ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 32 за 2022 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

К.Р. Корнеев, С.П. Трофимов

Использование регулярных переменных в задаче оптимизации траектории КА с малой тягой

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Корнеев К.Р., Трофимов С.П. Использование регулярных переменных в задаче оптимизации траектории КА с малой тягой // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2022. № 32. 36 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2022-32
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2022-32

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

К.Р. Корнеев, С.П. Трофимов

Использование регулярных переменных в задаче оптимизации траектории КА с малой тягой

Москва — 2022

Корнеев Кирилл Романович, Трофимов Сергей Павлович

Использование регулярных переменных в задаче оптимизации траектории КА с малой тягой

В работе рассматривается регуляризация уравнений движения космического аппарата преобразованием Кустаанхеймо-Штифеля для координат и Сундмана для времени в задаче поиска оптимальной траектории межпланетного перелёта с двигателем малой тяги. Из принципа максимума Понтрягина находится оптимальное управление вектором тяги при условии ограниченной мощности. Получены численные решения для задачи перелёта Земля-Марс. Проводится сравнение найденных траекторий с траекториями, полученными методом продолжения по параметру, а также исследуется чувствительность решений краевой задачи принципа максимума в декартовых и регулярных переменных.

Ключевые слова: Непрямые методы оптимизации, малая тяга, преобразование Сундмана, преобразование Кустаанхеймо-Штифеля, принцип максимума Понтрягина

Korneev Kirill Romanovich, Trofimov Sergey Pavlovich

Regular variables in the problem of low-thrust trajectory optimization

The regularization of spacecraft motion equations by the Kustaanheimo-Stiefel transformation for coordinates and Sundman's transformation for time in the case of interplanetary low-thrust optimal transfer is considered. From Pontryagin's maximum principle, the thrust vector optimal control is derived under the limited power condition. The Earth-Mars transfer problem is solved in the regular variables. The comparison of calculated trajectories with the ones obtained by the parameter continuation method is performed, and the stability properties of the two-point boundary value problem in the Cartesian and regular variables are studied.

Key words: Indirect optimization, low-thrust propulsion, Sundman's transformation, Kustaanheimo-Stiefel transformation, Pontryagin's maximum principle

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 19-11-00256, https://rscf.ru/project/19-11-00256/

1. Введение

В настоящее время задача уменьшения расхода топлива при перелётах космических аппаратов (КА) может быть решена переходом к более совершенным электрореактивным двигателям, которые характеризуются высоким удельным импульсом и небольшим уровнем тяги. Космические аппараты с такими двигателями малой тяги способны совершать перелёты не только в околоземном, но и в межпланетном пространстве. Для построения оптимальных траекторий КА с малой тягой традиционно используются прямые и непрямые методы. Прямые методы подразумевают дискретизацию траектории и функции управления – представление в виде конечномерных векторов значений в узлах временнóй сетки. Альтернативный подход — это использование непрямых методов, которые сводят задачу к краевой при помощи использования необходимых условий оптимальности — принципа максимума Понтрягина или принципа Беллмана.

К прямым методам относятся, например, метод псевдоимпульсов [1], метод пристрелки вместе с гомотопией [2,3]. Можно отметить работу [4], посвящённую прямым методам в задаче перелёта Земля-Луна на малой тяге с применением баллистического захвата. Одним из популярных непрямых методов является принцип максимума Понтрягина [5], который сводит оптимизационную задачу к краевой и представлен в работах В.Г. Петухова [6–10] и в работе Д. Переза-Палау [11]. В этих работах также рассматриваются приёмы осреднения уравнений движения для уменьшения численных ошибок интегрирования многовитковых траекторий. Часто применяют метод гомотопии, то есть непрерывное продолжение решений однопараметрического семейства задач из начального приближения к искомому решению. Гомотопия, и даже двойная гомотопия, рассматривается в работах Б. Пана [12, 13], Ф. Джианга [14] и Ч. Джанга [15]. Непрямой метод вкупе со сквозной оптимизацией используется в работе А.С. Самохина [16]. Одним из редких подходов является использование эволюционных алгоритмов [17].

Зачастую непрямые методы применяют одновременно с заменой переменных состояния на более подходящие по тем или иным признакам. Такие замены подробно рассмотрены в работах Э. Тахери [18–21], где также уделяется внимание обезразмериванию величин и использованию сглаживания функций переключения. Кроме того, стоит обратить внимание на работу Д. Джанкинса [22], посвящённую выбору вектора состояния и являющуюся развитием работ Тахери, и на работу С. Жефруа [23]. Грамотно выбранная замена переменных обычно позволяет улучшить сходимость оптимизационных методов. Кроме замены вектора состояния есть и другие подходы для увеличения точности вычислений, например, использование комплексного шага при конечно-разностной оценке производных [24], что позволяет справиться с чрезмерным уменьшением величины шага. Кроме того, существует подход, в котором физическое время заменяется на фиктивное. Впервые в своей работе его предложил К.Ф. Сундман [25]. Физическое время становится переменной состояния или вообще заменяется на так называемую временну́ю компоненту, которая меняется почти линейно с фиктивным временем; временны́е компоненты были изучены в работах П. Накози [26] и Е. Брумберга [27].

Уравнения орбитального движения в декартовых переменных не являются регулярными: правые части уравнений содержат точку сингулярности в начале координат. Приведение системы уравнений к регулярному виду называется регуляризацией. Для регуляризации задачи двух тел возможно использовать переменные Кустаанхеймо-Штифеля (KS), предложенные в труде Е. Штифеля [28], или применять подходы с использованием первых интегралов уравнений движения [29]. Преобразование Кустаанхеймо-Штифеля (KS-преобразование), связывающее декартовы координаты и KS-переменные, обобщает двумерное преобразование Т. Леви-Чивиты [30]: к трёхмерному радиус-вектору добавляется нулевая четвёртая координата, а KS-преобразование осуществляет переход из четырёхмерного параметрического пространства в расширенное таким образом трёхмерное физическое. В этом параметрическом пространстве уравнения движения не имеют особенностей в начале координат. В монографии [31] подробно рассмотрена такая замена координат. KS-преобразование также рассматривается в работах Д. Жезевски [32], А. Иванюхина [33] и Я. Сапункова [34].

При решении задачи нахождения оптимальной траектории межпланетного перелёта используется принцип максимума Понтрягина. Это позволяет перейти от бесконечномерной задачи оптимального управления к конечномерной краевой задаче. Применение метода продолжения по параметру для случая малой непрерывной тяги, существование решений и условия первого и второго порядка рассматриваются в трудах А. Петропулоса [35], Х. Уберле [36], и Ж. Пруссинга [37]. Преимуществами метода продолжения по параметру является его сходимость практически во всех случаях и сведение поиска решения к решению задачи Коши. В то же время одной из его ключевых проблем является плохая обусловленность матрицы чувствительности, которая напрямую используется при интегрировании. В данной работе особое внимание будет уделено улучшению обусловленности этой матрицы.

Целью данной работы является изучение специфики применения KS-преобразования с преобразованием времени Сундмана в задаче нахождения оптимальной траектории межпланетного перелёта с малой тягой, а также сравнение предлагаемого метода со стандартными реализациями поиска такой траектории в декартовых переменных методом продолжения по параметру. Научная новизна подхода состоит в учёте особенностей KS-преобразования и преобразования Сундмана при использовании принципа максимума. В явном виде учитывается условие физичности траектории и записываются условия трансверсальности. С учётом упомянутых особенностей ставится краевая задача и сводится к оптимизационной. В число задач входят поиск терминальных многообразий в четырёхмерном KS-пространстве, нахождение оптимального управления с учётом смешанных ограничений, определение способа решения краевой задачи и рассмотрение отличительных черт численной реализации.

Работа имеет следующую структуру. В первом разделе рассматривается стандартная постановка задачи оптимального перелёта с малой тягой и ограничением мощности, доступной двигателю КА. Такой постановке задачи соответствует квадратичный оптимизируемый функционал — интеграл от квадрата реактивного ускорения. Далее рассматривается стандартное решение в декартовых координатах: применяется формализм Понтрягина, из функции Гамильтона-Понтрягина находится оптимальное управление. Полученная краевая задача решается методом продолжения по параметру. Для исключения случаев ветвления решений используется модификация метода, в которой гравитационный параметр Солнца также рассматривается как функция параметра продолжения.

Далее рассматриваются преобразование Сундмана и KS-преобразование. Вводятся фиктивное время и временна́я компонента, после чего приводятся уравнения движения в четырёхмерном пространстве. Представлены способы параметризации слоёв в KS-пространстве, что необходимо для получения выражений для терминальных многообразий.

В четвёртом разделе с помощью понтрягинского формализма находится оптимальное управление для квадратичного функционала и системы уравнений движения в параметрическом пространстве с учётом смешанного ограничения на управление и вектор состояния, выражаемого билинейным соотношением. Краевая задача сопровождения (встречи) решается сведением её к оптимизационной и применением к последней метода внутренней точки.

В последнем разделе на примере перелёта Земля-Марс будут рассмотрены приёмы, использованные в численной реализации оптимизационного метода, и некоторые гиперпараметры, влияющие на работу метода. Затем производится его сравнение с методом продолжения в декартовых переменных по критериям величины чисел обусловленности матриц чувствительности и скорости сходимости; строится Парето-фронт в координатах угловой дальности и затрат массы, после чего делается вывод о целесообразности применения регулярных переменных.

