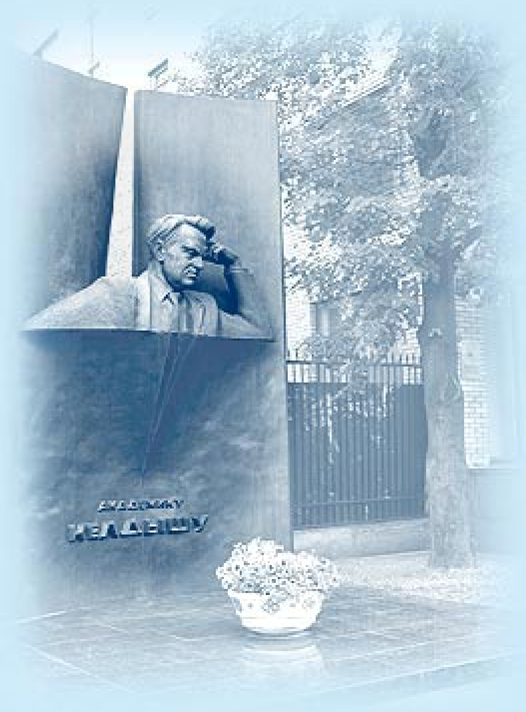
ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 40 за 2022 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

М.В. Алексеев, Е.Б. Савенков

Математическая модель двухфазной гиперупругой среды. «Скалярный» случай

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Алексеев М.В., Савенков Е.Б. Математическая модель двухфазной гиперупругой среды. «Скалярный» случай // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2022. № 40. 63 с. **https://doi.org/10.20948/prepr-2022-40**
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2022-40

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. КЕЛДЫША

М.В. Алексеев, Е.Б. Савенков

Математическая модель двухфазной гиперупругой среды. «Скалярный» случай

Москва, 2022

М.В. Алексеев, Е.Б. Савенков, Математическая модель двухфазной гиперупругой среды. «Скалярный» случай

Аннотация

Работа посвящена феноменологическому выводу многоскоростной многожидкостной модели динамики многофазной среды с гиперупругим поведением фаз с использованием процедуры Колмана-Нолла. Предложенная модель может рассматриваться как обобщение многофазной модели Баера-Нунциато шаровым тензором напряжений. В работе представлены известные частные случаи, к которым сводится полученная многофазная модель. Полученная модель является полностью неравновесной, при этом совместное деформирование фаз определяется единственным скалярным параметром, представляющим собой объемную долю фаз.

Ключевые слова: гиперупругость, модель Баера-Нунциато, процедура Колмана-Нолла, модель Годунова-Роменского, многофазные модели

M.V. Alekseev, E.B. Savenkov, Two-phase hyperelastic model. “Scalar” case

Abstract

The work is devoted to the phenomenological derivation of the multivelocity multifluid model to describe dynamics of the multiphase medium with hyperelastic phase behavior using the Coleman-Noll procedure. The proposed model can be considered as a generalization of the Baer and Nunziato type multiphase models with isotropic stress tensor. The paper presents the well-known particular cases to which the obtained multiphase model can be reduced. The resulting model is completely non-equilibrium, and the joint deformation of the phases is described by a single scalar parameter, which is the volume fraction of the phases.

Key words and phrases: hyperelasticity, Baer-Nunziato model, Coleman-Noll procedure, Godunov-Romenskii model, multiphase models.

1 Введение

Настоящая работа посвящена выводу многоскоростной многожидкостной модели динамики многофазной среды с гиперупругим поведением фаз. Предложенная модель может рассматриваться как обобщение хорошо известной модели Баера-Нуциато [Baer1983], которая первоначально была разработана для описания процесса перехода дефлаграции в детонацию и явно предполагает, что тензор напряжений фаз, определяемый уравнением состояния среды, является шаровым.

Модель Баера-Нунциато была выведена в рамках методов рациональной механики сплошной среды, предложенной и развитой в работах К. Труселлла и его научной школы [Truesdell1952, Truesdell1969, Coleman1974, Coleman1974a]. Основные принципы построения соответствующих математических моделей многофазных сред в рамках рациональной термомеханики подробно рассмотрены в фундаментальной монографии [Truesdell1969]. Дальнейшее развитие данного подхода представлено и подробно описано в обзорной работе [Drumheller1983], которая не потеряла свою актуальность до настоящего времени. Упомянутая выше модель Баера-Нунциато является вариантом реализации общих методов построения многофазных моделей, пригодным для решения конкретного класса прикладных задач. Более сложные модели рассматриваемого типа, в том числе гиперупругие, имели скорее теоретический характер, не применялись для решения прикладных задач, практически не исследовались с вычислительной точки зрения и скорее иллюстрировали применение общих принципов построения.

Однако в последние десятилетия эйлеровы многоскоростные модели динамики многофазных сред стали рассматриваться как эффективная альтернатива лагранжевым и смешанным эйлерово-лагранжевым подходам, традиционно применяемым для математического моделирования многоматериальных сред с прямым разрешением эволюции межфазных границ. В результате за это время был предложен целый ряд многофазных моделей с гиперупругим поведением фаз. Они отличаются различной термодинамической и механической «степенью равновесности», а также использованием одного (для смеси) или нескольких (для каждой фазы) тензоров дисторсии для описания деформации фаз. Отметим следующие работы по данной теме: [Cook2017] (один тензор диторсии для смеси или по числу фаз тензоров дисторсии, один закон сохранения импульса и энергии для смеси), [Ghaisas2015] (число тензоров дисторсии по числу фаз, неравновесная по давлению, односкоростная), [Subramaniam2017] (число тензоров дисторсии по числу фаз, равновесная по температуре и давлению), [Ndanou2015] (число тензоров дисторсии по числу фаз, равновесная по скоростям и давлениям).

Несмотря на существующий теоретический задел, подавляющее большинство моделей, используемых в этих работах, не выводятся: вид уравнений модели и определяющих соотношений постулируется, а их термодинамическая корректность, то есть справедливость соответствующего энтропийного неравенства, проверяется постфактум. Такой подход гарантирует термодинамическую корректность модели — однако не позволяет точно охарактеризовать соответствующие ей допущения и степень их общности (в том числе, — их избыточность). Как следствие, затруднительно указать область их применимости. Несомненно, это является проблемой при применении уравнений модели для решения содержательных задач.

Сколь-либо полный системный вывод многофазных многоскоростных моделей, являющихся гиперупругим обобщением модели Баера-Нунциато, представлен в работе [Drumheller2000] и основанной на ней работе [Baer2021].

В настоящей работе представлен систематический вывод гиперупругого обобщения модели Баера-Нунциато исходя из «первых принципов» рациональной термомеханики сплошной среды. Отправной точкой вывода является выбор (а) конкретного набора первичных термодинамических переменных модели; (б) общей формы основных законов сохранения без уточнения вида обменных слагаемых и (в) энтропийного неравенства в подходящем виде. Полный набор определяющих соотношений модели, включая вид обменных слагаемых, устанавливается в ходе вывода. Особенностью настоящей модели, отличающей ее от других, является наличие полного, не шарового, тензора термодинамических напряжений. В цитированных выше работах такой случай не рассматривается, но указывается как формальное обобщение. В настоящей работе он является естественным результатом — более того, тензор интерфейсных напряжений не может быть формально задан шаровым.

Тем не менее построенная модель не является наиболее общей — при ее выводе существенным является допущение о том, что совместное деформирование гиперупругих фаз может быть описано с использованием единственного скалярного параметра — объемной доли фазы. Более общий случай, рассмотренный в [Drumheller2000], предполагает использование для этого, помимо уже упомянутой объемной доли, так называемого «тензора растяжений» (“distention tensor”). Помимо этого, в настоящей работе предполагается отсутствие обмена массой между фазами. Это условие, как показано в работе [Drumheller2000], является крайне существенным с точки зрения выбора параметров состояния модели.

Обобщения предложенной модели на оба этих случая являются предметом будущей работы. Здесь следует отметить, что использование «тензора растяжений» для описания совместного деформирования фаз является проблематичным на практике в силу сложности построения соответствующего набора конкретных определяющих соотношений для него. По этой причине «практичный» вариант полученной в [Drumheller2000] и применяемой в [Baer1983] модели предполагает, что он является шаровым и, при отсутствии обмена массой между фазами, определяется их объемными долями.

Укажем отличия (помимо сформулированных выше) предложенной в настоящей работе модели от моделей [Drumheller2000] и [Baer2021]:

1. В качестве первичных переменных используются истинные плотности фаз.

2. Деформация фазы описывается «истинным» тензором дисторсии, который отнесен к объему фазы (в работе [Drumheller2000] используется «средний» тензор дисторсии, отнесенный к объему пространства).

3. Так называемые интерфейсные напряжения являются полными (то есть не шаровыми) тензорами. Это является следствием вывода определяющих уравнений модели, а не допущением, от которого можно отказаться. В силу этого, модели, предложенные в работах [Drumheller2000] и [Baer2021] не являются частными случаями рассматриваемой новой модели.

Как и другие модели рассматриваемого класса, построенная в настоящей работе модель является чисто эйлеровой и полностью неравновесной. С точки зрения непосредственно вывода, как уже отмечалось, настоящая работа является, на взгляд авторов, наиболее полной.

Отметим, что в рамках феноменологической термомеханики существуют другие подходы, пригодные для построения моделей рассматриваемого класса и отличные от традиционных подходов школы рациональной термомеханики К. Трусделла. Прежде всего, формализм на основе термодинамически согласованных систем законов сохранения систем уравнений, развиваемый в работах [Годунов1961, Годунов1998, Romensky1998, Peshkov2018, Gavrilyuk2011]. Многофазные гиперупругие модели, разработанные в рамках указанного подхода изложены, в частности, в работе [Роменский2011]. Отметим также важную монографию [Блохин1994], которая предлагает альтернативный общий и системный подход к конструированию многофазных многоскоростных моделей механики сплошной среды.

2 Основные обозначения

Будем обозначать векторы строчными буквами жирным шрифтом: $\boldsymbol{u}$; тензоры второго ранга — прописными буквами жирным прямым шрифтом: $\boldsymbol{F}$; скалярные величины — шрифтом с нормальным начертанием: F_{ij}, A, u_k, φ. Здесь и далее, если не сказано противное, по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Будем рассматривать движение среды в некоторой области евклидова пространства $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$. Каждой точке $M \in \mathcal{B}$ поставим во взаимнооднозначное соответствие ее радиус-вектор $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ с декартовыми координатами в прямоугольной декартовой системе координат $\mathcal{O}x_1x_2x_3$ с базисными векторами $\boldsymbol{e}_i$, $i = \overline{1,3}$. Координаты x_i будем называть эйлеровыми или пространственными координатами точки M. Помимо этого, введем координаты $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ той же самой материальной точки M в прямоугольной декартовой системе координат $\mathcal{O}\xi_1\xi_2\xi_3$ с базисными векторами $\boldsymbol{r}_i$, которые полагаем не меняющимися при любых движениях сплошной среды. Координаты ξ_i будем называть лагранжевыми или материальными координатами точки среды.

Движение точки M сплошной среды в декартовой системе координат $\boldsymbol{e}_i$ определяется параметризованным временем t отображением $\boldsymbol{\phi}$:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\phi}\left(\boldsymbol{\xi}, t\right) = \boldsymbol{x}\left(\boldsymbol{\xi}, t\right), \tag{1}$$

или обратным к нему

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\phi}^{-1}\left(\boldsymbol{x}, t\right) = \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}, t). \tag{2}$$

В базисе $\boldsymbol{e}_i$ какой-либо вектор $\boldsymbol{a}$ может быть представлен как $\boldsymbol{a} = a_i\boldsymbol{e}_i$, а тензор $\boldsymbol{A}$ — как $\boldsymbol{A} = A_{ij}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$, где $\otimes$ — диадное (тензорное) произведение векторов. Операцию транспонирования определим как $\boldsymbol{A}^T = A_{ji}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$.

Равенство по определению (присваивание) обозначается символом «≔». В дальнейшем мы будем считать, что по определению

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\nabla}\varphi \coloneqq \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\boldsymbol{e}_k && \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \coloneqq a_i b_i,\\
&\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{a} \coloneqq \frac{\partial a_k}{\partial x_k} = \operatorname{div}\boldsymbol{a}, && \boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{a} \coloneqq \frac{\partial a_j}{\partial x_k}\boldsymbol{e}_k\otimes\boldsymbol{e}_j,\\
&\operatorname{div}\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} \coloneqq \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_i, && \boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{A} \coloneqq \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}\boldsymbol{e}_k\otimes\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j,\\
&\det\boldsymbol{A} \coloneqq \frac{1}{6}\epsilon_{ijk}\epsilon_{mnl}A_{im}A_{jn}A_{kl}, && \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{u} \coloneqq A_{jk}u_k\boldsymbol{e}_j,\\
&\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{A} \coloneqq A_{kj}u_k\boldsymbol{e}_j, && \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} \coloneqq A_{ik}B_{kj}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j,\\
&\boldsymbol{A}:\boldsymbol{B} \coloneqq A_{ij}B_{ij}, && |\boldsymbol{a}|^2 \coloneqq \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = a_i a_i,\\
&\operatorname{tr}\boldsymbol{A} \coloneqq \boldsymbol{A}:\boldsymbol{I} \equiv A_{ii}, && |\boldsymbol{A}|^2 \coloneqq \boldsymbol{A}:\boldsymbol{A} = A_{ij}A_{ij},\\
&\boldsymbol{I} \coloneqq \delta_{ij}\,\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j,
\end{aligned}
$$

где по повторяющимся индексам проводится суммирование. Здесь δ_{ij} — символ Кронекера, ϵ_{ijk} — символ Леви-Чивиты. В частности, из этих определений следуют следующие формулы

$$\boldsymbol{A}:\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}:\boldsymbol{A}, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{C}:(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}:\left(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B}^T\right) = \boldsymbol{B}:\left(\boldsymbol{A}^T\cdot\boldsymbol{C}\right), \tag{4}$$

$$\frac{\partial \det\boldsymbol{A}}{\partial\boldsymbol{A}} = (\det\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{A}^{-T}. \tag{5}$$

Для дальнейшего изложения будут полезны следующие соотношения:

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{\nabla}\otimes(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{A}^T,\\
\boldsymbol{\nabla}\otimes(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{A} + \left(\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{A}^T\right)\cdot\boldsymbol{u},\\
\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a},\\
\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{b})\otimes\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{a}.
\end{gathered}
$$

Также для базисных векторов верны соотношения:

$$(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) \cdot \boldsymbol{e}_k = \delta_{jk}\boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{e}_k \cdot (\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ki}\boldsymbol{e}_j. \tag{6}$$

Главные инварианты произвольного тензора $\boldsymbol{A}$ второго ранга обозначаются как $\mathrm{I}_1(\boldsymbol{A})$, $\mathrm{I}_2(\boldsymbol{A})$ и $\mathrm{I}_3(\boldsymbol{A})$:

$$\mathrm{I}_1(\boldsymbol{A}) \coloneqq \operatorname{tr}\boldsymbol{A}, \quad \mathrm{I}_2(\boldsymbol{A}) \coloneqq \tfrac{1}{2}\left[\mathrm{I}_1^2(\boldsymbol{A}) - \mathrm{I}_1(\boldsymbol{A}^2)\right], \quad \mathrm{I}_3(\boldsymbol{A}) \coloneqq \det\boldsymbol{A}. \tag{7}$$

Полная (субстанциональная, лагранжева, материальная) производная по времени t величины $(\cdot)$, которая может быть тензором любого ранга, обозначается $\dot{(\cdot)}$ и определена как

$$\dot{(\cdot)} = \partial_t\left(\cdot\right) + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} \otimes \left(\cdot\right). \tag{8}$$

Частная производная по времени t обозначается как $\partial_t\left(\cdot\right)$. Определим двухточечный тензор градиента деформации как [Годунов1998,Димитриенко2009]

$$\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{\xi}, t\right) \coloneqq \boldsymbol{r}_i \otimes \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi_i} = \frac{\partial x_j}{\partial \xi_i}\boldsymbol{r}_i \otimes \boldsymbol{e}_j = F_{ij}\boldsymbol{r}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \tag{9}$$

и обратный к нему тензор дисторсии как

$$\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{x}, t\right) \coloneqq \boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{e}_i \otimes \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x_i} = \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{r}_j = A_{ij}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{r}_j. \tag{10}$$

Помимо этого, можно показать [Годунов1998], что для тензора дисторсии (10) выполнено условие совместности:

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{r}_j = \frac{\partial A_{kj}}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{r}_j.$$

Из него, в частности, следует формула

$$\left(\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{A}^T\right) \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{A}\right). \tag{11}$$

3 Формулировка однофазной модели

В качестве базовой будем рассматривать модель для описания поведения однофазной однокомпонентной гиперупругой сплошной среды [Годунов1972,Годунов1998,Пешков2016]. Данная модель сформулирована в рамках эйлерова описания среды и может быть использована при больших деформациях.

Пусть состояние сплошной среды характеризуется распределением плотности ρ, внутренней энергии $\mathcal{U}$, энтропии η, полем скоростей $\boldsymbol{u}$ и тензором напряжений $\boldsymbol{T}$. Диссипативными процессами (теплопроводность, пластические и вязко-упругие процессы деформации и так далее), а также внешними силами будем пренебрегать. Тогда соответствующие законы сохранения имеют вид [Годунов1998]:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}) = 0, \tag{12a}$$

$$\partial_t (\rho \boldsymbol{u}) + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u} - \boldsymbol{T}) = 0, \tag{12b}$$

$$\partial_t (\rho E) + \nabla \cdot (\rho E \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{T}) = 0, \tag{12c}$$

где $E = \mathcal{U} + 1/2|\boldsymbol{u}|^2$ — полная энергия среды.

Для замыкания системы (12) необходимо ввести меру деформации и соответствующие определяющие соотношения. При рассмотрении тензора $\boldsymbol{F}$ в качестве такой меры деформации уравнение состояния приобретает вид:

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\boldsymbol{F}, \eta). \tag{13}$$

В этом случае [Годунов1998] тензор деформации определяется в соответствии с формулой Мурнагана как:

$$\boldsymbol{T} = \rho \boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{F}^T}. \tag{14}$$

Замечание 3.1. В том случае, если движение среды (то есть зависимость (1) и обратная к ней (2)) — взаимно однозначное и непрерывное отображение, то следствием закона сохранения массы (12a), является следующее выражение (закон сохранения массы в лагранжевых переменных [Димитриенко2009]):

$$\rho = \rho_0 / \det \boldsymbol{F} = \rho_0 \det \boldsymbol{A}, \tag{15}$$

где $\rho = \rho(\boldsymbol{x}, t)$, $\rho_0 = \rho_0(\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}, t), t)$ — плотности в эйлеровой и лагранжевой системах координат соответственно. Для вывода (15) достаточно проинтегрировать уравнение (12a) по материальному объему среды, использовать транспортную теорему Рейнольдса(правило дифференцирования интеграла по подвижному объему) и перейти к интегрированию в лагранжевых координатах.

В системе уравнений (12) отсутствует уравнение, которое описывает эволюцию тензора дисторсии, т.е. динамику деформации сплошной среды. Для вывода этого уравнения рассмотрим субстанциональную производную $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ от лагранжевой координаты какой-либо материальной точки среды. Поскольку вдоль траектории частицы ее лагранжевы координаты не меняются, то есть $\dot{\boldsymbol{\xi}}\,(\boldsymbol{x}, t) = 0$, то:

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}\,(\boldsymbol{x}, t) = \partial_t \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \otimes \boldsymbol{\xi} = 0. \tag{16}$$

С учетом определения тензора дисторсии (10) и условий совместности (11) вычислим градиент от (16):

$$\begin{aligned}
\nabla \otimes \left(\dot{\boldsymbol{\xi}}\,(\boldsymbol{x}, t)\right) &= \boldsymbol{\nabla} \otimes (\partial_t \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{\xi}) = \\
&= \partial_t \boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{\xi} + (\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}) \cdot (\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{\xi}) + \left(\boldsymbol{\nabla} \otimes (\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{\xi})^T\right) \cdot \boldsymbol{u} = \\
&= \partial_t \boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{\xi} + (\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}) \cdot (\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \otimes (\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{\xi})) = \\
&= \partial_t \boldsymbol{A} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{A} = 0.
\end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$\dot{\boldsymbol{A}} = -\left(\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}\right) \cdot \boldsymbol{A}. \tag{17}$$

Это условие называется динамическим условием совместности деформации и скоростей [Димитриенко2009].

Замечание 3.2. Можно показать, что уравнение совместности (17) является материально индифферентным, см. вывод в приложении C, в случае $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{0}$.

Далее уравнение (17) рассматривается как первичное уравнение (то есть как определение тензора дисторсии), дополняющее систему (12). В результате систему уравнений (12) можно записать в следующем виде:

$$\partial_t \boldsymbol{A} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{A} = 0, \tag{18a}$$

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}) = 0, \tag{18b}$$

$$\partial_t (\rho \boldsymbol{u}) + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u} - \boldsymbol{T}) = 0, \tag{18c}$$

$$\partial_t (\rho E) + \nabla \cdot (\rho E \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{T}) = 0, \tag{18d}$$

Первичными переменными задачи здесь являются $\boldsymbol{A}$ — тензор дисторсии, ρ — плотность среды, $\boldsymbol{u}$ — поле скоростей, $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\boldsymbol{A}, \eta)$ — внутренняя энергия, η — энтропия. Система дополняется уравнением состояния (13). Тензор напряжения среды $\boldsymbol{T}$ определяется согласно формуле Мурнагана (14).

