ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 31 за 2022 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Е.В. Зипунова, Е.Б. Савенков

Феноменологический вывод термомеханической модели развития канала электрического пробоя типа «диффузной границы»

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Зипунова Е.В., Савенков Е.Б. Феноменологический вывод термомеханической модели развития канала электрического пробоя типа «диффузной границы» // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2022. № 31. 36 с.
https://doi.org/10.20948/prepr-2022-31
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2022-31

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. КЕЛДЫША

Е.В. Зипунова, Е.Б. Савенков

Феноменологический вывод термомеханической модели развития канала электрического пробоя типа «диффузной границы»

Москва, 2022

Е.В. Зипунова, Е.Б. Савенков, Феноменологический вывод термомеханической модели развития канала электрического пробоя типа «диффузной границы»

Аннотация

В настоящей работе предложена модель типа «диффузной границы» для описания динамики развития канала электрического пробоя с учетом неизотермических эффектов и напряженно-деформированного состояния среды. Модель включает в себя уравнения законов сохранения массы, импульса и энергии, группу уравнений Максвелла в квази-(электро)стационарном приближении и уравнение Аллена-Кана для описания эволюции фазового поля. Вывод модели выполнен в рамках обоснованных подходов рациональной термомеханики сплошной среды и теории микросил и микронапряжений М. Гуртина с применением процедуры Колмана-Нолла.

Ключевые слова: модели типа диффузной границы, фазовое поле, параметр порядка, термомеханика, модель Годунова-Роменского, электрический пробой

E.V. Zipunova, E.B. Savenkov, Phenomenological derivation of the thermomechanical diffuse-interface model for electric breakdown

Abstract

In this work we derive diffuse-interface type model for electric breakdown evolution in solid dielectrics which accounts for non-isothermal and mechanical effects. The proposed model consists of mass, momentum and energy conservation equation, Maxwell's equations in quasi(electro)static approximation and Allen-Cahn type equation which describes phase-field evolution. The derivation of the model is based on the rational thermomechanics framework, M. Gurtin's microforce and microstress theory and Coleman-Noll procedure.

Key words and phrases: diffuse interface models, phase field, order parameter, thermomechnocs, Godunov-Romensky model, electric breakdown.

1 Введение

Электрический пробой твердых диэлектриков является комплексным процессом [Воробьев2003], анализ которого важен с точки зрения многочисленных приложений. С точки зрения математического моделирования значительную сложность построения эффективной математической модели и необходимых для ее анализа вычислительных алгоритмов представляет то, что канал пробоя является эффективно одномерным объектом, эволюционирующим в трехмерной области, занятой средой. Среди многообразия математических моделей, предложенных для описания динамики развития канала пробоя, особое место занимает предложенная в работе [Pitike2014] модель типа «диффузной границы».

Назначением моделей с диффузной границей, в широком смысле этого термина, является описание динамики каких-либо «включений» в однородной среде. В роли «включений» обычно выступают зоны однородности, соответствующие дисперсной фазе многофазной системы, в роли однородной среды — дисперсионная фаза. Распределение фаз в пространстве описывается так называемым фазовым полем или параметром порядка — определенной в пространстве гладкой функцией, значение которой практически постоянно в зонах однородности и быстро, но непрерывно, меняется в пределах разделяющего их слоя — «диффузной границы». Например, в задачах гидродинамики диффузная граница отделяет две несмешивающиеся жидкости. Диффузная граница имеет конечную толщину, которая определяется параметрами модели. Соответственно, модель имеет внутренние механизмы, обеспечивающие заданную толщину диффузной границы в ходе эволюции системы.

С прикладной точки зрения модели типа диффузной границы позволяют описать однородным по пространству и термодинамически согласованным способом динамику многофазных систем самой различной природы с прямым разрешением динамик межфазных границ.

В рассматриваемом классе математических моделей для описания развития канала электрического пробоя фазовое поле (или, что в рассматриваемом случае то же самое, поле параметра порядка) является скалярной функцией $\phi = \phi(\boldsymbol{x}, t)$, принимающей значения в интервале от 0 до 1. Каналом пробоя считается множество точек среды, в которых $\phi = 0$. Неповрежденной среде соответствует $\phi = 1$. Процесс образования («роста») канала пробоя описывается как эволюция функции ϕ во времени. Поврежденное и неповрежденное состояния среды рассматриваются как две фазы, для перехода между которыми необходимо затратить определенную энергию, величина которой является параметром модели.

