации $k + 1$ (для MSSOR —

также и $k + 1/2$) значение $\mathbf{u}_{i_1}^{k+1}$ (для MSSOR — также и $\mathbf{u}_{i_1}^{k+1/2}$) уже известно. Тогда для выбранного подмножества узлов $p_1, \dots, p_s$, относящихся к рассматриваемой контактной поверхности тела i_2 , считается, что нормальные перемещения совпадают с нормальными перемещениями в сходственных точках, расположенных на контактной поверхности тела i_1 , т.е.

$$u_{r,p1}^{k+1} n_r + u_{z,p1}^{k+1} n_z = \bar{u}_{n,p1}^{k+1}. \quad (37)$$

Если для тела i_2 не хватает закрепления относительно оси z , то считаем, что (при $n_z \neq 0$)

$$u_{z,p1}^{k+1} = \frac{1}{n_z} (\bar{u}_{n,p1}^{k+1} - u_{r,p1}^k n_r). \quad (38)$$

Таким образом, строка в матрице $\mathbf{A}_{i_2 i_2}$, соответствующая данному перемещению, становится строкой единичной матрицы. Соответствующий столбец матрицы $\mathbf{A}_{i_2 i_2}$ тоже приводится к виду столбца единичной матрицы путем переноса всех слагаемых, относящихся к $u_{z,p1}^{k+1}$, в правую часть (поскольку это перемещение известно). В итоге блок $\mathbf{A}_{i_2 i_2}$ становится симметричным и положительно определенным, как и вся матрица $\mathbf{A}$.

3.3. Оценка значений оптимальных итерационных параметров для MJOR

Рассмотрим систему уравнений (23) с симметричной и положительно определенной матрицей $\mathbf{A}$. В этом случае для модифицированного метода Якоби имеют место следующие теоремы [13]:

Теорема 1. При любом $\alpha > 0$ и произвольном начальном приближении необходимым и достаточным условием сходимости метода (33) является выполнение неравенства

$$0 < \tau < \min \left(2, \frac{\alpha}{\Gamma} \right), \quad (39)$$

где Γ — максимальное собственное значение матрицы $\mathbf{B}^{-1/2} \mathbf{M}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{B}^{-1/2}$.

Теорема 2. Асимптотически оптимальные параметры для метода (33) выбираются следующим образом:

$$\tau_0 = \frac{4}{2 + \xi}, \quad \alpha_0 = \frac{4\Gamma}{2 - \xi}, \quad (40)$$

где $\xi = \frac{\gamma}{\Gamma}$, γ — минимальное собственное значение матрицы $\mathbf{B}^{-1/2} \mathbf{M}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{B}^{-1/2}$.

Теорема 3. При условии выбора начального приближения $\mathbf{z}^0 = \{\mathbf{u}^0, \boldsymbol{\lambda}^0\}$ из условия

$$\mathbf{A} \mathbf{u}^0 + \mathbf{M} \boldsymbol{\lambda}^0 = \mathbf{R} \quad (41)$$

асимптотически оптимальные параметры τ_0, α_0 определяются по формулам

$$\tau_0 = 2, \quad \alpha_0 = 2(\gamma + \Gamma), \quad (42)$$

Для оценки сходимости модифицированного метода Якоби (MJOR) и поиска оптимальных итерационных параметров рассмотрим тестовую задачу о контакте поставленных друг на друга двух квадратных брусков со стороной $l = 0,1$ м, к верхнему из которых приложена постоянная нагрузка $P_y = 10$ МПа. В каждом из тел введем конечно-элементную сетку, состоящую из одного элемента, вычислим значения γ и Γ и оценим значения оптимальных параметров τ_0 и α_0 из соотношений (39) и (42). В качестве предобуславливателя выберем матрицу $\mathbf{B} = \mathbf{M}^T \text{diag}\{\mathbf{A}^{-1}\}\mathbf{M}$.

Для данной задачи с помощью системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica вычислим минимальные и максимальные собственные значения матрицы $\mathbf{B}^{-1/2}\mathbf{M}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{B}^{-1/2}$: $\gamma \approx 0,000166$, $\Gamma \approx 0,0222$. Тогда согласно теореме 1 (39) сходимость метода имеет место при $0 < \tau < \min\left(2, \frac{\alpha}{\Gamma}\right)$, а асимптотически оптимальными параметрами при условии выбора начального приближения из условия (41) согласно теореме 2 (42) являются $\tau_0 = 2$ и $\alpha_0 = 0,0447$.