Система уравнений (18) записана в эйлеровых переменных. С использованием лагранжевой производной по времени она может быть записана как:

$$\dot{\boldsymbol{A}} = -(\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{A}, \tag{19a}$$

$$\dot{\rho} = -\rho \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u}, \tag{19b}$$

$$\rho \dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{T}, \tag{19c}$$

$$\rho \dot{\mathcal{U}} = \boldsymbol{T} : \boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}. \tag{19d}$$

Замечание 3.3. Отметим, что в *рассматриваемом случае* соотношения (19a), (19b), (15) не являются независимыми. Покажем, что из (15) и (19a) следует (19b). Из соотношения (15) можно заметить, что $\rho = \rho(\rho_0, \boldsymbol{A})$. Тогда, используя соотношение (19a), для материальной производной плотности получим:

$$\dot{\rho} = \frac{\partial \rho}{\partial \boldsymbol{A}} : \dot{\boldsymbol{A}} = \frac{\partial \rho}{\partial \boldsymbol{A}} : (-(\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{A}).$$

Для производной плотности по компонентам тензора дисторсии можно записать, используя соотношение (15) и (5)

$$\frac{\partial \rho}{\partial \boldsymbol{A}} = \frac{\partial \rho_0 \det \boldsymbol{A}}{\partial \boldsymbol{A}} = \rho_0 \frac{\partial \det \boldsymbol{A}}{\partial \boldsymbol{A}} = (\rho_0 \det \boldsymbol{A}) \boldsymbol{A}^{-T} = \rho \boldsymbol{A}^{-T}.$$

Окончательно имеем с учетом (3) и (4)

$$\dot{\rho} = -\rho \boldsymbol{A}^{-T} : ((\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{A}) = -\rho (\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}) : \left(\boldsymbol{A}^{-T} \cdot \boldsymbol{A}^{T}\right) = -\rho (\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}) : \boldsymbol{I} = -\rho \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u}.$$

Таким образом, уравнения (19a), (19b) и (15) являются связанными. Следствием этого является то, что из системы уравнений (19) можно исключить одно из них, предполагая выполнение условия (15).

Закон сохранения массы в виде уравнения неразрывности (19b) и уравнение (19a) для дисторсии являются независимыми в случае, когда дисторсия $\boldsymbol{A}$ и движение среды (1) не могут быть связаны соотношением (9) и (10). Такие ситуации возникают в задачах описания пластического течения, разрушения среды, динамики дислокаций [Годунов1998].

Система уравнений (19) должна быть дополнена уравнением состояния вида $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\boldsymbol{A}, \eta)$.

Описанная гиперупругая модель обладает рядом особенностей:

1. При соответствующем выборе уравнения состояния она представляет собой гиперболическую систему уравнений первого порядка [Годунов1998], что позволяет привлекать хорошо изученные методы решения [Barton2009a, Barton2009b, Dumbser2016];

2. При подходящем выборе уравнения состояния она вырождается в классическую систему уравнений Эйлера гидродинамики;

3. Она имеет обобщения, пригодные для описания вязких и пластических эффектов, а также разрушения [Пешков2016, Gabriel2021, Пешков2019].

4 Вывод многофазной модели

В настоящем разделе представлен вывод модели типа Баера-Нунциато для описания динамики двухфазной смеси несмешивающихся фаз («immiscible mixture»). Термин «несмешивающиеся фазы» означает, что в набор параметров состояния фаз модели входят объемные доли фаз.

Рассматривается простейший вариант модели, в котором условия совместной деформации фаз определяются единственным параметром — объемной долей фазы. Построенная модель является неравновесной. Каждая фаза описывается собственным набором переменных, в число которых входит скорость и набор термодинамических параметров состояния. Взаимодействие фаз определяется обменными слагаемыми, входящими в уравнения законов сохранения консервативных величин.

Последовательность изложения имеет следующий вид. Сначала вводятся основные понятия, связанные с описанием движения среды (как параметризованного временем отображения отсчетной конфигурации в актуальную). Основное внимание уделяется определению тензоров дисторсии фаз и формулировке закона сохранения массы. Последний существенно отличается от остальных (законов сохранения импульса и энергии), так как, по существу, связан с движением среды как геометрическим отображением и не связан с конкретными физическими процессами, определяющими это движение.

Далее рассматривается полная система уравнений модели, которая постулируется с точностью до вида определяющих соотношений. Она включает в себя законы сохранения массы, импульса и энергии. Они дополняются уравнением состояния и энтропийным неравенством, выражающим второй закон термодинамики.

После этого применяется процедура Колмана-Нолла, суть которой — использование энтропийного неравенства как ограничения на возможный вид определяющих соотношений модели.

Модель, описывающая эволюцию многоскоростного многофазного континуума, определяемая составом и формой входящих в нее уравнений, может иметь различный вид и быть построена различными способами. В дальнейшем при построении модели будем руководствоваться так называемыми «аксиомами Трусделла» [Truesdell2004], суть которых — указать структуру многофазной модели с учетом того, как устроены более простые, однофазные модели. В качестве однофазного «предельного» случая многофазной гиперупругой модели здесь выступает описанная в разделе 3 гиперупругая модель Годунова-Роменского. При выводе модели динамики многофазных сред используются (среди прочих; полный список аксиом метафизики Трусделла нам далее не понадобится, неуказанные аксиомы выполняются тождественно и не влияют на вывод модели) два предположения:

1. Поведение каждой фазы совпадает с поведением однофазной среды за исключением случаев межфазного взаимодействия (обмен импульсом и энергией на межфазных границах);

2. Законы сохранения для смеси должны иметь такой же вид, как и для однофазной среды и следовать из суммирования законов сохранения для каждой из фаз.

В целом будем следовать обоснованной методике, предложенной в рамках рациональной механики сплошных сред [Truesdell2004] и использованной, в частности, в оригинальной работе [Baer1983].

4.1 Основные определения и «геометрические» уравнения

Будем считать, что двухфазная среда описывается двумя взаимопроникающими континуумами, присутствующими в каждой точке $\boldsymbol{x}$ пространства $\mathbb{R}^3$ в каждый момент времени $t \geqslant 0$. Состояние континуумов описывается одинаковым набором параметров состояния. Перемещение материальных точек континуумов $p = 1, 2$ задается определенным во всем пространстве отображением $\boldsymbol{x}^p = \boldsymbol{\phi}^p(\boldsymbol{\xi^p}, t)$, где $\boldsymbol{\xi^p}$ — лагранжевы координаты материальных точек континуума p, $\boldsymbol{x}^p$ — эйлерова координата лагранжевой точки $\boldsymbol{\xi}^p$. Соответствующие поля скоростей определяются как $\boldsymbol{u}^p = \boldsymbol{u}^p(t, \boldsymbol{x}) = \partial_t \boldsymbol{\phi}^p$. Континуумы будем считать соответствующими одной определенной фазе и в дальнейшем будем отождествлять эти термины.

Движение, дисторсия и плотность

Пусть элемент сплошной среды объемом V состоит из двух несмешивающихся фаз с номерами $p = 1, 2$. Обозначим объем, занимаемый каждой фазой, как V^p. Будем считать, что присутствующие в объеме V фазы заполняют его целиком, то есть

$$V^{(1)} + V^{(2)} = V. \tag{20}$$

Введём объемную долю $\alpha^p\left(\boldsymbol{x}, t\right)$ фазы с номером p как $\alpha^p = V^p/V$. Тогда условие (20) можно переписать в виде

$$\sum_{p=1,2} \alpha^p = 1. \tag{21}$$

Замечание 4.1. Условия (20) и (21) являются внешними ограничениями, которые накладываются на движение среды. В ситуациях, отличных от рассматриваемой в настоящей работе, они могут не выполняться (например, это справедливо для сыпучих сред).

Введем среднюю плотность среды ρ как:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{\gamma^{(1)}V^{(1)} + \gamma^{(2)}V^{(2)}}{V} = \alpha^{(1)}\gamma^{(1)} + \alpha^{(2)}\gamma^{(2)} = \rho^{(1)} + \rho^{(2)}, \tag{22}$$

а также средний импульс среды $\rho\boldsymbol{u}$,

$$\rho\boldsymbol{u} = \alpha^{(1)}\gamma^{(1)}\boldsymbol{u}^{(1)} + \alpha^{(2)}\gamma^{(2)}\boldsymbol{u}^{(2)} = \rho^{(1)}\boldsymbol{u}^{(1)} + \rho^{(2)}\boldsymbol{u}^{(2)}, \tag{23}$$

и среднюю полную энергию среды E,

$$\rho E = \alpha^{(1)}\gamma^{(1)}E^{(1)} + \alpha^{(2)}\gamma^{(2)}E^{(2)} = \rho^{(1)}E^{(1)} + \rho^{(2)}E^{(2)}. \tag{24}$$

Истинная плотность $\gamma^p\left(\boldsymbol{x}, t\right)$ фазы с номером p равна

$$\gamma^p = \frac{m^p}{V^p}, \tag{25}$$

а средняя плотность ρ^p фазы с номером p —

$$\rho^p = \alpha^p\gamma^p. \tag{26}$$

Отметим, что средняя плотность смеси

$$\rho = \sum_{p=1,2} \rho^p. \tag{27}$$

Далее будем считать, что фазы не обмениваются массой (в частности, в среде отсутствуют химические реакции).

Замечание 4.2. Это условие существенно. При добавлении обменных массовых слагаемых изменится множество параметров состояния системы — как показано в работе [Drumheller2000], для ее описания будет недостаточно использовать истинные или средние плотности, объемные доли фаз и их дисторсию.

Отметим, что именно такой подход изначально применяется в оригинальной модели Баера-Нунциато, описанной в работе [Baer1983]. Как показано в работе [Drumheller2000], построенная модель не вполне корректна, если происходит обмен массой между фазами — хотя именно для такого типа задач (переход дефлаграции в детонацию), модель Баера-Нунциато и создавалась.

Постулируем, что истинные плотности фаз могут быть определены как

$$\gamma^p = \gamma_0^p \det \boldsymbol{A}^p, \tag{28}$$

где γ_0^p — истинная плотность фазы p в отсчетной конфигурации, $\boldsymbol{A}^p$ — «истинный» тензор дисторсии (термин «истинный» здесь обозначает, что уравнение (28) определяет истинную, а не среднюю плотность фазы). Уравнение для эволюции последнего по определению постулируются в виде:

$$\dot{\boldsymbol{A}}^p = -\left(\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}^p\right) \cdot \boldsymbol{A}^p + \boldsymbol{l}^p, \tag{29}$$

где $\boldsymbol{l}^p$ — обменное слагаемое, связанное с выполнением условий совместного деформирования фаз. Субстанциональная (материальная, лагранжева) производная для каждой из фаз определена аналогично (8)

$$\dot{(\cdot)}^p = \frac{\partial}{\partial t}\left(\cdot\right)^p + \boldsymbol{u}^p \cdot \boldsymbol{\nabla} \otimes \left(\cdot\right)^p. \tag{30}$$

Отметим, что левая часть уравнения (29) в точности совпадает с уравнением (17). В отличие от однофазного случая, здесь это уравнение не является следствием уравнения движения среды, а постулируется как первичное соотношение.

Далее будем считать объемные доли α_p первичными параметрами состояния среды, а уравнение (26) — определением средней плотности фазы. Очевидно, что ввиду определения (28) и соотношения (26) тензор $\boldsymbol{l}^p$ не может быть выбран произвольно.

Определим, каким условиям должен удовлетворять тензор $\boldsymbol{l}^p$. Из (29) следует, что

$$\dot{\gamma}^p = \frac{\partial \gamma^p}{\partial \boldsymbol{A}^p} : \dot{\boldsymbol{A}}^p = \frac{\partial \gamma^p}{\partial \boldsymbol{A}^p} : \left(-\left(\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}^p\right) \cdot \boldsymbol{A}^p + \boldsymbol{l}^p\right). \tag{31}$$

Для первого множителя с учетом (28) и (5) можно записать

$$\frac{\partial \gamma^p}{\partial \boldsymbol{A}^p} = \frac{\partial \gamma_0^p \det \boldsymbol{A}^p}{\partial \boldsymbol{A}^p} = \gamma_0^p \frac{\partial \det \boldsymbol{A}^p}{\partial \boldsymbol{A}^p} = \gamma_0^p \det \boldsymbol{A}^p \left(\boldsymbol{A}^p\right)^{-T} = \gamma^p \left(\boldsymbol{A}^p\right)^{-T}. \tag{32}$$

Из (31) и (32) следует, что:

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}^p = -\gamma^p \left(\boldsymbol{A}^p\right)^{-T} : \left(\left(\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}^p\right) \cdot \boldsymbol{A}^p\right) + \gamma^p \left(\boldsymbol{A}^p\right)^{-T} : \boldsymbol{l}^p = \\ = -\gamma^p \left(\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}^p\right) : \left(\boldsymbol{A}^p \cdot \left(\boldsymbol{A}^p\right)^{-1}\right) + \gamma^p \left(\boldsymbol{A}^p\right)^{-T} : \boldsymbol{l}^p = \\ = -\gamma^p \left(\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}^p\right) : \boldsymbol{I} + \gamma^p \left(\boldsymbol{A}^p\right)^{-T} : \boldsymbol{l}^p = -\gamma^p \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u}^p + \gamma^p \left(\boldsymbol{A}^p\right)^{-T} : \boldsymbol{l}^p.\end{aligned}$$

Таким образом, следствием уравнений (29) и (28) и сделанных допущений является следующее уравнение, описывающее баланс истинных плотностей фаз:

$$\dot{\gamma}^p = -\gamma^p \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u}^p + \gamma^p \left(\boldsymbol{A}^p\right)^{-T} : \boldsymbol{l}^p. \tag{33}$$

Получим теперь уравнение для эволюции средней плотности фазы, определенной соотношением (26). Из (26) и (33) следует, что

$$\begin{aligned}\dot{\rho}^p = \dot{\overline{\alpha^p \gamma^p}} = \alpha^p \dot{\gamma}^p + \dot{\alpha}^p \gamma^p = -\alpha^p \gamma^p \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u}^p + \alpha^p \gamma^p \left(\boldsymbol{A}^p\right)^{-T} : \boldsymbol{l}^p + \gamma^p \dot{\alpha}^p = \\ = -\rho^p \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u}^p + \rho^p \left(\boldsymbol{A}^p\right)^{-T} : \boldsymbol{l}^p + \gamma^p \dot{\alpha}^p,\end{aligned}$$

или

$$\partial_t \rho^p + \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\rho^p \boldsymbol{u}^p\right) = \rho^p \left(\boldsymbol{A}^p\right)^{-T} : \boldsymbol{l}^p + \gamma^p \dot{\alpha}^p. \tag{34}$$

В силу того, что средняя плотность ρ^p фазы является консервативной величиной (в отличие от ее истинной плотности γ^p), получаем:

$$\rho^p \left(\boldsymbol{A}^p\right)^{-T} : \boldsymbol{l}^p + \gamma^p \dot{\alpha}^p = 0,$$

или

$$\left(\boldsymbol{A}^p\right)^{-T} : \boldsymbol{l}^p = -\frac{\dot{\alpha}^p}{\alpha^p}. \tag{35}$$

Отметим, что в силу того, что $\boldsymbol{A}^p$ — невырожденный тензор и $\dot{\alpha}^p \not\equiv 0$, то $\boldsymbol{l}^p \not\equiv 0$. В результате следствием введенных выше определений и условия (35) является закон сохранения массы фазы с индексом p в виде

$$\dot{\rho}^p = -\rho^p \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u}^p. \tag{36}$$

Таким образом, приведенный вид обменного слагаемого в уравнении на компоненты тензора дисторсии обеспечивает корректный вид уравнения неразрывности в многофазном случае.

Замечание 4.3. При выборе обменного слагаемого согласно условию, сформулированному в уравнении (35), уравнения (29), (36) и (28) являются связанными, как и в однофазном случае. Таким образом, обеспечивается корректное «определение» тензора дисторсии через условие (28), а также соответствие уравнений эволюции компонент тензора дисторсии (29) и закона сохранения масс (36), которые в предельном однофазном случае переходят в свои однофазные аналоги.

Мера деформации

Для инвариантности определяющих соотношений относительно рассматриваемой системы отсчета выберем в качестве меры деформации метрический тензор деформации (тензор Фингера):

$$\boldsymbol{G}^p = \boldsymbol{A}^p \cdot (\boldsymbol{A}^p)^T. \tag{37}$$

Покажем его симметричность:

$$(\boldsymbol{G}^p)^T = \left(\boldsymbol{A}^p \cdot (\boldsymbol{A}^p)^T\right)^T = \boldsymbol{A}^p \cdot (\boldsymbol{A}^p)^T = \boldsymbol{G}^p. \tag{38}$$

Получим эволюционное уравнение для компонентов метрического тензора деформации. Для полной производной метрического тензора имеем

$$\dot{\boldsymbol{G}}^p = \boldsymbol{A}^p \cdot \left(\dot{\boldsymbol{A}}^p\right)^T + \dot{\boldsymbol{A}}^p \cdot (\boldsymbol{A}^p)^T. \tag{39}$$

Из уравнения (39) с учетом (29) получим:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{A}^p \cdot \left[\left(\dot{\boldsymbol{A}}^p\right)^T + ((\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}^p) \cdot \boldsymbol{A}^p)^T - (\boldsymbol{l}^p)^T\right] + \left[\dot{\boldsymbol{A}}^p + (\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}^p) \cdot \boldsymbol{A}^p - \boldsymbol{l}^p\right] \cdot (\boldsymbol{A}^p)^T = \\
&= \boldsymbol{A}^p \cdot \left(\dot{\boldsymbol{A}}^p\right)^T + \dot{\boldsymbol{A}}^p \cdot (\boldsymbol{A}^p)^T + \boldsymbol{A}^p \cdot ((\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}^p) \cdot \boldsymbol{A}^p)^T + (\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}^p) \cdot \boldsymbol{A}^p \cdot (\boldsymbol{A}^p)^T - \left[\boldsymbol{A}^p \cdot (\boldsymbol{l}^p)^T + \boldsymbol{l}^p \cdot (\boldsymbol{A}^p)^T\right] = \\
&= \boldsymbol{A}^p \cdot \left(\dot{\boldsymbol{A}}^p\right)^T + \dot{\boldsymbol{A}}^p \cdot (\boldsymbol{A}^p)^T + \boldsymbol{A}^p \cdot (\boldsymbol{A}^p)^T \cdot (\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}^p)^T + (\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}^p) \cdot \boldsymbol{A}^p \cdot (\boldsymbol{A}^p)^T - \left[\boldsymbol{A}^p \cdot (\boldsymbol{l}^p)^T + \boldsymbol{l}^p \cdot (\boldsymbol{A}^p)^T\right] = \\
&= \dot{\boldsymbol{G}}^p + \boldsymbol{G} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}^p)^T + (\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}^p) \cdot \boldsymbol{G} - \left[\boldsymbol{A}^p \cdot (\boldsymbol{l}^p)^T + \boldsymbol{l}^p \cdot (\boldsymbol{A}^p)^T\right] = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, эволюционное уравнение для метрического тензора деформации имеет вид:

$$\dot{\boldsymbol{G}}^p = -\boldsymbol{G} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}^p)^T - (\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}^p) \cdot \boldsymbol{G} + \boldsymbol{\Phi}^p, \tag{40}$$

где

$$\boldsymbol{\Phi}^p = \boldsymbol{A}^p \cdot (\boldsymbol{l}^p)^T + \boldsymbol{l}^p \cdot (\boldsymbol{A}^p)^T. \tag{41}$$

Получим условие, эквивалентное (35) для обменного слагаемого $\boldsymbol{\Phi}$. Для этого примем, что истинная плотность фазы p определяется компонентами метрического тензора деформации: $\gamma^p = \gamma^p(\boldsymbol{G}^p)$. Помимо этого, из определения $\boldsymbol{G}^p$ согласно уравнению (37) следует, что

$$\det \boldsymbol{G}^p = \det\left(\boldsymbol{A}^p \cdot (\boldsymbol{A}^p)^T\right) = \det \boldsymbol{A}^p \det (\boldsymbol{A}^p)^T = (\det \boldsymbol{A}^p)^2.$$

Тогда уравнение (28) примет вид:

$$\gamma^p = \gamma_0^p \sqrt{\det \boldsymbol{G}^p}.$$

Отсюда получим для материальной производной истинной плотности:

$$\dot{\gamma}^p(\boldsymbol{G}^p) = \frac{\partial \gamma^p}{\partial \boldsymbol{G}^p} : \dot{\boldsymbol{G}}^p. \tag{42}$$

Для первого множителя получим:

$$\frac{\partial \gamma^p}{\partial \boldsymbol{G}^p} = \frac{\partial \gamma_0^p \sqrt{\det \boldsymbol{G}^p}}{\partial \boldsymbol{G}^p} = \frac{\gamma_0}{2\sqrt{\det \boldsymbol{G}^p}} \frac{\partial \det \boldsymbol{G}^p}{\partial \boldsymbol{G}^p} = \frac{\gamma_0}{2\sqrt{\det \boldsymbol{G}^p}} \det \boldsymbol{G}^p (\boldsymbol{G}^p)^{-T} = \frac{1}{2}\gamma^p (\boldsymbol{G}^p)^{-T}.$$

Подставляя уравнение (40) для эволюции метрического тензора деформации в уравнение (42), получим:

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma}^p(\boldsymbol{G}^p) &= \frac{1}{2}\gamma^p (\boldsymbol{G}^p)^{-T} : \left(-\boldsymbol{G}^p \cdot (\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}^p)^T - (\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}^p) \cdot \boldsymbol{G}^p + \boldsymbol{\Phi}^p\right) = \\
&= -\frac{1}{2}\gamma^p (\boldsymbol{G}^p)^{-T} : \left(\boldsymbol{G}^p \cdot (\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}^p)^T\right) - \frac{1}{2}\gamma^p (\boldsymbol{G}^p)^{-T} : ((\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}^p) \cdot \boldsymbol{G}^p) + \frac{1}{2}\gamma^p (\boldsymbol{G}^p)^{-T} : \boldsymbol{\Phi}^p = \\
&= -\gamma^p (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u}^p) + \frac{1}{2}\gamma^p (\boldsymbol{G}^p)^{-T} : \boldsymbol{\Phi}^p.
\end{aligned}$$

