



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 39 за 2022 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**С.Ю. Медведев, А.А. Мартынов,**  
**Ю.Ю. Пошехонов**

**МНД\_NX: код идеальной  
МГД-устойчивости на  
двумерных  
неструктурированных сетках**

Статья доступна по лицензии  
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Медведев С.Ю., Мартынов А.А., Пошехонов Ю.Ю. МНД\_NX: код идеальной МГД-устойчивости на двумерных неструктурированных сетках // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2022. № 39. 22 с.  
<https://doi.org/10.20948/prepr-2022-39>  
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2022-39>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.Келдыша  
Российской академии наук**

**С.Ю. Медведев, А.А. Мартынов, Ю.Ю. Пошехонов**

**MHD\_NX: код идеальной  
МГД-устойчивости на двумерных  
неструктурированных сетках**

**Москва — 2022**

*Медведев С.Ю., Мартынов А.А., Пошехонов Ю.Ю.*

**MHD\_NX: код идеальной МГД-устойчивости на двумерных неструктурированных сетках**

Представлен разработанный авторами код для расчетов МГД-устойчивости двумерных плазменных конфигураций с произвольной топологией магнитного поля. Обсуждаются особенности применения подходящего варианта метода конечных элементов на гибридных неструктурированных расчетных сетках и тестовые расчеты. Приведены примеры использования кода для моделирования устойчивости плазмы в ловушках-галатеях и в диверторных конфигурациях токамака с учетом плазмы за сепаратрисой.

**Ключевые слова:** МГД-устойчивость, численное моделирование, метод конечных элементов, неструктурированные сетки

*Sergey Yurievich Medvedev, Alexandr Alexandrovich Martynov, Yuri Yurievich Poshekhonov*

**MHD\_NX: ideal MHD stability code on two-dimensional unstructured grids**

The code developed by the authors for calculating the MHD stability of two-dimensional plasma configurations with an arbitrary magnetic field topology is presented. The choice of an appropriate version of the finite element method on hybrid unstructured computational grids and test calculations are discussed. Examples of using the code for modeling the plasma stability in Galatea traps and in divertor configurations of tokamak taking into account the plasma beyond the separatrix are given.

**Key words:** MHD stability, numerical modeling, finite element method, unstructured grids

Работа выполнена в рамках госзадания ИПМ им. М.В.Келдыша РАН.

## Оглавление

Введение .....	3
Вариационная задача идеальной МГД-устойчивости .....	4
Конечные элементы Уитни на гибридных сетках .....	5
Реализация условия $\mathbf{e} \cdot \mathbf{V} = 0$ на неструктурированных сетках .....	7
Тестовые расчеты для осесимметричного МГД-равновесия.....	9
Специфика задачи МГД-устойчивости плазмы в галатеях.....	16
Устойчивость диверторных конфигураций плазмы в токамаках.....	18
Заключение.....	20
Библиографический список.....	21

## Введение

МГД-устойчивость высокотемпературной плазмы – одна из ключевых проблем исследований в области управляемого термоядерного синтеза в системах с магнитным удержанием. Эффективность удержания плазмы в самых продвинутых тороидальных системах – токамаках и стеллараторах – связана с регулярностью топологии равновесного магнитного поля: в благоприятных случаях магнитные поверхности образуют систему вложенных торов. Естественным образом коды для расчета МГД-устойчивости в основном используют структурные радиально-кольцевые сетки в сечении тора, привязанные к магнитным поверхностям [1]. К тому же в качестве неизвестных принято использовать проекции вектора смещения, связанные с магнитными поверхностями. Такой выбор способствует аккуратной аппроксимации спектра некомпактного МГД оператора, обладающего специфической анизотропией: соответствующий функционал потенциальной энергии содержит производные по нормали к магнитным поверхностям только от нормальной компоненты смещения.

Однако разнообразие возможных плазменных конфигураций значительно шире случая с вложенными магнитными поверхностями. Так, присутствие внутренней сепаратрисы вполне обычно для стеллараторов с магнитными островами и для альтернативных систем удержания типа Галатеи [2–5], где магнитное поле формируется внешними и внутренними проводниками, а ток плазмы несущественен. Даже для токамаков отказ от предположения о вложенности поверхностей актуален: осесимметричные  $n=0$  острова неизбежно возникают в конфигурациях с обращенным плазменным током: с полным током, меняющим знак – “AC operation” или с отрицательной плотностью тока локально в центральной зоне шнура – “Current Hole” [6]. Наконец, важный практический вопрос – устойчивость приграничной плазмы в диверторных конфигурациях – должен быть изучен с учетом конечной плотности тока в слое вокруг сепаратрисы (SOL – “Scrape-Off\_Layer”).

Некоторые относительно простые случаи, выходящие за рамки вложенных поверхностей, допускают разбиение на несколько подобластей с вложенными поверхностями, и соответственно, традиционные коды устойчивости можно приспособить для моделирования. Таким примером является дублетная конфигурация токамака с двумя магнитными осями, которая выглядит привлекательно, как способ увеличить общую вытянутость плазмы. Специализированная версия кода идеальной устойчивости KINX [1] на структурных сетках была использована для расчетов таких конфигураций. Однако, чтобы полностью снять ограничение на топологию магнитного поля, требуются принципиально иные коды, не привязанные к виду (и даже к существованию) магнитных поверхностей как по семейству расчетных сеток, так и по выбору вектора неизвестных. Исходя из этих принципов был разработан и протестирован новый код MHD\_NX [7], предназначенный для

расчетов идеальной МГД-устойчивости двумерных плазменных равновесий всех трех допустимых типов координатной симметрии: плоской, осевой и винтовой. Входной информацией для кода является стационарное МГД-равновесие, представляющее собой решение обобщенного (для всех видов симметрии) уравнения Грэда-Шафранова, полученное либо на структурной сетке (код SAHE для токамаков), либо на произвольной треугольной сетке (например, с помощью пакета Matlab). Код MHD\_NX применен для оценки устойчивости плазмы в разнообразных системах с магнитным удержанием [8].

## Вариационная задача идеальной МГД-устойчивости

Вместо традиционного использования вектора смещения в качестве неизвестных в новом коде MHD\_NX выбрано возмущение электрического поля, что дает возможность применить разработанные для задач электродинамики численные методы [9].

Для анализа устойчивости равновесий с магнитными островами в коде MHD\_NX [7] предлагается использовать вариационную формулировку задачи устойчивости (энергетический принцип)  $\delta(W_F + W_S + W_V - \omega^2 K) = 0$  [10] на основе функционалов возмущений потенциальной и кинетической энергии, выраженных через возмущение электрического поля  $\mathbf{E} = i\omega\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{e} = -\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}$ , где  $\boldsymbol{\xi}$  – вектор смещения плазмы от положения равновесия,  $\mathbf{B}$  – равновесное магнитное поле, и предполагается экспоненциальная зависимость от времени  $\exp(i\omega t)$ . Тогда стандартные выражения для функционалов энергии (предполагая, что равновесная граница плазмы является магнитной поверхностью и, кроме того, показатель адиабаты  $\Gamma = 0$ ) принимают вид:

$$W_F = \frac{1}{2} \int_{V_p} \left\{ |\nabla \times \mathbf{e}|^2 - \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{B}}{B^2} \mathbf{e} \cdot \nabla \times \mathbf{e} + \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{e}}{B^2} [2\mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{e} - \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}] \right\} dV, \quad (1)$$

$$K = \frac{1}{2} \int_{V_p} \rho |\mathbf{e}|^2 / B^2 dV, \quad \mathbf{t} = \mathbf{j} + B^2 \nabla \left( \frac{1}{B^2} \right) \times \mathbf{B},$$

где  $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}$  – плотность тока,  $\rho$  – массовая плотность,  $V_p$  – объем плазмы. В идеальной МГД требование отсутствия компоненты вдоль равновесного магнитного поля  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{B} = 0$  замыкает формулировку задачи устойчивости. Естественным образом учитывается также наличие вакуумной прослойки между плазмой и проводящей стенкой со следующим выражением для возмущения потенциальной энергии в объеме вакуума  $V_v$ :

$$W_V = \frac{1}{2} \int_{V_v} |\nabla \times \mathbf{e}|^2 dV, \quad (2)$$

где возмущенное магнитное поле  $\delta\mathbf{B}_v = -\nabla \times \mathbf{e}$ , и с требованием непрерывности тангенциальной составляющей  $\mathbf{e}$  через границу плазмы, предполагая отсутствие равновесного поверхностного тока, то есть непрерывность равновесного магнитного поля через границу плазма-вакуум (при этом также обнуляется интеграл по этой границе  $W_s = 0$ ). На идеально проводящей стенке ставится условие  $\mathbf{e} \times \mathbf{n} = 0$ .