Проведем серию расчетов с различными значениями α и τ и сравним количество итераций, требуемых для достижения заданной погрешности $\varepsilon = 10^{-5}$, вычисляемой следующим образом:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum_i S_i \frac{(\hat{u}_{r_i} - u_{r_i})^2 + (\hat{u}_{z_i} - u_{z_i})^2}{u_{r_i}^2 + u_{z_i}^2}}{\sum_i S_i}}, \quad (43)$$

где $\hat{u}_{r_i}$, $\hat{u}_{z_i}$ — значения радиальных и осевых перемещений на новой итерации, S_i — сумма площадей конечных элементов, в которые входит рассматриваемый узел, разделенная на количество узлов в конечном элементе.

Так как $\frac{\alpha_0}{\Gamma} \approx 2,0149$, то из условия $0 < \tau < \min\left(2, \frac{\alpha}{\Gamma}\right)$ следует, что сходимость присутствует при $0 < \tau < 2$.

Таблица 1. Количество итераций для различных значений α при $\tau = 1,99$, метод MJOR

α	α_0	0,05	0,1	0,25	0,5	1,25	1,5
n	4	4	5	8	12	17	21

В Таблице 1 приведено количество итераций, требуемых для достижения погрешности $\varepsilon = 10^{-5}$ для различных значений α при $\tau = 1,99$. Наименьшее количество итераций соответствует оптимальному значению α_0 , для других значений α число итераций увеличивается.

В Таблице 2 приведено количество итераций, требуемых для достижения погрешности $\varepsilon = 10^{-5}$ для различных значений τ при оптимальном $\alpha = \alpha_0$. Для близкого к оптимальному значению $\tau_0 = 1,99$ число итераций является

Таблица 2. Количество итераций для различных значений τ при $\alpha = \alpha_0$, метод MJOR

τ	α_0	0,25	0,5	0,75	1,25	1,5	1,99
n	12	8	9	11	9	7	4

наименьшим, при использовании других значений τ оно увеличивается. При $\tau \geq 2$ сходимость итерационного процесса не достигается.

4. Результаты численного моделирования

Будем рассматривать несогласованные сетки: для базовой сетки таблетки разбиты на 10 элементов в направлении r и на 10 элементов в направлении z , а оболочка — на 5 элементов в направлении r , в направлении z каждый участок оболочки, соответствующий высоте одной таблетки, разбит на 10 элементов. Более мелкие сетки формируются путем последовательного уменьшения шагов в два раза. В дальнейшем будем обозначать базовую сетку как «сетка 1», сетку, соответствующую разбиению 20×20 элементов в каждой таблетке, — «сетка 2», сетку, соответствующую разбиению 40×40 элементов в каждой таблетке, — «сетка 3». В таблице 3 приведено приблизительное количество переменных для трех сеток.

Таблица 3. Приблизительное количество переменных

Кол-во таблеток	2	5	10	25	50	100
Сетка 1	3000	6000	12500	31000	62500	125000
Сетка 2	12000	24000	50000	124000	250000	500000
Сетка 3	48000	96000	200000	496000	1000000	2000000

Для реализации метода Гаусса и GMRES использованы процедуры для разреженных матриц из библиотеки Eigen (<https://eigen.tuxfamily.org>), в методе GMRES использован диагональный предобуславливатель. Поскольку количество топливных таблеток в твэле, как правило, составляет несколько сотен, отдельно остановимся на расчете со 100 таблетками. Для MSSOR сходимость достигается за 762 итерации, для MSOR — за 863 итерации, для MJOR — за 859 итераций, для метода Узавы — за 1960 итераций, для варианта метода Гаусса с коррекцией списка контактных узлов, а также GMRES — за 903 итерации (относительная погрешность $5\epsilon = 10^{-5}$). Итерационные параметры заданы следующим образом: для MSSOR, MSOR, MJOR $\tau = 0, 2$, $\alpha = 1, 3$, для метода Узавы $\omega = 4 \cdot 10^{-7}$. Итоговое отношение невязок для MSSOR — $8,7246 \cdot 10^{-4}$, для MSOR — $8,3921 \cdot 10^{-4}$, для MJOR — $7,8147 \cdot 10^{-4}$ для метода Узавы — $9,1275 \cdot 10^{-4}$, для метода GMRES — $7,6125 \cdot 10^{-4}$. Стоит

отметить, что при использовании в качестве предобуславливателя единичной матрицы сходимость методов MSSOR, MSOR, MJOR и метода Узавы отсутствует при любом использованном выборе итерационных параметров. Для метода Гаусса без использования итерационной процедуры полученное решение системы линейных уравнений может не удовлетворять граничным условиям на контактных поверхностях (невязка решения будет большой), что связано с плохой обусловленностью системы уравнений.

Основным преимуществом методов MJOR, MSOR и MSSOR по сравнению с итерационными процессами, организованными на основе метода Гаусса, является то, что количество итераций сопоставимо, но при этом решается несколько систем линейных уравнений размерности n_i (для перемещений в i -м теле) и m_j (для множителей Лагранжа в j -й контактной паре) методом сопряженных градиентов с характерным числом операций $O(n_i^{3/2} + m_j^{3/2})$, а при использовании метода Гаусса на каждой итерации решается полная система уравнений размерности $n = \sum_i n_i + \sum_j m_j$ с характерным числом операций $O(n^3)$ для случая заполненной матрицы [16].