2. Оптимизация траектории в декартовых координатах

Напомним стандартную процедуру оптимизации траектории с малой тягой в декартовых координатах, с которой будем в дальнейшем проводить сравнение. Сначала в этой главе рассмотрим поиск оптимального управления движением космического аппарата с двигателем ограниченной мощности в задаче двух тел. Задачу оптимизации сведём к краевой задаче с помощью принципа максимума Понтрягина. При этом начальное значение сопряжённых переменных отыщем методом продолжения из нулевого приближения.

2.1. Оптимальное управление

Запишем задачу двух тел в виде системы уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} &= -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{a}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор в декартовой системе координат, $\mathbf{v}$ — скорость, $\mathbf{a}$ — реактивное ускорение, μ — гравитационный параметр. Реактивное ускорение выражается так:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}_T}{m(t)} = \frac{\dot{m}u}{m(t)}\mathbf{e}, \tag{2.2}$$

где $\dot{m}$ — расход топлива в единицу времени, $\mathbf{e}$ — единичный вектор направления тяги, а u – скорость истечения. Ограничим мощность, расходуемую реактивной струёй, максимальным значением доступной двигателю электрической мощности N_{max}, с учётом КПД двигателя η

$$\frac{\dot{m}u^2}{2} \leq \eta N_{max}. \tag{2.3}$$

Выбирая значения u и $\dot{m}$, удовлетворяющие неравенству (2.3), можно реализовать любое значение $\mathbf{a}$. Выразим скорость истечения через реактивное ускорение, тогда (2.3) обратится в неравенство

$$\frac{\mathbf{a}^2(m_0 - m_r)^2}{2} \leq \eta N_{max}. \tag{2.4}$$

Проинтегрировав, мы получим

$$\frac{1}{m_0 - m} - \frac{1}{m_0} = \int_{t_0}^{t} \frac{\mathbf{a}^2(\tau)}{2\eta N_{max}} d\tau \geq \int_{t_0}^{t} \frac{\mathbf{a}^2(\tau)}{2\eta N} d\tau. \tag{2.5}$$

Здесь равенство достигается при использовании максимума доступной мощности N. Для определённости предположим, что в качестве источника энергии используется радиоизотопный термоэлектрический генератор (РИТЭГ), что означает практически постоянную максимальную мощность $N_{max} = const$. Для упрощения предположим независимость КПД от времени $\eta = const$. Это приведёт нас к минимизации функционала

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{a}^2(t) dt. \tag{2.6}$$

Такой квадратичный функционал часто используется в модельных задачах. Он удобен тем, что можно рассматривать реактивное ускорение $\mathbf{a}$ в качестве управления.

2.2. Применение принципа максимума в декартовых координатах

Применим принцип максимума Понтрягина к системе дифференциальных уравнений (2.1) и функционалу (2.6). Сначала выпишем вектор переменных состояния

$$\mathbf{x} = (\mathbf{r}, \mathbf{v}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^6, \tag{2.7}$$

которому будет соответствовать вектор сопряжённых переменных

$$\mathbf{p} = (\mathbf{p}_r, \mathbf{p}_v), \mathbf{p} \in \mathbb{R}^6. \tag{2.8}$$

Кроме того, запишем управление в виде

$$\mathbf{a} = (0 \leq a < \infty, -\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2, 0 \leq \beta \leq 2\pi), \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3, \tag{2.9}$$

где α и β — это углы, определяющие ориентацию единичного вектора ускорения, а a — величина ускорения. Тогда функция Гамильтона-Понтрягина будет записываться как

$$H = -\frac{\mathbf{a}^2}{2} + \mathbf{p}_r \mathbf{v} + \mathbf{p}_v \left(-\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \mathbf{a} \right). \tag{2.10}$$

Производные сопряжённых переменных по времени выражаются через частные производные гамильтониана по соответствующей переменной:

$$\dot{\mathbf{p}}_r = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}, \tag{2.11}$$

$$\dot{\mathbf{p}}_v = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}}. \tag{2.12}$$

Управление, доставляющее минимум оптимизируемому функционалу, максимизирует функцию Гамильтона-Понтрягина. Условиям оптимальности будет удовлетворять управление $\mathbf{a}$, такое что выполняется

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{a}} = 0. \tag{2.13}$$

В случае квадратичного функционала управление, отвечающее необходимым условиям оптимальности, будет выглядеть так:

$$\mathbf{a} = \mathbf{p}_v. \tag{2.14}$$

Вектор $\mathbf{p}_v$ обычно называют базис-вектором Лоудена.

2.3. Постановка и метод решения краевой задачи

Зачастую сопряжённый вектор $\mathbf{p}_r$ выражают через базис-вектора Лоудена $\mathbf{p}_v$, получая систему из двух векторных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{p}_v, \\ \ddot{\mathbf{p}}_v &= \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{r}^2}\mathbf{p}_v. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Здесь $U = \mu/r$ — гравитационный потенциал. В начальный момент времени фазовый вектор принадлежит многообразию

$$M_0 = \{\mathbf{g}_0(\mathbf{r}(t_0), \mathbf{v}(t_0)) = \mathbf{0}\}, \tag{2.16}$$

а в конечный момент времени многообразию

$$M_f = \{\mathbf{g}_f(\mathbf{r}(t_f), \mathbf{v}(t_f)) = \mathbf{0}\}. \tag{2.17}$$

В момент времени t_f переменные, сопряжённые свободным фазовым переменным, будут равны нулю.

Для краевой задачи (2.15),(2.16),(2.17) граничные условия можно записать в обобщённом виде

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}, \tag{2.18}$$

где $\mathbf{f}$ — это вектор-функция невязок, $\mathbf{z}$ — вектор параметров, однозначно задающий траекторию системы, а $\mathbf{z}_0$ — его начальное приближение. Для решения этой краевой задачи нередко применяется метод продолжения по параметру [10]. Этот метод предполагает погружение краевой задачи в однопараметрическое семейство задач. Это позволяет свести её к решению задачи Коши. Данный метод будет использоваться для сравнения с предлагаемым в следующих главах методом.

Рассмотрим примеры таких функций $\mathbf{f}$. Например, поставим задачу сопровождения (встречи). Скорость и положение аппарата в конечный момент времени должны равняться таковым у небесного тела:

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}(t_f) - \mathbf{r}_{tf} \\ \mathbf{v}(t_f) - \mathbf{v}_{tf} \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

Вектор невязок при использовании начального приближения $\mathbf{z} = \mathbf{z}_0$ будет равен

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}_0) = \mathbf{b}. \tag{2.20}$$

Введём однопараметрическое семейство $\mathbf{z}(\tau)$, где $\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$ и для которого будет выполняться

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}(\tau)) = (1 - \tau)\mathbf{b}. \tag{2.21}$$

При $\tau = 1$ вектор невязок равен нулю. В таком случае $\mathbf{z}(1)$ будет искомым решением.

Чтобы получить $\mathbf{z}(1)$, можно составить систему дифференциальных уравнений и проинтегрировать её от 0 до 1. Дифференцирование обеих частей уравнения (2.21) по τ даст

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = -\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}}\right)^{-1} \mathbf{b}. \tag{2.22}$$

Дифференциальное уравнение метода продолжения по параметру вместе с начальным условием $\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$ ставит задачу Коши относительно функции $\mathbf{z}(\tau)$ на интервале $\tau \in [0, 1]$. Другими словами, исходная система нелинейных уравнений редуцирована к задаче Коши. Из-за ресурсозатратности вычисления правой части системы ОДУ численное интегрирование рекомендуется производить одним из многошаговых методов высокого порядка. Матрица чувствительности $\partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{z}$ может быть аппроксимирована на каждом шаге численно или найдена из совместного интегрирования уравнений движения и уравнений в вариациях. В данной работе используется второй подход.

Помимо продолжения по параметру τ используется модификация гравпараметра μ, описанная в работе Петухова [10], сохраняющая в процессе продолжения угловую дальность постоянной. Для этого искусственно заменяют гравитационный параметр центрального тела

$$\bar{\mu}(\tau) = \mu_0 + (\mu - \mu_0)\tau. \tag{2.23}$$

Здесь μ_0 определяют так, чтобы полное число витков равнялось заданному числу. Пусть θ_0 — истинная аномалия, ϕ — угол между $\mathbf{r}_0$ и проекцией $\mathbf{r}_f$ на плоскость орбиты старта, а a_0 — большая полуось орбиты старта. Чтобы КА за время $t_f - t_0$ совершил N витков и оказался в точке с истинной аномалией $\theta_f = \theta_0 + \phi$, гравитационный параметр должен удовлетворять соотношению

$$\mu_0 = \left(\frac{M_f + 2\pi N - M_0}{t_f - t_0} \right) a_0^3. \tag{2.24}$$

Средние аномалии M_0 и M_f определяются через истинные аномалии θ_0 и θ_f с помощью соотношений

$$M = E - e \sin E, \tag{2.25}$$

$$\mathrm{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\, \mathrm{tg} \frac{\theta}{2}, \tag{2.26}$$

где e — это эксцентриситет орбиты старта. Для инвариантности формы орбит также должно выполняться соотношение

$$\mathbf{v}(t,\tau) = \mathbf{v}(t,1) \sqrt{\frac{\bar{\mu}(\tau)}{\mu}}. \tag{2.27}$$

В таком случае функция невязок $\mathbf{f}$ заменяется на

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}(t_f) - \mathbf{r}_{tf} \\ \mathbf{v}(t_f) - \mathbf{v}_{tf} \sqrt{\bar{\mu}(\tau)/\mu} \end{pmatrix}, \tag{2.28}$$

а вместо системы (2.22) используется система

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \tau} = -\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \tau} + \mathbf{b} \right). \tag{2.29}$$

Матрица чувствительности и производная $\partial \mathbf{f}/\partial \tau$ записываются через вариации фазового вектора

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{r}(t_f)}{\partial \mathbf{p}_{v0}} & \dfrac{\partial \mathbf{r}(t_f)}{\partial \dot{\mathbf{p}}_{v0}} \\ \dfrac{d}{dt} \left(\dfrac{\partial \mathbf{r}(t_f)}{\partial \mathbf{p}_{v0}} \right) & \dfrac{d}{dt} \left(\dfrac{\partial \mathbf{r}(t_f)}{\partial \dot{\mathbf{p}}_{v0}} \right) \end{pmatrix}, \tag{2.30}$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \tau} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{r}(t_f)}{\partial \tau} \\ \dfrac{\partial \mathbf{v}(t_f)}{\partial \tau} - \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\mu}{\bar{\mu}(\tau)}}\left(1 - \dfrac{\mu_0}{\mu}\right)\mathbf{v}_f \end{pmatrix}. \tag{2.31}$$

Уравнения в вариациях, необходимые для нахождения составных элементов матрицы чувствительности и $\partial \mathbf{f}/\partial \tau$, требуют совместного интегрирования с системой (2.22) и более подробно рассмотрены в уже упомянутой работе [10].