Энергетический принцип (1),(2) может быть обобщен и на случай равновесных конфигураций с плазмой за сепаратрисой, которая ограничивается диверторными пластинами. В области разомкнутых линий равновесного магнитного поля граничные условия на диверторных пластинах для задачи идеальной МГД устойчивости выглядят следующим образом:

$$\xi_{\perp} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \xi \cdot \mathbf{B} / B = 0 \quad \text{или} \quad \mathbf{e} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{n} = 0, \quad (3)$$

где  $\mathbf{n}$  – нормаль к диверторным пластинам. К такому простому виду приводятся следующие граничные условия на границе дебаевского слоя (sheath boundary conditions) [11]:  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\perp} + v_{\parallel} \mathbf{B} / B$ ,  $\mathbf{v}_{\perp} \cdot \mathbf{n} = 0$ ,  $v_{\parallel} = c_s$ , где  $c_s$  – скорость звука, при низких бета и при альфвеновской скорости, намного превышающей скорость звука  $v_A \gg c_s$ . Формулировка вариационного принципа с граничными условиями (3) совпадает со стандартным вариационным принципом с точностью до одного несимметричного слагаемого  $W_d$ , которое нужно добавить к функционалу  $W_F + W_V$  из (1):

$$W_d = \frac{1}{2} \int_{S_d} \mathbf{e} \cdot \delta \mathbf{j}_s dS, \quad (4)$$

где  $\delta \mathbf{j}_s = \mathbf{n} \times \langle \delta \mathbf{B} \rangle$  – возмущенный поверхностный ток на диверторных пластинах  $S_d$  [8], определяемый скачком возмущенного поля  $\langle \delta \mathbf{B} \rangle$ . В коде устойчивости MHD\_NX постановка граничных условий (3) на диверторных пластинах вполне естественна: требование  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{B} = 0$  заменяется условием  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{n} = 0$ .

## Конечные элементы Уитни на гибридных сетках

Чтобы расширить область применения кода, для неизвестного возмущения электрического поля  $\mathbf{e}$  используются общегеометрические проекции, не связанные с равновесным магнитным полем. Единственное используемое свойство – координатная симметрия (плоская, осевая или винтовая) равновесной конфигурации. Для определенности ниже будем предполагать осевую симметрию относительно тороидального угла  $\varphi$  и рассматривать задачу устойчивости на неструктурированных сетках в сечении  $\varphi = \text{const}$ . Для аппроксимации используется метод конечных элементов с векторными

базисными функциями для проекции вектора  $\mathbf{e}$  на плоскость постоянного тороидального угла, а также стандартные конечные элементы для проекции на тороидальное направление. Для двумерной треугольной сетки эти конечные элементы задаются следующими формулами:

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_{pol} + e_{\varphi} \nabla \varphi: \mathbf{e}_{pol} = \{W_{mn} = W_m \nabla W_n - W_n \nabla W_m\}, e_{\varphi} = \{W_i\}, \quad (5)$$

где  $W_i$  – скалярные двумерные кусочно-линейные базисные функции для каждого  $i$ -го узла сетки, а  $W_{mn}$  – векторные базисные функции для каждого ребра треугольной сетки. Отметим основные свойства базисных функций  $W_i$ ,  $W_{mn}$  [9]:

– Значение  $W_i$  равно единице в узле  $i$  и нулю в остальных узлах;

– Циркуляция  $W_{mn}$  вдоль ребра  $(mn)$  равна единице:

Действительно, если  $\tau = mn/|mn|$  – единичный вектор от узла  $m$  к узлу  $n$ , то  $mn \cdot \nabla W_n = 1$ , ,  $\int_{mn} \tau \cdot (W_m \nabla W_n) dl = \int_{mn} W_m dl / |mn|$ ,

и, наконец, циркуляция  $\int_{mn} \tau \cdot W_{mn} dl = \int_{mn} (W_m + W_n) dl / |mn| = 1$ , так как  $W_m + W_n = 1$  на ребре  $(mn)$ .

– На ребре  $(mn)$  тангенциальная проекция векторов  $\nabla W_n$ ,  $\nabla W_m$ , а значит, и вектора  $W_{mn}$ , непрерывна.

Для таких отнесенных к ребрам базисных функций  $W_{mn}$  естественно определить разностный оператор  $ROT$  в ячейках по формуле Стокса:

$$ROT(\mathbf{e}) = \frac{1}{S} \int \nabla \times \mathbf{e} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{S} \oint \mathbf{e} \cdot d\vec{l}. \quad (6)$$

Из свойства циркуляции  $W_{mn}$  на ребрах следует, что  $\nabla W_i \in \{W_{mn}\}$ , так что для любой ячейки сетки с узлом  $i$  обнуляется интеграл  $\int \nabla \times \nabla W_i \cdot d\vec{S} = 1 - 1 + 0 = 0$ , а значит, для любой определенной в узлах сеточной функции  $\eta_i$  с кусочно-постоянным в ячейках градиентом,  $GRAD \eta_i$ , точно выполняется равенство  $ROT GRAD \eta_i = 0$ . В результате имеем ядро разностного оператора  $ROT$  размерности числа узлов сетки  $N$ , что способствует минимизации функционалов (1),(2), где  $|\nabla \times \mathbf{e}|^2$  – самый большой стабилизирующий член.

Выражения (5) естественно обобщаются на случай четырехугольных ячеек. Определение разностного ротора (6) и все указанные свойства сохраняются, если в качестве базисных функций  $W_i$  использовать скалярные кусочно-билинейные функции для каждого  $i$ -го узла сетки, такие, что  $W_i$  равно единице в узле  $i$  и нулю в остальных узлах.

Замечание. Такие функции  $W_i$  представляют собой частный случай обобщенных барицентрических координат [12], то есть определенных на полигоне с  $n$  вершинами  $\mathbf{r}_i$  функций  $\lambda_i(\mathbf{r}) \geq 0, i=1, \dots, n$ , таких, что  $\sum_{i=1}^n \lambda_i(\mathbf{r}) = 1$  и  $\sum_{i=1}^n \lambda_i(\mathbf{r}) \mathbf{r}_i = \mathbf{r}$ . На произвольном полигоне таких наборов координат, оказывается, можно построить несколько [13]. В терминах обобщенных барицентрических координат и их производных комплексы Уитни и соответствующие аппроксимации дифференциальных операторов можно обобщить на произвольные полигоны (во всяком случае, выпуклые) [12]. Такие конечноэлементные подходы близки и часто совпадают с так называемыми «подражательными» (mimetic) конечноразностными методами и методом опорных операторов [14].

Для элементов Уитни, благодаря непрерывности тангенциальной проекции базисных функций  $W_{mn}$  на ребре  $(mn)$ , естественным образом реализуется условие непрерывности тангенциального электрического поля на границе плазма–вакуум  $\langle \mathbf{e} \times \mathbf{n} \rangle = 0$  и его отсутствия на идеально проводящей стенке. Для этого требуется только, чтобы эти границы были представлены ребрами сетки.

## Реализация условия $\mathbf{e} \cdot \mathbf{V} = 0$ на неструктурированных сетках

Для того чтобы обеспечить выполнение условия  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{V} = 0$ , используются множители Лагранжа на некотором подмножестве элементов неструктурированной сетки. Как выбрать это подмножество – это вопрос открытый. Если рассматривать условие  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{V} = 0$  как уравнения, определяющие тороидальную компоненту  $e_\varphi$  через полоидальные проекции  $e_{pol}$  (см. разложение (10)), то естественно полагать, что в его реализации должны участвовать  $e_\varphi$  во всех узлах сетки, и размер выбранного подмножества был примерно равен общему числу узлов  $N$ . При тестировании кода MHD\_NX были реализованы для сравнения три основных выбора этого подмножества: 1) все узлы сетки; 2) для чисто треугольной сетки: множество ребер, образующее «покрывающее дерево» (spanning tree) [9]; 3) для блочно-структурной сетки, адаптивной к равновесным магнитным поверхностям: множество ребер, лежащих на этих поверхностях.

Последний вариант доступен только для случаев, когда расчетная область исходно разбита на подобласти с вложенными магнитными поверхностями. В этом случае предложенная электромагнитная версия с наложенным условием  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{V} = 0$  показывает высокую точность аппроксимации, близкую по спектральным свойствам к традиционному методу конечных элементов для

магнитных компонент возмущения, реализованному, в частности, в коде KINX (см. следующий раздел).

В самом простом случае (вариант 2) «spanning tree» из трех реализованных на языке графов из ребер сетки представляет собой максимальный подграф, не содержащий циклов. Из его максимальной понятно, что он захватывает все узлы сетки. Такой подграф, вообще говоря, не единственный. Если такой подграф построен, можно аппроксимировать условие отсутствия продольной компоненты электрического поля на каждом ребре «дерева». Пример – на рис.2. По-видимому, слабая сторона этого выбора – чисто топологический подход, не связанный с особенностями решаемой спектральной задачи, то есть с упомянутой анизотропией МГД оператора относительно равновесного магнитного поля. В результате тестовых расчетов (см. следующий раздел) для равновесий с вложенными и не вложенными магнитными поверхностями был сделан вывод, что этот вариант не показывает преимуществ по сравнению с самым универсальным и простым способом – задавать условие  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{B} = 0$  во всех узлах сетки – вариант 1).