Таблица 4. Количество итераций для различных методов, сетка 1

Кол-во таблеток	2	5	10	25	50	100
MSSOR	32	46	121	287	473	762
MSOR	48	57	140	304	515	863
MJOR	40	52	133	296	509	859
метод Узавы	285	568	861	1244	1587	1960
2-й вар. метода Гаусса/ GMRES	11	34	54	133	344	903

В Таблице 4 приведено количество итераций (на один шаг по времени), требуемых для достижения погрешности $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$ для различных методов и для разного количества таблеток (от 2 до 100). Из приведенных данных видно, что количество итераций для трех модифицированных итерационных методов сопоставимо. Количество итераций в методе Узавы существенно превышает показатели остальных методов, а наименьшие значения достигаются при использовании метода Гаусса и GMRES, в которых после каждой итерации происходит изменение конфигурации контактной поверхности.

В Таблице 5 приведено общее время расчета для различных методов и для разного количества таблеток. Результаты демонстрируют, что для небольшого количества таблеток наименьшее время достигается при использовании метода Гаусса и GMRES, для большого — при использовании модифицированных итерационных методов, наименьшее время — у MJOR. Например, для 50 таблеток (62500 переменных) различие с GMRES — 25 раз, с методом Гаусса — 262 раза. Стоит также отметить, что данные в Таблицах 4 и 5 получены с использованием различных для каждого метода итерационных параметров,

Таблица 5. Время расчета для различных методов, сетка 1, с

Кол-во таблеток	2	5	10	25	50	100
MSSOR	14,8	21,9	58,5	142,3	250,7	418,6
MSOR	11,2	13,7	35,8	81,7	146,2	262,5
MJOR	9,5	12,5	34,1	78,9	140,4	254,6
метод Узавы	31,4	52,3	88,0	146,5	286,6	463,7
GMRES	1,3	9,6	58,3	563,2	3460,5	32318,4
2-й вар. метода Гаусса	1,8	19,5	180,7	3274,4	36756,4	—

обеспечивавших минимальное количество итераций. В дальнейшем в расчетах использовался MJOR.

Погрешность полученного итерационного решения оценивалась двумя способами: сравнением перемещений на двух соседних итерациях по формуле (43) и отношением текущей невязки решения к начальной невязке $\frac{\|r\|}{\|r_0\|}$. При этом относительная погрешность вычислялась по формуле (43).

В Таблице 6 приведено количество итераций (на один шаг по времени), требуемых для достижения заданной погрешности $\varepsilon = 10^{-5}$, а в Таблице 7 — общее время расчета для различного количества таблеток и разного набора сеток (например, 20x20 означает, что каждая таблетка разбита на 20 конечных элементов в направлениях r и z). Из приведенных данных видно, что, например, для 25 таблеток количество итераций для сетки 40x40 элементов увеличивается в 2,3 раза, а время расчета — в 123 раза по сравнению с расчетом с сеткой 10x10 элементов.

Таблица 6. Количество итераций для различного количества таблеток, метод MJOR

Кол-во таблеток/сетка	2	5	10	25	50
Сетка 1	40	52	133	296	509
Сетка 2	58	76	192	425	726
Сетка 3	94	125	307	689	—

Таблица 7. Время расчета для различного количества таблеток, с, метод MJOR

Кол-во таблеток/сетка	2	5	10	25	50
Сетка 1	9,5	12,5	34,1	78,9	140,4
Сетка 2	19,1	42,8	188,3	860,2	2804,7
Сетка 3	48,4	186,5	1279,1	9725,4	—

На рис. 4а–5б показаны графики зависимостей относительной погрешности от числа итераций для MSSOR при разных значениях итерационных

параметров для случая 10 таблеток. При оптимальном (из рассмотренных вариантов) выборе параметров для MSSOR сходимость достигается за 121 итерацию, для MSOR — за 140 итераций, для MJOR — за 133 итерации, а для метода Узавы — за 568 итераций (относительная погрешность $\varepsilon = 10^{-5}$). Итерационные параметры заданы следующим образом: для MSSOR, MSOR, MJOR $\tau = 0, 2$, для MSSOR $\alpha = 1, 75$, для MSOR и MJOR $\alpha = 1, 3$, для метода Узавы $\omega = 4 \cdot 10^{-7}$. Итоговое отношение невязок для MSSOR — $5,3654 \cdot 10^{-4}$, для MSOR — $7,9203 \cdot 10^{-4}$, для MJOR — $6,4582 \cdot 10^{-6}$, для метода Узавы — $8,2537 \cdot 10^{-4}$, для метода Гаусса — $5,7489 \cdot 10^{-5}$ (рис. 6а–6б).