Тогда для средней плотности фазы имеем:

$$\begin{gathered}
\dot{\rho}^p = \overset{\bullet}{\overline{(\alpha^p\gamma^p)}} = \alpha^p\dot{\gamma}^p + \dot{\alpha}^p\gamma^p = \\
= -\alpha^p\gamma^p\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}^p + \frac{1}{2}\alpha^p\gamma^p\left(\boldsymbol{G}^p\right)^{-T} : \boldsymbol{\Phi}^p + \gamma^p\dot{\alpha}^p = -\rho^p\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}^p + \frac{1}{2}\rho^p\left(\boldsymbol{G}^p\right)^{-T} : \boldsymbol{\Phi}^p + \gamma^p\dot{\alpha}^p,
\end{gathered}$$

или

$$\partial_t\rho^p + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\rho^p\boldsymbol{u}^p\right) = \frac{1}{2}\rho^p\left(\boldsymbol{G}^p\right)^{-T} : \boldsymbol{\Phi}^p + \gamma^p\dot{\alpha}^p.$$

Следовательно, эквивалентным условию (35) для обменного слагаемого $\boldsymbol{\Phi}^p$ в (40) будет условие:

$$\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{G}^p\right)^{-T} : \boldsymbol{\Phi}^p = -\frac{\dot{\alpha}^p}{\alpha^p}.$$

4.2 Основные уравнения

В соответствии со сформулированными во введении к разделу 4 принципами, многофазная модель строится из основополагающих законов сохранения (12) для каждой из фаз $p = 1, 2$ с учетом обменных слагаемых и определяющих соотношений для истинных тензоров дисторсии фаз. Соответствующая система законов сохранения модели имеет вид:

$$\partial_t\rho^p + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\rho^p\boldsymbol{u}^p\right) = 0, \tag{43a}$$

$$\partial_t\left(\rho^p\boldsymbol{u}^p\right) + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\rho^p\boldsymbol{u}^p\otimes\boldsymbol{u}^p - \boldsymbol{T}^p\right) = -\boldsymbol{T}^{\mathrm{I}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\alpha^p + \boldsymbol{\mathcal{S}}_u^p, \tag{43b}$$

$$\partial_t\left(\rho^pE^p\right) + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\rho^pE^p\boldsymbol{u}^p - \boldsymbol{T}^p\cdot\boldsymbol{u}\right) = -\boldsymbol{T}^{\mathrm{I}} : \left(\boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}\otimes\boldsymbol{\nabla}\alpha^p\right) + \mathcal{S}_E^p, \tag{43c}$$

где $\rho^p = \alpha^p\gamma^p$ — средняя плотность фазы, $\boldsymbol{T}^{\mathrm{I}}$ — интерфейсное напряжение, $\boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}$ — интерфейсная скорость, $\boldsymbol{\mathcal{S}}_u^p$ — обменное слагаемое в законе сохранения импульса, $\mathcal{S}_E^p$ — обменное слагаемое в законе сохранения энергии; согласно сформулированным выше принципам построения многофазной модели, обменные слагаемые должны удовлетворять условиям:

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_u^{(1)} + \boldsymbol{\mathcal{S}}_u^{(2)} = \boldsymbol{0}, \quad \mathcal{S}_E^{(1)} + \mathcal{S}_E^{(2)} = 0. \tag{44}$$

Полная энергия для каждой из фаз определена как

$$E^p = \mathcal{U}^p + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^p\cdot\boldsymbol{u}^p.$$

В дальнейшем будет использована лагранжева форма описанных выше уравнений. Соответствующая система уравнений имеет вид:

$$\dot{\rho}^p = -\rho^p \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u}^p, \tag{45a}$$

$$\rho^p \dot{\boldsymbol{u}}^p = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{T}^p - \boldsymbol{T}^{\mathrm{I}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \alpha^p + \boldsymbol{\mathcal{S}}^p_u, \tag{45b}$$

$$\rho^p \dot{\mathcal{U}}^p = \boldsymbol{T}^p : (\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}^p) - \boldsymbol{T}^{\mathrm{I}} : \Big(\big(\boldsymbol{u}^{\mathrm{I}} - \boldsymbol{u}^p \big) \otimes \boldsymbol{\nabla} \alpha^p \Big) + \mathcal{S}^p_E - \boldsymbol{u}^p \cdot \boldsymbol{\mathcal{S}}^p_u. \tag{45c}$$

Замечание 4.4. Постулируемый вид уравнений (43) или (45) формально может быть обоснован различными способами, как в рамках феноменологических подходов (см., например, [Truesdell1969] или [Drumheller2000]), так и в рамках подходов, основанных на усреднении микромеханических моделей [Drew2006].

Любая из систем (43) и (45) должна быть дополнена следующими определяющими соотношениями:

- определяющим уравнением (29) для тензора дисторсии фазы $p = 1, 2$, которое повторим здесь в виде

$$\dot{\boldsymbol{A}}^p = -\left(\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}^p \right) \cdot \boldsymbol{A}^p + \boldsymbol{l}^p,$$

  где обменное слагаемое $\boldsymbol{l}^p$ удовлетворяет сформулированному в предыдущем разделе соотношению (35).
- определяющим соотношением для объемной доли α_p фазы $p = 1, 2$:

$$\dot{\alpha}^p = f\left(\cdots \right),$$

  где $f\left(\cdots \right)$ — заданная функция параметров состояния системы.
- уравнением состояния для каждой из фаз $p = 1, 2$, которое имеет вид заданной зависимости внутренней энергии фазы от своих естественных переменных, где мера деформации должна быть выражена каким-либо симметричным тензором (в настоящей работе используется введенный ранее метрический тензор деформации для каждой из фаз $\boldsymbol{G}^p$):

$$\mathcal{U}^p = \mathcal{U}^p \left(\alpha^p, \boldsymbol{G}^p, \eta^p \right),$$

  где η^p — энтропия фазы с номером p.

4.3 Уравнения для объемной доли и вид обменного слагаемого для дисторсии

Уравнение для объемной доли

Определяющие соотношения для объемных долей *постулируем* в виде:

$$\partial_t \alpha^p + \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \alpha^p = \mathcal{S}_\alpha^p, \quad p = 1, 2, \tag{46}$$

где $\boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}$ – так называемая интерфейсная скорость, выражение для которой будет определено ниже. Из условия (21) следует, что

$$\mathcal{S}_\alpha^{(2)} = \partial_t \alpha^{(2)} + \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \alpha^{(2)} = -\partial_t \alpha^{(1)} - \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \alpha^{(1)} = -\mathcal{S}_\alpha^{(1)}. \tag{47}$$

Таким образом, условия (44) для обменных слагаемых должны быть дополнены еще одним:

$$\mathcal{S}_\alpha^{(1)} + \mathcal{S}_\alpha^{(2)} = 0. \tag{48}$$

С учетом уравнения (47) получим:

$$\dot{\alpha}^p = \partial_t \alpha^p + \boldsymbol{u}^p \cdot \boldsymbol{\nabla} \alpha^p = \mathcal{S}_\alpha^p + \left(\boldsymbol{u}^p - \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}\right) \cdot \boldsymbol{\nabla} \alpha^p,$$

откуда

$$\dot{\alpha}^p = \mathcal{S}_\alpha^p + \left(\boldsymbol{u}^p - \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}\right) \cdot \boldsymbol{\nabla} \alpha^p = \mathcal{S}_\alpha^p + \left(\left(\boldsymbol{u}^p - \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}\right) \otimes \boldsymbol{\nabla} \alpha^p\right) : \boldsymbol{I}, \quad p = 1, 2. \tag{49}$$

Вид обменного слагаемого для дисторсии

Обменное слагаемое для дисторсии имеет вид (35)

$$\left(\boldsymbol{A}^p\right)^{-T} : \boldsymbol{l}^p = -\frac{\dot{\alpha}^p}{\alpha^p}. \tag{50}$$

Как видно из этого уравнения, которое представляет собой одно уравнение относительно девяти компонентов тензора $\boldsymbol{l}^p$, вид последнего может быть достаточно общим. Попробуем уточнить его. Для этого сначала выполним замену переменных, положив

$$\boldsymbol{l}^p = \boldsymbol{Q}^p \cdot \boldsymbol{A}^p. \tag{51}$$

Такое $\boldsymbol{Q}^p$ всегда существует в силу того, что тензор $\boldsymbol{A}^p$ — невырожденный. Подставляя последнее соотношение в (50), получим:

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{Q}^p \equiv \boldsymbol{Q}^p : \boldsymbol{I} = -\frac{\dot{\alpha}^p}{\alpha^p}.$$

С учетом (49) получим:

$$\boldsymbol{Q}^p : \boldsymbol{I} = -\frac{1}{\alpha_p} \left[\mathcal{S}_\alpha^p + \left(\boldsymbol{u}^p - \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}} \right) \cdot \boldsymbol{\nabla} \alpha^p \right]. \tag{52}$$

Введем обозначения

$$\boldsymbol{a}^p = \boldsymbol{u}^p - \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}, \quad \boldsymbol{b}^p = \boldsymbol{\nabla} \alpha^p. \tag{53}$$

Сделаем следующие допущения:

1. $\boldsymbol{Q}^p$ — тензорная функция векторов $\boldsymbol{a}^p$ и $\boldsymbol{b}^p$ и скалярных инвариантов параметров состояния среды;

2. Среда является изотропной, другими словами, группа симметрий среды — полная изотропная группа $O(3)$, состоящая из ортогональных матриц $\boldsymbol{\mathcal{Q}}$ с определителем $\det \boldsymbol{\mathcal{Q}} = \pm 1$.

В этом случае для $\boldsymbol{Q}^p$ в соответствии с [Zheng1994] справедливо представление (индекс p здесь и далее для краткости опустим):

$$\boldsymbol{Q} = q_0(\xi; \xi^*) \boldsymbol{I} + q_1(\xi; \xi^*) \langle \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} \rangle_{\mathrm{s}} + q_2(\xi; \xi^*) [\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}]_{\mathrm{a}}, \tag{54}$$

где $q_{0,1,2}$ —функции от $\xi = \{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}\}$, являющихся инвариантами системы векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, и ξ^*, являющихся скалярными инвариантами других (отличных от $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$) параметров состояния среды,

$$\langle \boldsymbol{X} \rangle_{\mathrm{s}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}), \quad [\boldsymbol{X}]_{\mathrm{a}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}),$$

— симметричная и кососимметричная часть тензора $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{X}]_{\mathrm{s}} + \langle \boldsymbol{X} \rangle_{\mathrm{a}}$.

Из свойств симметричной и кососимметричной матриц следует, что

$$\boldsymbol{I} : \boldsymbol{I} = 3, \quad \langle \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} \rangle_{\mathrm{s}} : \boldsymbol{I} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}, \quad [\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}]_{\mathrm{a}} : \boldsymbol{I} = 0.$$

Отсюда с учетом (54) следует, что:

$$\boldsymbol{Q} : \boldsymbol{I} = 3q_0 + (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\ q_1.$$

С другой стороны, из (52) имеем:

$$\boldsymbol{Q} : \boldsymbol{I} = -\frac{1}{\alpha_p} \left(\mathcal{S}_\alpha^{(p)} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \right).$$

Таким образом, функции q_0 и q_1 должны удовлетворять тождеству

$$3q_0 + (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\ q_1 = -\frac{1}{\alpha_p} \left(\mathcal{S}_\alpha^{(p)} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \right).$$

Величина $\boldsymbol{Q} : \boldsymbol{I}$ зависит от $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ двояко: во-первых, как от аргумента функций $q_{0,1,2}$ — скалярного инварианта системы системы двух векторов, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$; во-вторых, как от непосредственно $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$. Поэтому положим в (54)

$$q_0 = -\frac{1}{3\alpha_p} \left[\mathcal{S}_\alpha^p + \omega(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \right], \quad q_1 = -\frac{1}{\alpha_p}(1 - \omega), \tag{55}$$

считая, что $\omega \in [0, 1]$ — параметр. Обозначим $\bar{\omega} = 1 - \omega$. Далее для простоты будем полагать, что

$$q_2 = q_1.$$

В этом случае представление (54) принимает вид:

$$\boldsymbol{Q} = q_0 \boldsymbol{I} + q_1 \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b},$$

где параметры $q_{0,1}$ определены согласно (55). В развернутом виде последнее выражение имеет вид:

$$\boldsymbol{Q} = q_0 \boldsymbol{I} + q_1 \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} = -\frac{1}{\alpha_p} \left[\frac{1}{3} \mathcal{S}_\alpha \boldsymbol{I} + \frac{1}{3} \omega (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \boldsymbol{I} + \bar{\omega} \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} \right].$$

Отсюда с учетом (51) получим:

$$\boldsymbol{l}^p = \boldsymbol{Q}^p \cdot \boldsymbol{A}^p = -\frac{1}{\alpha_p}\left[\frac{1}{3}\mathcal{S}^p_\alpha \boldsymbol{I} + \frac{1}{3}\omega(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{I} + \bar{\omega}\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}\right]\cdot \boldsymbol{A}^p.$$

Полагая $\mathcal{S}^p_\alpha = \omega\mathcal{S}^p_\alpha + \bar{\omega}\mathcal{S}^p_\alpha$, запишем последнее выражение в виде:

$$\boldsymbol{l}^p = \omega\boldsymbol{l}^{1,p} + \bar{\omega}\boldsymbol{l}^{2,p}, \tag{56}$$

где

$$\boldsymbol{l}^{1,p} = -\frac{1}{3\alpha^p}\left[\mathcal{S}^p_\alpha \boldsymbol{I} + (\boldsymbol{a}^p\cdot\boldsymbol{b}^p)\boldsymbol{I}\right]\cdot\boldsymbol{A}^p = -\frac{\dot{\alpha}^p}{3\alpha^p}\boldsymbol{A}^p, \tag{57a}$$

$$\boldsymbol{l}^{2,p} = -\frac{1}{\alpha^p}\left[\frac{1}{3}\mathcal{S}^p_\alpha \boldsymbol{I} + \boldsymbol{a}^p\otimes\boldsymbol{b}^p\right]\cdot\boldsymbol{A}^p. \tag{57b}$$

Таким образом, с учетом (53)

$$\boldsymbol{l}^p = -\omega\frac{\dot{\alpha}^p}{3\alpha^p}\boldsymbol{A}^p - \bar{\omega}\frac{1}{\alpha^p}\left[\frac{1}{3}\mathcal{S}^p_\alpha \boldsymbol{I} + \left(\boldsymbol{u}^p - \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}\right)\otimes\boldsymbol{\nabla}\alpha^p\right]\cdot\boldsymbol{A}^p. \tag{58}$$

Вид обменного слагаемого для метрического тензора деформации

С учетом (56), (57a), (57b) выражение (41) для обменных слагаемых $\boldsymbol{\Phi}^p$ можно записать в виде:

$$\boldsymbol{\Phi}^p = \boldsymbol{A}^p\cdot(\boldsymbol{l}^p)^T + \boldsymbol{l}^p\cdot(\boldsymbol{A}^p)^T = \omega\boldsymbol{\Phi}^{1,p} + \bar{\omega}\boldsymbol{\Phi}^{2,p},$$

где

$$\boldsymbol{\Phi}^{1,p} = \boldsymbol{A}^p\cdot\left(\boldsymbol{l}^{1,p}\right)^T + \boldsymbol{l}^{1,p}\cdot(\boldsymbol{A}^p)^T, \quad \boldsymbol{\Phi}^{2,p} = \boldsymbol{A}^p\cdot\left(\boldsymbol{l}^{2,p}\right)^T + \boldsymbol{l}^{2,p}\cdot(\boldsymbol{A}^p)^T.$$

Слагаемое $\boldsymbol{\Phi}^{1,p}$ Из (57a) имеем:

$$\boldsymbol{\Phi}^{1,p} = -\frac{\dot{\alpha}^p}{3\alpha^p}\boldsymbol{A}^p\cdot(\boldsymbol{A}^p)^T - \frac{\dot{\alpha}^p}{3\alpha^p}\boldsymbol{A}^p\cdot(\boldsymbol{A}^p)^T = -\frac{2\dot{\alpha}^p}{3\alpha^p}\boldsymbol{G}^p. \tag{59}$$

Слагаемое $\mathbf{\Phi}^{2,p}$ Для (57b) имеем:

$$\boldsymbol{l}^{2,p} = -\frac{1}{\alpha^p}\left[\frac{1}{3}\mathcal{S}^p_\alpha \boldsymbol{I} + \big(\boldsymbol{u}^p - \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}\big)\otimes \boldsymbol{\nabla}\alpha^p\right]\cdot \boldsymbol{A}^p.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
&\mathbf{\Phi}^{2,p} = \\
&= -\boldsymbol{A}^p\cdot\left(\frac{1}{\alpha^p}\left[\frac{1}{3}\mathcal{S}^p_\alpha \boldsymbol{I} + \big(\boldsymbol{u}^p - \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}\big)\otimes \boldsymbol{\nabla}\alpha^p\right]\cdot \boldsymbol{A}^p\right)^T - \left(\frac{1}{\alpha^p}\left[\frac{1}{3}\mathcal{S}^p_\alpha \boldsymbol{I} + \big(\boldsymbol{u}^p - \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}\big)\otimes \boldsymbol{\nabla}\alpha^p\right]\cdot \boldsymbol{A}^p\right)\cdot(\boldsymbol{A}^p)^T = \\
&= -\boldsymbol{A}^p\cdot\left(\frac{1}{\alpha^p}\left(\boldsymbol{A}^p\right)^T\cdot\left[\frac{1}{3}\mathcal{S}^p_\alpha \boldsymbol{I} + \big(\boldsymbol{u}^p - \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}\big)\otimes \boldsymbol{\nabla}\alpha^p\right]^T\right) - \left(\frac{1}{\alpha^p}\left[\frac{1}{3}\mathcal{S}^p_\alpha \boldsymbol{I} + \big(\boldsymbol{u}^p - \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}\big)\otimes \boldsymbol{\nabla}\alpha^p\right]\cdot \boldsymbol{A}^p\right)\cdot(\boldsymbol{A}^p)^T = \\
&= -\frac{1}{3\alpha^p}\mathcal{S}^p_\alpha \boldsymbol{A}^p\cdot\left(\boldsymbol{A}^p\right)^T - \frac{1}{3\alpha^p}\mathcal{S}^p_\alpha \boldsymbol{A}^p\cdot\left(\boldsymbol{A}^p\right)^T - \frac{1}{\alpha^p}\boldsymbol{A}^p\cdot\left(\boldsymbol{A}^p\right)^T\cdot\left[\big(\boldsymbol{u}^p - \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}\big)\otimes \boldsymbol{\nabla}\alpha^p\right]^T - \\
&\qquad - \frac{1}{\alpha^p}\left[\big(\boldsymbol{u}^p - \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}\big)\otimes \boldsymbol{\nabla}\alpha^p\right]\cdot \boldsymbol{A}^p\cdot\left(\boldsymbol{A}^p\right)^T = \\
&= -\frac{2}{3\alpha^p}\mathcal{S}^p_\alpha \boldsymbol{G}^p - \frac{1}{\alpha^p}\boldsymbol{G}^p\cdot\left[\big(\boldsymbol{u}^p - \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}\big)\otimes \boldsymbol{\nabla}\alpha^p\right]^T - \frac{1}{\alpha^p}\left[\big(\boldsymbol{u}^p - \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}\big)\otimes \boldsymbol{\nabla}\alpha^p\right]\cdot \boldsymbol{G}^p = \\
&= -\frac{2}{3\alpha^p}\mathcal{S}^p_\alpha \boldsymbol{G}^p - \left(\frac{1}{\alpha^p}\left[\big(\boldsymbol{u}^p - \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}\big)\otimes \boldsymbol{\nabla}\alpha^p\right]\cdot \boldsymbol{G}^p\right)^T - \frac{1}{\alpha^p}\left[\big(\boldsymbol{u}^p - \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}\big)\otimes \boldsymbol{\nabla}\alpha^p\right]\cdot \boldsymbol{G}^p. \quad (60)
\end{aligned}$$

Слагаемое в процедуре Колмана-Нолла

В дальнейшем, при анализе энтропийного неравенства в процедуре Колмана-Нолла, нам понадобится значение выражения

$$\mathcal{A}^p \coloneqq \frac{1}{2}\Big(\left(\boldsymbol{G}^p\right)^{-1}\cdot \boldsymbol{T}^p\Big) : \mathbf{\Phi}^p. \tag{61}$$

Для того чтобы не прерывать последовательность вывода вспомогательными вычислениями, проведем их тут с учетом полученных выше выражений (59),(60) для $\mathbf{\Phi}^{\alpha,p}$, $\alpha = 1,2$.

В силу того, что (61) линейно по $\mathbf{\Phi}$, представим его в виде

$$\mathcal{A}^p = \omega\mathcal{A}^{1,p} + \bar{\omega}\mathcal{A}^{2,p}.$$

Вычислим слагаемые по отдельности.