В последующих разделах будет рассмотрен альтернативный способ нахождения вектора $\mathbf{z}$, предполагающий регуляризацию уравнений движения с помощью KS-переменных и не требующий использования уравнений в вариациях. Переходные матрицы для уравнений движения в KS-переменных имеют меньшие числа обусловленности, чем для уравнений движения в физических декартовых координатах. Это позволяет использовать стандартные методы оптимизации для нахождения подходящего вектора параметров, например, метод внутренней точки. Результат оптимизации будет сравниваться с результатом описанного в данном разделе метода продолжения с модификацией гравитационного параметра.

3. Регулярные уравнения движения

В этой главе будут рассмотрены все вопросы, касающиеся преобразования Кустаанхеймо-Штифеля (KS) и преобразования Сундмана, а именно будут последовательно выведены уравнения движения в задаче двух тел после выполнения этих двух преобразований. Также в этой главе будет обсуждена параметризация прообраза точки трёхмерного пространства.

3.1. Временнóе преобразование

Одним из способов регуляризации [38] является временнóе преобразование. Оно осуществляет переход от времени t к новой переменной s, которую в дальнейшем будем называть фиктивным временем

$$dt = c(r, \dot{r})ds. \tag{3.1}$$

Такое преобразование называется сглаживающим. Подбирая масштабируюший множитель c, можно добиться почти равномерного по s изменения правой части. Возьмём масштабируюший множитель вида

$$dt = \frac{r}{\sqrt{-2h}}ds, \tag{3.2}$$

который впервые был предложен Сундманом [25]. Поэтому преобразование (3.2) носит название преобразования Сундмана. Здесь r — это величина радиус-вектора, а h — кеплерова энергия в данный момент времени. В преобразовании Сундмана роль фиктивного времени играет эксцентрическая аномалия. Выход в координатное пространство осуществляется присоединением к уравнениям движения временнóго уравнения

$$t' = \frac{\mathbf{r}}{\sqrt{-2h}}, \tag{3.3}$$

где штрихом обозначена производная по фиктивному времени.

Однако стоит заметить, что присоединение временнóго уравнения заметно ухудшает регуляризирующий эффект. Масштабирующий множитель часто испытывает короткопериодические колебания. Решением этой проблемы может служить временнáя компонента — переменная, которая была бы явным образом связана с временем, но при этом росла бы линейно по отношению к фиктивному времени при отсутствии возмущений. Можно ввести временную компоненту

$$\tau = t_0 + \sqrt{\frac{\mu^2}{8h^3}}E, \tag{3.4}$$

которая линейно меняется по отношению к эксцентрической аномалии E.

3.2. Преобразование Кустаанхеймо-Штифеля

Преобразование Кустаанхеймо-Штифеля [25] осуществляет переход из четырёхмерного пространства параметров (u_1, u_2, u_3, u_4) в трёхмерное координатное пространство (x, y, z). Это преобразование записывается в виде:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = L(\mathbf{u})\mathbf{u}. \tag{3.5}$$

Равенство нулю четвёртой координаты радиус-вектора $\mathbf{r}$ выражается так:

$$\mathbf{u}_b \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{3.6}$$

где $\mathbf{u}_b = (u_4, -u_3, u_2, -u_1)$ — это четвёртая строка матрицы L. Кроме того, для сохранения физичности преобразования требуется выполнение соотношения

$$\mathbf{u}_b \cdot \mathbf{u}' = 0, \tag{3.7}$$

которое называется *билинейным* соотношением. Обычно KS-преобразование записывают в сокращённой форме:

$$\mathbf{r} = L(\mathbf{u})\mathbf{u}. \tag{3.8}$$

В плоском случае KS-преобразование можно интерпретировать в полярной системе координат как взятие корня из полярного радиуса и уменьшение полярного угла вдвое.

3.3. Уравнения движения в KS-переменных

Преобразование Сундмана (3.3) в KS-переменных имеет вид:

$$t' = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{\sqrt{-2h}}, \tag{3.9}$$

где кеплерова энергия выражается так:

$$h = \frac{\nu^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + 4(\mathbf{w} \cdot \mathbf{w})}. \tag{3.10}$$

В этом соотношении $\mathbf{w} = \mathbf{u}'$ — параметрическая скорость. После применения преобразования Сундмана (3.2) и KS-преобразования (3.8) уравнения движения записываются в виде

$$\mathbf{u}'' + \frac{\mathbf{u}}{4} = -\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{4h} \mathbf{L}^T(\mathbf{u})\mathbf{a} - \frac{h'}{2h}\mathbf{u}', \tag{3.11}$$

где

$$h' = 2\mathbf{w} \cdot L^T \mathbf{a} \tag{3.12}$$

— производная кеплеровой энергии по фиктивному времени. Другими словами, в задаче двух тел уравнения движения могут быть сведены к виду регулярных уравнений возмущённого гармонического осциллятора. Если возмущения отсутствуют, то их решением являются гармонические колебания с постоянной частотой 1/2. Вывод этих уравнений детально описан в работе Штифеля [28].

Обратим внимание, что в отдельно взятой точке пространства можно связать параметрическую скорость $\mathbf{u}'$, которую в дальнейшем будем обозначать $\mathbf{w}$, и производную радиус-вектора по фиктивному времени $\mathbf{r}'$ согласно формуле

$$\mathbf{w} = \frac{L^T(\mathbf{u})\mathbf{r}'}{2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})}, \tag{3.13}$$

где $\mathbf{r}' = \mathbf{v}t'$. Это соотношение позволяет задать начальные значения для численного интегрирования. Приведём выражение для временного элемента τ в параметрических координатах:

$$\tau = t_0 + 2\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{\sqrt{-2h}}. \tag{3.14}$$

Дифференциальное уравнение для τ имеет вид

$$\tau' = \frac{1}{(-2h)^{3/2}} \left[\mu + 4(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})h' + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} \cdot L^T \mathbf{a}\right]. \tag{3.15}$$

Таким образом, в параметрическом пространстве мы имеем 9 дифференциальных уравнений.

3.4. Параметризация слоёв в KS-пространстве

В то время как преобразование (3.8) из параметрического пространства в физическое определено однозначно, обратное преобразование, вообще говоря, не определено. Найдём в параметрическом пространстве все точки, которые соответствуют точке $\mathbf{r}$.

Во-первых, заметим, что

$$r = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2, \tag{3.16}$$

и также выполняется

$$x = u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 + u_4^2. \tag{3.17}$$

Из этого можно выразить компоненты вектора $\mathbf{u}$ в форме двух уравнений окружностей

$$u_1^2 + u_4^2 = \frac{r+x}{2}, \tag{3.18}$$

$$u_2^2 + u_3^2 = \frac{r-x}{2}. \tag{3.19}$$

Поэтому все векторы $\mathbf{u}$, которые соответствуют выбранному вектору $\mathbf{r}$, определяются выражениями

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1 \cos\phi, \\ u_2 &= R_2 \cos\gamma, \\ u_3 &= R_2 \sin\gamma, \\ u_4 &= R_1 \sin\phi, \end{aligned} \tag{3.20}$$

где величины радиусов равны

$$\begin{aligned} R_1 &= \sqrt{\frac{r+x}{2}}, \\ R_2 &= \sqrt{\frac{r-x}{2}}, \end{aligned} \tag{3.21}$$

а углы $\phi, \gamma \in [0, 2\pi]$. Теперь подставим (3.20) во вторую и третью строки (3.5):

$$\begin{aligned} y &= 2R_1R_2(\cos\phi\cos\gamma - \sin\phi\sin\gamma), \\ z &= 2R_1R_2(\cos\phi\sin\gamma + \sin\phi\cos\gamma). \end{aligned} \tag{3.22}$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \cos(\phi+\gamma) &= \frac{y}{2R_1R_2}, \\ \sin(\phi+\gamma) &= \frac{z}{2R_1R_2}, \end{aligned} \tag{3.23}$$

что можно упростить, используя функцию двуаргументного арктангенса atan2:

$$\phi + \gamma = \mathrm{atan2}\left(\frac{z}{2R_1R_2}, \frac{y}{2R_1R_2}\right) = \mathrm{atan2}(z, y). \tag{3.24}$$

Это выражение означает, что угол $\phi + \gamma$ однозначно выражается из компонент вектора $\mathbf{r}$, то есть произвольно взятому углу $\gamma \in [0, 2\pi]$ можно единственным образом сопоставить угол ϕ.