После введенного так или иначе набора множителей Лагранжа задача сводится к решению обобщенной задачи на собственные значения  $Ax = \omega^2 Bx$  с эрмитовыми матрицами  $A$  и  $B$ , соответствующими квадратичным формам потенциальной и кинетической энергии в представленной вариационной постановке. Анализ устойчивости предполагает вычисление одного или нескольких старших (минимальных) собственных значений. Они вещественные, отрицательные  $\omega^2$  соответствуют неустойчивости, а значения  $|\omega|$  – инкрементам неустойчивости. Используется метод обратной итерации с постоянным сдвигом  $(A - \omega_0^2 B)x_{n+1} = Bx_n / |x_n|$  с оценкой собственного числа через отношение Рэля. Такие итерации сходятся к собственному числу, ближайшему к  $\omega_0^2$ , а критерий Сильвестра, примененный к треугольному LU разложению матрицы  $(A - \omega_0^2 B)$ , позволяет контролировать, какое по старшинству собственное число найдено. Решение алгебраической задачи реализовано с помощью пакета PETSс. Может использоваться действительная (для семейства мод с тороидальным числом  $n=0$ ) или комплексная (для  $n \neq 0$ ) арифметика.

Отметим, что в итоге требуется решить спектральную задачу для оператора с седловой точкой,

$$\begin{pmatrix} A & C \\ C^* & 0 \end{pmatrix} x = \omega^2 \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x,$$

что, в частности, требует введения регуляризации для получения устойчивого треугольного LU разложения разреженных матриц со стандартным переупорядочением неизвестных.

В случае  $n \neq 0$  для удобного представления структуры комплексной амплитуды собственной функции  $\mathbf{e}_n e^{in\varphi}$  можно в качестве нормировки использовать такой комплексный множитель  $c$ , чтобы действительная и мнимая части  $\mathbf{x} = \mathbf{e}_n$  были ортогональны в гильбертовом пространстве со скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)$ :  $(c\mathbf{x} + c^* \mathbf{x}^*, c\mathbf{x} - c^* \mathbf{x}^*) = 0$ . Это приводит к следующему выражению для  $c$ :

$$(c^* / c)^2 = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) / (\mathbf{x}, \mathbf{x})^* = e^{i\varphi_x}, \quad c = e^{-i(\varphi_x/4 + k\pi/4)}.$$

При помощи этого выражения можно также удовлетворить условию  $(\text{Re}(c\mathbf{x}), \text{Re}(c\mathbf{x})) > (\text{Im}(c\mathbf{x}), \text{Im}(c\mathbf{x}))$ . В коде MHD\_NX в качестве скалярного произведения выбран объемный интеграл от тороидальной компоненты электрического поля, которая для осесимметричного магнитного поля  $\mathbf{V} = \nabla\psi \times \nabla\varphi + F\nabla\varphi$  следующим образом связана со смещением плазмы по нормали к магнитным поверхностям:

$$e_\varphi = R(\mathbf{e} \cdot \nabla\varphi) = -R\xi \times \mathbf{V} \cdot \nabla\varphi = (\xi \cdot \nabla\psi) / R.$$

## Тестовые расчеты для осесимметричных МГД-равновесий

Наибольший практический интерес представляют оценки МГД свойств тороидальных плазменных конфигураций в установках токамак. В случае осевой симметрии задача статического МГД-равновесия сводится к решению уравнения Грэда-Шафранова [15]. С учетом общего представления осесимметричного магнитного поля  $\mathbf{V}, \nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ :

$$\mathbf{V} = \nabla\psi \times \nabla\varphi + F\nabla\varphi, \quad (7)$$

из уравнения движения и закона Ампера

$$\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{V}, \quad (8)$$

$$\mu_0 \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{V} \quad (9)$$

следует уравнение для функции полоидального потока  $\psi$  (система единиц СИ):

$$\nabla \cdot (\nabla\psi / R^2) = -\mu_0 j_\varphi / R, \quad \mu_0 j_\varphi = \mu_0 R dp / d\psi + (FdF / d\psi) / R \quad (10)$$

в цилиндрической системе координат  $(R, \varphi, Z)$ . При этом давление  $p(\psi)$  и диамагнитная функция  $F(\psi)$  являются потоковыми величинами, т.е. постоянны на магнитной поверхности  $\psi(R, Z) = \text{const}$ . В традиционной постановке задачи эти функции полагаются заданными. Полоидальный поток магнитного поля через магнитную поверхность равен  $\Psi = 2\pi\psi$ .

Для семейства традиционных плазменных конфигураций с вложенными магнитными поверхностями уравнение (10) с предписанной границей – крайней магнитной поверхностью – решается на структурной радиально-кольцевой сетке. Такой подход реализован, в частности, в коде SAHE. В более общем случае, когда топология магнитного поля не предписана, на неструктурированных треугольных сетках краевая нелинейная задача Дирихле (10) решается при помощи стандартного пакета `pdeTool` из Matlab. Для анализа устойчивости плазмы со свободной границей возможно использование смешанной структурно-неструктурированной сетки, где в вакуумной области вокруг плазмы строится треугольная сетка с предписанным распределением узлов на границе плазма-вакуум, см. рис.10.

Тестовые расчеты естественно было начать с традиционных равновесий с вложенными магнитными поверхностями. Для них имеются надежные результаты, полученные на структурных сетках, в частности по коду устойчивости KINX [1]. Здесь представлено сравнение различных вариантов кода MHD\_NX для оценки инкремента неустойчивости заданного аналитически равновесия [16] с  $F = \text{const}, dp/d\psi = \text{const}$ . Эти параметры и граничное значение  $\psi$  можно задать так, чтобы граница плазмы имела аспектное отношение (отношение большого радиуса к малому)  $R/a = 2.62$  (соответствует  $\varepsilon = 1/3$  в [17]) и вытянутость  $Z_{\text{max}}/a = 2$ , а значение фактора запаса устойчивости  $q = -d\Phi/d\Psi = 0.7$  на магнитной оси.

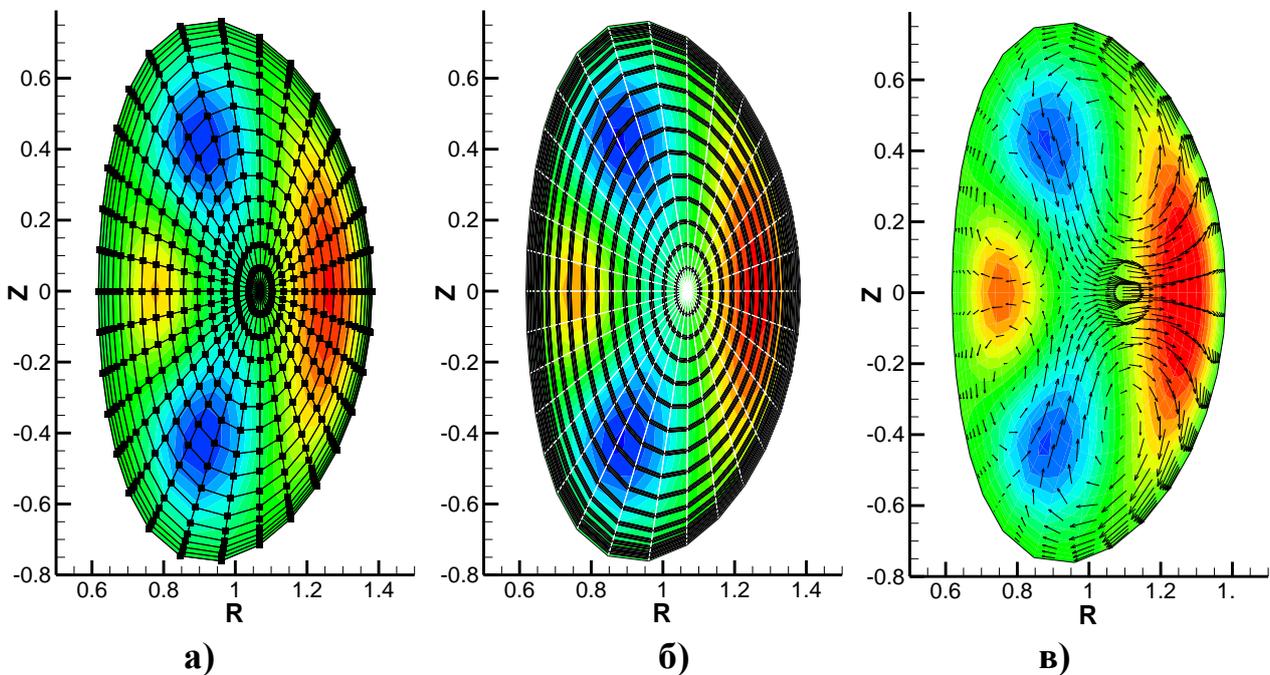


Рис.1. Тестовые расчеты минимального собственного значения на исходно структурной сетке  $16 \times 32$ . Цветом показано распределение тороидальной компоненты  $e_\phi$ , на рис.1в) – стрелками – проекция смещения  $\xi$  на сечение  $\varphi = \text{const}$ . а) – задание условия  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{B} = 0$  в узлах сетки, б) – на ребрах, лежащих на магнитных поверхностях.