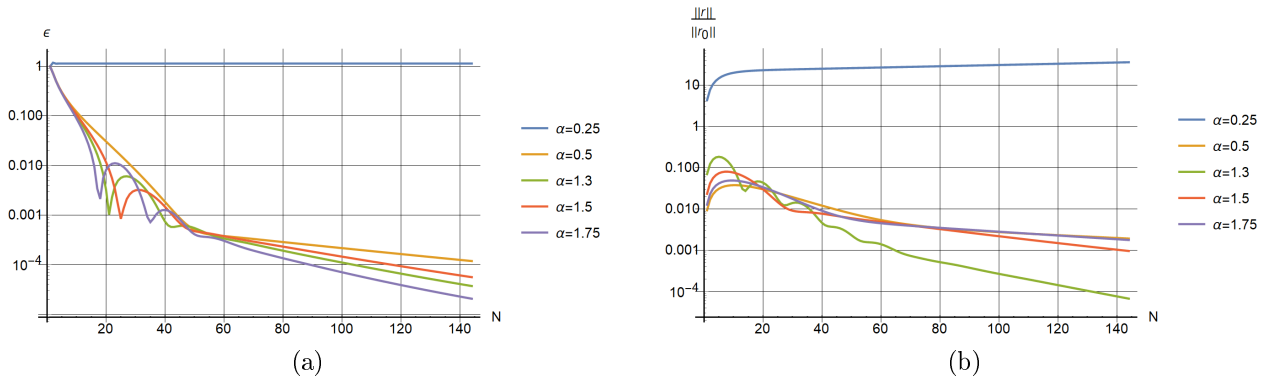


Рис. 4. (а) — Зависимости относительной погрешности от числа итераций для MSSOR, $\tau = 0, 2$, (б) — зависимости отношения невязок от числа итераций для MSSOR, $\tau = 0, 2$

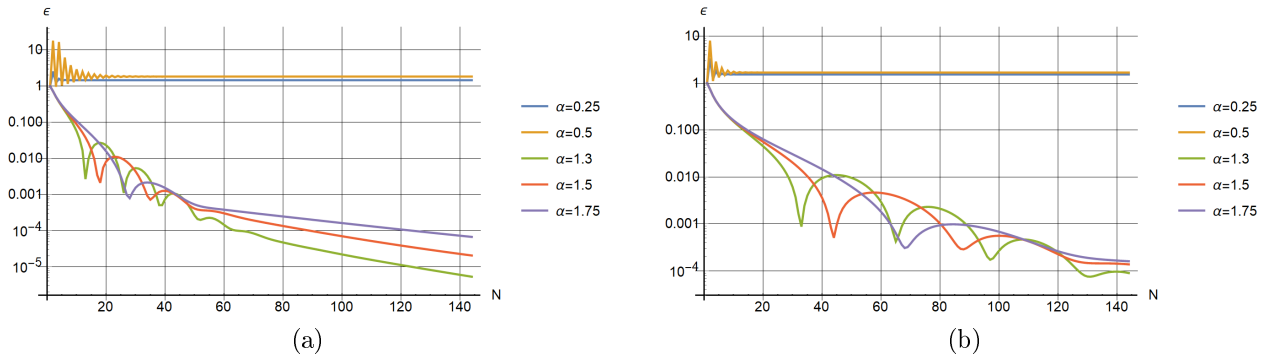


Рис. 5. (а) — Зависимости относительной погрешности от числа итераций для MSSOR, $\tau = 0, 25$, (б) — зависимости относительной погрешности от числа итераций для MSSOR, $\tau = 0, 5$

На рис. 7а–7б показаны графики зависимостей отношения невязок от числа итераций для различных значений относительной погрешности решения систем линейных уравнений методом сопряженных градиентов при использовании MJOR для случаев 25 и 100 топливных таблеток. При этом относительная погрешность оценивалась с помощью вычисления отношения невязок r_i для i -й локальной системы в методе сопряженных градиентов. Из приведенных графиков видно, что в случае 25 таблеток для погрешности 10^{-6} достигается отношение невязок $2,25 \cdot 10^{-7}$, для погрешности 10^{-8} — $6,4 \cdot 10^{-8}$, для