В точках $r = x$ или $r = -x$ знаменатели в выражениях (3.23) будут обращаться в ноль. Однако это означает, что один из радиусов R_1 или R_2 равен нулю, а значит, число уравнений, определяющих $\mathbf{u}$, сокращается до одного — (3.18) или (3.19).

Обозначим получившуюся параметрическую кривую как

$$\hat{\mathbf{u}} = \left\{ \mathbf{u}(\mathbf{r}, \gamma), \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, \gamma \in [0, 2\pi] \right\}. \tag{3.25}$$

Эту кривую также называют *слой* [28], её можно определить ещё несколькими способами, например,

$$\hat{\mathbf{u}} = \left\{ \mathbf{u} : L(\mathbf{u})\mathbf{u} = \mathbf{r}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \right\} \tag{3.26}$$

или через уже найденную точку параметрического пространства

$$\hat{\mathbf{u}} = \left\{ \mathbf{u} : L(\mathbf{u})\mathbf{u} = L(\mathbf{u_0})\mathbf{u_0}, \mathbf{u_0} \in \mathbb{R}^4 \right\}. \tag{3.27}$$

Запись в последней форме используется в работе Штифеля [28].

Кроме того, имеет смысл ввести вспомогательное множество $\hat{\mathbf{w}}$, которое можно выразить так:

$$\hat{\mathbf{w}} = \left\{ \mathbf{w} : \mathbf{v} = \frac{2\sqrt{-2h}L(\mathbf{u})\mathbf{w}}{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \right\}. \tag{3.28}$$

Одному вектору скорости в физических координатах будет соответствовать множество $\hat{\mathbf{w}}$.

4. Оптимизация траектории в регулярных переменных

В настоящем разделе будет поставлена задача поиска оптимального управления в KS-переменных. Для квадратичного функционала оптимальное управление находится в явном виде с помощью принципа максимума Понтрягина, что позволит свести задачу к краевой. Будет уделено внимание условиям трансверсальности с учётом особенностей KS-преобразования. Для решения этой краевой задачи снова потребуется задействовать оптимизационные методы в силу необходимости введения интервальных ограничений на фиктивное или физическое время. Для построения метода оптимизации будут введены невязки, равенство нулю которых будет означать решение краевой задачи.

4.1. Оптимальное управление

Будем рассматривать задачу двух тел с управлением $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^4$, где $a_4 = 0$. Соберём уравнения движения в задаче двух тел (3.11) и дифференциальное уравнение для временно́й компоненты (3.15) в одну автономную систему уравнений.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' &= \mathbf{w}, \\ \mathbf{w}' &= -\frac{\mathbf{u}}{4} - \frac{\mathbf{u}^2}{4h} L^T\mathbf{a} - \frac{2\mathbf{w}\cdot L^T\mathbf{a}}{2h}\mathbf{w}, \\ \tau' &= \frac{1}{(-2h)^{3/2}}\left(\mu + 4(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})2\mathbf{w}\cdot L^T\mathbf{a} + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u}\cdot L^T\mathbf{a}\right). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Далее перейдём в интегральном выражении функционала к фиктивному времени:

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \mathbf{a}^2(t)dt = \frac{1}{2}\int_{s_0}^{s_f} \mathbf{a}^2(t)\frac{dt}{ds}ds = \frac{1}{2}\int_{s_0}^{s_f} \mathbf{a}^2(t)\frac{\mathbf{u}^2(s)}{\sqrt{-2h(s)}}ds. \tag{4.2}$$

Обратим внимание, что условие равенства нулю четвёртой компоненты управления можно записать следующим образом:

$$g(s, \mathbf{u}, \mathbf{a}) = \mathbf{u}_b \cdot L^T\mathbf{a} = 0. \tag{4.3}$$

Несоблюдение этого неравенства ведет к нефизичным траекториям.

4.2. Применение принципа максимума в регулярных переменных

Применим формализм Понтрягина к автономной системе (4.1) и функционалу (4.2) с ограничением (4.3). Учёт таких ограничений, относящихся к смешанным, подробно рассмотрен в книге [39]. Смешанное ограничение означает вхождение и вектора состояния $\mathbf{x}$, и вектора управления $\mathbf{a}$ в уравнение связи $g(s, \mathbf{x}, \mathbf{a}) = 0$. Его можно учесть с множителем Лагранжа m в гамильтониане:

$$H = -\phi(\mathbf{a}) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{f}(s, \mathbf{x}) - mg(s, \mathbf{x}, \mathbf{a}). \tag{4.4}$$

Здесь ϕ — это подынтегральная часть функционала J, $\mathbf{p}$ — вектор сопряжённых переменных, а $\mathbf{f}$ — правая часть системы дифференциальных уравнений. Значение неизвестного множителя m и управление $\mathbf{a}$ можно определить из условия стационарности функции Гамильтона-Понтрягина и смешанного ограничения

$$\begin{array}{lcl} H_a(s, \mathbf{x}, \mathbf{a}) & = & -\phi_a + \mathbf{p} \cdot \mathbf{f}_a - mg_a, \\ H_a(s, \mathbf{x}, \mathbf{a}) & = & 0, \\ g(s, \mathbf{x}, \mathbf{a}) & = & 0, \end{array} \tag{4.5}$$

где $H_a = \partial H / \partial \mathbf{a}$. Теперь запишем функцию Гамильтона-Понтрягина с учётом (4.3) и подставив уже известную подынтегральную функцию и правые части системы уравнений:

$$H = -\frac{\mathbf{u}^2}{\sqrt{-2h}} \frac{\mathbf{a}^2}{2} + \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{w} + \mathbf{p}_w \cdot \left(-\frac{\mathbf{u}}{4} - \frac{\mathbf{u}^2}{4h} L^T \mathbf{a} - \frac{\mathbf{w}}{h} \mathbf{w} \cdot L^T \mathbf{a} \right) - m\mathbf{u}_b \cdot L^T \mathbf{a}. \tag{4.6}$$

Введём вспомогательный вектор

$$\mathbf{\Lambda} = L \left(-\frac{\mathbf{u}^2}{4h} \mathbf{p}_w - \frac{\mathbf{w}}{h} \mathbf{p}_w \cdot \mathbf{w} \right), \tag{4.7}$$

с помощью которого можно записать гамильтониан в более удобной форме

$$H = -\frac{\mathbf{u}^2}{\sqrt{-2h}} \frac{\mathbf{a}^2}{2} + \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{w} - \frac{\mathbf{p}_w \cdot \mathbf{u}}{4} + -m\mathbf{u}_b \cdot L^T \mathbf{a}. \tag{4.8}$$

Запишем уравнение Эйлера-Лагранжа, называемое условием стационарности,

$$H_a = -\frac{\mathbf{u}^2}{\sqrt{-2h}} \mathbf{a} + \mathbf{\Lambda} - mL\mathbf{u}_b = 0. \tag{4.9}$$

Использовав равенство (4.3), найдём значение множителя Лагранжа:

$$m = \frac{\Lambda_4}{\mathbf{u}^2}. \tag{4.10}$$

Перейдём к новому вектору

$$\tilde{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{\Lambda} - \frac{\Lambda_4}{\mathbf{u}^2} L\mathbf{u}_b. \tag{4.11}$$

Фактически это означает выполнение равенства Λ_4=0. Оптимальное управление будет выражаться в следующем виде:

$$\mathbf{a} = \frac{\sqrt{-2h}}{\mathbf{u}^2}\tilde{\mathbf{\Lambda}}. \tag{4.12}$$

Четвёртая компонента реактивного ускорения всегда будет равна нулю $\mathbf{a}_4 = 0$. Кроме того, выпишем гамильтониан с подставленным оптимальным управлением:

$$H^* = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{-2h}}{\mathbf{u}^2}\tilde{\mathbf{\Lambda}}^2 + \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{w} - \frac{\mathbf{p}_w \cdot \mathbf{u}}{4}. \tag{4.13}$$

Дифференциальные уравнения для объединённой системы фазовых и сопряжённых переменных

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}' &= \frac{dt}{ds}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_u}\left(\frac{ds}{dt}H^*\right),\\
\mathbf{w}' &= \frac{dt}{ds}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_w}\left(\frac{ds}{dt}H^*\right),\\
\mathbf{p}_u' &= -\frac{dt}{ds}\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}\left(\frac{ds}{dt}H^*\right),\\
\mathbf{p}_w' &= -\frac{dt}{ds}\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}}\left(\frac{ds}{dt}H^*\right).
\end{aligned} \tag{4.14}$$

В рамках понтрягинского формализма также требуется определить условия трансверсальности. В общем случае они имеют вид

$$\mathbf{p}(s_{0,f}) = \frac{\partial \mathbf{g}(\boldsymbol{X}(s_{0,f}))}{\partial \mathbf{X}(s_{0,f})} \cdot \mathbf{C}, \tag{4.15}$$

где $\mathbf{g}$ определяет терминальное множество M, зависящее от вектора состояния $\mathbf{X}(s_{0,f})$, а $\mathbf{C}$ — это вектор произвольных постоянных.