Известно, что такая конфигурация в постановке с закрепленной границей (проводящая стенка на границе плазмы) неустойчива относительно тороидального волнового числа  $n=2$ .

Проведено сравнение сходимости старшего собственного числа на двух семействах сеток: исходно структурных (адаптированных к магнитным поверхностям, рис.1) и неструктурированных (чисто треугольных, рис.2), по три сетки в каждом семействе с увеличением числа узлов в 4 раза. Соответствующая старшая собственная функция представлена на рис.1в.

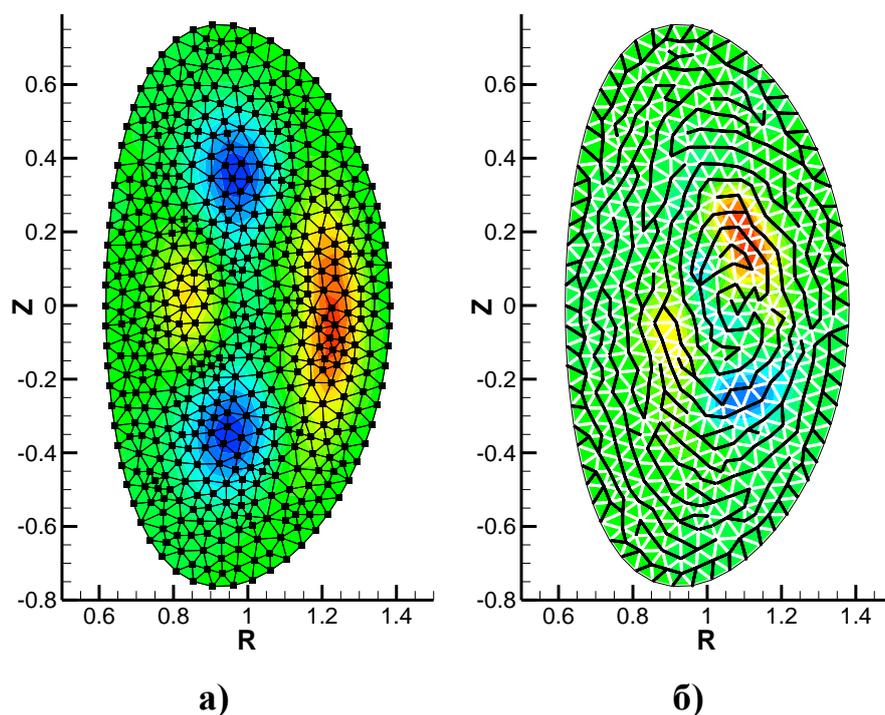


Рис.2. Расчеты на исходно неструктурированной сетке с 515 узлами. Цветом показано распределение тороидальной компоненты  $e_\varphi$ ; **а)** – задание условия  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{V} = 0$  в узлах сетки, **б)** – на ребрах множества «spanning tree» (выделены черным); как и на предыдущих рисунках, цветом показана рассчитанная тороидальная компонента  $e_\varphi$ , изрядно отличающаяся от правильной.

Для первого выбора наилучшие результаты показывает использование кода MHD\_NX с заданием условия  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{V} = 0$  на ребрах сетки, лежащих на магнитных поверхностях (рис.1б). Как и код KINX, это дает сходимость со стороны устойчивости (см. рис.3), в отличие от использования условия  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{V} = 0$  в узлах сетки, рис.1а. Во всяком случае здесь наблюдается второй порядок сходимости – обратно пропорциональная зависимость собственного числа от общего числа точек сетки. Менее регулярная сходимость (в частности, немонотонная на грубых сетках) характерна при использовании треугольных сеток (каждый четырехугольник разбит на два треугольника) с нодальным множеством множителей Лагранжа – треугольники на рис.3.

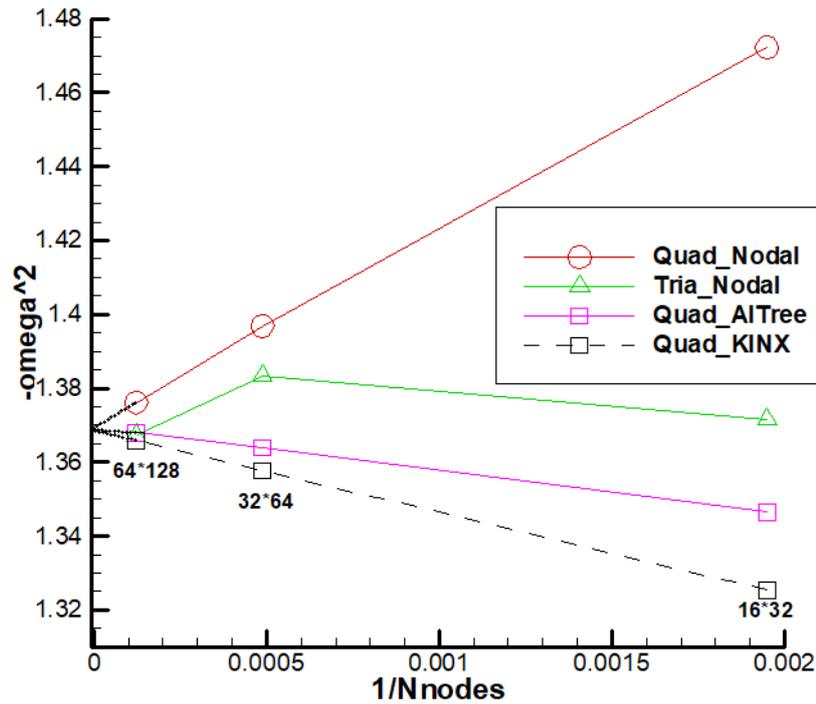


Рис.3. Сравнение сходимости различных вариантов сеток и множеств Лагранжа. Сплошные линии – расчеты по коду MHD\_NX, пунктирная линия – по коду KINX. Кружки и квадраты соответствуют сеткам из четырехугольников с использованием условий Лагранжа в узлах (кружки) и на ребрах вдоль поля – «aligned tree». Треугольники – с условием Лагранжа в узлах на треугольных сетках, полученных разбиением исходных четырехугольников.

Число узлов	515	1989	7817
$-\omega^2, \mathbf{e} \cdot \mathbf{V} = 0$ в узлах	0.56094	0.92159	1.15512
$-\omega^2, \mathbf{e} \cdot \mathbf{V} = 0$ spanning tree	0.27146	0.27376	0.20147

Табл.1. Старшие собственные значения для тестовой задачи на трех треугольных сетках. Сравнение результатов для разного задания множества Лагранжа.

Заметно худшие результаты получаются при использовании исходно неструктурированной сетки, см. рис.2. Самая грубая сетка (515 узлов) построена стандартным генератором из пакета Matlab, более подробные – результат стандартного измельчения, каждый уровень которого соответствует увеличению числа узлов примерно в 4 раза. Задание условия  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{V} = 0$  в узлах (рис.2а) дает удовлетворительный результат, но с порядком сходимости хуже второго (соответствует первому порядку), рис.4. Использование для этой цели ребер из «spanning tree», рис.2б, хотя и диагностирует неустойчивость

(отрицательность старшего собственного числа), но сходимости к точному собственному числу не наблюдается, см. сравнение данных в табл.1. Отметим кстати, что число ребер в «spanning tree» почти совпадало с числом узлов: 513, 1988, 7816 для представленных сеток.