Вычисление $\boldsymbol{\mathcal{A}}^{1,p}$ По определению имеем:

$$\mathcal{A}^{1,p} = \frac{1}{2}\Big(\left(\boldsymbol{G}^p\right)^{-1} \cdot \boldsymbol{T}^p\Big) : \boldsymbol{\Phi}^{1,p} = \frac{1}{2}\Big(\left(\boldsymbol{G}^p\right)^{-1} \cdot \boldsymbol{T}^p\Big) : \left(-\frac{2\dot{\alpha}^p}{3\alpha^p}\boldsymbol{G}^p\right) = -\frac{\dot{\alpha}^p}{3\alpha^p}\boldsymbol{T}^p : \boldsymbol{I}. \tag{62}$$

Вычисление $\boldsymbol{\mathcal{A}}^{2,p}$ Из (61) и (60) имеем:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^{2,p} &= \frac{1}{2}\left(\left(\boldsymbol{G}^p\right)^{-1} \cdot \boldsymbol{T}^p\right) : \boldsymbol{\Phi}^{2,p} = \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\boldsymbol{G}^p\right)^{-1} \cdot \boldsymbol{T}^p\right) : \left(-\frac{2}{3\alpha^p}\mathcal{S}^p_\alpha \boldsymbol{G}^p - \frac{1}{\alpha^p}\boldsymbol{G}^p \cdot \left[\left(\boldsymbol{u}^p - \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}\right) \otimes \boldsymbol{\nabla}\alpha^p\right]^T - \frac{1}{\alpha^p}\left[\left(\boldsymbol{u}^p - \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}\right) \otimes \boldsymbol{\nabla}\alpha^p\right] \cdot \boldsymbol{G}^p\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\boldsymbol{G}^p\right)^{-1} \cdot \boldsymbol{T}^p\right) : \left(-\frac{2}{3\alpha^p}\mathcal{S}^p_\alpha \boldsymbol{G}^p\right) - \frac{1}{2}\left(\left(\boldsymbol{G}^p\right)^{-1} \cdot \boldsymbol{T}^p\right) : \left(\frac{1}{\alpha^p}\boldsymbol{G}^p \cdot \left[\left(\boldsymbol{u}^p - \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}\right) \otimes \boldsymbol{\nabla}\alpha^p\right]^T\right) - \\
&\qquad - \frac{1}{2}\left(\left(\boldsymbol{G}^p\right)^{-1} \cdot \boldsymbol{T}^p\right) : \left(\frac{1}{\alpha^p}\left[\left(\boldsymbol{u}^p - \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}\right) \otimes \boldsymbol{\nabla}\alpha^p\right] \cdot \boldsymbol{G}^p\right) = \\
&= -\frac{1}{3\alpha^p}\mathcal{S}^p_\alpha \boldsymbol{T}^p : \boldsymbol{I} - \frac{1}{2\alpha^p}\left[\left(\boldsymbol{u}^p - \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}\right) \otimes \boldsymbol{\nabla}\alpha^p\right] : \boldsymbol{T}^p - \frac{1}{2\alpha^p}\left[\left(\boldsymbol{u}^p - \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}\right) \otimes \boldsymbol{\nabla}\alpha^p\right] : \left(\left(\boldsymbol{G}^p\right)^{-1} \cdot \boldsymbol{T}^p \cdot \boldsymbol{G}^p\right) = \\
&\qquad = -\frac{1}{3\alpha^p}\mathcal{S}^p_\alpha \boldsymbol{T}^p : \boldsymbol{I} - \frac{1}{2\alpha^p}\left[\left(\boldsymbol{u}^p - \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}\right) \otimes \boldsymbol{\nabla}\alpha^p\right] : \left(\boldsymbol{T}^p + \left(\boldsymbol{G}^p\right)^{-1} \cdot \boldsymbol{T}^p \cdot \boldsymbol{G}^p\right).
\end{aligned}$$

Далее будет показано, что для тензора напряжений верна формула Мурнагана вида:

$$\boldsymbol{T}^p = -2\rho^p \boldsymbol{G}^p \cdot \frac{\partial \psi^p}{\partial \boldsymbol{G}^p}.$$

Тогда

$$\left(\boldsymbol{G}^p\right)^{-1} \cdot \boldsymbol{T}^p \cdot \boldsymbol{G}^p = -2\rho^p \left(\boldsymbol{G}^p\right)^{-1} \cdot \boldsymbol{G}^p \cdot \frac{\partial \psi^p}{\partial \boldsymbol{G}^p} \cdot \boldsymbol{G}^p = -2\rho^p \frac{\partial \psi^p}{\partial \boldsymbol{G}^p} \cdot \boldsymbol{G}^p = \left(\boldsymbol{T}^p\right)^T = \boldsymbol{T}^p,$$

откуда

$$\mathcal{A}^{2,p} = -\frac{1}{3\alpha^p}\mathcal{S}^p_\alpha \boldsymbol{T}^p : \boldsymbol{I} - \frac{1}{\alpha^p}\boldsymbol{T}^p : \left[\left(\boldsymbol{u}^p - \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}\right) \otimes \boldsymbol{\nabla}\alpha^p\right]. \tag{63}$$

Вычисление $\boldsymbol{\mathcal{A}}^p$ Для $\boldsymbol{\mathcal{A}}^p = \omega\boldsymbol{\mathcal{A}}^{1,p} + \bar{\omega}\boldsymbol{\mathcal{A}}^{2,p}$ из (62) и (63) имеем

$$\mathcal{A}^p = \omega\left(-\frac{\dot{\alpha}^p}{3\alpha^p}\boldsymbol{T}^p : \boldsymbol{I}\right) + \bar{\omega}\left(-\frac{1}{3\alpha^p}\mathcal{S}^p_\alpha \boldsymbol{T}^p : \boldsymbol{I} - \frac{1}{\alpha^p}\boldsymbol{T}^p : \left[\left(\boldsymbol{u}^p - \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}\right) \otimes \boldsymbol{\nabla}\alpha^p\right]\right).$$

С учетом выражения (49) для материальной производной $\dot{\alpha}^p$ получим:

$$\mathcal{A}^p = \omega\left(-\frac{1}{3\alpha^p}\boldsymbol{T}^p : \boldsymbol{I}\left(\mathcal{S}^p_\alpha + \left(\boldsymbol{u}^p - \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}\right)\cdot\boldsymbol{\nabla}\alpha^p\right)\right) +$$
$$+\bar{\omega}\left(-\frac{1}{3\alpha^p}\mathcal{S}^p_\alpha\boldsymbol{T}^p : \boldsymbol{I} - \frac{1}{\alpha^p}\boldsymbol{T}^p : \left[\left(\boldsymbol{u}^p - \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}\right)\otimes\boldsymbol{\nabla}\alpha^p\right]\right).$$

Отсюда с учетом

$$\left(\boldsymbol{T}^p : \boldsymbol{I}\right)\left(\boldsymbol{u}^p - \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}\right)\cdot\boldsymbol{\nabla}\alpha^p = \left(\left(\boldsymbol{u}^p - \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}\right)\otimes\boldsymbol{\nabla}\alpha^p\right) : \left(\boldsymbol{T}^p : \boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{I}$$

имеем:

$$\mathcal{A}^p = \omega\left[-\frac{1}{3\alpha^p}\mathcal{S}^p_\alpha\boldsymbol{T}^p : \boldsymbol{I} - \frac{1}{\alpha^p}\left(\left(\boldsymbol{u}^p - \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}\right)\otimes\boldsymbol{\nabla}\alpha^p\right) : \frac{\boldsymbol{T}^p : \boldsymbol{I}}{3}\boldsymbol{I}\right] +$$
$$+\bar{\omega}\left[-\frac{1}{3\alpha^p}\mathcal{S}^p_\alpha\boldsymbol{T}^p : \boldsymbol{I} - \frac{1}{\alpha^p}\left(\left(\boldsymbol{u}^p - \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}\right)\otimes\boldsymbol{\nabla}\alpha^p\right) : \boldsymbol{T}^p\right] =$$
$$= -\frac{1}{3\alpha^p}\mathcal{S}^p_\alpha\boldsymbol{T}^p : \boldsymbol{I} - \frac{1}{\alpha^p}\left(\left(\boldsymbol{u}^p - \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}\right)\otimes\boldsymbol{\nabla}\alpha^p\right) : \left(\omega\frac{\boldsymbol{T}^p : \boldsymbol{I}}{3}\boldsymbol{I} + \bar{\omega}\boldsymbol{T}^p\right). \quad (64)$$

Обозначим

$$\boldsymbol{K}^p = \frac{1}{\alpha^p}\left(\omega\frac{\boldsymbol{T}^p : \boldsymbol{I}}{3}\boldsymbol{I} + \bar{\omega}\boldsymbol{T}^p\right). \quad (65)$$

Обратим внимание, что

$$\boldsymbol{K}^p : \boldsymbol{I} = \frac{1}{\alpha^p}\left(\omega\frac{\boldsymbol{T}^p : \boldsymbol{I}}{3}\boldsymbol{I} : \boldsymbol{I} + \bar{\omega}\boldsymbol{T}^p : \boldsymbol{I}\right) = \frac{1}{\alpha^p}\boldsymbol{T}^p : \boldsymbol{I}.$$

Тогда уравнение (64) преобразуется к виду

$$\mathcal{A}^p = -\frac{1}{3}\mathcal{S}^p_\alpha\boldsymbol{K}^p : \boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}^p : \left(\left(\boldsymbol{u}^p - \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}\right)\otimes\boldsymbol{\nabla}\alpha^p\right). \quad (66)$$

Отметим, что тензор $\boldsymbol{K}^p$ симметричный, поскольку тензор $\boldsymbol{T}^p$ симметричен.

4.4 Энтропийное неравенство

Система уравнений (45) должна быть дополнена энтропийным неравенством в нужной форме. Это энтропийное неравенство не является следствием приведенных выше уравнений модели и является ее независимым компонентом. Постулируем его в виде неравенства Клаузиуса-Дюгема вида:

$$\sum_{p=1,2} \rho^p \dot{\eta}^p \geqslant 0. \tag{67}$$

Здесь η^p — энтропия фазы p. Для удобства дальнейших вычислений перейдем от внутренней энергии к свободной энергии $\psi^p = \psi^p\left(\theta^p, \boldsymbol{G}^p, \alpha^p\right)$ с помощью преобразования Лежандра по паре переменных (η^p, θ^p), где θ^p — температура фазы,

$$\psi^p = \mathcal{U}^p - \theta^p \eta^p. \tag{68}$$

Отсюда имеем:

$$\rho^p \dot{\eta}^p = \frac{1}{\theta^p}\left(\rho^p \dot{\mathcal{U}}^p - \rho^p \dot{\psi}^p - \rho^p \eta^p \dot{\theta}^p\right).$$

Тогда неравенство Клаузиуса-Дюгема (67) с учетом уравнения баланса внутренней энергии (45c) примет вид

$$\sum_{p=1,2} \frac{1}{\theta^p}\left[\boldsymbol{T}^p : (\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}^p) - \boldsymbol{T}^{\mathrm{I}} : \left(\left(\boldsymbol{u}^{\mathrm{I}} - \boldsymbol{u}^p\right) \otimes \boldsymbol{\nabla}\alpha^p\right) + \right.$$
$$\left. + \mathcal{S}_E^p - \boldsymbol{u}^p \cdot \boldsymbol{\mathcal{S}}_u^p - \rho^p \dot{\psi}^p - \rho^p \eta^p \dot{\theta}^p\right] \geqslant 0. \tag{69}$$

В соответствии с процедурой Колмана-Нолла данное неравенство рассматривается как ограничение на вид определяющих соотношений, при которых любой процесс будет допустимым. Для конкретизации видов процессов в форме законов сохранения необходимо задать соответствующие определяющие соотношения.

4.5 Процедура Колмана-Нолла

Диссипативное неравенство

Перейдем к анализу возможного вида определяющих соотношений. Будем считать, что множество параметров состояния модели имеет вид:

$$\boldsymbol{\zeta} = \left[\boldsymbol{\zeta}^{(1)}, \boldsymbol{\zeta}^{(2)}\right]; \quad \boldsymbol{\zeta}^p = \left\{\theta^p, \boldsymbol{G}^p, \alpha^p\right\}, \quad p = 1, 2.$$

Постулируем, что

$$
\begin{gathered}
\psi^p = \psi^p\left(\boldsymbol{\zeta}^p\right), \quad \boldsymbol{T}^p = \boldsymbol{T}^p\left(\boldsymbol{\zeta}^p\right), \quad \eta^p = \eta^p\left(\boldsymbol{\zeta}^p\right), \\
\mathcal{S}_\alpha^p = \mathcal{S}_\alpha^p\left(\boldsymbol{\zeta}^{(1)}, \boldsymbol{\zeta}^{(2)}\right), \quad \boldsymbol{\mathcal{S}}_u^p = \boldsymbol{\mathcal{S}}_u^p\left(\boldsymbol{\zeta}^{(1)}, \boldsymbol{\zeta}^{(2)}\right), \quad \mathcal{S}_E^p = \mathcal{S}_E^p\left(\boldsymbol{\zeta}^{(1)}, \boldsymbol{\zeta}^{(2)}\right).
\end{gathered} \tag{70}
$$

Замечание 4.5. Отметим, что в более общем случае могут иметь место зависимости $\psi^p = \psi^p\left(\boldsymbol{\zeta}^{(1)}, \boldsymbol{\zeta}^{(2)}\right)$. Такой случай далее не рассматривается.

С учетом соотношений (70) для материальной производной свободной энергии придем к:

$$
\dot{\psi}^p = \frac{\partial \psi^p}{\partial \alpha^p}\dot{\alpha}^p + \frac{\partial \psi^p}{\partial \theta^p}\dot{\theta}^p + \frac{\partial \psi^p}{\partial \boldsymbol{G}^p} : \dot{\boldsymbol{G}}^p.
$$

Подставим полученное выражение в (69) и получим:

$$
\sum_{p=1,2} \frac{1}{\theta^p}\Bigg[\boldsymbol{T}^p : (\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}^p) - \boldsymbol{T}^{\mathrm{I}} : \left(\left(\boldsymbol{u}^{\mathrm{I}} - \boldsymbol{u}^p\right) \otimes \boldsymbol{\nabla}\alpha^p\right) + \mathcal{S}_E^p - \boldsymbol{u}^p \cdot \boldsymbol{\mathcal{S}}_u^p -
$$
$$
- \rho^p \eta^p \dot{\theta}^p - \rho^p \frac{\partial \psi^p}{\partial \alpha^p}\dot{\alpha}^p - \rho^p \frac{\partial \psi^p}{\partial \theta^p}\dot{\theta}^p - \rho^p \frac{\partial \psi^p}{\partial \boldsymbol{G}^p} : \dot{\boldsymbol{G}}^p\Bigg] \geqslant 0.
$$

Далее, используя эволюционное уравнение (40) для метрического тензора деформации, получим

$$
\sum_{p=1,2} \frac{1}{\theta^p}\Bigg[\boldsymbol{T}^p : (\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}^p) - \boldsymbol{T}^{\mathrm{I}} : \left(\left(\boldsymbol{u}^{\mathrm{I}} - \boldsymbol{u}^p\right) \otimes \boldsymbol{\nabla}\alpha^p\right) + \mathcal{S}_E^p - \boldsymbol{u}^p \cdot \boldsymbol{\mathcal{S}}_u^p - \rho^p \eta^p \dot{\theta}^p -
$$
$$
- \rho^p \frac{\partial \psi^p}{\partial \alpha^p}\dot{\alpha}^p - \rho^p \frac{\partial \psi^p}{\partial \theta^p}\dot{\theta}^p + 2\rho^p \boldsymbol{G}^p \cdot \frac{\partial \psi^p}{\partial \boldsymbol{G}^p} : (\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}^p) - \rho^p \frac{\partial \psi^p}{\partial \boldsymbol{G}^p} : \boldsymbol{\Phi}^p\Bigg] \geqslant 0. \tag{71}
$$

Корректная система определяющих соотношений является частным решением неравенства (71). Конкретный пример такого решения, соответствующего рассматриваемой модели, выводится ниже.

«Внутренние» параметры фаз

Определим следующие величины:

$$
\beta^p := \rho^p \frac{\partial \psi^p}{\partial \alpha^p} \tag{72}
$$

— конфигурационное давление;

$$\boldsymbol{T}^p := -2\rho^p \boldsymbol{G}^p \cdot \frac{\partial \psi^p}{\partial \boldsymbol{G}^p} \tag{73}$$

— тензор напряжений, определяемый по формуле Мурнагана;

$$\eta^p := -\frac{\partial \psi^p}{\partial \theta^p} \tag{74}$$

— энтропия.

С учетом введенных определений выражение (71) сводится к неравенству

$$\sum_{p=1,2} \frac{1}{\theta^p} \left[-\boldsymbol{T}^{\mathrm{I}} : \left(\left(\boldsymbol{u}^{\mathrm{I}} - \boldsymbol{u}^p \right) \otimes \boldsymbol{\nabla} \alpha^p \right) + \mathcal{S}_E^p - \boldsymbol{u}^p \cdot \boldsymbol{\mathcal{S}}_u^p - \beta^p \dot{\alpha}^p - \rho^p \frac{\partial \psi^p}{\partial \boldsymbol{G}^p} : \boldsymbol{\Phi}^p \right] \geqslant 0. \tag{75}$$

Данное выражение представляет собой второе начало термодинамики для смеси с учетом законов сохранения и определяющих соотношений (72), (73) и (74). Отметим, что следствием (73) является соотношение

$$\frac{\partial \psi^p}{\partial \boldsymbol{G}^p} = -\frac{1}{2\rho^p} \left(\boldsymbol{G}^p \right)^{-1} \cdot \boldsymbol{T}^p. \tag{76}$$

Подставим далее в (75) соотношения (49) и (76):

$$\sum_{p=1,2} \frac{1}{\theta^p} \Big[\left(-\boldsymbol{T}^{\mathrm{I}} + \beta_p \boldsymbol{I} \right) : \left(\left(\boldsymbol{u}^{\mathrm{I}} - \boldsymbol{u}^p \right) \otimes \boldsymbol{\nabla} \alpha^p \right) - \beta^p \mathcal{S}_\alpha^p + \mathcal{S}_E^p -$$
$$- \boldsymbol{u}^p \cdot \boldsymbol{\mathcal{S}}_u^p + \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{G}^p \right)^{-1} \cdot \boldsymbol{T}^p : \boldsymbol{\Phi}^p \Big] \geqslant 0.$$

С учетом (61) получим

$$\sum_{p=1,2} \frac{1}{\theta^p} \left[\left(-\boldsymbol{T}^{\mathrm{I}} + \beta_p \boldsymbol{I} \right) : \left(\left(\boldsymbol{u}^{\mathrm{I}} - \boldsymbol{u}^p \right) \otimes \boldsymbol{\nabla} \alpha^p \right) - \beta^p \mathcal{S}_\alpha^p + \mathcal{S}_E^p - \boldsymbol{u}^p \cdot \boldsymbol{\mathcal{S}}_u^p + \mathcal{A}^p \right] \geqslant 0$$

и далее, с учетом (66),

$$\sum_{p=1,2}\frac{1}{\theta^p}\Big[\big(-\boldsymbol{T}^{\mathrm{I}}+\beta_p\boldsymbol{I}\big):\big(\big(\boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}-\boldsymbol{u}^p\big)\otimes\boldsymbol{\nabla}\alpha^p\big)-\beta^p\mathcal{S}^p_\alpha+\mathcal{S}^p_E-\boldsymbol{u}^p\cdot\boldsymbol{\mathcal{S}}^p_u-$$

$$-\frac{1}{3}\mathcal{S}^p_\alpha\boldsymbol{K}^p:\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}^p:\big(\big(\boldsymbol{u}^p-\boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}\big)\otimes\boldsymbol{\nabla}\alpha^p\big)\Big]\geqslant 0.$$

Перегруппируем слагаемые:

$$\sum_{p=1,2}\frac{1}{\theta^p}\Big[\big(-\boldsymbol{T}^{\mathrm{I}}+\boldsymbol{K}^p+\beta_p\boldsymbol{I}\big):\big(\big(\boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}-\boldsymbol{u}^p\big)\otimes\boldsymbol{\nabla}\alpha^p\big)-$$

$$-\mathcal{S}^p_\alpha\left(\beta^p+\frac{1}{3}\boldsymbol{K}^p:\boldsymbol{I}\right)+\mathcal{S}^p_E-\boldsymbol{u}^p\cdot\boldsymbol{\mathcal{S}}^p_u\Big]\geqslant 0 \quad (77)$$

и введем следующее обозначение:

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}^p=\boldsymbol{K}^p+\beta^p\boldsymbol{I}. \quad (78)$$

Тогда неравенство (77) примет вид

$$\sum_{p=1,2}\frac{1}{\theta^p}\Big[\big(-\boldsymbol{T}^{\mathrm{I}}+\boldsymbol{\mathcal{K}}^p\big):\big(\big(\boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}-\boldsymbol{u}^p\big)\otimes\boldsymbol{\nabla}\alpha^p\big)-$$

$$-\frac{1}{3}\mathcal{S}^p_\alpha\boldsymbol{\mathcal{K}}^p:\boldsymbol{I}+\mathcal{S}^p_E-\boldsymbol{u}^p\cdot\boldsymbol{\mathcal{S}}^p_u\Big]\geqslant 0. \quad (79)$$

«Обменные» слагаемые

Единственными неопределенными соотношениями являются выражения для обменных слагаемых $\mathcal{S}^p_\alpha$, $\mathcal{S}^p_E$ и $\boldsymbol{\mathcal{S}}^p_u$, а также $\boldsymbol{T}^{\mathrm{I}}$ и $\boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}$. Для их определения введем следующие обозначения:

$$\mathcal{D}_1=\sum_{p=1,2}\frac{1}{\theta^p}\Big[\big(-\boldsymbol{T}^{\mathrm{I}}+\boldsymbol{\mathcal{K}}^p\big):\big(\big(\boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}-\boldsymbol{u}^p\big)\otimes\boldsymbol{\nabla}\alpha^p\big)\Big], \quad (80)$$

$$\mathcal{D}_2=\sum_{p=1,2}\frac{1}{\theta^p}\left[-\frac{1}{3}\mathcal{S}^p_\alpha\boldsymbol{\mathcal{K}}^p:\boldsymbol{I}+\mathcal{S}^p_E-\boldsymbol{u}^p\cdot\boldsymbol{\mathcal{S}}^p_u\right]. \quad (81)$$

Тогда неравенство (79) примет вид:

$$\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2 \geqslant 0.$$

Рассмотрим отдельные слагаемые последовательно.