Предложенная в работе [Pitike2014] модель построена как формальное, «механистическое» обобщение известных моделей типа диффузной границы для анализа распространения трещин в упругой среде, см. [Ambati2015]. Авторы работы не приводят термодинамически обоснованный вывод предложенной ими модели, а используют формальную аналогию между процессом распространения трещины и процессом распространения канала пробоя, см. обсуждение в [Зипунова2020]. Помимо этого, описанная в работе [Pitike2014] модель канала пробоя не является консервативной. Более того, температура среды и ее внутренняя энергия не входят в число параметров состояния модели.

Вместе с тем процесс развития канала пробоя существенно связан с преобразованием энергии электромагнитного поля в тепловую энергию вещества канала пробоя. Поэтому неконсервативность предложенной в [Pitike2014] модели является ее существенным недостатком и принципиально мешает ее практическому применению. Разработке модели, устраняющей этот недостаток, посвящены работы [Зипунова2021a, Zipunova2021c, Зипунова2022].

Тем не менее предложенная в предыдущих работах авторов модель не учитывает движение среды за счет возникающих при развитии канала пробоя внутренних напряжений. Вместе с тем в случае твердых диэлектриков электрический пробой является комплексным процессом, роль термомеханические эффектов в котором — существенная, а в ряде ситуаций — определяющая, см. [Воробьев2003]. Целью настоящей работы является построение такой модели.

Вывод модели выполнен в рамках рациональной термомеханики сплошной среды и основан на применении процедуры Колмана-Нолла [Coleman1963]. Последняя основана на использовании энтропийного неравенства для определения вида допустимых определяющих соотношений модели. Результирующая модель является самосогласованной и термодинамически корректной с точки зрения выполнения основных законов сохранения и энтропийного неравенства. Для учета фазового поля используется теория микросил и микронапряжений, предложенная в работах М. Гуртина (M. Gurtin). В настоящее время она является широко распространенным формализмом построения математических моделей типа диффузной границы. Основные идеи теории микросил и микронапряжений и примеры ее применения изложены, например, в работах [Fried1993, Gurtin1994, Gurtin1995, Gurtin1996, Gurtin2010]. Краткое описание основных положений дано в цитированных ниже работах авторов.

Настоящая работа логически продолжает серию работ авторов [Зипунова2020, Зипунова2021a, Zipunova2021b, Zipunova2021c, Зипунова2022], посвященных построению и анализу самосогласованной модели типа диффузной границы для описания динамики развития канала электрического пробоя.

Рассматриваемая в настоящей работе модель с технической точки зрения может быть рассмотрена как обобщение, путем дополнительного учета законов сохранения массы и импульса, предложенной в [Зипунова2021a] неизотермической модели, — либо как обобщение, путем учета самосогласованной эволюции фазового поля, классических моделей эдектрогидродинамики или термомеханики сплошной среды, см. [Можен1991].

В настоящей работе используется второй подход, который определяет следующую последовательность изложения. В разделе 2 приводятся основные обозначения, определения и соглашения, используемые далее в работе. В разделе 3 рассматривается система уравнений Максвелла в квази(электро)стационарном приближении в подвижной среде. В разделе 4 рассматривается связанная самосогласованная модель совместной эволюции электромагнитного поля в квази(электро)стационарном приближении и напряженно-деформированного состояния среды в эйлеровом описании. Изложение раздела в основном следует книге [Romano2010]. Наконец, в разделе 5 описан вывод «целевой» модели.

Предложенный вывод модели не проводит к наиболее общему ее варианту. Однако по крайне мере в ряде случаев он может быть сравнительно несложно обобщен на более общие ситуации. Во-первых, использование квази(электро)стационарной аппроксимации уравнений Максвелла не является принципиальным элементом работы — обобщение модели на случай полной системы уравнений Максвелла в среде является технической задачей. Во-вторых, используемая термомеханическая модель, описывающая движение и эволюцию напряженно-деформированного состояния среды, является простейшей гиперупругой моделью Годунова-Роменского [Годунов1998]. Использование более сложных моделей среды в рамках предложенного вывода настолько же трудоемко, насколько трудоемко построение обобщений оригинальной модели Годунова-Роменского. Построению таких обобщений посвящено множество работ.