Теперь определим терминальное множество M на правом конце. Выразим его как принадлежность $\mathbf{u}_f \in \hat{\mathbf{u}}(s_f)$, $\mathbf{w}_f \in \hat{\mathbf{w}}(s_f)$ и равенство энергий h_f — переменной при интегрировании, и $h(s_f)$ — вычисляемой в конечный момент времени из положения и скорости. Это даст нам 6 уравнений в случае, когда знаменатели в выражениях (3.23) не равны нулю:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(s_f) &= \tilde{L}(\mathbf{u}_f)\mathbf{u}_f, \\ \mathbf{v}(s_f) &= \frac{2\sqrt{-2h_f}\tilde{L}(\mathbf{u}_f)\mathbf{w}_f}{(\mathbf{u}_f\cdot\mathbf{u}_f)}, \end{aligned} \tag{4.16}$$

где $\tilde{L}(\mathbf{u})$ — это первые три строки $L(\mathbf{u})$. Если один из знаменателей (3.23) окажется равным нулю, всегда возможно повернуть систему координат так, чтобы этого не происходило. Практика показала, что если соотношение (3.6) для положения выполняется в начальной точке, то оно с высокой точностью будет сохраняться на протяжении всей траектории (включая конечную точку), как и билинейное соотношение для скорости (3.7). Из этого следует, что можно уменьшить число уравнений на два без вреда для точности интегрирования. Таким образом, получим три уравнения для параметрического положения, три — для параметрической скорости.

Продифференцируем выражения (4.16) по $\mathbf{X} = \{\mathbf{u}, \mathbf{w}\}$ и получим матрицу 6×8. Тогда размерность $\mathbf{C}$ будет равна 6, а это означает, что вектор $\mathbf{p}$ принадлежит шестимерному линейному подпространству восьмимерного пространства сопряжённых переменных. Двумерное ортогональное дополнение этого пространства запишем в виде линейной оболочки векторов $\mathbf{K}$. Найдём его как фундаментальное решение линейной системы

$$\frac{\partial \mathbf{g}(\boldsymbol{X}(s_{0,f}))}{\partial \mathbf{X}(s_{0,f})} \cdot \mathbf{C} = 0. \tag{4.17}$$

Решением системы будет линейная оболочка двух восьмимерных векторов:

$$\mathbf{K}(s_{0,f}) = \begin{pmatrix} u_1u_4 & u_2u_4 \\ -u_1u_3 & -u_2u_3 \\ u_1u_2 & u_2^2 \\ -u_1^2 & -u_1u_2 \\ u_1v_4 - u_4v_1 & u_2v_4 - u_4v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 & u_3v_2 - u_2v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 & 0 \\ 0 & u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}. \tag{4.18}$$

Эти вычисления можно выполнить символьно.

$$\mathbf{K}(s_{0,f})\mathbf{p}(s_{0,f}) = 0. \tag{4.19}$$

Это даст оставшиеся два уравнения, которые должны будут выполняться в задаче сопровождения. Интересно, что численно вектор $\mathbf{C}$ совпадает с вектором $(\mathbf{p}_r, \mathbf{p}_v)^T$ сопряжённых декартовым переменных. Это можно использовать для валидации полученных оптимальных траекторий.

4.3. Постановка краевой задачи

Обозначим правую часть системы (4.14) как $\boldsymbol{\phi}(s, \mathbf{Y})$, где s — фиктивное время, а $\mathbf{Y} = \{\mathbf{u}, \mathbf{w}, \tau, \mathbf{p}_u, \mathbf{p}_w\}$

$$\mathbf{Y}' = \boldsymbol{\phi}(s, \mathbf{Y}). \tag{4.20}$$

Траектория системы (4.1) очевидно зависит от начального состояния $\mathbf{Y}_0$ и времени интегрирования s_f:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(\mathbf{Y}_0, s), s \in [0, s_f]. \tag{4.21}$$

С другой стороны, возможно фиксировать время перелёта t_f, в таком случае время интегрирования s_f станет функцией от него. При численном интегрировании это будет задачей с выходом на ограничение:

$$\mathbf{Y}(\mathbf{Y}_0, s), s \in [0, s_f], s_f = s_f(t_f). \tag{4.22}$$

Практика показала, что удобнее фиксировать значение s_f, которое близко к эксцентрической аномалии E, а не t_f.

В точке $t = t_0$ мы полагаем положение $\mathbf{r}_0(t_0)$ и скорость $\mathbf{v}_0(t_0)$ известными (например, совпадающими с получаемыми из эфемерид положением и скоростью отлётного небесного тела). Если положить $\gamma_0 = 0$, то можно однозначно определить $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{w}_0$.

Определим $\mathbf{u}_0$ как точку на слое $\hat{\mathbf{u}}$

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(\mathbf{r}, \gamma_0). \tag{4.23}$$

Тогда параметрическая скорость выражается как

$$\mathbf{w}_0 = \frac{L(\mathbf{u}_{t0})^T \mathbf{w}_{t0}}{2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})} \tag{4.24}$$

и энергия — как

$$h_0 = -\frac{\mu}{\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_0 + 4(\mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{w}_0)}. \tag{4.25}$$

Также определим τ_0 как момент прохождения перигея.

Дополнительно обозначим неизвестный вектор сопряжённых переменных как $\mathbf{z} = (\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_w)$.

Значение γ_f в такой краевой задаче будет произвольным, то есть нас будут интересовать не конкретная точка $\mathbf{u}_f$ со скоростью $\mathbf{w}_f$, а слои $\hat{\mathbf{u}}_f$ и $\hat{\mathbf{w}}_f$. При фиксированном физическом времени $t(s_f) = t_f$ правый конец краевой задачи будет гомеоморфен двумерному тору, а при фиксированном фиктивном времени s_f — однопараметрическому семейству торов, где параметром будет являться физическое время $t(s_f)$.

4.4. Постановка задачи оптимизации

В рамках задачи оптимизации сначала рассмотрим физические переменные, а затем сравним их с параметрическими. Определим координату и скорость в конечный момент времени. Для этого рассмотрим обратную замену переменных

$$\mathbf{r}(s_f) = \tilde{L}(\mathbf{u}_f)\mathbf{u}_f, \tag{4.26}$$

$$\mathbf{v}(s_f) = \frac{2\sqrt{-2h_f}\tilde{L}\mathbf{w}_f}{\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{u}_f}. \tag{4.27}$$

Физическое положение небесного тела обозначим как $\mathbf{r}_{sf}$, которое можно определить из эфемерид, зная физическое время $t_f = t_f(\tau_f(t_0, \mathbf{z}, s_f))$. Таким же образом определим скорость $\mathbf{v}_{sf}$.

Для задачи сопровождения вектор-функция невязки имеет следующий вид

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}(s_f) - \tilde{L}(\mathbf{u}_f)\mathbf{u}_f \\ \\ \mathbf{v}(s_f) - \dfrac{2\sqrt{-2h_f}\tilde{L}(\mathbf{u}_f)\mathbf{w}_f}{(\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{u}_f)} \\ \mathbf{K}(s_0)\mathbf{p}(s_0) \end{pmatrix}. \tag{4.28}$$

Оказывается, что выражение $\mathbf{K}(s)\mathbf{p}(s) = 0$ выполняется для всех точек траектории при выполнении его на левом конце. В частности будут выполняться условия трансверсальности на правом конце $\mathbf{K}(s_f)\mathbf{p}(s_f) = 0$. Такое упрощение позволяет нам уменьшить число условий в принципе максимума на два. Выполнение этих условий в каждой точке означает существование отображения в шестимерное пространство переменных, сопряжённых декартовым переменным. Очевидно, что если такое отображение существует в каждой точке, то можно полностью получить оптимальные траектории в декартовых координатах, зная только KS-переменные и сопряжённые им.

В итоге, для нашей задачи будем использовать восьмимерный вектор невязки. Минимизируем каждую компоненту невязки $\boldsymbol{\delta}$ в отдельности. Такое можно сделать, интерпретируя уравнения $\boldsymbol{\delta} = 0$ как условия типа равенства, а функционал выбрать единичным $J \equiv 1$.

Невязка $\boldsymbol{\delta}$ зависит от параметров t_0, s_f и начального вектора сопряжённых переменных $\mathbf{z}$, то есть $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\delta}(t_0, \mathbf{z}, s_f)$. Зададим ограничения $\mathbf{z} \in [\mathbf{z}_a, \mathbf{z}_b]$ для возможности применения методов локальной оптимизации, а также возьмём начальное приближение $\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

Стоит заметить, что определение параметра s_f является ключевым в задаче. Например, возможно контролировать число витков n и угловую дальность по эксцентрической аномалии ΔE. В качестве хорошего приближения можно брать просто $s_f = n + \Delta E$. Стоит заметить, что это число не получится оценить точно, так как эксцентрическая аномалия E_f в конечный момент времени будет зависеть от траектории $E_f = E_f(\mathbf{Y}(t_0, \mathbf{z}, s_f)) = E_f(t_0, \mathbf{z}, s_f)$.

Для улучшения сходимости можно расширить задачу до задачи со свободным концом.

$$s_f \in [s_a, s_b], \tag{4.29}$$

где $s_{a,b} = n + \Delta E \pm C$. Константа C может быть выбрана в достаточно широких рамках, но лучше ограничиваться значением $C \leq \frac{\pi}{2}$. Такую расширенную задачу можно использовать для нахождения начального приближения вблизи известной точки s_f, что даст более быстрый результат. Если иметь некоторое представление о расположении оптимальных решений, можно скорректировать этот диапазон. Например, для траекторий перелёта от Земли к внешним планетам практично выбрать $s_a = s_f$ и $s_b > s_f$.

5. Сравнение методов

Перейдём к обсуждению численных результатов и особенностей реализации. В данной главе предполагается осветить сходимость и устойчивость метода и сравнить его с методом продолжения по параметру.

5.1. Параметры численных расчётов

Алгоритмы поиска оптимальных траекторий были реализованы в среде программирования MATLAB. Вычисления проводились на ноутбуке с 12 виртуальными ядрами, тактовой частотой 2.6 ГГц и оперативной памятью 32 Гб. Выражения для правой части, а также частные производные были найдены символьно, а затем оптимизированы для уменьшения времени работы метода. Для решения оптимизационной задачи была выбрана функция fmincon, реализующая метод внутренней точки. В рамках этого метода использовалось распараллеливание на 6 процессоров. При этом точность выполнения условий оптимальности взята равной 1E−10, максимальное число вызовов функции равно 1E+10, минимальный размер шага 1E−10, точность выполнения ограничений типа равенства установлена 1E−12, максимальное число шагов оптимизатора 250. Кроме того, дополнительно введено ограничение $\tau' \geq 0$.