Первое слагаемое. Будем считать, что в уравнении (80)

$$\mathcal{D}_1 = \sum_{p=1,2} \frac{1}{\theta^p} \left[\left(-\boldsymbol{T}^{\mathrm{I}} + \boldsymbol{\mathcal{K}}^p \right) : \left(\left(\boldsymbol{u}^{\mathrm{I}} - \boldsymbol{u}^p \right) \otimes \boldsymbol{\nabla} \alpha^p \right) \right] = 0. \tag{82}$$

Представим $\boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}$ как линейную комбинацию скоростей фаз:

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{I}} = \kappa^{(1)} \boldsymbol{u}^{(1)} + \kappa^{(2)} \boldsymbol{u}^{(2)}, \tag{83}$$

с пока неопределенными безразмерными коэффициентами κ^p, такими что

$$\kappa^{(1)} + \kappa^{(2)} = 1, \quad 0 \leqslant \kappa^p \leqslant 1, \quad p = 1, 2.$$

Тогда

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{I}} - \boldsymbol{u}^{(1)} = \kappa^{(2)} \left(\boldsymbol{u}^{(2)} - \boldsymbol{u}^{(1)} \right), \quad \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}} - \boldsymbol{u}^{(2)} = -\kappa^{(1)} \left(\boldsymbol{u}^{(2)} - \boldsymbol{u}^{(1)} \right). \tag{84}$$

После подстановки (84) в (80) из (82) получим:

$$\frac{1}{\theta^{(1)}} \left[\left(-\boldsymbol{T}^{\mathrm{I}} + \boldsymbol{\mathcal{K}}^{(1)} \right) : \left(\kappa^{(2)} \left(\boldsymbol{u}^{(2)} - \boldsymbol{u}^{(1)} \right) \otimes \boldsymbol{\nabla} \alpha^{(1)} \right) \right] + \\ + \frac{1}{\theta^{(2)}} \left[\left(-\boldsymbol{T}^{\mathrm{I}} + \boldsymbol{\mathcal{K}}^{(2)} \right) : \left(-\kappa^{(1)} \left(\boldsymbol{u}^{(2)} - \boldsymbol{u}^{(1)} \right) \otimes \boldsymbol{\nabla} \left(1 - \alpha^{(1)} \right) \right) \right] = 0$$

или, после перегруппировки слагаемых,

$$\left(\boldsymbol{u}^{(2)} - \boldsymbol{u}^{(1)} \right) \otimes \boldsymbol{\nabla} \alpha^{(1)} : \left[\frac{\kappa^{(2)}}{\theta^{(1)}} \left(-\boldsymbol{T}^{\mathrm{I}} + \boldsymbol{\mathcal{K}}^{(1)} \right) + \frac{\kappa^{(1)}}{\theta^{(2)}} \left(-\boldsymbol{T}^{\mathrm{I}} + \boldsymbol{\mathcal{K}}^{(2)} \right) \right] = 0. \tag{85}$$

Замечание 4.6. Условие (85) может быть записано в виде:

$$\boldsymbol{Z} : \boldsymbol{D} = 0,$$

где $\boldsymbol{Z} = \left(\boldsymbol{u}^{(2)} - \boldsymbol{u}^{(1)}\right) \otimes \boldsymbol{\nabla}\alpha^{(1)}$ и $\boldsymbol{D} = \frac{\kappa^{(2)}}{\theta^{(1)}}\left(-\boldsymbol{T}^{\mathrm{I}} + \boldsymbol{\mathcal{K}}^{(1)}\right) + \frac{\kappa^{(1)}}{\theta^{(2)}}\left(-\boldsymbol{T}^{\mathrm{I}} + \boldsymbol{\mathcal{K}}^{(2)}\right)$ и имеет смысл уравнения относительно $\boldsymbol{D}$. В силу того, что, по предположению, тензор $\boldsymbol{D}$ не зависит от $\boldsymbol{u}^p$ и $\nabla\alpha^p$, далее нас будет интересовать только его тривиальное решение $\boldsymbol{D} \coloneqq 0$.

В соответствии с замечанием выше примем

$$\frac{\kappa^{(2)}}{\theta^{(1)}}\left(-\boldsymbol{T}^{\mathrm{I}} + \boldsymbol{\mathcal{K}}^{(1)}\right) + \frac{\kappa^{(1)}}{\theta^{(2)}}\left(-\boldsymbol{T}^{\mathrm{I}} + \boldsymbol{\mathcal{K}}^{(2)}\right) = 0.$$

Таким образом, для интерфейсного напряжения имеем

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{I}} = \frac{\boldsymbol{\mathcal{K}}^{(1)}\kappa^{(2)}\theta^{(2)} + \boldsymbol{\mathcal{K}}^{(2)}\kappa^{(1)}\theta^{(1)}}{\kappa^{(1)}\theta^{(1)} + \kappa^{(2)}\theta^{(2)}}. \tag{86}$$

Второе слагаемое. Считаем, что в (81)

$$\mathcal{D}_2 = \sum_{p=1,2} \frac{1}{\theta^p}\left[-\frac{1}{3}\mathcal{S}_\alpha^p \boldsymbol{\mathcal{K}}^p : \boldsymbol{I} + \mathcal{S}_E^p - \boldsymbol{u}^p \cdot \boldsymbol{\mathcal{S}}_u^p\right] \geqslant 0. \tag{87}$$

Постулируем следующий вид обменных слагаемых

$$\mathcal{S}_\alpha^p = -\xi^p\left(\pi^{\mathrm{I}} + \frac{1}{3}\boldsymbol{\mathcal{K}}^p : \boldsymbol{I}\right), \quad \xi^p \geqslant 0, \tag{88a}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_u^p = \chi^p\left(\boldsymbol{w}^{\mathrm{I}} - \boldsymbol{u}^p\right), \quad \chi^p \geqslant 0, \tag{88b}$$

$$\mathcal{S}_E^p = \mathcal{S}_{1E}^p + \mathcal{S}_{2E}^p + \mathcal{S}_{3E}^p, \tag{88c}$$

$$\mathcal{S}_{1E}^p = \chi^p \boldsymbol{w}^{\mathrm{I}} \cdot \left(\boldsymbol{w}^{\mathrm{I}} - \boldsymbol{u}^p\right), \tag{88d}$$

$$\mathcal{S}_{2E}^p = \xi^p \pi^{\mathrm{I}}\left(\pi^{\mathrm{I}} + \frac{1}{3}\boldsymbol{\mathcal{K}}^p : \boldsymbol{I}\right), \tag{88e}$$

$$\mathcal{S}_{3E}^p = \phi\left(\theta^{\bar{p}} - \theta^p\right), \quad \phi \geqslant 0, \tag{88f}$$

где $\boldsymbol{w}^{\mathrm{I}}$ — какая-либо («вторая интерфейсная») скорость, π^{I} —какое-либо («второе интерфейсное») давление, $\bar{p} = 1$, если $p = 2$, и $\bar{p} = 2$, если $p = 1$.

С учетом (88b) и (88d) получим:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{1E}^p - \boldsymbol{u}^p \cdot \boldsymbol{\mathcal{S}}_u^p &= \mathcal{S}_{1E}^p - \chi^p \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{w}^{\mathrm{I}} + \chi^p \boldsymbol{u}^p \cdot \boldsymbol{u}^p = \\ &= \chi^p \boldsymbol{w}^{\mathrm{I}} \cdot \boldsymbol{w}^{\mathrm{I}} - 2\chi^p \boldsymbol{u}^p \cdot \boldsymbol{w}^{\mathrm{I}} + \chi^p \boldsymbol{u}^p \cdot \boldsymbol{u}^p = \chi^p\left(\boldsymbol{w}^{\mathrm{I}} - \boldsymbol{u}^p\right) \cdot \left(\boldsymbol{w}^{\mathrm{I}} - \boldsymbol{u}^p\right) \geqslant 0.\end{aligned}$$

Из соотношений (88a) и (88e) имеем

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}^p_{2E} - \frac{1}{3}\mathcal{S}^p_\alpha \boldsymbol{\mathcal{K}}^p : \boldsymbol{I} = \mathcal{S}^p_{2E} + \xi^p \left(\frac{1}{3}\boldsymbol{\mathcal{K}}^p : \boldsymbol{I}\right)^2 + \frac{1}{3}\xi^p \pi^{\mathrm{I}} \boldsymbol{\mathcal{K}}^p : \boldsymbol{I} = \\
= \xi^p \left(\pi^{\mathrm{I}}\right)^2 + 2\xi^p \frac{1}{3}\pi^{\mathrm{I}} \boldsymbol{\mathcal{K}}^p : \boldsymbol{I} + \xi^p \left(\frac{1}{3}\boldsymbol{\mathcal{K}}^p : \boldsymbol{I}\right)^2 = \xi^p \left(\frac{1}{3}\boldsymbol{\mathcal{K}}^p : \boldsymbol{I} + \pi^{\mathrm{I}}\right)^2 \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Рассмотрим теперь слагаемое $\mathcal{S}^p_{3E}$. Для него с учетом (88f) верно неравенство

$$
\begin{aligned}
\sum_{p=1,2} \frac{\mathcal{S}^p_{3E}}{\theta^p} = \frac{\mathcal{S}^p_{3E}}{\theta^p} + \frac{\mathcal{S}^{\bar{p}}_{3E}}{\theta^{\bar{p}}} = \frac{\mathcal{S}^p_{3E}\theta^{\bar{p}} + \mathcal{S}^{\bar{p}}_{3E}\theta^p}{\theta^p \theta^{\bar{p}}} = \\
= \frac{\phi\left(\theta^{\bar{p}} - \theta^p\right)\theta^{\bar{p}} + \phi\left(\theta^p - \theta^{\bar{p}}\right)\theta^p}{\theta^p \theta^{\bar{p}}} = \frac{\phi\left(\theta^{\bar{p}} - \theta^p\right)^2}{\theta^p \theta^{\bar{p}}} \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Таким образом, из условий (87), (44) и (48) следует вид обменных слагаемых:

$$
\mathcal{S}^p_E = \chi^p \boldsymbol{w}^{\mathrm{I}} \cdot \left(\boldsymbol{w}^{\mathrm{I}} - \boldsymbol{u}^p\right) + \xi^p \pi^{\mathrm{I}} \left(\pi^{\mathrm{I}} + \frac{1}{3}\boldsymbol{\mathcal{K}}^p : \boldsymbol{I}\right) + \phi\left(\theta^{\bar{p}} - \theta^p\right), \tag{89a}
$$

$$
\boldsymbol{\mathcal{S}}^p_u = \chi^p \left(\boldsymbol{w}^{\mathrm{I}} - \boldsymbol{u}^p\right), \tag{89b}
$$

$$
\mathcal{S}^p_\alpha = -\xi^p \left(\pi^{\mathrm{I}} + \frac{1}{3}\boldsymbol{\mathcal{K}}^p : \boldsymbol{I}\right). \tag{89c}
$$

Из условий (44) для обменного слагаемого в импульсе получим

$$
\boldsymbol{\mathcal{S}}^p_u + \boldsymbol{\mathcal{S}}^{\bar{p}}_u = \chi^p \left(\boldsymbol{w}^{\mathrm{I}} - \boldsymbol{u}^p\right) + \chi^{\bar{p}} \left(\boldsymbol{w}^{\mathrm{I}} - \boldsymbol{u}^{\bar{p}}\right) = 0. \tag{90}
$$

Отсюда

$$
\boldsymbol{w}^{\mathrm{I}} = \frac{\chi^p \boldsymbol{u}^p + \chi^{\bar{p}} \boldsymbol{u}^{\bar{p}}}{\chi^p + \chi^{\bar{p}}}. \tag{91}
$$

Из условий (48) следует, что

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}^p_\alpha + \mathcal{S}^{\bar{p}}_\alpha = -\xi^p \left(\pi^{\mathrm{I}} + \frac{1}{3}\boldsymbol{\mathcal{K}}^p : \boldsymbol{I}\right) - \xi^{\bar{p}} \left(\pi^{\mathrm{I}} + \frac{1}{3}\boldsymbol{\mathcal{K}}^{\bar{p}} : \boldsymbol{I}\right) = \\
= -\pi^I \left(\xi^p + \xi^{\bar{p}}\right) - \left(\frac{1}{3}\xi^p \boldsymbol{\mathcal{K}}^p : \boldsymbol{I} + \frac{1}{3}\xi^{\bar{p}} \boldsymbol{\mathcal{K}}^{\bar{p}} : \boldsymbol{I}\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Отсюда

$$\pi^I = -\frac{1}{3}\frac{\xi^p \boldsymbol{\mathcal{K}}^p + \xi^{\bar{p}} \boldsymbol{\mathcal{K}}^{\bar{p}}}{\xi^p + \xi^{\bar{p}}} : \boldsymbol{I}. \tag{92}$$

Введем следующие обозначения:

$$\nu^p = \frac{\chi^p}{\chi^p + \chi^{\bar{p}}}, \quad \varsigma^p + \varsigma^{\bar{p}} = 1, \quad \mu^p = \frac{\xi^p}{\xi^p + \xi^{\bar{p}}}, \quad \varrho^p + \varrho^{\bar{p}} = 1.$$

Тогда уравнения (91) и (92) приобретут вид:

$$\boldsymbol{w}^{\mathrm{I}} = \nu^p \boldsymbol{u}^p + \nu^{\bar{p}} \boldsymbol{u}^{\bar{p}}, \quad \nu^p + \nu^{\bar{p}} = 1, \tag{93}$$

$$\pi^I = -\frac{1}{3}\left(\mu^p \boldsymbol{\mathcal{K}}^p + \mu^{\bar{p}} \boldsymbol{\mathcal{K}}^{\bar{p}}\right) : \boldsymbol{I}, \quad \mu^p + \mu^{\bar{p}} = 1. \tag{94}$$

При выборе «вторых интерфейсных» слагаемых согласно (93) и (94) условие на $\mathcal{S}_E$ из (44) также выполнено.

Замечание 4.7. Отметим, что при таком выборе $\boldsymbol{w}^{\mathrm{I}}$ и π^{I} не исключается вариант, когда

$$\boldsymbol{w}^{\mathrm{I}} = \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}, \quad \pi^{\mathrm{I}} = -\frac{1}{3}\boldsymbol{T}^{\mathrm{I}} : \boldsymbol{I}.$$

При этом в итоговой системе остается одно интерфейсное напряжение и одна интерфейсная скорость.

Из (93) и (94) для обменного слагаемого $\mathcal{S}_\alpha^p$ получим:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_\alpha^p = -\xi^p\left(\pi^{\mathrm{I}} + \frac{1}{3}\boldsymbol{\mathcal{K}}^p : \boldsymbol{I}\right) = -\xi^p\left[\mu^{\bar{p}}\left(-\frac{1}{3}\boldsymbol{\mathcal{K}}^{\bar{p}} : \boldsymbol{I}\right) + \mu^p\left(-\frac{1}{3}\boldsymbol{\mathcal{K}}^p : \boldsymbol{I}\right) + \frac{1}{3}\boldsymbol{\mathcal{K}}^p : \boldsymbol{I}\right] = \\ = -\xi^p\left[(1-\mu^p)\frac{1}{3}\boldsymbol{\mathcal{K}}^p : \boldsymbol{I} + \mu^{\bar{p}}\left(-\frac{1}{3}\boldsymbol{\mathcal{K}}^{\bar{p}} : \boldsymbol{I}\right)\right] = -\xi^p\mu^{\bar{p}}\left(\frac{1}{3}\boldsymbol{\mathcal{K}}^p : \boldsymbol{I} - \frac{1}{3}\boldsymbol{\mathcal{K}}^{\bar{p}} : \boldsymbol{I}\right).\end{aligned} \tag{95}$$

Обозначим

$$\xi = \xi^p \mu^{\bar{p}} = \frac{\xi^p \xi^{\bar{p}}}{\xi^p + \xi^{\bar{p}}}. \tag{96}$$

Для обменного слагаемого $\boldsymbol{\mathcal{S}}_u^p$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{S}}_u^p = \chi^p\left(\boldsymbol{w}^{\mathrm{I}} - \boldsymbol{u}^p\right) = \chi^p\left(\nu^p \boldsymbol{u}^p + \nu^{\bar{p}} \boldsymbol{u}^{\bar{p}} - \boldsymbol{u}^p\right) = \\ = \chi^p\left[(\nu^p - 1)\boldsymbol{u}^p + \nu^{\bar{p}} \boldsymbol{u}^{\bar{p}}\right] = \chi^p \nu^{\bar{p}}\left(\boldsymbol{u}^{\bar{p}} - \boldsymbol{u}^p\right).\end{aligned} \tag{97}$$

Обозначим

$$\chi = \chi^p \nu^{\bar{p}} = \frac{\chi^p \chi^{\bar{p}}}{\chi^p + \chi^{\bar{p}}}. \tag{98}$$

Для обменного слагаемого $\mathcal{S}_E^p$:

$$\mathcal{S}_E^p = \chi^p \boldsymbol{w}^{\mathrm{I}} \cdot \left(\boldsymbol{w}^{\mathrm{I}} - \boldsymbol{u}^p\right) + \xi^p \pi^{\mathrm{I}} \left(\pi^{\mathrm{I}} + \frac{1}{3}\boldsymbol{\mathcal{K}}^p : \boldsymbol{I}\right) + \phi\left(\theta^{\bar{p}} - \theta^p\right) =$$
$$= \chi^p \nu^{\bar{p}} \boldsymbol{w}^{\mathrm{I}} \cdot \left(\boldsymbol{u}^{\bar{p}} - \boldsymbol{u}^p\right) + \xi^p \mu^{\bar{p}} \pi^{\mathrm{I}} \left(\frac{1}{3}\boldsymbol{\mathcal{K}}^p : \boldsymbol{I} - \frac{1}{3}\boldsymbol{\mathcal{K}}^{\bar{p}} : \boldsymbol{I}\right) + \phi\left(\theta^{\bar{p}} - \theta^p\right). \quad (99)$$

С учетом полученных соотношений релаксационные слагаемые (95), (97) и (99) приобретают вид:

$$\mathcal{S}_\alpha^p = -\frac{1}{3}\xi\left(\boldsymbol{\mathcal{K}}^p - \boldsymbol{\mathcal{K}}^{\bar{p}}\right) : \boldsymbol{I},$$
$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_u^p = \chi\left(\boldsymbol{u}^{\bar{p}} - \boldsymbol{u}^p\right),$$
$$\mathcal{S}_E^p = \chi \boldsymbol{w}^{\mathrm{I}} \cdot \left(\boldsymbol{u}^{\bar{p}} - \boldsymbol{u}^p\right) + \frac{1}{3}\xi\pi^{\mathrm{I}}\left(\boldsymbol{\mathcal{K}}^p - \boldsymbol{\mathcal{K}}^{\bar{p}}\right) : \boldsymbol{I} + \phi\left(\theta^{\bar{p}} - \theta^p\right),$$

где $\boldsymbol{w}^{\mathrm{I}}$ и π^{I} определены согласно (93) и (94).