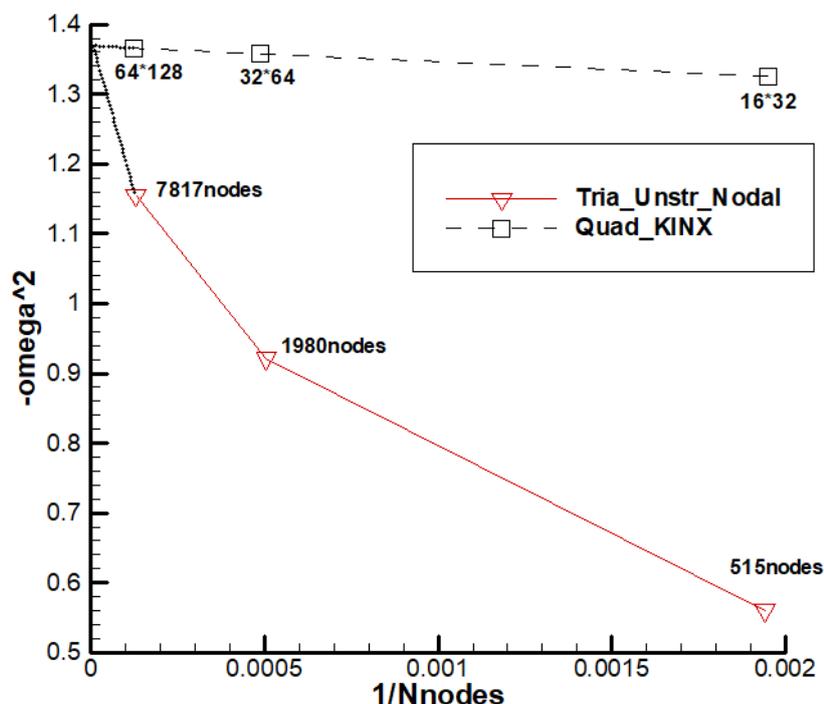


Рис.4. Сплошная линия – демонстрация сходимости старшего собственного числа на исходно неструктурированных сетках (рис.2а) по коду MHD\_NX. Использованы условия Лагранжа в узлах. Для сравнения пунктирная линия – результаты по коду KINX.

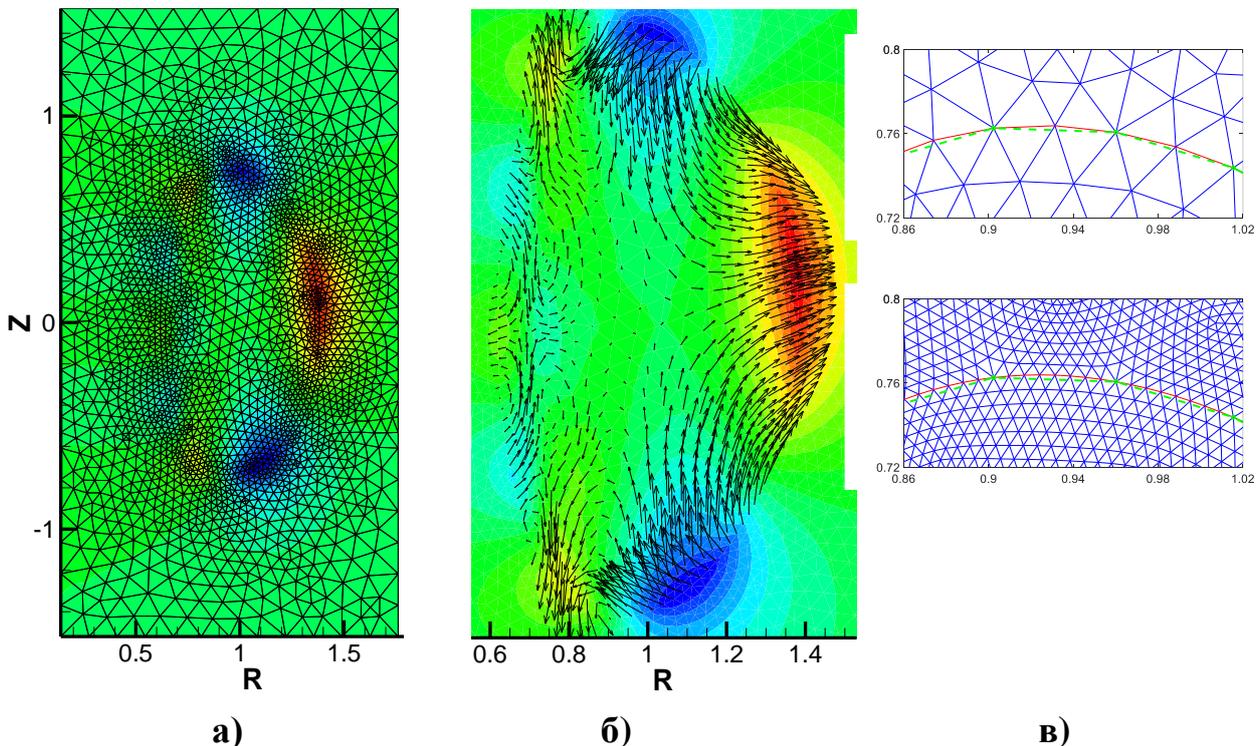
### Внешние моды. Адаптация сетки к границе плазма-вакуум

Среди МГД-неустойчивостей плазмы токамаков наибольшую опасность представляют внешние винтовые моды, моделирование которых предполагает наличие вакуумной прослойки между плазмой и проводящей стенкой. При использовании для этого неструктурированной сетки возникает важный методический вопрос: нужна ли специальная адаптация сетки к границе плазма-вакуум, на которой происходит скачок коэффициентов?

В качестве минимального требования адаптации естественно потребовать, чтобы граница плазмы была представлена цепочкой ребер сетки. Такое семейство сеток с несколькими уровнями измельчения было подготовлено для тестовых расчетов неустойчивой моды  $n=2$  для соловьевского равновесия со значением фактора запаса устойчивости  $q=1$  на магнитной оси и  $q=1.74$  на границе плазмы. Проводящая стенка – граница расчетной области – прямоугольник (рис. 5,6). На фрагментах сетки, рис.5в,

показано, что ребра, ограничивающие плазму, «ставятся» на известную границу (красная линия) на всех уровнях измельчения. Однако для конкретного теста и относительно подробной начальной сетки очень близкий результат получается и при постановке граничных ребер на кусочно-линейную «границу» (зеленая пунктирная линия).

Для сравнения использовалась серия равномерных сеток без подстройки граничных ребер (рис.6), также полученная с помощью изотропного измельчения. Здесь границей плазмы служит изломанная цепочка ребер, разделяющая «плазменные» и «вакуумные» ячейки. Анализ сходимости вычисленного старшего собственного числа (рис.7) показывает приемлемый результат даже для неадаптированных сеток, соответствующий, однако, первому порядку сходимости: ошибка в собственном числе  $\sim O(h) \sim O(1/\sqrt{\text{Nodes}})$ . В то же время применение адаптации граничных ребер сетки демонстрирует лучшую точность с порядком сходимости, промежуточным между первым и вторым (красная линия на рис.7). Заметим также, что важным фактором является плотность узлов сетки именно у границы плазмы. Так, сетки, показанные на рис.5 и рис.6, имеют здесь примерно одинаковую плотность узлов и дают схожие величины собственного значения,  $-\omega^2 \approx 0.71$ .



*Рис.5.* Неустойчивая внешняя винтовая мода на сетке, адаптированной к границе плазмы; число узлов  $N=2393$ ; **а)** – общий вид сетки в расчетной области; **б)** – собственный вектор смещения в плоскости  $\varphi = \text{const}$ ; **в)** – фрагмент сетки у границы плазмы с одним и тремя уровнями измельчения; зеленая пунктирная линия – граничные ребра в исходной сетке.

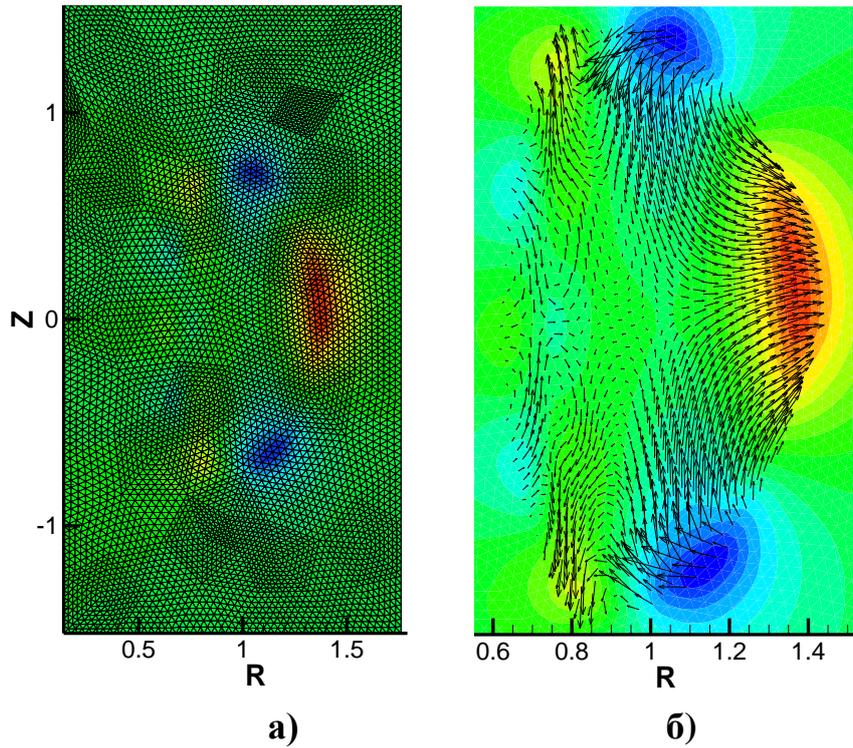


Рис.6. Неустойчивая внешняя винтовая мода на равномерной сетке. Три уровня измельчения, число узлов  $N=6089$ : а) – общий вид сетки в расчетной области; б) – собственный вектор смещения в плоскости  $\varphi = \text{const}$ .