Для нахождения положений и скоростей Земли и Марса в начальный и конечный момент времени использовалась эфемеридная модель DE430 [40]. Начальный момент времени соответствует 00:00 UTC 1 января 2022 года.

Для получения решения фиксировалось время интегрирования s_f, так как s является независимой переменной. Стоит заметить, что переменные были обезразмерены, а после нахождения решения размерность восстанавливалась. Кроме того, для вектора $\mathbf{z}$ задавались достаточно широкие рамки $|\mathbf{z}_i| < 1\text{E}{+}10$. Заметим, что значения $\mathbf{z_i}$ также подвергались модификации путём домножения на гиперпараметр $C_p = 10^{-4-\sqrt{s_f}}$, который явно зависит от выбранного времени интегрирования. Здесь и далее под гиперпараметрами будем иметь в виду некоторые параметры настройки метода, выбираемые исследователем, например, точность интегрирования. Параметр C_p был подобран исходя из типичных величин вектора $\mathbf{p}$ для выбранного фиктивного времени.

Рассмотрим задачу сопровождения. На первом этапе минимизировалась невязка (4.28) на области поиска $[s_f, s_f + \pi/8]$ с нулевым начальным приближением. Полученные решения на этом этапе принадлежат как оптимальным частям семейств решений, так и неоптимальным. На втором этапе в качестве начальных приближений использовались $\mathbf{z}$ из первого этапа, а область поиска сужалась до точки s_f. Выбирались минимальные по расходу топлива части семейств, а потом проводилась оптимизация вдоль этих семейств влево и вправо. В обоих случаях невязка домножалась на гиперпараметр $C_\delta =$ 1E+10. Помимо этого, точность интегрирования контролировалась третьим гиперпараметром $C_{tol} =$ 1E-10 на первом этапе и $C_{tol} =$ 1E-12 на втором.

После получения оптимального решения находится $t(s_f)$ и используется метод продолжения с модификацией гравитационного параметра в физических координатах для нахождения решения, которое будем называть эталонным. Затем обе траектории сравниваются с точки зрения затраченной массы и расстояния между траекториями, которое оценивается по формуле

$$d = \max_{r_0 \in \gamma_0} (\min_{r_1 \in \gamma_1} \|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1\|), \tag{5.1}$$

где под γ_0 и γ_1 подразумеваются траектории КА, полученные двумя разными методами.

В рамках численного эксперимента были выбраны точки $s_f = 3/4\pi + k/16\pi$, где $k = \overline{0, 168}$. Другими словами, рассматривались перелёты с угловой дальностью от трёх четвертей витка до шести витков.

Были выбраны следующие параметры моделирования КА и двигательной установки: начальная масса $m_0 = 367$ кг, максимальная мощность $N = 1350$ Вт, КПД двигательной установки $\eta = 0.45$, которые соответствуют аппарату Европейского космического агентства SMART-1 (запущен к Луне в 2003 году) и двигателю СПД-100в [41].

5.2. Пример отдельной траектории

В качестве примера рассмотрим траекторию перелёта с угловой дальностью два витка ($s_f = 4\pi$). На рис. 1 изображены две траектории, полученные сравниваемыми методами, и масштабированные вектора ускорения в разных точках вдоль траектории. Для лучшего понимания внешнего вида траектории в KS-координатах на рис. 2 представлен тот же самый перелёт. На рисунке отсутствует четвёртая параметрическая координата, но видна одна из особенностей KS-преобразования — число витков в четырёхмерном пространстве в два раза меньше. Орбита Земли рассчитана с $\gamma = 0$, поэтому полностью видна в трёхмерном представлении. Орбита Марса в данном случае отображена так, чтобы совпадал угол γ для изображаемой орбиты и $\gamma(\mathbf{u}_f)$ для конца траектории. Ниже, на рис. 3, можно увидеть величину ускорения, а на рис. 4 — слабую нелинейность фиктивного времени относительно физического.

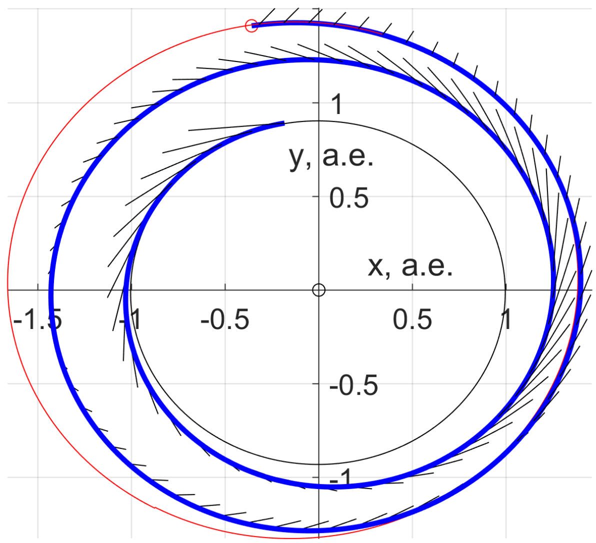

Рисунок 1. Траектория перелёта Земля-Марс, полученная методом внутренней точки в регулярных переменных. Орбита Земли показана чёрной кривой, а Марса — красной.

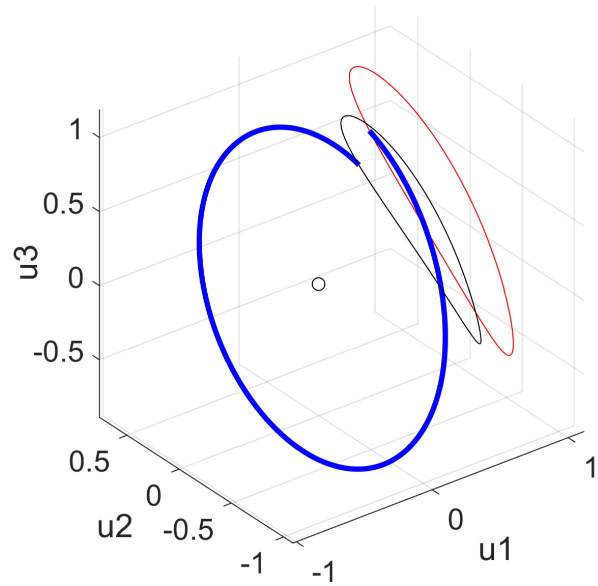

Рисунок 2. Траектория перелёта Земля-Марс в проекции на первые три параметрические координаты. Орбита Земли показана чёрной кривой, а Марса — красной.

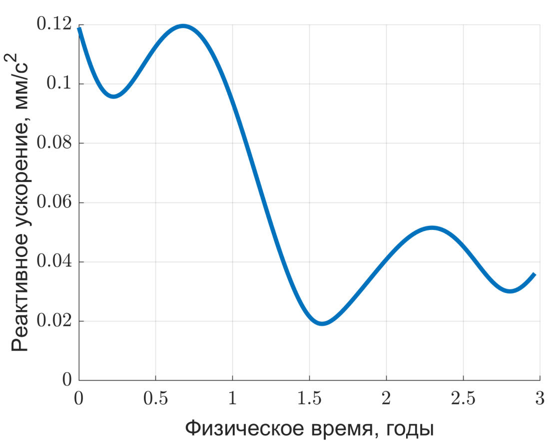

Рисунок 3. Величина реактивного ускорения как функция физического времени.

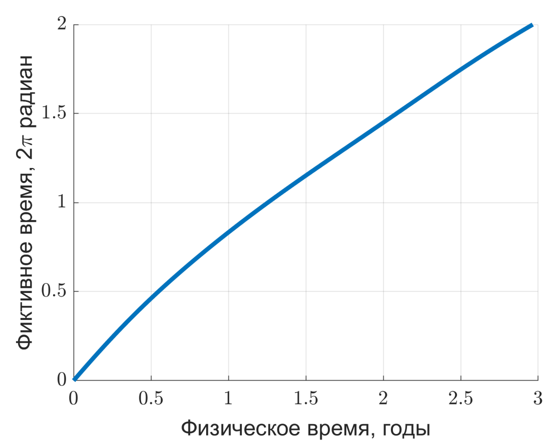

Рисунок 4. Относительная нелинейность фиктивного и физического времени.