Отметим также, что вывод уравнений модели и полного набора определяющих соотношений выполнен для случая гиперупругой среды (с полным тензором напряжений). Вместе с тем конечная форма уравнений приводится для частного случая среды с шаровым тензором напряжений, то есть жидкости. Использование той или иной модели — это вопрос задания уравнения состояния среды без учета электродинамических эффектов и фазового поля. Эта задача также является технической и здесь не рассматривается только в силу ее громоздкости и ограниченного объема публикации.

2 Основные обозначения

Векторы и тензоры будем обозначать (если специально не оговорено обратное) строчными и прописными символами в жирном начертании ($\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{B}$)

соответственно. Их компоненты в декартовой ортогональной системе координат $Ox_1x_2x_3$ с базисными векторами $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1}^3$ обозначаются как $[\boldsymbol{a}]_i = a_i$, $[\boldsymbol{B}]_{ij} = B_{ij}$. Для единичного тензора используется обозначение $\boldsymbol{I}$, $[\boldsymbol{I}]_{ij} = \delta_{ij}$, δ_{ij} — символ Кронекера.

При записи операций с тензорами и векторами в координатном виде используется соглашение о суммировании по повторяющимся индексам. Свертка тензора и вектора обозначается как $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{b}$ и всегда производится по внутреннему индексу: $[\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{b}]_i = A_{ij}b_j$, $[\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{B}]_i = a_jB_{ji}$. Свертка двух тензоров обозначается как $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} = A_{ij}B_{ij}$. Тензорное произведение двух векторов определяется как $[\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}]_{ij} = a_ib_j$. Компоненты векторного произведения двух векторов имеют вид $[\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}]_i = \epsilon_{ijk}a_jb_k$, где ϵ_{ijk} — компоненты тензора Леви-Чивиты,

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{если } ijk \text{ — четная перестановка индексов 123,} \\ -1, & \text{если } ijk \text{ — нечетная перестановка индексов 123,} \\ \ \ 0, & \text{если среди } ijk \text{ есть повторяющиеся индексы.} \end{cases}$$

Компоненты транспонированного тензора имеют вид: $[\boldsymbol{A}^T]_{ij} = A_{ji}$.

Оператор Гамильтона будем обозначать как ∇ и при необходимости рассматривать его как вектор с компонентами $\partial(\cdot)/\partial x_i$. Для векторов имеем $\nabla \cdot \boldsymbol{a} = \nabla_i a_i = \partial a_i/\partial x_i$, $\nabla \cdot \boldsymbol{a} \equiv \operatorname{div} \boldsymbol{a}$. Также будем использовать операцию $\nabla \boldsymbol{a} \equiv \nabla \otimes^{\mathrm{T}} \boldsymbol{a} := [\nabla \otimes \boldsymbol{a}]^{\mathrm{T}}$, определенную как $[\nabla \boldsymbol{a}]_{ij} \equiv [\nabla \otimes^{\mathrm{T}} \boldsymbol{a}]_{ij} = \nabla_j a_i = \partial a_i/\partial x_j$. Для тензоров имеем $[\nabla \cdot \boldsymbol{A}]_{ij} = \nabla_i A_{ij} = \partial A_{ij}/\partial x_i$, $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \operatorname{div} \boldsymbol{A}$.

Пусть $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ — заданное поле скорости в среде. В дальнейшем будем считать, что материальная частица движется вдоль интегральной линии дифференциального уравнения

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0.$$

В этом случае выражение для полной (субстанциональной, лагранжевой, материальной) временной производной имеет вид:

$$\dot{\overline{(\cdot)}} \equiv \frac{d}{dt}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial t}(\cdot) + \boldsymbol{u} \cdot \nabla(\cdot). \tag{1}$$

Это выражение для временной производной в системе отсчета, связанной с материальной (жидкой) частицей, движущейся со скоростью $\boldsymbol{u}$.