4.6 Замкнутая формулировка модели

Замкнутая формулировка модели включает следующие соотношения:

- система уравнений (43) в консервативной форме, выражающую законы сохранения массы, импульса и энергии:

$$\partial_t \rho^p + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho^p \boldsymbol{u}^p) = 0,$$
$$\partial_t (\rho^p \boldsymbol{u}^p) + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho^p \boldsymbol{u}^p \otimes \boldsymbol{u}^p - \boldsymbol{T}^p) = -\boldsymbol{T}^{\mathrm{I}} \cdot \boldsymbol{\nabla}\alpha^p + \boldsymbol{\mathcal{S}}_u^p,$$
$$\partial_t (\rho^p E^p) + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho^p E^p \boldsymbol{u}^p - \boldsymbol{T}^p \cdot \boldsymbol{u}) = -\boldsymbol{T}^{\mathrm{I}} : \left(\boldsymbol{u}^{\mathrm{I}} \otimes \boldsymbol{\nabla}\alpha^p\right) + \mathcal{S}_E^p,$$

- определяющие соотношения (86) для интерфейсного тензора напряжений

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{I}} = \frac{\boldsymbol{\mathcal{K}}^{(1)}\kappa^{(2)}\theta^{(2)} + \boldsymbol{\mathcal{K}}^{(2)}\kappa^{(1)}\theta^{(1)}}{\kappa^{(1)}\theta^{(1)} + \kappa^{(2)}\theta^{(2)}},$$

где

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}^p = \frac{1}{\alpha^p}\left(\omega\frac{\boldsymbol{T}^p : \boldsymbol{I}}{3}\boldsymbol{I} + (1-\omega)\boldsymbol{T}^p\right) + \beta^p \boldsymbol{I}, \quad \omega \in [0,1].$$

- определяющие соотношения (83) для интерфейсной скорости

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{I}} = \kappa^{(1)}\boldsymbol{u}^{(1)} + \kappa^{(2)}\boldsymbol{u}^{(2)},$$

где κ^p — безразмерные параметры, такие, что

$$\kappa^{(1)} + \kappa^{(2)} = 1, \quad 0 \leqslant \kappa^p \leqslant 1, \quad p = 1, 2.$$

- обменные слагаемые (89)

$$\mathcal{S}_E^p = \chi \boldsymbol{w}^{\mathrm{I}} \cdot \left(\boldsymbol{u}^{\bar{p}} - \boldsymbol{u}^p\right) + \frac{1}{3}\xi \pi^{\mathrm{I}} \left(\boldsymbol{\mathcal{K}}^p - \boldsymbol{\mathcal{K}}^{\bar{p}}\right) : \boldsymbol{I} + \phi \left(\theta^{\bar{p}} - \theta^p\right),$$
$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_u^p = \chi \left(\boldsymbol{u}^{\bar{p}} - \boldsymbol{u}^p\right),$$

где $\boldsymbol{w}^{\mathrm{I}}$ — «вторая интерфейсная» скорость, которая определена согласно (93):

$$\boldsymbol{w}^{\mathrm{I}} = \nu^p \boldsymbol{u}^p + \nu^{\bar{p}} \boldsymbol{u}^{\bar{p}}, \quad \nu^p + \nu^{\bar{p}} = 1,$$

π^{I} — «второе интерфейсное» давление, которое определено согласно (94):

$$\pi^I = -\frac{1}{3} \left(\mu^p \boldsymbol{\mathcal{K}}^p + \mu^{\bar{p}} \boldsymbol{\mathcal{K}}^{\bar{p}}\right) : \boldsymbol{I}, \quad \mu^p + \mu^{\bar{p}} = 1.$$

- определяющие уравнения (29) для тензора дисторсии фазы $p = 1, 2$:

$$\dot{\boldsymbol{A}}^p = -\left(\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}^p\right) \cdot \boldsymbol{A}^p + \boldsymbol{l}^p,$$

где обменное слагаемое $\boldsymbol{l}^p$ определено согласно (58) и имеет вид:

$$\boldsymbol{l}^p = -\omega \frac{\dot{\alpha}^p}{3\alpha^p} \boldsymbol{A}^p - \bar{\omega} \frac{1}{\alpha^p} \left[\frac{1}{3} \mathcal{S}_\alpha^p \boldsymbol{I} + \left(\boldsymbol{u}^p - \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}\right) \otimes \boldsymbol{\nabla} \alpha^p\right] \cdot \boldsymbol{A}^p.$$

- определяющее соотношение (46) для объемной доли α_p фазы $p = 1, 2$:

$$\partial_t \alpha^p + \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \alpha^p = \mathcal{S}_\alpha^p, \quad p = 1, 2,$$

где обменное слагаемое определено согласно

$$\mathcal{S}_\alpha^p = -\frac{1}{3} \xi \left(\boldsymbol{\mathcal{K}}^p - \boldsymbol{\mathcal{K}}^{\bar{p}}\right) : \boldsymbol{I}.$$

Здесь π^{I} — какое-либо («второе интерфейсное») давление, которое определено согласно (94).

- уравнение состояния для каждой из фаз $p = 1, 2$, которое имеет вид заданной зависимости внутренней или свободной энергии фазы от своих естественных переменных,

$$\mathcal{U}^p = \mathcal{U}(\boldsymbol{G}^p, \eta^p, \alpha^p), \quad \psi^p = \psi^p(\boldsymbol{G}^p, \theta^p, \alpha^p).$$

- определяющие соотношения для тензора напряжений $\boldsymbol{T}^p$ («формула Мурнагана») (73), энтропии фаз η^p (74) и конфигурационного давления β^p (72), справедливые в общем случае:

$$\boldsymbol{T}^p = -2\rho^p \boldsymbol{G}^p \cdot \frac{\partial \psi^p}{\partial \boldsymbol{G}^p}, \quad \eta^p = -\frac{\partial \psi^p}{\partial \theta^p}, \quad \beta^p = \rho^p \frac{\partial \psi^p}{\partial \alpha^p}.$$

Таким образом, наиболее общая форма модели имеет вид:

$$\partial_t \alpha^p + \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \alpha^p = -\frac{1}{3}\xi \left(\boldsymbol{\mathcal{K}}^p - \boldsymbol{\mathcal{K}}^{\bar{p}}\right) : \boldsymbol{I}, \tag{100a}$$

$$\partial_t \rho^p + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho^p \boldsymbol{u}^p) = 0, \tag{100b}$$

$$\partial_t (\rho^p \boldsymbol{u}^p) + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho^p \boldsymbol{u}^p \otimes \boldsymbol{u}^p - \boldsymbol{T}^p) = -\boldsymbol{T}^{\mathrm{I}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \alpha^p + \chi \left(\boldsymbol{u}_k^{\bar{p}} - \boldsymbol{u}^p\right), \tag{100c}$$

$$\begin{aligned}\partial_t (\rho^p E^p) + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho^p E^p \boldsymbol{u}^p - \boldsymbol{T}^p \cdot \boldsymbol{u}) = -\boldsymbol{T}^{\mathrm{I}} : \left(\boldsymbol{u}^{\mathrm{I}} \otimes \boldsymbol{\nabla} \alpha^p\right) + \\ + \chi \boldsymbol{w}^{\mathrm{I}} \cdot \left(\boldsymbol{u}^{\bar{p}} - \boldsymbol{u}^p\right) + \frac{1}{3}\xi \pi^{\mathrm{I}} \left(\boldsymbol{\mathcal{K}}^p - \boldsymbol{\mathcal{K}}^{\bar{p}}\right) : \boldsymbol{I} + \phi \left(\theta^{\bar{p}} - \theta^p\right),\end{aligned} \tag{100d}$$

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{A}}^p = - (\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}^p) \cdot \boldsymbol{A}^p - \\ - \omega \frac{\dot{\alpha}^p}{3\alpha^p} \boldsymbol{A}^p - \bar{\omega} \frac{1}{\alpha^p} \left[\frac{1}{3} \mathcal{S}_\alpha^p \boldsymbol{I} + \left(\boldsymbol{u}^p - \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}\right) \otimes \boldsymbol{\nabla} \alpha^p\right] \cdot \boldsymbol{A}^p.\end{aligned} \tag{100e}$$

Отметим, что, как следует из результатов приложений A, B, C,

- система законов сохранения для каждой из фаз является материально индифферентной;
- система законов сохранения для смеси является материально индифферентной;
- при выборе интерфейсной скорости как линейной комбинации скоростей фаз уравнение совместности деформаций для каждой из фаз материально индифферентно.

Это обеспечивает выполнение принципов материальной объективности для системы уравнений модели и определяющих соотношений.

5 Частные случаи

В настоящей главе рассматриваются частные случаи общей модели (100) и показывается, что сформулированная модель сводится к частным случаям многофазных моделей, известных в современной литературе.

5.1 Модели типа Баера-Нунциато с шаровым тензором напряжений

Будем считать, что тензор напряжений модели является шаровым. Для получения уравнений этой модели достаточно допустить зависимость свободной энергии только от единственного инварианта тензора деформаций Фингера, а именно I_3, см. (7).

В самом деле, в силу того, что свободная энергия является скалярной функцией тензорного аргумента, ее зависимость от компонент тенора дисторсии или иного тензора, являющегося мерой деформации, может быть задана только как функция от инвариантов этого тензора, см., например, [Димитриенко2009]. Другими словами, $\psi^p = \psi^p\left(\boldsymbol{G}^p, \ldots\right) = \psi^p\left(\mathrm{I}_1^p, \mathrm{I}_2^p, \mathrm{I}_3^p, \ldots\right)$, где I_1, I_2 и I_3 определены согласно (7).

Будем считать далее, что $\psi^p = \psi^p\left(\mathrm{I}_3^p, \ldots\right)$. В этом случае формула Мурнагана (73) приобретает вид:

$$\boldsymbol{T}^p := -2\rho^p \boldsymbol{G}^p \cdot \frac{\partial \psi^p}{\partial \boldsymbol{G}^p} = -2\rho^p \frac{\partial \psi^p}{\partial \mathrm{I}_3^p} \boldsymbol{G}^p : \frac{\partial \mathrm{I}_3^p}{\partial \boldsymbol{G}^p}.$$

Рассмотрим производную инварианта по компонентам тензора:

$$\frac{\partial \mathrm{I}_3^p}{\partial \boldsymbol{G}^p} = \frac{\partial \det \boldsymbol{G}^p}{\partial \boldsymbol{G}^p} = \det \boldsymbol{G}^p \left(\boldsymbol{G}^p\right)^{-T}.$$

Тогда, с учетом симметричности тензора $\boldsymbol{G}$:

$$\boldsymbol{T}^p = -2\rho^p \det \boldsymbol{G}^p \frac{\partial \psi^p}{\partial \mathrm{I}_3^p} \boldsymbol{G}^p \cdot \left(\boldsymbol{G}^p\right)^{-T} = -2\rho^p \det \boldsymbol{G}^p \frac{\partial \psi^p}{\partial \mathrm{I}_3^p} \boldsymbol{I}.$$

Поскольку $\mathrm{I}_3^p = \left(\gamma^p/\gamma_0^p\right)^2$, то $\psi^p = \psi^p\left(\gamma^p, \ldots\right)$, откуда

$$\frac{\partial \psi^p}{\partial \mathrm{I}_3^p} = \frac{\partial \psi^p}{\partial \gamma^p}\frac{\partial \gamma^p}{\partial \mathrm{I}_3^p} = \frac{\partial \psi^p}{\partial \gamma^p}\frac{\left(\gamma_0^p\right)^2}{2\gamma^p}$$

и

$$\boldsymbol{T}^p = -2\rho^p \det \boldsymbol{G}^p \frac{\partial \psi^p}{\partial \gamma^p}\boldsymbol{I}\frac{\left(\gamma_0^p\right)^2}{2\gamma^p} = \frac{-2\rho^p}{2\gamma^p}\left(\left(\gamma_0^p\right)^2 \det \boldsymbol{G}^p\right)\frac{\partial \psi^p}{\partial \gamma^p}\boldsymbol{I}.$$

Отсюда

$$\boldsymbol{T}^p = -\alpha^p\left(\gamma^p\right)^2\frac{\partial \psi^p}{\partial \gamma^p}\boldsymbol{I} = -\alpha^p p^p \boldsymbol{I},$$

где

$$p^p = \left(\gamma^p\right)^2\frac{\partial \psi^p}{\partial \gamma^p} \tag{101}$$

— давление фазы p. В этом случае имеем $\boldsymbol{T}^p : \boldsymbol{I} = -3\alpha^p p^p$, и из (65) следует, что

$$\boldsymbol{K}^p = \frac{1}{\alpha^p}\left(\omega\frac{\boldsymbol{T}^p : \boldsymbol{I}}{3}\boldsymbol{I} + \bar{\omega}\boldsymbol{T}^p\right) = \frac{1}{\alpha_p}\left(\omega\left(-\alpha^p p^p\right)\boldsymbol{I} + \bar{\omega}\left(-\alpha^p p^p\right)\boldsymbol{I}\right) = -p^p\boldsymbol{I}.$$

Соответственно, из (78) имеем

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}^p = \boldsymbol{K}^p + \beta^p\boldsymbol{I} = [-p^p + \beta]\boldsymbol{I}, \quad \frac{1}{3}\boldsymbol{\mathcal{K}}^p : \boldsymbol{I} = -p^p + \beta^p.$$

Замечание 5.1. В ряде случаев, в зависимости от постановки задачи, конфигурационное давление принимается равным нулю. Это соответствует случаю, когда свободная энергия фазы явно не зависит от ее объемной доли, то есть $\psi^p(\alpha^p, \gamma^p, \theta^p) = \tilde{\psi}^p(\gamma^p, \theta^p)$. Ненулевое конфигурационное давление характерно для случаев, когда одна из фаз — дисперсная гранулированная среда; в этом случае оно интерпретируется как межгранулярное давление, связанное с механическим взаимодействием отдельных дисперсных частиц.

Далее для простоты будем считать, что уравнение состояния фазы не зависит от объемной доли, то есть $\mathcal{U}^p = \mathcal{U}^p(\gamma^p, \eta^p)$, откуда, как следствие (72), конфигурационное давление фаз $\beta^p \equiv 0$. В этом случае интерфейсный тензор напряжений (86) также является шаровым и приобретает вид:

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{I}} = -p^{\mathrm{I}}\boldsymbol{I}, \quad p^{\mathrm{I}} = \frac{p^{(1)}\kappa^{(2)}\theta^{(2)} + p^{(2)}\kappa^{(1)}\theta^{(1)}}{\kappa^{(1)}\theta^{(1)} + \kappa^{(2)}\theta^{(2)}}.$$

Таким образом, получаем, что напряжения среды зависят только от шаровой части тензора напряжений, то есть являются давлением. Помимо этого, состояние среды не зависит явно от компонент тензора дисторсии, а зависит только от плотности. Поэтому уравнение совместности деформации является избыточным для этой системы — достаточно использовать уравнение для закона сохранения массы (которое, по существу, является уравнением для инварианта I_3 тензора Фингера $\boldsymbol{G^p}$).

В результате система уравнений (100) переходит в систему уравнений Баера-Нунциато в общем виде, рассмотренном, например, в [Baer1983, Kapila2001, Herard2012, Hantke2021, Hurisse2020, Gallouët2004, Coquel2002, Muller2016] (без учета обмена массой между фазами, релаксации химического потенциала и нулевым конфигурационным давлением). Результирующая модель с шаровым тензором напряжений будет иметь вид:

$$\frac{\partial \alpha^p}{\partial t} + \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}} \cdot \nabla \alpha^p = \xi \left(p^p - p^{\overline{p}} \right), \tag{102a}$$

$$\frac{\partial \alpha^p \gamma^p}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\alpha^p \gamma^p \boldsymbol{u}^p \right) = 0, \tag{102b}$$

$$\frac{\partial \alpha^p \gamma^p \boldsymbol{u}^p}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\alpha^p \gamma^p \boldsymbol{u}^p \otimes \boldsymbol{u}^p + \alpha^p p^p \boldsymbol{I} \right) - p^{\mathrm{I}} \nabla \alpha^p = \chi \left(\boldsymbol{u}^{\overline{p}} - \boldsymbol{u}^p \right), \tag{102c}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha^p \gamma^p E^p}{\partial t} &+ \nabla \cdot \left(\alpha^p \left(\gamma^p E^p + p^p \right) \boldsymbol{u}^p \right) - p^{\mathrm{I}} \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}} \cdot \nabla \alpha^p = \\ &= \chi \left(\boldsymbol{u}^{\overline{p}} - \boldsymbol{u}^p \right) \cdot \boldsymbol{w}^{\mathrm{I}} + \xi \left(p^{\overline{p}} - p^p \right) \pi^{\mathrm{I}} + \phi \left(\theta^{\overline{p}} - \theta^p \right), \end{aligned} \tag{102d}$$

где

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{I}} = \kappa^{(1)} \boldsymbol{u}^{(1)} + \kappa^{(2)} \boldsymbol{u}^{(2)}, \quad p^{\mathrm{I}} = \frac{p^{(1)} \kappa^{(2)} \theta^{(2)} + p^{(2)} \kappa^{(1)} \theta^{(1)}}{\kappa^{(1)} \theta^{(1)} + \kappa^{(2)} \theta^{(2)}}. \tag{103}$$

$$\boldsymbol{w}^{\mathrm{I}} = \nu^{(1)} \boldsymbol{u}^{(1)} + \nu^{(2)} \boldsymbol{u}^{(2)}, \quad \pi^{I} = \mu^{(1)} p^{(1)} + \mu^{(2)} p^{(2)}, \tag{104}$$

$$\kappa^{(1)} + \kappa^{(2)} = 1, \quad \nu^{(1)} + \nu^{(2)} = 1, \quad \mu^{(1)} + \mu^{(2)} = 1.$$

Замечание 5.2. Наиболее распространены модели с одной интерфейсной скоростью и одним интерфейсным давлением. Отметим, что, тем не менее, модели с двумя интерфейсными давлениями и/или двумя интерфейсными скоростями встречаются в литературе. В частности, в [Muller2016] и [Herard2012] утверждается, что это решает ряд проблем с термодинамической согласованностью модели. В работах [Perrier2021, Herard2012] представлены обзоры известных моделей замыкания. Модель с двумя интерфейсными давлениями описана в [Herard2007].

Модель [Baer1983]

Выберем в релаксационных слагаемых следующие «вторые интерфейсные» скорости и давления, совпадающие с интерфейсными давлениями и скоростями: $\boldsymbol{w}^{\mathrm{I}} = \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}$ и $\pi^{\mathrm{I}} = p^{\mathrm{I}}$. Тогда система уравнений (100) переходит в систему уравнений Баера-Нунциато из классической работы [Baer1983] при выборе интерфейсных слагаемых как $\boldsymbol{w}^{\mathrm{I}} = \boldsymbol{u}^{(1)}$ и $p^{\mathrm{I}} = p^{(2)}$, отсутствии обмена массой, релаксации и химического потенциала.

Модель [Drew2006]

В случае выбора интерфейсных слагаемых согласно (103) получим вид уравнений, соответствующий модели, предложенной в работе [Drew2006].

Модель [Coquel2002]

Для получения модели из [Coquel2002, Gallouët2004] положим

$$\boldsymbol{w}^{\mathrm{I}} = \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}, \quad \pi^{\mathrm{I}} = -\frac{1}{3}\boldsymbol{T}^{\mathrm{I}} : \boldsymbol{I} = p^{\mathrm{I}}.$$

В работе [Coquel2002] утверждается, что для линейной вырожденности характеристического поля (для его соответствия контактному разрыву), ассоциированного с собственным значением $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}$, коэффициенты в интерфейсных слагаемых (103) и (104) для модели (102) должны иметь вид:

$$\kappa^p = \frac{\alpha^p \gamma^p}{\rho} \quad \text{или} \quad \kappa^{(1)}\left(1 - \kappa^{(2)}\right) = 0. \tag{105}$$

В работе [Coquel2002] использован следующий вид p^{I}:

$$p^{\mathrm{I}} = \frac{p^{(1)}\kappa^{(2)}a^{(1)} + p^{(2)}\kappa^{(1)}a^{(2)}}{\kappa^{(1)}a^{(2)} + \kappa^{(2)}a^{(1)}}. \tag{106}$$

Далее, для определения коэффициента a^p рассмотрим систему соотношений из [Coquel2002] (некоторые переменные были переобозначены по сравнению с оригинальной работой):

$$\Gamma^p p^p = \left(\frac{p^p}{\gamma^p} - \gamma^p \frac{\partial \mathcal{U}^p}{\partial \gamma^p}\right) \left(\frac{\partial \mathcal{U}^p}{\partial p^p}\right)^{-1}, \tag{107}$$

$$\Gamma^p p^p \frac{\partial s^p}{\partial p^p} + \gamma^p \frac{\partial s^p}{\partial \gamma^p} = 0, \tag{108}$$

$$a^p = (s^p)^{-1} \left(\frac{\partial s^p}{\partial p^p}\right) \left(\frac{\partial \mathcal{U}^p}{\partial p^p}\right)^{-1}, \tag{109}$$

$$\eta^p = \ln(s^p) + \iota^p(\alpha^p), \quad \iota^p(\alpha^p) = \iota^{\bar{p}}\left(\alpha^{\bar{p}}\right). \tag{110}$$

Из (110) получим

$$\frac{\partial \eta^p}{\partial \gamma^p} = \frac{\partial}{\partial \gamma^p} \left(\ln(s^p) + \iota^p(\alpha^p)\right) = (s^p)^{-1} \frac{\partial s^p}{\partial \gamma^p}. \tag{111}$$

С учетом (68) и (101) имеем

$$\frac{\partial \psi^p}{\partial \gamma^p} = \frac{\partial \mathcal{U}^p}{\partial \gamma^p} - \theta^p \frac{\partial \eta^p}{\partial \gamma^p} = \frac{p^p}{(\gamma^p)^2}.$$

Отсюда и из (111) и (108) следует, что

$$\frac{p^p}{\gamma^p} - \gamma^p \frac{\partial \mathcal{U}^p}{\partial \gamma^p} = -\gamma^p \theta^p \frac{\partial \eta^p}{\partial \gamma^p} = -\gamma^p \theta^p (s^p)^{-1} \frac{\partial s^p}{\partial \gamma^p} = \Gamma^p p^p \theta^p (s^p)^{-1} \frac{\partial s^p}{\partial p^p}. \tag{112}$$

Тогда с учетом (112) и (107) получим

$$\Gamma^p p^p = \Gamma^p p^p \theta^p (s^p)^{-1} \frac{\partial s^p}{\partial p^p} \left(\frac{\partial \mathcal{U}^p}{\partial p^p}\right)^{-1}.$$

Отсюда и из (109)

$$a^p = (s^p)^{-1} \frac{\partial s^p}{\partial p^p} \left(\frac{\partial \mathcal{U}^p}{\partial p^p}\right)^{-1} = (\theta^p)^{-1}. \tag{113}$$

С учетом (113) из (106) имеем

$$p^{\mathrm{I}} = \frac{p^{(1)} \kappa^{(2)} \theta^{(2)} + p^{(2)} \kappa^{(1)} \theta^{(1)}}{\kappa^{(1)} \theta^{(1)} + \kappa^{(2)} \theta^{(2)}}. \tag{114}$$

Таким образом, полученная в данной работе модель (102) полностью соответствует модели, представленной в работе [Coquel2002].