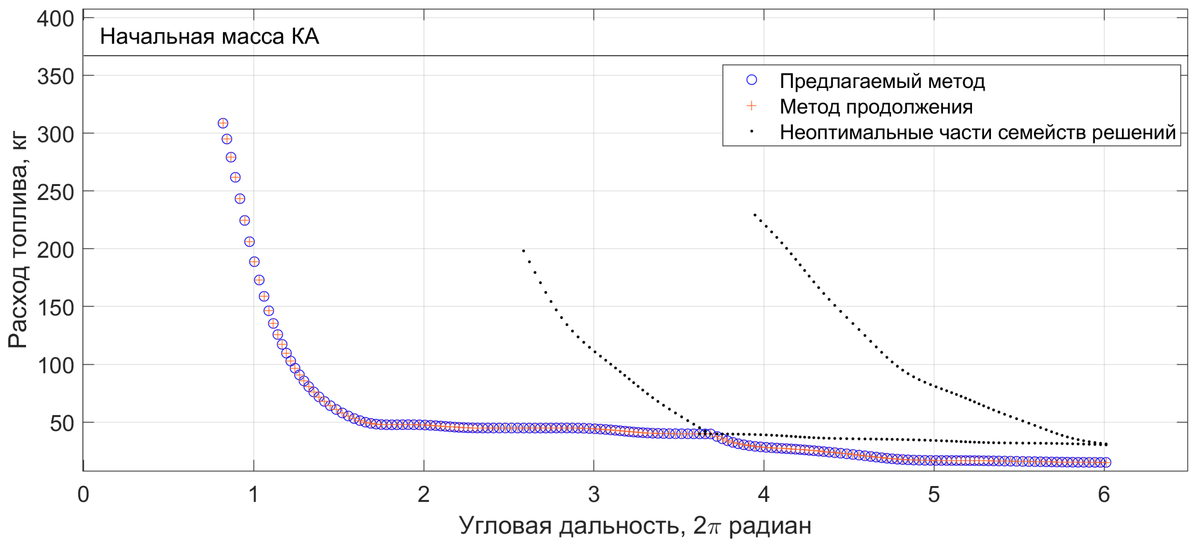

Рисунок 5. Оптимальные и неоптимальные части семейств решений. Сопоставление решений, полученных разными методами.

5.3. Сравнение решений

Если выделить части семейств решений, минимальные по расходу топлива, то можно построить Парето-фронт в координатах фиктивное время — затраты топлива. Чтобы лучше представлять отношение этих решений к физическим величинам, удобно ввести угловую дальность по истинной аномалии. На рис. 5 представлено сравнение решений в координатах угловая дальность — затраты топлива. Строго говоря, не все точки объединённого семейства решений принадлежат Парето-фронту, но для сохранения общей картины было решено их оставить на графике. Кругами (O) обозначены решения, полученные методом внутренней точки, а крестиками (+) решения, полученные методом продолжения. Среднее значение разницы в затратах топлива составляет 1.0E–06 кг, а среднее максимальное расстояние между траекториями равно 6.1E–07 а.е. Такой результат показывает достаточно хорошее совпадение между результатами работы двух методов.

На рис. 6 представлено время работы двух методов для поиска решений с разной угловой дальностью. Среднее время вычислений несколько отличается: оно составляет 16 секунд для метода продолжения и 3 секунды — для метода внутренней точки.

Стоит обратить внимание на близкие значения угловой дальности (по эксцентрической аномалии) и фиктивного времени. На рис. 7 показана их связь в точках Парето-фронта. Легко заметить, что зависимость практически единичная. Разница между этими величинам представлена на рис. 8.

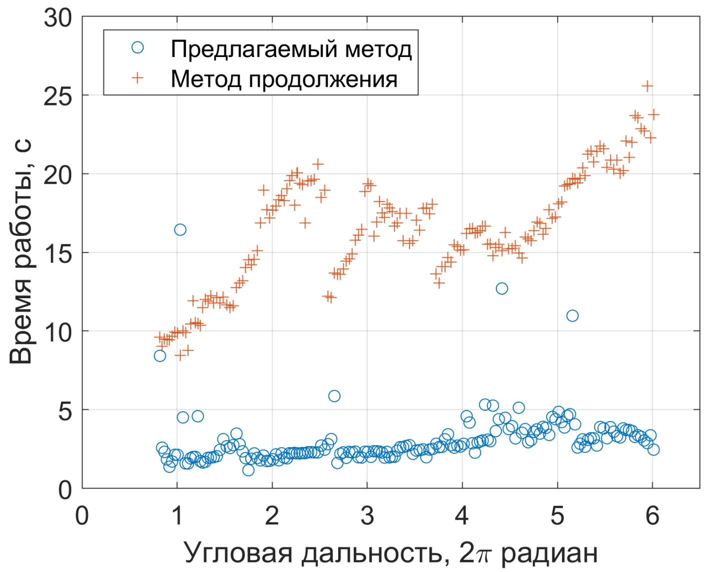

Рисунок 6. Сравнение времени работы двух методов.

5.4. Сходимость и гиперпараметры

Для любой выбранной угловой дальности метод продолжения всегда сходится к той же точке, что и предлагаемый метод. Это также касается неоптимальных частей семейств решений. Дело в том, что для одного и того же физического времени существует несколько локально оптимальных решений в декартовых координатах. Обычно они отличаются числом витков. Если более подробно взглянуть на разные семейства решений с фиксированным фиктивным временем на рис. 9, то можно увидеть ключевое отличие в семействах траекторий: вместо различия в числе витков траектории отличаются по физическому времени перелёта.

Теперь перейдём к смыслу и проблеме выбора значений гиперпараметров. Множитель невязки C_δ позволяет избежать слишком малых её значений, которые могут достигать машинного нуля, что приводит к ранней остановке оптимизации. После нескольких численных экспериментов было выбрано значение 1E+10.

Точность интегрирования значительно влияет на первый этап поиска решения и в меньшей степени на второй. При необходимости её можно уменьшать до 1E–10 на первом этапе, и это повлияет лишь на близость начального приближения второй стадии к оптимальному.

Третий гиперпараметр — множитель начальных значений сопряжённых переменных, он является самым чувствительным. Меньшие его значения будут неявным образом уменьшать шаг оптимизатора, но увеличивать

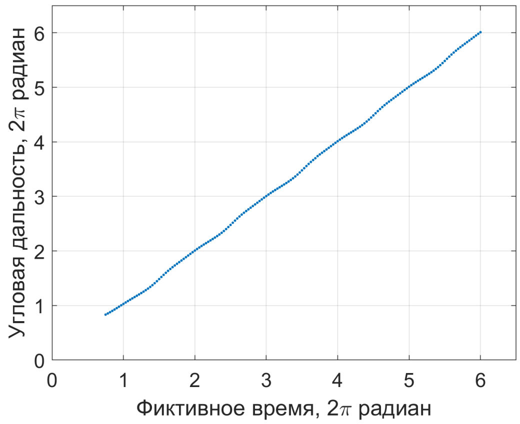

Рисунок 7. Связь фиктивного времени и эксцентрической аномалии E.

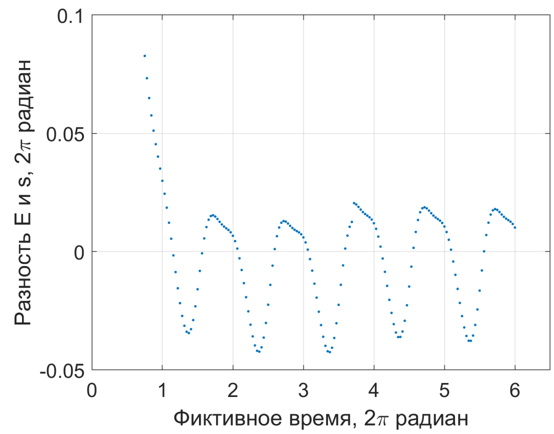

Рисунок 8. Разница фиктивного времени и эксцентрической аномалии E.

время сходимости. В идеальном случае он должен быть таким, чтобы в обезразмеренных величинах значения $\mathbf{z}$ были близки к единице.

5.5. Устойчивость траекторий

Для оценки устойчивости решения найдём матрицу чувствительности для краевой задачи (4.28)

$$A = \frac{\partial \boldsymbol{\delta}}{\partial \mathbf{z}}. \tag{5.2}$$

Для этого аппроксимируем частные производные с помощью центральных разностей. Сравним её с матрицей чувствительности метода продолжения (2.30) путём сопоставления чисел обусловленности.

Для квадратных матриц число обусловленности будет равно

$$\operatorname{cond}(A) = \|A\|_2 \cdot \left\|A^{-1}\right\|_2, \tag{5.3}$$

однако для избежания обращения матрицы используется отношение максимального сингулярного числа к минимальному. Эти числа могут быть найдены с помощью сингулярного разложения. На рис. 10 представлено сравнение рассчитанных чисел обусловленности.

Для приведенной выше серии экспериментов среднее значение чисел обусловленности для метода продолжения — 1.3E+05, а для KS-переменных — 4.3E+03, что означает лучшую обусловленность матрицы чувствительности.

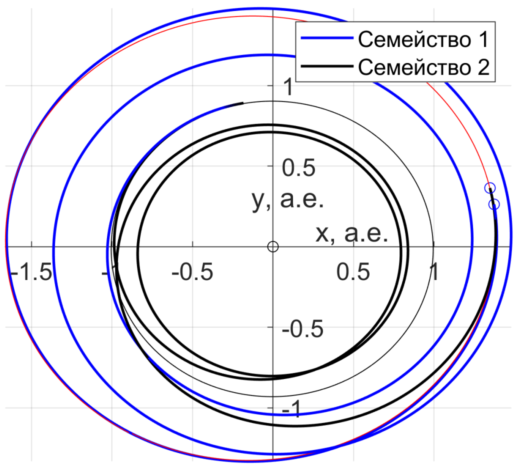

Рисунок 9. Две разных траектории для фиктивного времени 2.75 π.

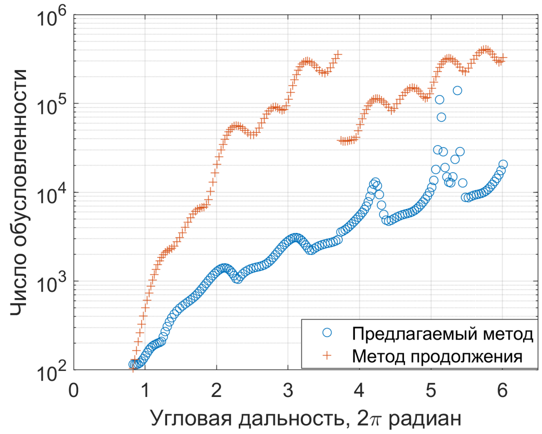

Рисунок 10. Сравнение чисел обусловленности.