3 Электродинамика: квазистационарное приближение и системы отсчета

Описанная в последующих разделах модель использует квази(электро)-стационарную аппроксимацию процесса распространения электромагнитного поля. В настоящем разделе кратко рассмотрены основные уравнения квази-(электро)стационарного приближения и их следствия, необходимые для дальнейщего изложения. На обоснованности применения такой модели для описания процесса развития канала пробоя останавливаться не будем, отметим лишь, что по крайне мере для ряда содержательных постановок использование такого приближения корректно.

Известно три основных квазистационарных приближения полной системы уравнений Максвелла: квази(электро)стационарное, квази(магнито)стационарное и приближение Дарвина см. [Degond1992, Kruger2019, Larsson2007, LeBellac1973, Rapetti2014, Raviart1995, Raviart1996, Rousseaux2013, vanRienen2003]. Далее рассматривается квази(электро)стационарное приближении полной системы уравнений Максвелла в подвижной деформируемой среде.

3.1 Основные уравнения

Как известно, полная система уравнений Максвелла не обладает свойством галилеевской инвариантности (она является лоренц-инвариантной).

Тем не менее, можно показать, что система уравнений Максвелла в квази(электро)стационарном приближении *является* галилеевско инвариантной и может рассматриваться как один из «галилеевских пределов» классической системы уравнений Максвелла. Дальнейшее изложение в части обсуждения вопросов галилеевской инвариантности системы уравнений Максвелла следует [Montigny2006].

Пусть $\mathcal{D}$ — лабораторная система отсчета, относительно которой наблюдатель неподвижен, а среда движется. Символом $\mathcal{D}'$ обозначим систему отсчета, относительно которой неподвижен материальный элемент среды, которая движется со скорость $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$, где t — время, $\boldsymbol{x}$ — координата точки пространства в системе отсчета $\mathcal{D}$. Вообще говоря, система отсчета $\mathcal{D}'$ является «своей» для каждого элемента среды, связанного с точкой $\boldsymbol{x}$ в момент времени t (так как каждый элемент среды движется со своей скоростью), то есть $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\boldsymbol{x}, t)$. Такая система отсчета называется «собственной». Дальнейшие соотношения записываются для произвольного элемента среды и по этой причине различий между системами отсчета $\mathcal{D}'$ для каждой материальной частицы не делается.

Если не оговаривается обратное, то значение в системе отсчета $\mathcal{D}'$ какой-либо величины ϱ, заданной в системе отсчета $\mathcal{D}$, будем обозначать соответствующим символом со штрихом, то есть как ϱ'.

Для материальной частицы, расположенной в момент времени t в точке пространства $\boldsymbol{x}$ системы отсчета $\mathcal{D}$, скорость собственной системы отсчета $\mathcal{D}'$ относительно системы отсчета $\mathcal{D}$ равняется $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$. Преобразование времени, пространственных координат и скоростей при переходе от системы отсчета $\mathcal{D}$ к системе отсчета $\mathcal{D}'$ описывается соотношениями:

$$t' = t, \quad \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{u}t, \quad \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{v}'$ — скорости в системах отсчета $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$ соответственно. Отсюда видно, что если в лабораторной системе отсчета скорость $\boldsymbol{v}$ движения материальной частицы совпадает со скоростью $\boldsymbol{u}$ движения среды, то частица неподвижна относительно системы отсчета $\mathcal{D}'$.

Из (2) следует, что для дифференциальных операторов справедливо:

$$\nabla' = \nabla, \quad \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla. \tag{3}$$

Последнее соотношение в (3) определяет временну́ю производную в системе отсчета $\mathcal{D}'$. Она вычисляется для фиксированного элемента среды и является, таким образом, полной (субстанциональной, материальной, лагранжевой) производной по времени, совпадающей с (1). В дальнейшем обозначения в (3) и (1) будем отождествлять, то есть:

$$\dot{\overline{(\cdot)}} \equiv \frac{d}{dt}(\cdot) \equiv \frac{\partial}{\partial t'}(\cdot).$$