Модель [Kapila2001]

В работе [Kapila2001] рассмотрен следующий вид модели в оригинальных обозначениях (при отсутствии массовых обменных слагаемых, то есть при $\mathcal{C}=0$):

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \alpha^p}{\partial t}+\boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}\cdot\nabla\alpha^p=\frac{\alpha^p\alpha^{\bar{p}}}{\mu_c}\left(p^p-p^{\bar{p}}\right),\\
\frac{\partial \alpha^p\gamma^p}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\alpha^p\gamma^p\boldsymbol{u}^p\right)=0,\\
\frac{\partial \alpha^p\gamma^p\boldsymbol{u}^p}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\alpha^p\gamma^p\boldsymbol{u}^p\otimes\boldsymbol{u}^p+\alpha^p p^p\boldsymbol{I}\right)-p^{\mathrm{I}}\nabla\alpha^p=\delta\left(\boldsymbol{u}^{\bar{p}}-\boldsymbol{u}^p\right),\\
\frac{\partial \alpha^p\gamma^p E^p}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\alpha^p\left(\gamma^p E^p+p^p\right)\boldsymbol{u}^p\right)-p^{\mathrm{I}}\boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}\cdot\nabla\alpha^p=\\
=-\frac{\alpha^p\alpha^{\bar{p}}}{\mu_c}\left(p^p-p^{\bar{p}}\right)p^{(2)}+\delta\boldsymbol{u}^{(1)}\cdot\left(\boldsymbol{u}^{\bar{p}}-\boldsymbol{u}^p\right)+\mathcal{H}\left(\theta^{\bar{p}}-\theta^p\right).
\end{gathered}$$

Таким образом параметры модели [Kapila2001] соответствуют следующему выбору параметров в модели (102):

$$\xi=\frac{\alpha^p\alpha^{\bar{p}}}{\mu_c},\quad \chi=\delta,\quad \phi=\mathcal{H},\quad \boldsymbol{w}^{\mathrm{I}}=\boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}=\boldsymbol{u}^{(1)},\quad \pi^{\mathrm{I}}=p^{\mathrm{I}}=p^{(2)}.$$

Модель [Coquel2012, Herard2012]

Рассмотрим модель из работ [Coquel2012, Herard2012]. В этой работе

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \alpha^p}{\partial t}+\boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}\cdot\nabla\alpha^p=\frac{\alpha^p\alpha^{\bar{p}}}{\Pi_0\tau_P}\left(p^p-p^{\bar{p}}\right),\\
\frac{\partial \alpha^p\gamma^p}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\alpha^p\gamma^p\boldsymbol{u}^p\right)=0,\\
\frac{\partial \alpha^p\gamma^p\boldsymbol{u}^p}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\alpha^p\gamma^p\boldsymbol{u}^p\otimes\boldsymbol{u}^p+\alpha^p p^p\boldsymbol{I}\right)-p^{\mathrm{I}}\nabla\alpha^p=\frac{\alpha^p\gamma^p\alpha^{\bar{p}}\gamma^{\bar{p}}}{\rho\tau_U}\left(\boldsymbol{u}^{\bar{p}}-\boldsymbol{u}^p\right),\\
\frac{\partial \alpha^p\gamma^p E^p}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\alpha^p\left(\gamma^p E^p+p^p\right)\boldsymbol{u}^p\right)-p^{\mathrm{I}}\boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}\cdot\nabla\alpha^p=\\
=\frac{\alpha^p\gamma^p\alpha^{\bar{p}}\gamma^{\bar{p}}}{\rho\tau_U}\left(\boldsymbol{u}^{\bar{p}}-\boldsymbol{u}^p\right)\cdot\frac{\left(\boldsymbol{u}^p+\boldsymbol{u}^{\bar{p}}\right)}{2}+\frac{\alpha^p\gamma^p\mathcal{C}_v^p\alpha^{\bar{p}}\gamma^{\bar{p}}\mathcal{C}_v^{\bar{p}}}{\alpha^p\gamma^p\mathcal{C}_v^p+\alpha^{\bar{p}}\gamma^{\bar{p}}\mathcal{C}_v^{\bar{p}}}\frac{\left(\theta^{\bar{p}}-\theta^p\right)}{\tau_T}.
\end{gathered}$$

Интерфейсные слагаемые $\boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}$ и p^{I} выбраны в модели как:

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{I}} = \kappa^{(1)}\boldsymbol{u}^{(1)} + \kappa^{(2)}\boldsymbol{u}^{(2)}, \quad p^{\mathrm{I}} = \frac{p^{(1)}\kappa^{(2)}\theta^{(2)} + p^{(2)}\kappa^{(1)}\theta^{(1)}}{\kappa^{(1)}\theta^{(1)} + \kappa^{(2)}\theta^{(2)}}.$$

Данная модель соответствует следующему выбору параметров модели (102):

$$\xi = \frac{\alpha^p\alpha^{\bar p}}{\Pi_0\tau_P}, \quad \chi = \frac{\alpha^p\gamma^p\alpha^{\bar p}\gamma^{\bar p}}{\rho\tau_U}, \quad \phi = \frac{1}{\tau_T}\frac{\alpha^p\gamma^p\mathcal{C}_v^p\alpha^{\bar p}\gamma^{\bar p}\mathcal{C}_v^{\bar p}}{\alpha^p\gamma^p\mathcal{C}_v^p + \alpha^{\bar p}\gamma^{\bar p}\mathcal{C}_v^{\bar p}},$$
$$\boldsymbol{w}^{\mathrm{I}} = \frac{(\boldsymbol{u}^p + \boldsymbol{u}^{\bar p})}{2}, \quad \pi^{\mathrm{I}} = 0,$$
$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{I}} = \kappa^{(1)}\boldsymbol{u}^{(1)} + \kappa^{(2)}\boldsymbol{u}^{(2)}, \quad p^{\mathrm{I}} = \frac{p^{(1)}\kappa^{(2)}\theta^{(2)} + p^{(2)}\kappa^{(1)}\theta^{(1)}}{\kappa^{(1)}\theta^{(1)} + \kappa^{(2)}\theta^{(2)}}.$$

Модель [Muller2016]

Рассмотрим модель из работы [Muller2016] в двухфазном случае. Эта модель имеет следующий вид (без релаксации температуры и обмена массой и химического потенциала):

$$\frac{\partial\alpha^p}{\partial t} + \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}\cdot\nabla\alpha^p = \alpha^p\chi_P\left(p^p - p\right),$$
$$\frac{\partial\alpha^p\gamma^p}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\alpha^p\gamma^p\boldsymbol{u}^p\right) = 0,$$
$$\frac{\partial\alpha^p\gamma^p\boldsymbol{u}^p}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\alpha^p\gamma^p\boldsymbol{u}^p\otimes\boldsymbol{u}^p + \alpha^p p^p\boldsymbol{I}\right) - p^{\mathrm{I}}\nabla\alpha^p = \chi_V\alpha^p\rho^p\left(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^p\right),$$
$$\frac{\partial\alpha^p\gamma^p E^p}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\alpha^p\left(\gamma^p E^p + p^p\right)\boldsymbol{u}^p\right) - p^{\mathrm{I}}\boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}\cdot\nabla\alpha^p =$$
$$= \chi_V\alpha^p\rho^p\left(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^p\right)\cdot\boldsymbol{u} + \alpha^p\chi_P p\left(p^p - p\right),$$

где

$$p = \alpha^p p^p + \alpha^{\bar p}p^{\bar p}, \quad \boldsymbol{u} = \frac{\alpha^p\rho^p\boldsymbol{u}^p + \alpha^{\bar p}\rho^{\bar p}\boldsymbol{u}^{\bar p}}{\alpha^p\rho^p + \alpha^{\bar p}\rho^{\bar p}}.$$
$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{I}} = \frac{\alpha^p\rho^p\boldsymbol{u}^p + \alpha^{\bar p}\rho^{\bar p}\boldsymbol{u}^{\bar p}}{\alpha^p\rho^p + \alpha^{\bar p}\rho^{\bar p}}, \quad p^{\mathrm{I}} = p^p\left(1 - \frac{\alpha^p\rho^p\theta^p}{\rho\theta}\right) + p^{\bar p}\left(1 - \frac{\alpha^{\bar p}\rho^{\bar p}\theta^{\bar p}}{\rho\theta}\right),$$
$$\theta = \frac{\alpha^p\rho^p\theta^p + \alpha^{\bar p}\rho^{\bar p}\theta^{\bar p}}{\alpha^p\rho^p + \alpha^{\bar p}\rho^{\bar p}}, \quad \rho = \alpha^p\rho^p + \alpha^{\bar p}\rho^{\bar p}.$$

Подставим соответствующие обозначения в релаксационные слагаемые:

$$\alpha^p \chi_P \left(p^p - p\right) = \alpha^p \chi_P \left(p^p - \alpha^p p^p + \alpha^{\bar{p}} p^{\bar{p}}\right) = \alpha^p \alpha^{\bar{p}} \chi_P \left(p^p - p^{\bar{p}}\right),$$
$$\chi_V \alpha^p \rho^p \left(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^p\right) = \chi_V \alpha^p \rho^p \left(\frac{\alpha^p \rho^p \boldsymbol{u}^p + \alpha^{\bar{p}} \rho^{\bar{p}} \boldsymbol{u}^{\bar{p}}}{\alpha^p \rho^p + \alpha^{\bar{p}} \rho^{\bar{p}}} - \boldsymbol{u}^p\right) = \frac{\chi_V \alpha^p \rho^p \alpha^{\bar{p}} \rho^{\bar{p}}}{\rho} \left(\boldsymbol{u}^{\bar{p}} - \boldsymbol{u}^p\right),$$
$$\alpha^p \chi_P p \left(p^p - p\right) = \alpha^p \chi_P p \left(p^p - \alpha^p p^p - \alpha^{\bar{p}} p^{\bar{p}}\right) = \alpha^p \alpha^{\bar{p}} \chi_P p \left(p^p - p^{\bar{p}}\right).$$

Таким образом, модель из работы [Muller2016] соответствует модели (102) с параметрами:

$$\xi = \alpha^p \alpha^{\bar{p}} \chi_P, \quad \chi = \frac{\chi_V \alpha^p \rho^p \alpha^{\bar{p}} \rho^{\bar{p}}}{\rho}, \quad \phi = 0,$$
$$\boldsymbol{w}^{\mathrm{I}} = \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}} = \frac{\alpha^p \rho^p \boldsymbol{u}^p + \alpha^{\bar{p}} \rho^{\bar{p}} \boldsymbol{u}^{\bar{p}}}{\alpha^p \rho^p + \alpha^{\bar{p}} \rho^{\bar{p}}}, \quad \pi^{\mathrm{I}} = \alpha^p p^p + \alpha^{\bar{p}} p^{\bar{p}},$$
$$p^{\mathrm{I}} = \frac{p^{(1)} \kappa^{(2)} \theta^{(2)} + p^{(2)} \kappa^{(1)} \theta^{(1)}}{\kappa^{(1)} \theta^{(1)} + \kappa^{(2)} \theta^{(2)}}, \quad \kappa^p = \frac{\alpha^p \rho^p}{\rho}.$$

Особо отметим, что в данной модели отсутствует релаксация по температуре.

5.2 Модели с полным тензором напряжений

Модель Годунова-Роменского

По построению многофазной модели модель Годунова-Роменского получается, если положить в (100) $\alpha^p = 1$ и соответственно $\alpha^{\bar{p}} = 0$.

Модель [Favrie2009].

Рассмотрим далее модель (100) и положим в уравнении (56) $\bar{\omega} = 0$. Соответственно

$$\boldsymbol{l}^p = \boldsymbol{l}^{1,p} = -\frac{\dot{\alpha}^p}{3\alpha^p} \boldsymbol{A}^p.$$

Отсюда получим для уравнения (100c):

$$\dot{\boldsymbol{A}}^p = -\left(\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}^p\right) \cdot \boldsymbol{A}^p - \left(\alpha^p\right)^{-1/3} \dot{\overline{\left(\alpha^p\right)^{1/3}}} \boldsymbol{A}^p,$$

или

$$\left(\alpha^p\right)^{1/3} \dot{\boldsymbol{A}}^p + \dot{\overline{\left(\alpha^p\right)^{1/3}}} \boldsymbol{A}^p = -\left(\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}^p\right) \cdot \left(\alpha^p\right)^{1/3} \boldsymbol{A}^p.$$

Введем фазовый тензор дисторсии $\boldsymbol{\mathcal{A}}^p$ как:

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}^p := (\alpha^p)^{1/3}\,\boldsymbol{A}^p.$$

Тогда уравнение (100c) может быть записано в виде:

$$\dot{\boldsymbol{\mathcal{A}}}^p = -\left(\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u}^p\right)\cdot\boldsymbol{\mathcal{A}}^p.$$

Данный вид тензора дисторсии и соответствующее уравнение совместности полностью совпадают со своими однофазными аналогами. Такой вид тензора и соответствующее уравнение были рассмотрены в [Favrie2009].

Остальные уравнения модели [Favrie2009] далее не рассматриваются, так как эта модель является равновесной по скоростям и давлениям.

6 Заключение

В настоящей работе рассмотрен вывод полностью неравновесной многофазной модели типа Баера-Нунциато в случае гиперупругого поведения фаз. Модель включает в себя два интерфейсных давления и две интерфейсные скорости. Интерфейсные напряжения являются полным (не шаровым) тензором второго ранга. Показано, что известные гидродинамические (то есть с шаровым тензором напряжений) модели типа Баера-Нунциато являются частными случаями построенной. По отношению к известным авторам многофазным моделям с гиперупругим поведением фаз настоящая модель является альтернативной — все они имеют шаровой тензор интерфейсных напряжений.

Исследование гиперболичности модели и ее свойств, в частности, линейной вырожденности характеристических полей, соответствующих контактному разрыву решения задачи, является предметом будущей работы.

Приложение A Законы сохранения для смеси

В настоящем разделе получим выражения для баланса консервативных величин для смеси.

Закон сохранения массы. Суммируя уравнения (43a) по фазам, получим:

$$\partial_t \left(\rho^{(1)} + \rho^{(2)}\right) + \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\rho^{(1)}\boldsymbol{u}^{(1)} + \rho^{(2)}\boldsymbol{u}^{(2)}\right) = 0.$$

Из определений (27) и (23) получим выражение закона сохранения массы для смеси:

$$\partial_t \rho + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{u}) = 0.$$

Закон сохранения импульса. Суммируя уравнения (43b) законов сохранения импульса по фазам, получим уравнение:

$$\partial_t \left(\rho^{(1)}\boldsymbol{u}^{(1)} + \rho^{(2)}\boldsymbol{u}^{(2)}\right) + \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\rho^{(1)}\boldsymbol{u}^{(1)} \otimes \boldsymbol{u}^{(1)} - \boldsymbol{T}^{(1)} + \rho^{(2)}\boldsymbol{u}^{(2)} \otimes \boldsymbol{u}^{(2)} - \boldsymbol{T}^{(2)}\right) = 0.$$

Определим тензор напряжений $\boldsymbol{T}$ смеси как [Drew2006, Baer1983]

$$\boldsymbol{T} - \rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u} = \sum_{p=1,2} \left(\boldsymbol{T}^p - \rho^p \boldsymbol{u}^p \otimes \boldsymbol{u}^p\right).$$

Тогда закон сохранения импульса для смеси запишется в виде

$$\partial_t (\rho \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u} - \boldsymbol{T}) = 0.$$

Закон сохранения энергии. После суммирования уравнений (43c) по номерам фаз получим:

$$\partial_t \left(\rho^{(1)}E^{(1)} + \rho^{(2)}E^{(2)}\right) + \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\rho^{(1)}E^{(1)}\boldsymbol{u}^{(1)} - \boldsymbol{T}^{(1)} \cdot \boldsymbol{u}^{(1)} + \rho^{(2)}E^{(2)}\boldsymbol{u}^{(2)} - \boldsymbol{T}^{(2)} \cdot \boldsymbol{u}^{(2)}\right) = 0.$$

Отметим следующее из определения энергии смеси (24) тождество:

$$\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{u} - \rho E \boldsymbol{u} = \sum_{p=1,2} \left(\boldsymbol{T}^p \cdot \boldsymbol{u}^p - \rho^p E^p \boldsymbol{u}^p\right).$$

В итоге для энергии смеси получим

$$\partial_t (\rho E) + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho E \boldsymbol{u} - \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{u}) = 0.$$

Замечание A.1. Отметим, что определение таких отнесенных к смеси фаз параметров, как тензор напряжений, внутренняя энергия, кинетическая энергия неоднозначно, см., например [Drew2006]. Тем не менее конечная форма соответствующих балансовых соотношений однозначно определена.

Замечание A.2. Уравнения для консервативных величин смеси могут быть записаны в лагранжевой форме, если определить лагранжеву производную в соответствии с (30), где средняя скорость смеси $\boldsymbol{u}$ определена согласно (23).

Приложение B Скорости фаз в разных системах отсчета

Рассмотрим вопрос о том, как меняется скорость фаз в различных системах отсчета. Для этого рассмотрим операцию поворота в текущей системе отсчета:

$$\boldsymbol{x}^* (\boldsymbol{\xi}, t) = \boldsymbol{Q} (t) \left(\boldsymbol{x} (\boldsymbol{\xi}, t) - \boldsymbol{x}^0 (\boldsymbol{\xi}) \right) + \boldsymbol{c} (t), \tag{115}$$

где $\boldsymbol{Q} = Q_{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$ — ортогональный тензор поворота, $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^T$, $\boldsymbol{c} = c_i \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{i}}$. Определим среднюю массовую скорость согласно (23) и отметим, что из (27) следует выражение:

$$\frac{\rho^{(1)}}{\rho} + \frac{\rho^{(2)}}{\rho} = 1.$$

Введем обозначение

$$\varrho^p = \frac{\rho^p}{\rho}.$$

Тогда

$$\boldsymbol{u} = \varrho^{(1)} \boldsymbol{u}^{(1)} + \varrho^{(2)} \boldsymbol{u}^{(2)}, \quad \varrho^{(1)} + \varrho^{(2)} = 1. \tag{116}$$

Средняя массовая скорость согласно (115) преобразуется как:

$$\boldsymbol{u}^* = \dot{\boldsymbol{x}}^* = \dot{\boldsymbol{Q}} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0) + \boldsymbol{Q} \cdot \left(\dot{\boldsymbol{x}} - \dot{\boldsymbol{x}}^0 \right) + \dot{\boldsymbol{c}} = \dot{\boldsymbol{Q}} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0) + \boldsymbol{Q} \cdot (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^0) + \dot{\boldsymbol{c}}. \tag{117}$$

Согласно (116) получим

$$\boldsymbol{u}^* = \varrho^{(1)} \left(\boldsymbol{u}^{(1)}\right)^* + \varrho^{(2)} \left(\boldsymbol{u}^{(2)}\right)^* = \dot{\boldsymbol{Q}} \cdot \left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\right) + \boldsymbol{Q} \cdot \left(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^0\right) + \dot{\boldsymbol{c}} =$$
$$= \left(\varrho^{(1)} + \varrho^{(2)}\right) \dot{\boldsymbol{Q}} \cdot \left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\right) + \boldsymbol{Q} \cdot \left(\varrho^{(1)}\boldsymbol{u}^{(1)} + \varrho^{(2)}\boldsymbol{u}^{(2)} - \left(\varrho^{(1)} + \varrho^{(2)}\right) \boldsymbol{u}^0\right) +$$
$$+ \left(\varrho^{(1)} + \varrho^{(2)}\right) \dot{\boldsymbol{c}} \quad (118)$$

Отметим, что в (118) неявно используется соотношение $(\varrho^p)^* = \varrho^p$. Из (118) получим

$$(\boldsymbol{u}^p)^* = \dot{\boldsymbol{Q}} \cdot \left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\right) + \boldsymbol{Q} \cdot \left(\boldsymbol{u}^p - \boldsymbol{u}^0\right) + \dot{\boldsymbol{c}}. \quad (119)$$

Таким образом, получим, что каждая из скоростей фаз меняется (119) так же, как и средняя массовая скорость (117). Из этого утверждения, в частности, следует, что

$$(\boldsymbol{u}^p)^* - \left(\boldsymbol{u}^{\bar{p}}\right)^* =$$
$$= \dot{\boldsymbol{Q}} \cdot \left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\right) + \boldsymbol{Q} \cdot \left(\boldsymbol{u}^p - \boldsymbol{u}^0\right) + \dot{\boldsymbol{c}} - \left(\dot{\boldsymbol{Q}} \cdot \left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\right) + \boldsymbol{Q} \cdot \left(\boldsymbol{u}^{\bar{p}} - \boldsymbol{u}^0\right) + \dot{\boldsymbol{c}}\right) =$$
$$= \boldsymbol{Q} \cdot \left(\boldsymbol{u}^p - \boldsymbol{u}^{\bar{p}}\right). \quad (120)$$

Таким образом, вектор относительной скорости фаз является материально индифферентным [Димитриенко2009]. При этом скорость каждой из фаз меняется по той же формуле, что и средняя массовая скорость. Из этих утверждений, в частности, следует, что законы сохранения массы, импульса и энергии для каждой из фаз являются материально индифферентными, поскольку полностью совпадают со своими однофазными аналогами за исключением интерфейсных слагаемых. При этом из материальной индифферентности относительного изменения скоростей фаз следует, что межфазные слагаемые также материально индифферентны в случае выбора интерфейсной скорости как линейной комбинации скоростей фаз.