6. Заключение

Реализованная методика оптимизации траекторий с малой тягой в регулярных переменных позволяет осуществлять поиск оптимальных траекторий стандартными методами оптимизации благодаря низким числам обусловленности, что может упростить начальный этап проектирования оптимальных траекторий. Низкие числа обусловленности означают меньшую невязку на правом конце при наличии численных ошибок интегрирования. Среди преимуществ предложенного метода стоит назвать простой контроль числа витков и угловой дальности. Это позволяет быстро получить начальное приближение для многовитковой траектории, которое можно в дальнейшем улучшать методами пристрелки.

Для выбранного квадратичного функционала использование регулярных переменных показывает близкие к эталонным значения затрат топлива и совпадение траекторий с хорошей точностью. Такое совпадение указывает на корректность работы метода.

Сравнительно с методом продолжения по параметру, в котором решается задачи Коши, стоит отметить возможность распараллеливания метода внутренней точки. За счёт этого уменьшено время поиска оптимальной траектории.

В дальнейшем планируется проверить работоспособность метода на других функционалах, например, на функционале быстродействия, а также перейти к задаче оптимизации траекторий в возмущённой задаче двух тел. Целесообразно было бы провести сравнение KS-переменных с другими фазовыми переменными в смысле численных свойств получающихся оптимизационнных задач.

7. Список литературы

[1] Улыбышев Ю.П. Обзор методов оптимизации траекторий космических аппаратов с использованием дискретных множеств псевдоимпульсов // Космическая техника и технологии. 2016. Т. 15, № 4. С. 67–79.

[2] Gergaud, J., Haberkorn, T. Homotopy method for minimum consumption orbit transfer problem // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. 2006. Vol. 12, No. 2. pp. 294–310.

[3] Haberkorn, T., Martinon, P., Gergaud, J. Low thrust minimum-fuel orbital transfer: a homotopic approach // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2004. Vol. 27, No. 6. pp. 1046–1060.

[4] Mingotti, G., Topputo, F., Bernelli-Zazzera, F. A method to design sun-perturbed earth-to-moon low-thrust transfers with ballistic capture // XIX A.I.D.A.A. Congress Proceedings. Forli, Italy: 2007.

[5] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В. [и др.]. Математическая теория оптимальных процессов // М.: Физматгиз. 1961.

[6] Petukhov, V.G. Optimization of multi-orbit transfers between noncoplanar elliptic orbits // Cosmic Research. 2004. Vol. 42, No. 3. pp. 250–268.

[7] Петухов В.Г. Робастное квазиоптимальное управление с обратной связью для перелета с малой тягой между некомпланарными эллиптической и круговой орбитами // Вестник Московского авиационного института. 2010. Т. 17, № 3. С. 50–58.

[8] Petukhov, V.G. Optimization of interplanetary trajectories for spacecraft with ideally regulated engines using the continuation method // Cosmic Research. 2008. Vol. 46, No. 3. pp. 219–232.

[9] Petukhov, V.G. Optimal multi-orbit trajectories for inserting a low-thrust spacecraft to a high elliptic orbit // Cosmic Research. 2009. Vol. 47, No. 3. pp. 243–250.

[10] Petukhov, V.G. Method of continuation for optimization of interplanetary low-thrust trajectories // Cosmic Research. 2012. Vol. 50, No. 3. pp. 249–261.

[11] Perez-Palau, D., Epenoy, R. Fuel optimization for low-thrust Earth–Moon transfer via indirect optimal control // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2018. Vol. 130, No. 2. pp. 21.

[12] Pan, B., Lu, P., Pan, X. et al. Double-homotopy method for solving optimal control problems // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2016. Vol. 39, No. 8. pp. 1706–1720.

[13] Pan, B., Pan, X., Zhang, S. A new probability-one homotopy method for solving minimum-time low-thrust orbital transfer problems // Astrophysics and Space Science. 2018. Vol. 363, No. 9. pp. 1–12.

[14] Jiang, F., Baoyin, H., Li, J. Practical techniques for low-thrust trajectory optimization with homotopic approach // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2012. Vol. 35, No. 1. pp. 245–258.

[15] Zhang, C., Topputo, F., Bernelli-Zazzera, F. et al. Low-thrust minimum-fuel optimization in the circular restricted three-body problem // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2015. Vol. 38, No. 8. pp. 1501–1510.

[16] Григорьев И.С., Заплетин М.П., Самохин А.С. [и др.]. Оптимизация экспедиции к Фобосу с комбинированной тягой с возвращением к Земле // Инженерный журнал: наука и инновации. 2017. № 7(67). С. 1–24.

[17] Design and optimization of low-thrust orbit transfers / S. Lee, P. von Ailmen, W. Fink et al. // 2005 IEEE Aerospace Conference. IEEE, 2005. pp. 855–869.

[18] Taheri, E., Kolmanovsky, I., Atkins, E. Enhanced smoothing technique for indirect optimization of minimum-fuel low-thrust trajectories // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2016. Vol. 39, No. 11. pp. 2500–2511.

[19] Taheri, E., Junkins, J.L. Generic smoothing for optimal bang-off-bang spacecraft maneuvers // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2018. Vol. 41, No. 11. pp. 2470–2475.

[20] Taheri, E., Junkins, J.L., Kolmanovsky, I. et al. A novel approach for optimal trajectory design with multiple operation modes of propulsion system, part 1 // Acta Astronautica. 2020. Vol. 172. pp. 151–165.

[21] Taheri, E., Junkins, J.L., Kolmanovsky, I. et al. A novel approach for optimal trajectory design with multiple operation modes of propulsion system, part 2 // Acta Astronautica. 2020. Vol. 172. pp. 166–179.

[22] Junkins, J.L., Taheri, E. Exploration of alternative state vector choices for low-thrust trajectory optimization // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2019. Vol. 42, No. 1. pp. 47–64.

[23] Geffroy, S., Epenoy, R. Optimal low-thrust transfers with constraints—generalization of averaging techniques // Acta Astronautica. 1997. Vol. 41, No. 3. pp. 133–149.

[24] Petukhov, V.G. A new approach to low-thrust perturbed trajectory optimization based on the use of complex dual numbers // Proceedings of 71st International Astronautical Congress (IAC) – The CyberSpace Edition, 12-14 October 2020. 2020.

[25] Sundman, K.F. Memoire sur le probleme des trois corps // Acta Mathematica. 1913. Vol. 36. pp. 105–179.

[26] Nacozy, P.E. Time elements in Keplerian orbital elements // Celestial Mechanics. 1981. Vol. 23, No. 2. pp. 173–198.

[27] Brumberg, E.V. Length of arc as independent argument for highly eccentric orbits // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 1992. Vol. 53. pp. 323–328.

[28] Stiefel, E.L., Scheifele, G. Linear and Regular Celestial Mechanics. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften No. 174. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1971.

[29] Shefer, V.A. Linearization and Regularization of Equations of Keplerian Motion Using Integrals // Soviet Astronomy. 1991. Vol. 35, No. 1.

[30] Levi-Civita, T. Sur la regularisation du probleme des trois corps // Acta Mathematica. 1920. Vol. 42. pp. 99–144.

[31] Иванов Д.С., Трофимов С.П., Широбоков М.Г. Численное моделирование орбитального и углового движения космических аппаратов. Москва: под ред. М.Ю. Овчинникова / ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2016.

[32] Jezewski, D.J. A comparative study of Newtonian, Kustaanheimo/Stiefel, and Sperling/Burdet optimal trajectories // Celestial Mechanics. 1975. Vol. 12, No. 3. pp. 297–315.

[33] Иванюхин А.В. Оптимизация траектории космического аппарата с идеально регулируемым двигателем в переменных Кустаанхеймо-Штифеля // Труды МАИ. 2014. № 75. С. 1–16.

[34] Сапунков Я.Г., Челноков Ю.Н. Построение оптимальных управлений и траекторий движения центра масс космического аппарата, снабженного солнечным парусом и двигателем малой тяги, с использованием кватернионов и переменных Кустаанхеймо–Штифеля // Космические исследования. 2014. Т. 52, № 6. С. 489–489.

[35] Petropoulos, A., Russell, R. Low-Thrust Transfers Using Primer Vector Theory and a Second-Order Penalty Method // AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit. Guidance, Navigation, and Control and Co-located Conferences. Honolullu, Hawaii: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2008.

[36] Oberle, H.J., Taubert, K. Existence and multiple solutions of the minimum-fuel orbit transfer problem // Journal of Optimization Theory and Applications. 1997. Vol. 95, No. 2. pp. 243–262.

[37] Prussing, J.E., Sandrik, S.L. Second-order necessary conditions and sufficient conditions applied to continuous-thrust trajectories // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2005. Vol. 28, No. 4. pp. 812–816.

[38] Roa, J. Regularization in Orbital Mechanics. Berlin, Boston: De Gruyter, 2017.

[39] Милютин А.А., Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П. Принцип максимума в оптимальном управлении. Центр прикладных исследований мехмата МГУ Москва, 2004. 168 с.

[40] The planetary and lunar ephemerides DE430 and DE431 / W. Folkner, J. Williams, D. Boggs et al. // Interplanetary Network Progress Report. 2014. Vol. 196, No. 1. pp. 42–196.

[41] New generation of SPT-100 / O. Mitrofanova, R. Y. Gnizdor, V. Murashko et al. // 32nd International Electric Propulsion Conference. 2011. pp. 2011–2041.

Оглавление