Помимо этого, в дальнейшем нам понадобится тождество

$$\nabla \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b} \cdot \nabla)\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a} \cdot \nabla) \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}(\nabla \cdot \boldsymbol{b}) - \boldsymbol{b}(\nabla \cdot \boldsymbol{a}), \tag{4}$$

откуда следует, что для временной производной векторного поля $\boldsymbol{a}'$, заданного в системе отсчета $\mathcal{D}'$, справедливо:

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}'}{\partial t'} = \frac{\partial \boldsymbol{a}'}{\partial t} + \boldsymbol{u}(\nabla \cdot \boldsymbol{a}') - \nabla \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{a}'). \tag{5}$$

Пусть далее $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$,... являются значениями полей в лабораторной системе отсчета $\mathcal{D}$. Значения этих же величин в системе отсчета $\mathcal{D}'$ будем обозначать символом «$(\cdot)'$», например, $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{D}'$, $\boldsymbol{B}'$,.... Можно показать, что значения полей в системе отсчета $\mathcal{D}'$ и $\mathcal{D}$ связаны соотношениями:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}' &= \boldsymbol{E}, \\ \boldsymbol{D}' &= \boldsymbol{D}, \\ \boldsymbol{H}' &= \boldsymbol{H} - \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{D}, \\ \boldsymbol{j}' &= \boldsymbol{j} - \rho_{\mathrm{E}}\boldsymbol{u}, \\ \rho'_{\mathrm{E}} &= \rho_{\mathrm{E}}. \end{aligned} \tag{6}$$

Квази(электро)стационарная система уравнений Максвелла в неподвижной среде (то есть в системе отсчета $\mathcal{D}'$) при использовании подходящей системы единиц имеет вид [Larsson2007]:

$$\nabla' \cdot \boldsymbol{D}' = \rho'_{\mathrm{E}}, \tag{7a}$$

$$\nabla' \times \boldsymbol{E}' = 0, \tag{7b}$$

$$\nabla' \times \boldsymbol{H}' = \boldsymbol{j}' + \frac{\partial \boldsymbol{D}'}{\partial t'}, \tag{7c}$$

$$\frac{\partial \rho'_{\mathrm{E}}}{\partial t'} + \nabla' \cdot \boldsymbol{j}' = 0. \tag{7d}$$

В системе уравнений (7) $\boldsymbol{H}'$ — вектор напряженности магнитного поля; $\boldsymbol{E}'$ — вектор напряженности электрического поля; $\boldsymbol{D}'$ — вектор электрической индукции; ρ'_{E} — объемная плотность электрического заряда; $\boldsymbol{j}'$ — вектор плотности электрического тока (вектор плотности потока электрического заряда).

Последнее уравнение (7d) выражает закон сохранения электрического заряда и является следствием первых трех уравнений (7a)-(7c) системы уравнений (7).

Применяя приведенные выше соотношения (3) и (5), связывающие производные в системах отсчета $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$, получим:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D}' = \rho'_{\mathrm{E}}, \tag{8a}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}' = 0, \tag{8b}$$

$$\nabla \times (\boldsymbol{H}' + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{D}') = (\boldsymbol{j}' + \rho'_{\mathrm{E}}\boldsymbol{u}) + \frac{\partial \boldsymbol{D}'}{\partial t}, \tag{8c}$$

$$\frac{\partial \rho'_{\mathrm{E}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{j}' + \rho'_{\mathrm{E}}\boldsymbol{u}) = 0. \tag{8d}$$

Отсюда, с учетом правил (6) преобразования полей, следует, что:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_{\mathrm{E}}, \tag{9a}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0, \tag{9b}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \tag{9c}$$

$$\frac{\partial \rho_{\mathrm{E}}}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0, \tag{9d}$$

где как поля, так и пространственные и временные производные заданы в лабораторной системе отсчета $\mathcal{D}$.

Таким образом, рассматриваемый вариант квази(электро)стационарного приближения уравнений Максвелла в самом деле обладает свойством галилевской форм-инвариантности.