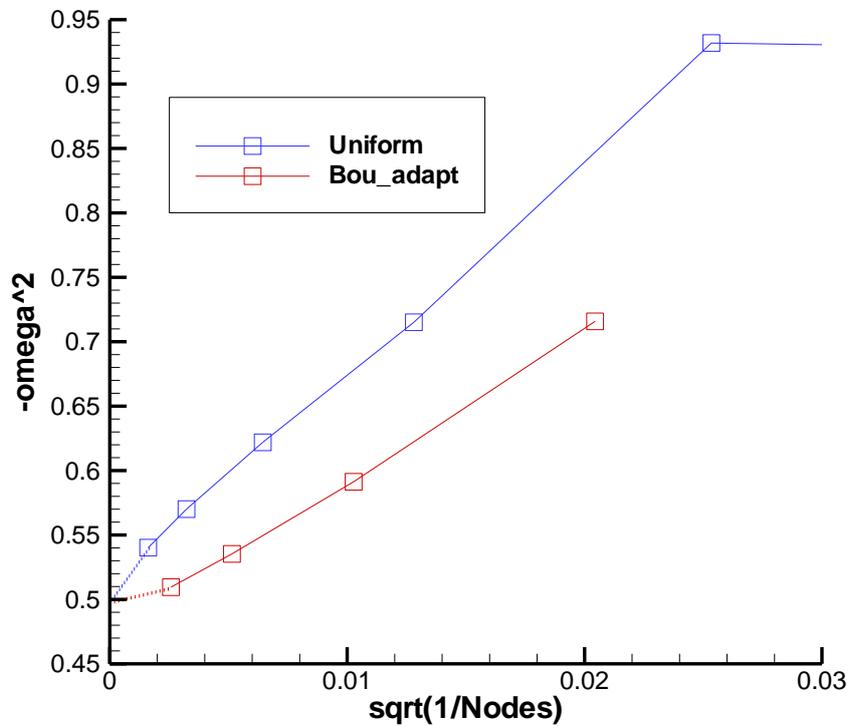


Рис.7. Сравнение сходимости старшего собственного числа для неустойчивой внешней моды на равномерных сетках (рис.6) и на сетках, адаптированных к границе плазмы (рис.5).

## Специфика задачи МГД-устойчивости плазмы в галатях

Особенностью ловушек-галатей [2–5] являются погруженные в плазму проводники и нулевое тороидальное магнитное поле. В частности, в осесимметричной ловушке «Тримикс» магнитное поле создается токами в четырех кольцевых проводниках, помещенных в проводящий цилиндр радиусом  $R = 0.7$  м и размером по оси  $Z$  в интервале  $-0.4\text{ м} \leq Z \leq 0.4\text{ м}$ . Значения этих токов и краевые условия в многосвязной области для уравнения Грэда-Шафранова (10) подробно обсуждаются в [4]. Токи подобраны так, что вакуумное магнитное поле имеет внутреннюю сепаратрису, и предполагается, что токи плазмы не меняют существенно топологию поля. Задание функции давления  $p(\psi)$  предполагает, что основная часть плазмы будет лежать вблизи сепаратрисы  $\psi = \psi_s$ , обхватывая внешние проводники тонкими слоями, называемыми мантиями. Данным условиям отвечает функция

$$p(\psi) = p_0 \exp(-(\psi - \psi_s)^2 / \delta^2), \quad (11)$$

где  $p_0$  – значение максимального давления на сепаратрисе, а параметр  $\delta$  определяет «толщину» плазменной конфигурации, см. пример на рис.8.

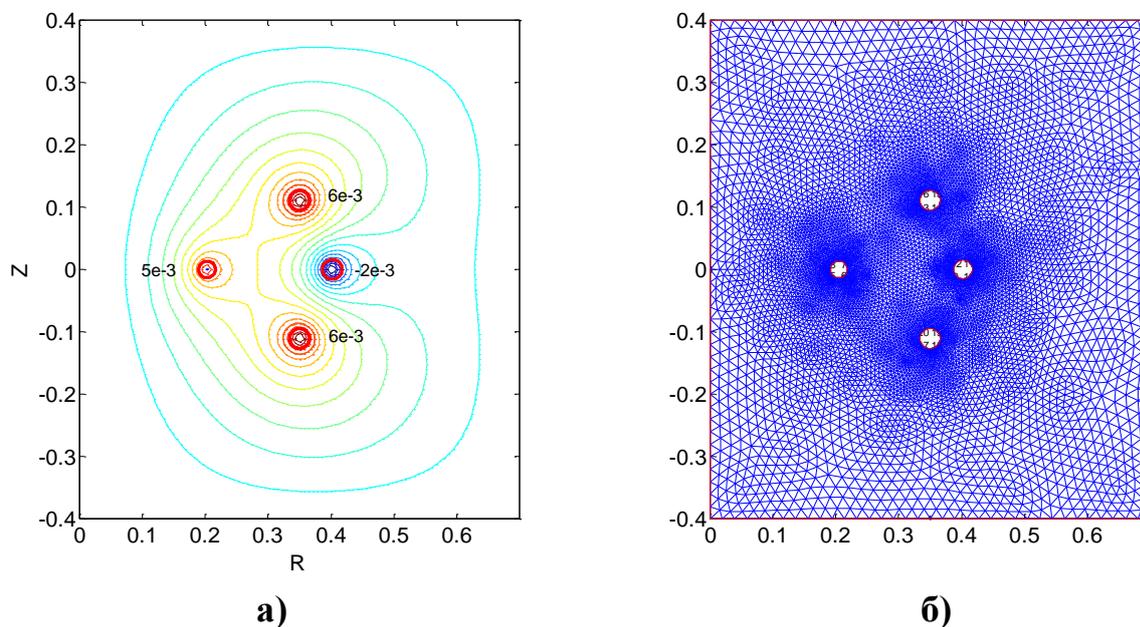


Рис. 8. а) Линии уровня  $\psi$  и магнитные поверхности вблизи проводников.

Подписаны соответствующие значения  $\psi$  Вб/(2 $\pi$ ). Суммарный ток в проводниках 66 кА, максимум давления  $p_0 = 2\pi \cdot 16$  Па.

б) Треугольная сетка в многосвязной области. Число точек  $N=8857$ .

Как обсуждается в обзоре [3], наиболее опасными МГД неустойчивостями плазменных конфигураций в галатях являются неустойчивости конвективного типа. При малых величинах  $\beta = 2\mu_0 p / B^2$  возмущения электрического поля являются потенциальными и критерий устойчивости (Лонгмайер–Розенблют–Кадомцев) имеет вид:

$$(U\mathbf{n}_0 \cdot \nabla p) / (p\mathbf{n}_0 \cdot \nabla U) < \Gamma, \quad (12)$$

где  $\mathbf{n}_0$  – единичный вектор нормали к магнитной поверхности,  $U = \int 1 / B dl$  – удельный объем магнитной трубки,  $\Gamma$  – показатель адиабаты.

Поскольку код идеальной МГД-устойчивости MHD\_NX использует формулировку энергетического принципа (1) с возмущенным электрическим полем, а также векторные базисные функции, которые хорошо аппроксимируют ядро оператора  $\nabla \times \mathbf{e}$ , его использование для расчетов устойчивости плазмы в галатях представляется естественным и перспективным обобщением исследований устойчивости в системах магнитного удержания со сложной топологией магнитных поверхностей. Однако в представленной здесь версии кода, которая изначально предназначалась для конфигураций с сильным равновесным продольным полем (в этом случае несжимаемость плазменного смещения обычно не влияет на факт устойчивости), работа давления при сжатии плазмы

$$\int_{V_p} \Gamma p |\nabla \cdot \xi|^2 dV, \quad (13)$$

не входит в функционал потенциальной энергии. Возможность учета сжимаемости плазмы рассмотрена в [5]. Другой особенностью формулировки задачи устойчивости является возможная сингулярность компоненты смещения нормальной к магнитным поверхностям. Действительно, при нулевом равновесном тороидальном поле в выражение для возмущенного магнитного поля

$$\nabla \times (\xi \times \mathbf{B}) = \nabla(\xi \cdot \nabla \varphi) \times \nabla \psi - \nabla(\xi \cdot \nabla \psi) \times \nabla \varphi \quad (14)$$

входит производная по нормали к магнитным поверхностям только от  $\xi \cdot \nabla \psi$ , а не от физического радиального смещения по нормали к магнитной поверхности. Поскольку  $\nabla \psi = 0$  в X-точках равновесного поля, смещение плазмы может иметь интегрируемую особенность в этих точках, если  $\xi \cdot \nabla \psi \neq 0$ . Эта особенность исчезает при добавлении слагаемого (13) в функционал возмущенной потенциальной энергии. Это будет предметом будущей работы по развитию кода устойчивости.