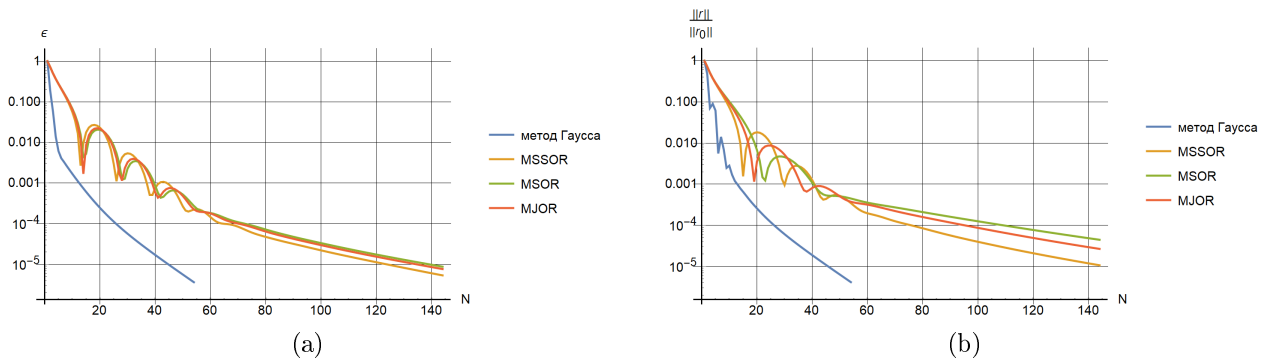


Рис. 6. (a) — Зависимости относительной погрешности от числа итераций для различных методов, (b) — зависимости отношения невязок от числа итераций для различных методов

погрешности $10^{-10} - 4 \cdot 10^{-9}$, а в случае 100 таблеток для погрешности 10^{-6} достигается отношение невязок $4 \cdot 10^{-6}$, для погрешности $10^{-8} - 6,5 \cdot 10^{-7}$, для погрешности $10^{-10} - 1,6 \cdot 10^{-7}$.

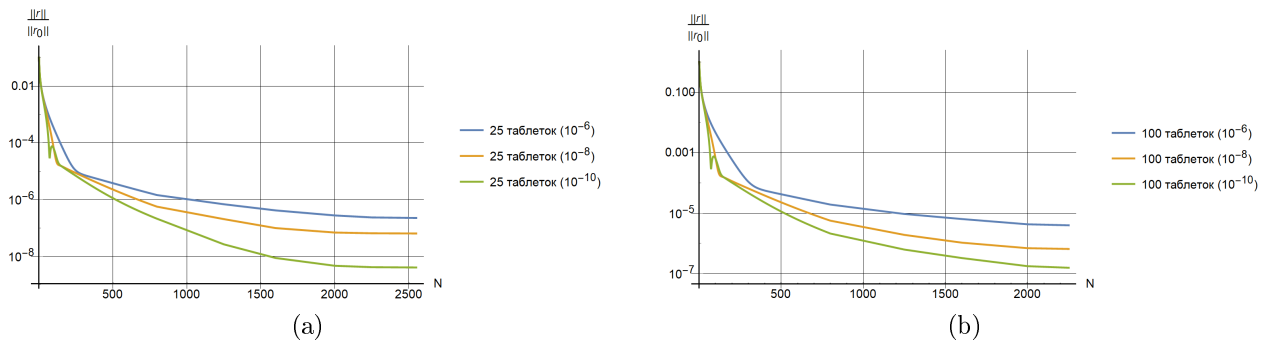


Рис. 7. (a) — Зависимости отношений невязок от числа итераций (25 таблеток), (b) — зависимости отношений невязок от числа итераций (100 таблеток)

На рис. 8а представлены графики осевого перемещения на внешней поверхности таблеток для случая 100 таблеток (одна точка соответствует одной таблетке). Как видно из рисунка, происходит существенное смещение столба топливных таблеток относительно начального положения (до 1,3 см, что сопоставимо с высотой таблетки). На рис. 8b–8с представлены графики зависимостей средних значений радиальных, осевых и окружных напряжений на внешней поверхности топливных таблеток. Стоит отметить, что при вычислении средних значений не учитывались напряжения в крайних для каждой таблетки элементах, поскольку в них значения напряжений существенно больше, чем в остальных элементах (там расположены концентраторы напряжений).

Далее приведем фрагменты двумерных распределений температуры, перемещений и напряжений на участке столба таблеток. На рис. 9а показаны двумерные распределения температуры, на рис. 9b — двумерные распределения радиальных перемещений, а на рис. 9с — двумерные распределения радиальных напряжений для таблеток. На рис. 10a–10с приведены двумер-