Приложение C Материальная индифферентность уравнений совместности деформации

Однофазный случай. Рассмотрим вопрос независимости уравнений эволюции тензора дисторсии (17) от системы отсчета. Для этого рассмотрим операцию поворота в текущей системе отсчета:

$$\boldsymbol{x}^* (\boldsymbol{\xi}, t) = \boldsymbol{Q} (t) \left(\boldsymbol{x} (\boldsymbol{\xi}, t) - \boldsymbol{x}^0 (\boldsymbol{\xi}) \right) + \boldsymbol{c} (t) , \tag{121}$$

где $\boldsymbol{Q} = Q_{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$ — ортогональный тензор поворота, $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^T$, $\boldsymbol{c} = c_i \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{i}}$. Также координаты лагранжевой системы отсчета меняются по закону

$$\boldsymbol{\xi}^* = \boldsymbol{P} \left(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}^0 \right) + \boldsymbol{b}, \tag{122}$$

где $\boldsymbol{P} = P_{ij} \boldsymbol{r}_i \otimes \boldsymbol{r}_j$ — ортогональный тензор поворота в отсчетной конфигурации, $\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}^T$, $\boldsymbol{b} = b_i \boldsymbol{r}_i$. Из (121) получим

$$\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \frac{\partial x_j^*}{\partial x_i} = \boldsymbol{e}_i \otimes \left(Q_{jk} \frac{\partial x_k}{\partial x_i} \right) \boldsymbol{e}_j = Q_{ji} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{Q}^{-1}. \tag{123}$$

$$\boldsymbol{\nabla}^* \otimes \boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \frac{\partial x_j}{\partial x_i^*} = \boldsymbol{Q}. \tag{124}$$

Аналогично для производной в отсчетной конфигурации

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{\xi}} \otimes \boldsymbol{\xi}^* = \boldsymbol{r}_i \otimes \frac{\partial \boldsymbol{\xi}^*}{\partial \xi_i} = \boldsymbol{P}^T = \boldsymbol{P}^{-1}, \quad \boldsymbol{\nabla}_{\xi}^* \otimes \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{r}_i \otimes \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \xi_i^*} = \boldsymbol{P}. \tag{125}$$

Поскольку $\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{I}$, то

$$\boldsymbol{Q} \cdot \dot{\boldsymbol{Q}}^T = -\dot{\boldsymbol{Q}} \cdot \boldsymbol{Q}^T. \tag{126}$$

Рассмотрим, как преобразуются компоненты тензора дисторсии $\boldsymbol{A} = A_{ij}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{r}_j = \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{r}_j$ с учетом выражений (123), (124) и (125):

$$A^*_{ij}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{r}_j = \frac{\partial \xi^*_j}{\partial x^*_i}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{r}_j = \frac{\partial x_p}{\partial x^*_i}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_p) \cdot \frac{\partial \xi_m}{\partial x_n}(\boldsymbol{e}_n \otimes \boldsymbol{r}_m) \cdot \frac{\partial \xi^*_j}{\partial \xi_k}(\boldsymbol{r}_k \otimes \boldsymbol{r}_j) = \\ = (\boldsymbol{\nabla}^* \otimes \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{\xi}} \otimes \boldsymbol{\xi}^*) . \quad (127)$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{P}^T.$$

Также вычислим материальную производную от дисторсии:

$$\dot{\boldsymbol{A}}^* = \dot{\boldsymbol{Q}} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{P}^T + \boldsymbol{Q} \cdot \dot{\boldsymbol{A}} \cdot \boldsymbol{P}^T. \quad (128)$$

Скорость преобразуется по следующей формуле:

$$\boldsymbol{u}^* = \dot{\boldsymbol{x}}^* = \dot{\boldsymbol{Q}} \cdot \left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\right) + \boldsymbol{Q} \cdot \left(\dot{\boldsymbol{x}} - \dot{\boldsymbol{x}}^0\right) + \dot{\boldsymbol{c}} = \dot{\boldsymbol{Q}} \cdot \left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\right) + \boldsymbol{Q} \cdot \left(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^0\right) + \dot{\boldsymbol{c}}. \quad (129)$$

Кроме того, из (129) получим

$$\boldsymbol{\nabla}^* \otimes \boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{e}_i \otimes \frac{\partial \boldsymbol{u}^*}{\partial x^*_i} = \boldsymbol{e}_i \otimes \left(\dot{\boldsymbol{Q}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^*_i}\right) + \boldsymbol{e}_i \otimes \left(\boldsymbol{Q} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x^*_i}\right) = \\ = \boldsymbol{e}_i \otimes \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^*_i} \cdot \dot{\boldsymbol{Q}}^T\right) + \boldsymbol{e}_i \otimes \left(\boldsymbol{Q} \cdot (\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_p)\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_k}\frac{\partial x_p}{\partial x^*_i}\right) = \left(\boldsymbol{e}_i \otimes \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^*_i}\right) \cdot \dot{\boldsymbol{Q}}^T + (\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_p) \cdot \boldsymbol{e}_i \otimes \left(\boldsymbol{Q} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_k}\frac{\partial x_p}{\partial x^*_i}\right) = \\ = \left(\boldsymbol{e}_i \otimes \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^*_i}\right) \cdot \dot{\boldsymbol{Q}}^T + \frac{\partial x_p}{\partial x^*_i}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_p) \cdot \boldsymbol{e}_k \otimes \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_k} \cdot \boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{Q} \cdot \dot{\boldsymbol{Q}}^T + \boldsymbol{Q} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{Q}^T. \quad (130)$$

Из полученных соотношений (130), (126), (128) следует выражение:

$$(\boldsymbol{\nabla}^* \otimes \boldsymbol{u}^*) \cdot \boldsymbol{A}^* = \left(\boldsymbol{Q} \cdot \dot{\boldsymbol{Q}}^T + \boldsymbol{Q} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{Q}^T\right) \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{P}^T = \\ = \boldsymbol{Q} \cdot \dot{\boldsymbol{Q}}^T \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{P}^T + \boldsymbol{Q} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{Q}^T \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{P}^T = -\dot{\boldsymbol{Q}} \cdot \boldsymbol{Q}^T \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{P}^T + \boldsymbol{Q} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{Q}^T \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{P}^T = \\ = -\dot{\boldsymbol{Q}} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{P}^T + \boldsymbol{Q} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{P}^T. \quad (131)$$

Из уравнения (131) получим соотношение:

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{A}}^* + (\boldsymbol{\nabla}^* \otimes \boldsymbol{u}^*) \cdot \boldsymbol{A}^* = \\
&\qquad = \dot{\boldsymbol{Q}} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{P}^T + \boldsymbol{Q}\dot{\boldsymbol{A}} \cdot \boldsymbol{P}^T - \dot{\boldsymbol{Q}} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{P}^T + \boldsymbol{Q} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{P}^T = \\
&\qquad\qquad = \boldsymbol{Q} \cdot \left(\dot{\boldsymbol{A}} + (\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{A}\right) \cdot \boldsymbol{P}^T.
\end{aligned}$$

Таким образом, из уравнения

$$\dot{\boldsymbol{A}} + (\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{A} = 0$$

следует уравнение

$$\dot{\boldsymbol{A}}^* + (\boldsymbol{\nabla}^* \otimes \boldsymbol{u}^*) \cdot \boldsymbol{A}^* = 0,$$

то есть уравнение (17) является материально индифферентным.

Многофазный случай. Рассмотрим теперь многофазный вариант уравнения совместности (29). Считаем, что при преобразованиях (121) и (122) тензор дисторсии преобразуется по закону

$$(\boldsymbol{A}^p)^* = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{A}^p \cdot (\boldsymbol{P}^p)^T .$$

Тогда преобразования, полученные в предыдущем параграфе, остаются верными для уравнения совместности в многофазном случае. Таким образом, получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&\dot{\overline{(\boldsymbol{A}^p)^*}} + ((\boldsymbol{\nabla})^* \otimes (\boldsymbol{u}^p)^*) \cdot (\boldsymbol{A}^p)^* = \\
&= \dot{\boldsymbol{Q}} \cdot \boldsymbol{A}^p \cdot (\boldsymbol{P}^p)^T + \boldsymbol{Q}\dot{\boldsymbol{A}}^p \cdot (\boldsymbol{P}^p)^T - \dot{\boldsymbol{Q}} \cdot \boldsymbol{A}^p \cdot (\boldsymbol{P}^p)^T + \boldsymbol{Q} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}^p) \cdot \boldsymbol{A}^p \cdot (\boldsymbol{P}^p)^T = \\
&\qquad\qquad = \boldsymbol{Q} \cdot \left(\dot{\boldsymbol{A}}^p + (\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u}^p) \cdot \boldsymbol{A}^p\right) \cdot (\boldsymbol{P}^p)^T .
\end{aligned}$$

Из (29) получим соотношение для обменных слагаемых $(\boldsymbol{l}^p)^* = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{l}^p \cdot (\boldsymbol{P}^p)^T$. Из (56) следует, что

$$\omega \left(\boldsymbol{l}^{1,p}\right)^* + \bar{\omega} \left(\boldsymbol{l}^{2,p}\right)^* = \boldsymbol{Q} \cdot \left(\omega \boldsymbol{l}^{1,p} + \bar{\omega} \boldsymbol{l}^{2,p}\right) \cdot \boldsymbol{P}^T. \tag{132}$$

Рассмотрим первое слагаемое в (132)

$$\left(\boldsymbol{l}^{1,p}\right)^* = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{l}^{1,p}\cdot\boldsymbol{P}^T. \tag{133}$$

Докажем, что равенство (133) верно из определения обменного слагаемого $\boldsymbol{l}^{1,p}$. Из уравнения (57a) имеем:

$$\left(\boldsymbol{l}^{1,p}\right)^* = -\frac{\dot{\alpha}^p}{3\alpha^p}\left(\boldsymbol{A}^p\right)^* = -\frac{\dot{\alpha}^p}{3\alpha^p}\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{A}^p\cdot\left(\boldsymbol{P}^p\right)^T = \boldsymbol{Q}\cdot\left(-\frac{\dot{\alpha}^p}{3\alpha^p}\boldsymbol{A}^p\right)\cdot\left(\boldsymbol{P}^p\right)^T = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{l}^{1,p}\cdot\left(\boldsymbol{P}^p\right)^T.$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое в (132)

$$\left(\boldsymbol{l}^{2,p}\right)^* = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{l}^{2,p}\cdot\boldsymbol{P}^T.$$

Покажем, что оно верно. Из уравнения (57b), а также соотношения для относительной скорости (120) получим

$$\begin{aligned}
\left(\boldsymbol{l}^{2,p}\right)^* &= \frac{1}{\alpha^p}\left[\frac{1}{3}\mathcal{S}^p_\alpha\boldsymbol{I} + \left(\left(\boldsymbol{u}^p\right)^* - \left(\boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}\right)^*\right)\otimes\boldsymbol{\nabla}^*\alpha^p\right]\cdot\left(\boldsymbol{A}^p\right)^* = \\
&= \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{3}\mathcal{S}_\alpha\boldsymbol{I} + \left(\boldsymbol{u}^* - \left(\boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}\right)^*\right)\otimes\boldsymbol{\nabla}\alpha\cdot\boldsymbol{Q}^T\right]\cdot\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{P}^T = \\
&= \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{3}\mathcal{S}_\alpha\cdot\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{P}^T + \left(\boldsymbol{u}^* - \left(\boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}\right)^*\right)\otimes\boldsymbol{\nabla}\alpha\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{P}^T\right] = \\
&= \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{3}\mathcal{S}_\alpha\cdot\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{P}^T + \boldsymbol{Q}\cdot\left(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}\right)\otimes\boldsymbol{\nabla}\alpha\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{P}^T\right] = \\
&= \boldsymbol{Q}\cdot\left(\frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{3}\mathcal{S}_\alpha\boldsymbol{I} + \left(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}\right)\otimes\boldsymbol{\nabla}\alpha\right]\cdot\boldsymbol{A}\right)\cdot\boldsymbol{P}^T = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{l}^{2,p}\cdot\boldsymbol{P}^T.
\end{aligned}$$

Таким образом, уравнения динамики тензора дисторсии являются материально индифферентными для обеих фаз.

Список литературы

[Блохин1994] А. М. Блохин, В. Н. Доровский. Проблемы математического моделирования в теории многоскоростного континуума // РАН, Сиб. отд-ние, Объед. ин-т геологии, геофизики и минералогии, Ин-т математики, Новосибирск. – 1994.

[Годунов1972] S. K. Godunov, E. I. Romenskii. Nonstationary equations of nonlinear elasticity theory in Eulerian coordinates // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 1972. V. 13. No. 6. P. 868–884.
https://doi.org/10.1007/BF01200547

[Годунов1961] С. К. Годунов. Интересный класс квазилинейных систем // Доклады АН СССР. 1961. Т. 139. № 3. С. 521–523.
http://mi.mathnet.ru/dan25278

[Годунов1998] С. К. Годунов, Е. И. Роменский. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. Новосибирск: Научная книга, 1998. 280 с.

[Годунов2010] S. K. Godunov, I. M. Peshkov. Thermodynamically consistent nonlinear model of elastoplastic Maxwell medium // Comput. Math. and Math. Phys. 2010. V. 50. No. 8. P. 1409–1426.
https://doi.org/10.1134/S0965542510080117

[Димитриенко2009] Ю. И. Димитриенко. Нелинейная механика сплошной среды. М.: Физматлит, 2009. 624 с.

[Куликовский2001] А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов, А. Ю. Семенов. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М. : Физматлит, 2001.

[Пешков2016] I. M. Peshkov, E. I. Romenski. A hyperbolic model for viscous Newtonian flows // Continuum Mech. Thermodyn. 2016. V. 28. No. 1. P. 85–104. http://dx.doi.org/10.1007/s00161-014-0401-6

[Пешков2019] I. M. Peshkov et al. Theoretical and numerical comparison of hyperelastic and hypoelastic formulations for Eulerian non-linear

elastoplasticity // J. Comput. Phys. 2019. V. 387. P. 481-521.
https://doi.org/10.1016/j.jcp.2019.02.039

[Роменский2011] Е. И. Роменский. Термодинамически согласованная система законов сохранения течения сжимаемой жидкости в пористой упругой среде // Сиб. журн. индустр. матем. 2011. Т.14. № 4. С. 86–97.
http://www.ams.org/mathscinet-getitem?mr=2954010

[Baer2021] S. C. Schumacher, M. R. Baer. Generalized continuum mixture theory for multi-material shock physics // Int. J. Multiphase Flow. 2021. V. 144. P. 103790. https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2021.103790

[Barton2009a] P. Barton et al. Exact and approximate solutions of Riemann problems in non-linear elasticity // J. Comput. Phys. 2009. V. 228. No. 18. P. 7046–7068. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.06.014

[Barton2009b] P. T. Barton, D. Drikakis, E. Romenski. An Eulerian finite-volume scheme for large elastoplastic deformations in solids // Int. J. Num. Meth. Eng. 2010. V. 81. No. 4. P. 453–484. https://doi.org/10.1002/nme.2695

[Baer1983] M. Baer, J. Nunziato. A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive granular materials // Int. J. Multiph. Flow. V. 12. No. 6. P. 861–889.
https://doi.org/10.1016/0301-9322(86)90033-9

[Coleman1974] Coleman B. D., Noll W. The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity // The foundations of mechanics and thermodynamics. 1974. P. 145–156.

[Coleman1974a] Noll W. A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media // The Foundations of Mechanics and Thermodynamics. 1974. P. 1–30.

[Cook2017] A. Cook et al. Evaluation of an Eulerian multi-material mixture formulation based on a single inverse deformation gradient tensor // Center for Turbulance Research Annual Research Briefs. 2017. No. LLNL-JRNL-741479.

[Coquel2002] F. Coquel et al. Closure laws for a two-fluid two-pressure model // C.R. Math. 2002. V. 334. No. 10. P. 927–932. https://doi.org/10.1016/S1631-073X(02)02366-X

[Coquel2012] F. Coquel et al. A class of two-fluid two-phase flow models // 42nd AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit. 2012. P. 3356. https://doi.org/10.2514/6.2012-3356

[Drew2006] D. Drew, S. Passman. Theory of multicomponent fluids. Springer, 2014.

[Drumheller1983] A. Bedford, D. Drumheller. Theories of immiscible and structured mixtures // Int. J. Eng. Sci. 1983. V. 21. No. 8. P. 863–960. https://doi.org/10.1016/0020-7225(83)90071-X

[Drumheller2000] D. Drumheller. On theories for reacting immiscible mixtures // Int. J. Eng. Sci. 2000. V. 38. No 3. P. 347–382. https://doi.org/10.1016/S0020-7225(99)00047-6

[Dumbser2016] M. Dumbser et al. High order ADER schemes for a unified first order hyperbolic formulation of continuum mechanics: Viscous heat-conducting fluids and elastic solids // J. Comput. Phys. 2016. V. 314. P. 824–862. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.02.015

[Favrie2009] N. Favrie, S. Gavrilyuk, R. Saurel. Solid-fluid diffuse interface model in cases of extreme deformations // J. Comput. Phys. 2009. V. 228. No. 16. P. 6037–6077. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.05.015

[Gabriel2021] A.-A. Gabriel et al. A unified first-order hyperbolic model for nonlinear dynamic rupture processes in diffuse fracture zones // Phil. Trans. R. Soc. A. 2021. V. 379. No. 2196. P. 20200130. https://doi.org/10.1098/rsta.2020.0130

[Gavrilyuk2011] S. Gavrilyuk. Multiphase Flow Modeling via Hamilton's Principle // Variational Models and Methods in Solid and Fluid Mechanics. 2011. V. 535. P. 163–210. https://doi.org/10.1007/978-3-7091-0983-0_4

[Gallouët2004] T. Gallouët, J. Hérard, N. Seguin. Numerical modelling of two-phase flows using the two-fluid two-pressure approach // Math. Models Methods Appl. Sci. 2004. V. 14. No. 5. P. 663–700. https://doi.org/10.1142/S0218202504003404

[Ghaisas2015] N. Ghaisas, A. Subramaniam, S. Lele. High-Order Eulerian Methods for Elastic-Plastic Flow in Solids and Coupling with Fluid Flows // 46th AIAA Fluid Dynamics Conference. 2016. P. 3350. https://doi.org/10.2514/6.2016-3350

[Hank2017] S. Hank, N. Favrie, J. Massoni. Modeling hyperelasticity in non-equilibrium multiphase flows // J. Comput. Phys. 2017. V. 330. P. 65–91. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.11.001

[Hantke2021] M. Hantke, S. Müller, L. Grabowsky. News on Baer–Nunziato-type model at pressure equilibrium // Continuum Mech. Thermodyn. 2021. V. 33. P. 767–788. https://doi.org/10.1007/s00161-020-00956-3

[Herard2012] J.-M. Hérard, O. Hurisse. A fractional step method to compute a class of compressible gas– liquid flows // Computers and Fluids. 2012. V. 55. P. 57–69. https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2011.11.001

[Herard2007] Hérard J. M. A three-phase flow model //Math. Comput. Modell. 2007. V. 45. No. 5–6. P. 732-755. https://doi.org/10.1016/j.mcm.2006.07.018

[Hurisse2020] O. Hurisse. Various choices of source terms for a class of two-fluid two-velocity models // ESAIM. Math. Model. Numer. Anal. 2021. V. 55. No. 2. P. 357-380. https://doi.org/10.1051/m2an/2020089

[Kapila1997] A. Kapila, S. Son, J. Bdzil, R. Menikoff. Two-phase modeling of DDT: Structure of the velocity-relaxation zone // Phys. Fluids. 1997. V. 9. No. 12. P. 3885–3897. https://doi.org/10.1063/1.869488

[Kapila2001] A. Kapila, R. Menikoff, J. Bdzil, S. Son, S. Stewart, Two-phase modeling of deflagration-to-detonation transition in granular materials: Reduced equations // Phys. Fluids. 2001. V. 13. No. 10. P. 3002–3024. https://doi.org/10.1063/1.1398042

[Murrone2005] A. Murrone, H. Guillard. A five-equation reduced model for compressible two phase flow problems // J. Comput. Phys. 2005. V. 202. No. 2. P. 664–698. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2004.07.019

[Muller2016] S. Müller, M. Hantke, P. Richter. Closure conditions for non-equilibrium multi-component models // Contin. Mech. Thermodyn. 2016. V. 28 No. 4. P. 1157–1189. https://doi.org/10.1007/s00161-015-0468-8

[Ndanou2015] S. Ndanou, N. Favrie, S. Gavrilyuk. Multi-solid and multi-fluid diffuse interface model: Applications to dynamic fracture and fragmentation // J. Comput. Phys. 2015. V. 295. P. 523–555. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2015.04.024

[Peshkov2018] I. Peshkov et al. Continuum mechanics and thermodynamics in the Hamilton and the Godunov-type formulations // Continuum Mech. Thermodyn. 2018. V. 30. P. 1343–1378. https://doi.org/10.1007/s00161-018-0621-2

[Perrier2021] V. Perrier, E. Gutiérrez. Derivation and closure of Baer and Nunziato type multiphase models by averaging a simple stochastic model // Multiscale Model. Simul. 2021. V. 19. No. 1. P. 401–439. https://doi.org/10.1137/19M1306609

[Romensky1998] E. Romensky. Hyperbolic systems of thermodynamically compatible conservation laws in continuum mechanics // Math. Comput. Modell. 1998. V. 28. No. 10. P. 115–130. https://doi.org/10.1016/S0895-7177(98)00159-9

[Subramaniam2017] A. Subramaniam, N. Ghaisas, S. Lele. High-Order Eulerian Simulations of Multimaterial Elastic–Plastic Flow // ASME. J. Fluids Eng. 2018. V. 140. No. 5. P.050904. https://doi.org/10.1115/1.4038399

[Truesdell1952] C. Truesdell. The mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics // Journal of Rational Mechanics and Analysis. 1952. V. 1. P. 125–300.

[Truesdell1969] Rational thermodynamics. New York: McGraw-tIill. 1969.

[Truesdell2004] C. Truesdell, W. Noll. The non-linear field theories of mechanics // Springer. 2004, P. 1–579.

[Zheng1994] Zheng, Q.-S. Theory of Representations for Tensor Functions — A Unified Invariant Approach to Constitutive Equations // Appl. Mech. Rev. 1994. V. 47. No. 11. P. 545–587. https://doi.org/10.1115/1.3111066

Содержание