Без учета стабилизации за счет сжимаемости плазмы (13) плазма в ловушке «Тримикс» неустойчива при любом давлении для мод с волновыми тороидальными числами  $n > 0$ .

При любом  $n$  неустойчивыми являются не только старшая, но и другие собственные функции, рис.9.

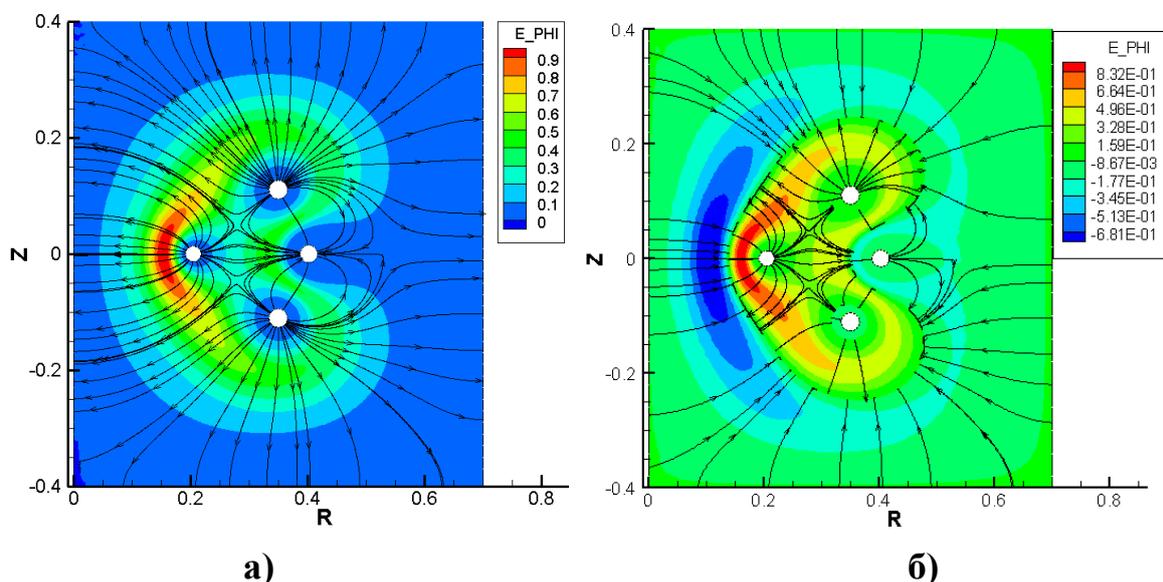


Рис. 9. Структура старших собственных функций  $n = 1$ , показаны контуры тороидальной компоненты возмущенного электрического поля  $e_\varphi$  и линии тока  $\xi$ ; а) старшая собственная функция; б) вторая собственная функция.

## Устойчивость диверторных конфигураций плазмы в токамаках

Как отмечалось выше, наибольшую практическую ценность имеют расчеты устойчивости плазмы токамаков. Из свежих результатов отметим новый тип неустойчивости  $n=0$ , связанный с конечной плотностью тока на границе плазмы [18], если эта граница близка к сепаратрисе магнитного поля с двумя X-точками (DN, Double-Null). Эта неустойчивость, которую будем называть  $n=0$  пилинг модой (peeling), была обнаружена в расчетах по коду KINX и подтверждена затем по коду MHD\_NX. В связи с этим возникает вопрос, как влияет на устойчивость наличие и параметры плазмы по обе стороны от сепаратрисы – в так называемом Scrape-Off Layer (SOL). Для такого моделирования расчетная область должна быть расширена, чтобы включить область открытых силовых линий поля («усы» сепаратрисы), диверторные пластины и, вообще говоря, окружающую вакуумную область. Смешанные структурно-неструктурированные сетки в такой области генерировались с помощью кода CARRE[19] (SOL и дивертор, рис.10а) и затем генератора треугольных сеток TRIANGLE [20] (вакуумная прослойка, рис.10б). Подбором значений параметров генератора TRIANGLE можно добиться, чтобы на внутренней границе новые точки не появлялись, тем самым исключая перекройку структурной сетки внутри.

Равновесия высокого разрешения с SOL для конфигурации, близкой к плазме ИТЭР с полным током 15МА, с одной X-точкой (Single-Null, SN), были получены специализированной версией кода равновесия CAXE6-SOL [21]. Опционально из области расчета может быть вырезана внутренняя зона, так как рассматриваемые пилинг неустойчивости локализованы у границы плазмы, см. рис.10а. Исходная функция полоидального потока модифицирована так, что внешняя сепаратриса приближается к границе плазмы – внутренней сепаратрисе. Это вызывает дестабилизацию  $n=0$  пилинг моды при высокой плотности тока на краю. Расчеты показывают, что такой режим можно стабилизировать относительно толстым проводящим плазменным слоем в SOL (около половины области между сепаратрисами) или идеальной стенкой куполообразной формы, расположенной близко к X-точке (в дополнение к идеальной стенке на внешней границе области). На рис.11 представлены погранично неустойчивые смещения плазмы для обоих случаев.

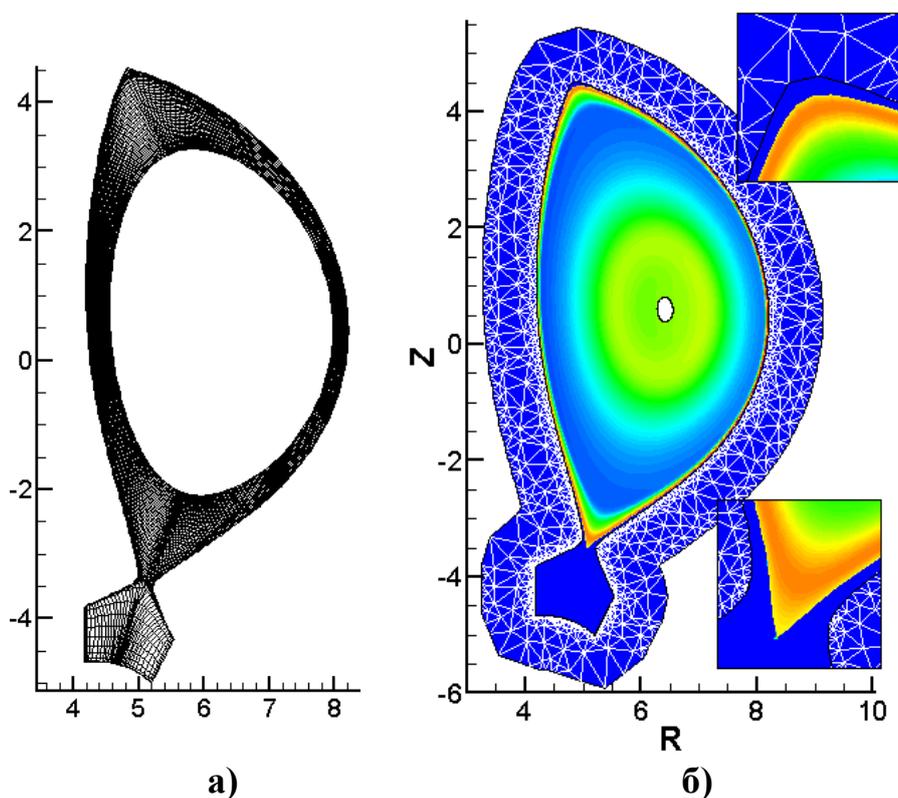


Рис.10. ИТЭР-подобная конфигурация. а) Блочная структурная сетка, содержащая SOL и область дивертора; б) расширенная расчетная область, включающая вакуумную область (с треугольной сеткой). Цветом показано распределение плотности тороидального электрического тока. На вставках – зона между сепаратрисами – синий слой с нулевой плотностью тока, отделенный внешней границей SOL (черной линией) от вакуумной области.