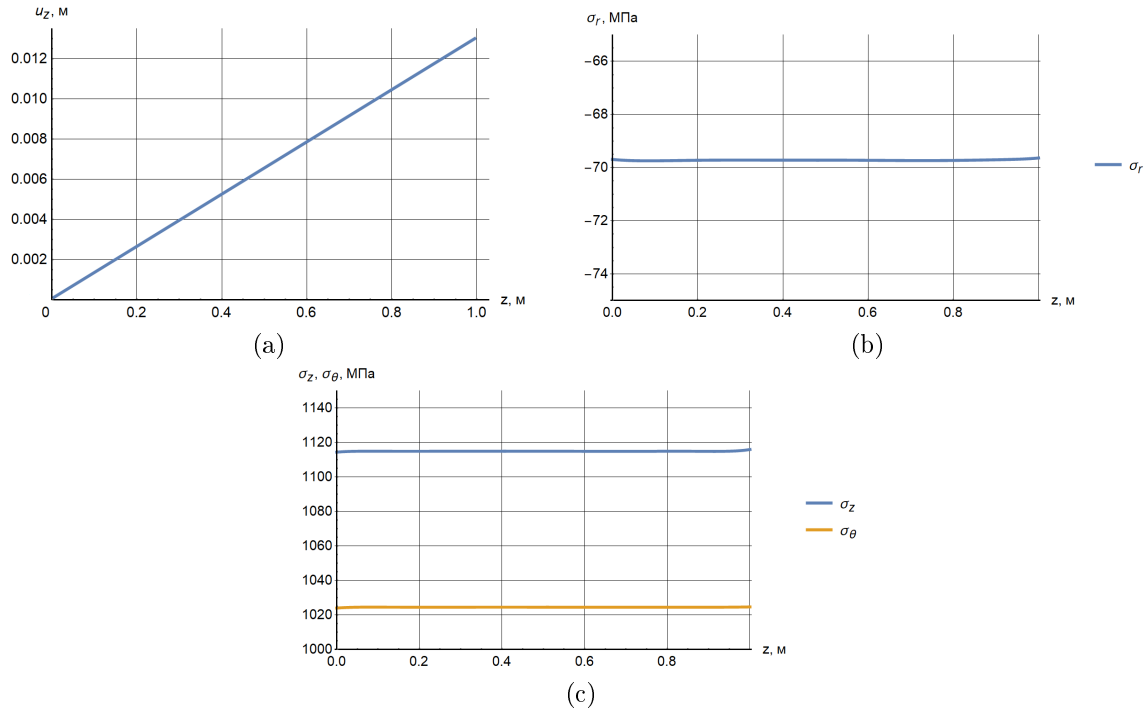


Рис. 8. (a) — Зависимости средних значений осевого перемещения на внешней поверхности таблеток, MJOR, (b) — зависимости средних значений радиальных напряжений на внешней поверхности таблеток, (c) — зависимости средних значений осевых и окружных напряжений на внешней поверхности таблеток

ные распределения осевых, окружных и касательных напряжений для таблеток. На рис. 11a приведены двумерные распределения радиальных перемещений, на рис. 11b — двумерные распределения радиальных напряжений, на рис. 11c — двумерные распределения осевых напряжений для оболочки. Показаны фрагменты распределений, соответствующие участку с 55-й по 59-ю таблетки, причем при построении деформированных тел приложенные перемещения для большей наглядности увеличены в 10 раз для таблеток и в 50 раз для оболочки.

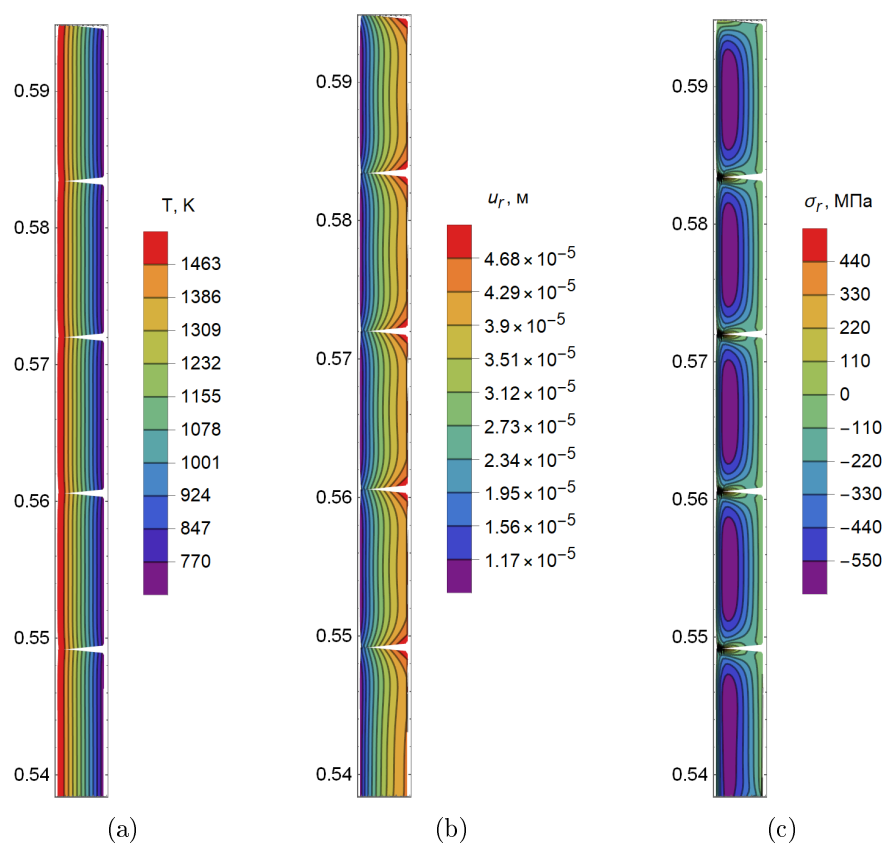


Рис. 9. Двумерные распределения в узлах элементов таблеток: (a) — температура; (b) — радиальные перемещения; (c) — радиальные напряжения

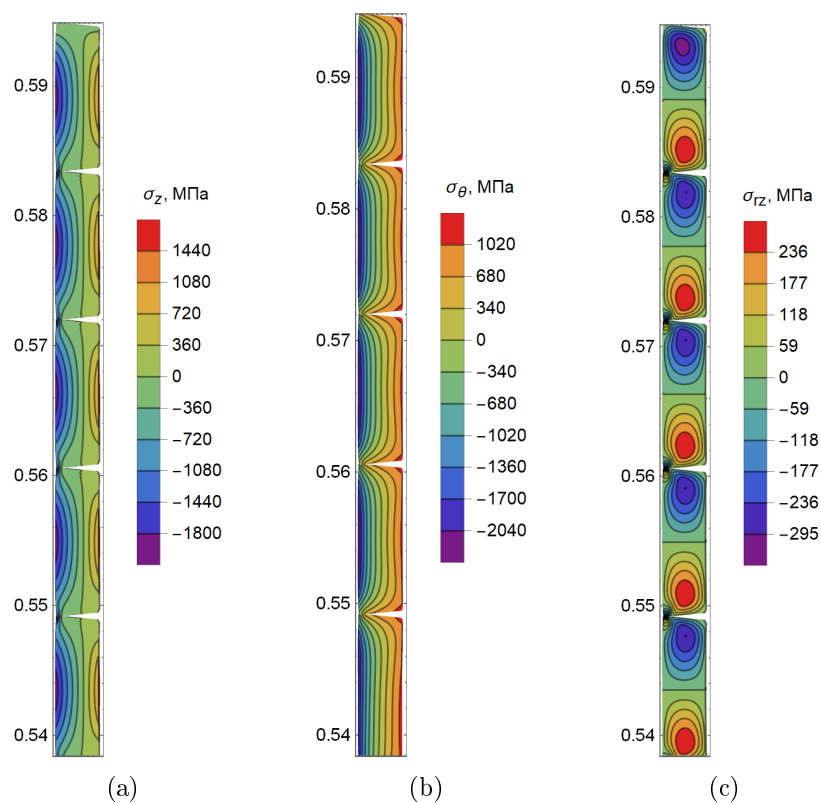


Рис. 10. Двумерные распределения в узлах элементов таблеток: (a) — осевые напряжения; (b) — окружные напряжения; (c) — касательные напряжения

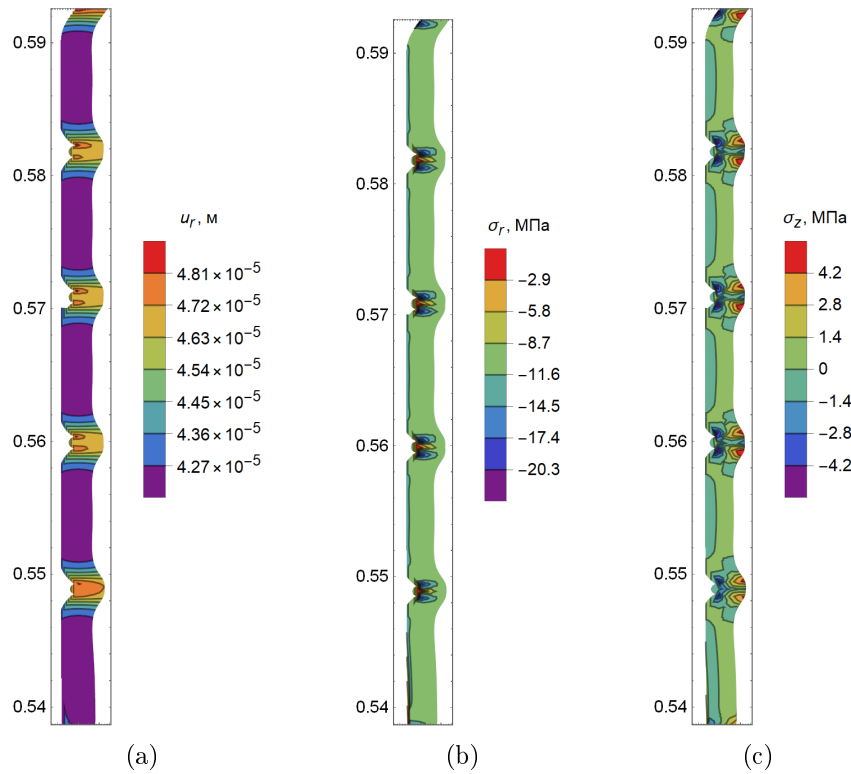


Рис. 11. Двумерные распределения в узлах элементов оболочки: (а) — радиальные перемещения; (б) — радиальные напряжения; (с) — осевые напряжения