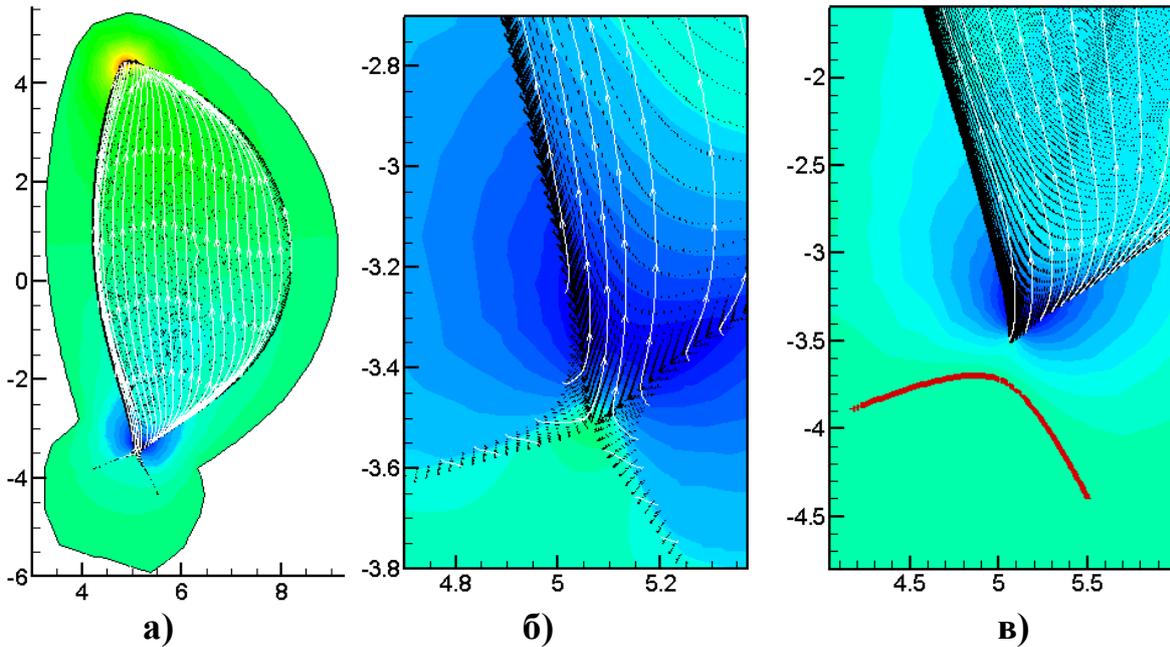


Рис.11. Погранично неустойчивое смещение плазмы с линиями тока  $\xi$  в плазме и в SOL вокруг X-точки для двух случаев: а)-б) с проводящей плазмой в SOL; в) с куполообразной идеальной стенкой (красная кривая).

## Заключение

Разработка и первые опыты применения нового кода MHD\_NX показали принципиальную возможность анализа идеальной МГД-устойчивости разнообразных двумерных плазменных конфигураций с произвольной топологией магнитного поля. Использование не связанных с магнитным полем общегеометрических проекций и общая форма записи уравнений позволили единообразно охватить все допустимые типы координатной симметрии: плоскую, осевую, винтовую. Произвольные неструктурированные сетки, состоящие из треугольников и четырехугольников, дают достаточный простор для задания геометрически сложных плазменных конфигураций.

Нетипичный для кодов идеальной МГД выбор неизвестного вектора – возмущение электрического поля – в комбинации с требованием  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{V} = 0$  оказался конкурентноспособным для структурных сеток, адаптированных к равновесным магнитным поверхностям, если это требование привязать к ребрам сетки, лежащим на этих поверхностях. Однако в самом общем случае, когда сетка не связана с магнитным полем, приходится использовать наиболее грубый и надежный способ – накладывать условие  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{V} = 0$  в узлах сетки, что приводит к низкому порядку сходимости. Так что вопрос об оптимальном и универсальном методе реализации этого требования остается открытым. Новые возможности можно ожидать при использовании неструктурированных сеток, адаптивных к решению (как задачи равновесия,

так и устойчивости), для которых характерна большая доля ребер сетки, направленных вдоль линий магнитного поля.

Другое направление предполагаемого развития кода MHD\_NX – учет сжимаемости плазмы, что, в частности, может оказаться существенным для анализа конфигураций без тороидального магнитного поля. Здесь потребуется ввести дополнительную неизвестную – смещение плазмы вдоль равновесного магнитного поля – и аппроксимировать дополнительный член (13) в функционале потенциальной энергии.

## Библиографический список

1. Degtyarev L., Martynov A., Medvedev S., Troyon F., Villard L., Gruber R. The KINX ideal MHD stability code for axisymmetric plasmas with separatrix // *Computer Phys. Commun.* 1997. V. 103. P. 10.
2. Морозов А.И. О галатеех – плазменных ловушках с омываемыми плазмой проводниками // *Физика плазмы.* 1992. Т. 18, № 3. С. 305-316.
3. Козлов А.Н., Коновалов В.С., Савельев В.В. Сравнительный анализ равновесных конфигураций и переноса излучения в ловушках-галатеех «Тримикс» и «Тримикс-3М» // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша.* 2018. №182, 28 с. [doi:10.20948/prepr-2018-182](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-182)
4. Медведев С.Ю., Мартынов А.А., Савельев В.В., Козлов А.Н. Расчеты идеальной МГД устойчивости плазмы в ловушке-галатее «Тримикс» // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша.* 2018. №253. 16 с. [doi:10.20948/prepr-2018-253](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-253)
5. Medvedev S.Yu., Martynov A.A., Kozlov A.N. and Savelyev V.V. Galatea trap: magnetohydrodynamic stability of plasma surrounding current-carrying conductors. *Plasma Phys. Control. Fusion* 2020, V.62, 115016 (8pp).
6. Martynov A.A., Medvedev S.Yu., Villard L. Tokamak equilibria with reversed current density // *Phys. Rev. Lett.* 2003. V. 91. P. 85004.
7. Medvedev S.Yu., Martynov A.A., Villard L. Tokamaks with reversed current density: stability of equilibria with axisymmetric islands // *35th EPS Conf. Plasma Physics, Hersonissos, Greece. ECA.* 2008. V. 32D. P2.063.
8. Медведев С.Ю., Мартынов А.А., Дроздов В.В., Иванов А.А., Пошехонов Ю.Ю., Коновалов С.В., Виллард Л. МГД устойчивость и энергетический принцип без предположения о вложенности магнитных поверхностей двумерных равновесий // *Физика плазмы.* 2019. Т. 45, № 2, С. 120-132.
9. Bossavit A. *Computational Electromagnetism* // Academic Press. 1998.
10. Bernstein I.B., Frieman E.A., Kruskal M.D., Kulsrud R.M. An energy principle for hydromagnetic stability problems // *Proc. Roy. Soc. London.* 1958. V. A244. P. 17.
11. Strauss H.R. Velocity boundary conditions at a tokamak resistive wall // *Phys. Plasmas.* 2014. V. 21. P. 032506.

12. Gillette A., Randy A., Bajajz C. Construction of Scalar and Vector Finite Element Families on Polygonal and Polyhedral Meshes // *Computational Methods in Applied Mathematics*. 2016. V. 16, P. 667-683.
13. Floater M.S., Hormann K., Kós G. A general construction of barycentric coordinates over convex polygons // *Advances in Computational Mathematics*. 2006. V. 24, P. 311–331.
14. Hyman J.M., Shashkov M.. Natural Discretizations for the Divergence, Gradient, and Curl on Logically Rectangular Grids // *Computers Math. Applic.* 1997. V.33, P. 81-104.
15. Шафранов В.Д. О равновесных МГД-конфигурациях // *ЖЭТФ*. 1957. Т. 33, вып. 3(9). С. 710-722.
16. Solov'ev L.S. The Theory of Hydromagnetic Stability of Toroidal Plasma Configurations // *JETP*, 1968. Vol. 26, No 2, P. 400.
17. Chance M. S., Greene J. M., Grimm R. C. et al. Comparative Numerical Studies of Ideal Magnetohydrodynamic Instabilities // *J. Comp. Phys.* 1978, V.28, p.1-13.
18. Martynov A.A., Medvedev S.Yu., Ivanov A.A., Poshekhonov Yu.Yu. Modelling of tokamak plasma with SOL: MHD stability with finite current density at the separatrix // *43rd EPS Conf. on Plasma Physics, Leuven, Belgium, ECA 2016* Vol.40 P2.063.
19. Marchand R., Dumberry M. CARRE: a quasi-orthogonal mesh generator for 2D edge plasma modeling // *Computer Phys. Commun.* 1996. V. 96. P. 232.
20. Электронный ресурс: A Two-Dimensional Quality Mesh Generator and Delaunay Triangulator. <https://www.cs.cmu.edu/~quake/triangle.html>
21. Medvedev S.Yu., Martynov A.A., Drozdov V.V., Ivanov A.A., Poshekhonov Yu.Yu. High resolution equilibrium calculations of pedestal and SOL plasma in tokamaks // *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2017. V. 59. P. 025018.