5. Заключение

Представлена постановка статической задачи мультиконтактного взаимодействия системы осесимметричных термоупругих тел в условиях термомеханического нагружения. Изложен численный алгоритм решения подобных задач, основанный на методе конечных элементов. Представлены результаты применения итогового алгоритма для решения демонстрационной задачи, моделирующей некоторые процессы в участке твэла, включающем до 100 таблеток, для режима с постоянной мощностью тепловыделения. Осуществлено сравнение различных численных методов решения, возникающих при дискретизации задачи плохо обусловленных систем линейных уравнений: модифицированных итерационных методов, метода Узава, а также двух вариантов метода Гаусса и обобщенного метода минимальных невязок (GMRES) с итерационным уточнением, позволяющих учитывать выход из контакта отдельных участков контактной границы. Показано, что для небольшого количества таблеток наименьшее количество итераций и время расчета достигаются для метода Гаусса и GMRES, однако, в случае если число топливных таблеток исчисляется десятками штук, наиболее эффективными оказываются модифицированные итерационные методы, при этом минимальное время расчета демонстрирует модифицированный метод Якоби.

Список литературы

- [1] Станкевич И. В., Яковлев М. Е., Си Ту Хтет. Разработка алгоритма контактного взаимодействия на основе альтернирующего метода Шварца // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2011. Спец. вып. Прикладная математика. С. 134–141.
- [2] Babuska I. The finite element method with penalty // Mathematics of Computation. 1973. Vol. 27. P. 221–228. <https://doi.org/10.2307/2005611>.
- [3] Le Tallec P., Sassi T. Domain decomposition with nonmatching grids: augmented Lagrangian approach // Mathematics of Computation. 1995. Vol. 64. P. 1367–1396. <https://doi.org/10.1090/s0025-5718-1995-1308457-5>.
- [4] Wriggers P. Computational Contact Mechanics. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag. 2006. 520 p.
- [5] Lamichhane B. P. Higher Order Mortar Finite Elements with Dual Lagrange Multiplier Spaces and Applications. Stuttgart: Universitat Stuttgart. 2006. 190 p.
- [6] Аронов П. С., Галанин М. П., Родин А. С. Математическое моделирование контактного взаимодействия элементов твэла с учетом ползучести на основе mortar-метода. // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2020. № 110. 24 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2020-110>.
- [7] Аронов П. С., Галанин М. П., Родин А. С. Сравнение методов решения систем линейных уравнений, возникающих в задачах с изменяющейся конфигурацией контактной поверхности // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2021. № 39. 28 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2021-39>.
- [8] Котович А. В., Станкевич И. В. Решение задач теплопроводности методом конечных элементов. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2010. 84 с.
- [9] Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2008. 512 с.
- [10] Розин Л. А. Вариационные постановки задач для упругих систем. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1978. 222 с.
- [11] Wohlmuth B. I. A mortar finite element method using dual spaces for the Lagrange multiplier // SIAM Journal on Numerical analysis. 2000. Vol. 38. (No. 3). P. 989–1012. <https://doi.org/10.1137/s0036142999350929>.
- [12] Станкевич И. В., Аронов П. С. Математическое моделирование контактного взаимодействия двух упругих тел с помощью mortar-метода //

Математика и математическое моделирование. 2018. № 3. С. 26–44.
<https://doi.org/10.24108/mathm.0318.0000112>.

- [13] Быченков Ю. В., Чижонков Е. В. Итерационные методы решения седловых задач. М.: БИНОМ, 2010. 349 с.
- [14] Темам Р. Уравнения Навье — Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981. 408 с.
- [15] Саад Ю. Итерационные методы для разреженных линейных систем. В 2 т. Т. 1: пер. с англ. М.: Изд-во МГУ, 2013. 326 с.
- [16] Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. М.: Мир, 2001. 435 с.

Содержание

1. Введение	3
2. Математическая постановка задачи	3
3. Решение системы линейных уравнений, полученной после дискретизации задачи	7
3.1. Прямые методы	10
3.2. Итерационные методы	11
3.3. Оценка значений оптимальных итерационных параметров для MJOR	14
4. Результаты численного моделирования	16
5. Заключение	23