Одна из причин, по который поля в системах отсчета $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$ должны четко различаться — это вопрос построения определяющих соотношений, которые замыкают систему (7) или (9). Так, например, понятно, что определяющее соотношение для плотности электрического тока проводимости (выражаемое законом Ома, устанавливающим, в простейшем случае, пропорциональность тока и напряженности электрического поля) должно быть записано в системе отсчета, относительно которой среда *неподвижна* — то есть в собственной системе отсчета $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\boldsymbol{x}, t)$ элемента среды. То же касается корректной формулировки выражения для энергии поля и других галилеевско-инвариантных величин.

Это принципиально важно для использования в дальнейшем термодинамически обоснованных подходов, в частности основанных на применении процедуры Колмана-Нолла.

3.2 Постановка «потенциал»/«плотность заряда»

В силу того, что в рассматриваемой модели вектор напряженности электрического поля является безвихревым, см. уравнение (9b), она допускает введение потенциала Φ электрического поля так, что

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi.$$

В этом случае уравнение (9a) может быть записано в виде

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho_{\mathrm{E}}, \quad \boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{E}, \ldots) = \boldsymbol{D}(\nabla\Phi, \ldots).$$

В случае линейной связи вида $\boldsymbol{D} = \epsilon\boldsymbol{E}$ между напряженностью $\boldsymbol{E}$ электрического поля и вектором электрической индукции $\boldsymbol{D}$, где ϵ — диэлектрическая проницаемость, имеем

$$\nabla\cdot(-\epsilon\nabla\Phi) = \rho_{\mathrm{E}}.$$

Таким образом, следствием системы уравнений (8) является следующая система уравнений относительно электрического потенциала Φ и плотности заряда ρ_{E}:

$$\nabla\cdot(-\epsilon\nabla\Phi) = \rho_{\mathrm{E}}, \quad \frac{\partial\rho_{\mathrm{E}}}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{j} = 0, \tag{10}$$

где заданный в лабораторной системе отсчета вектор плотности потока электрического заряда определен в соответствии с (6). Величина $\boldsymbol{j}'$, определенная в собственной системе отсчета $\mathcal{D}'$, задается определяющим соотношением $\boldsymbol{j}' = \boldsymbol{j}'(\boldsymbol{E}')$, выражающим, например, закон Ома.

3.3 Уравнение баланса энергии и энтропийное неравенство

Постулируем уравнение баланса внутренней энергии системы для уравнений электродинамики (7) в виде (см. [Romano2010], а также [Coleman1971a, Coleman1971b]) в *собственной системе отсчета* $\mathcal{D}'$ в виде:

$$\dot{e} + \nabla \cdot (\boldsymbol{E}' \times \boldsymbol{H}' + \boldsymbol{q}) = -\boldsymbol{j}' \cdot \boldsymbol{E}' + r, \tag{11}$$

где e — внутренняя энергия единицы объема среды, $\boldsymbol{q}$ — вектор плотности теплового потока, r — объемная плотность внешних источников энергии. Вектор $\boldsymbol{E}' \times \boldsymbol{H}'$ (вектор Умова-Пойнтинга) описывает плотность потока энергии электромагнитного поля. Величины без штрихов являются галилеевски инвариантными, их значения в системах отсчета $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$ совпадают.

В случае, если $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{E}$ связаны линейно, уравнение (11) при $r = 0$ является следствием системы уравнений (9). В случае, если такой связи нет, уравнение (11) — постулируется.

С учетом тождества

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} \cdot \nabla \times \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \cdot \nabla \times \boldsymbol{b}$$

и уравнений (9) уравнение (11) может быть приведено к виду

$$\dot{e} = \boldsymbol{E}' \cdot \dot{\boldsymbol{D}}' + \boldsymbol{j}' \cdot \boldsymbol{E}' - \nabla \cdot \boldsymbol{q} + r. \tag{12}$$

Далее определяющие соотношения для системы (9), выражающие, в классическом случае, зависимость $\boldsymbol{D}'$, $\boldsymbol{B}'$, $\boldsymbol{j}'$ от $\boldsymbol{E}'$ и $\boldsymbol{H}'$, могут быть получены применением процедуры Колмана-Нолла, как это описано в [Romano2010, раздел 7.2],

Аналогично постулируем выполнение энтропийного неравенства в форме

$$\dot{\eta} \geqslant -\nabla \cdot \frac{\boldsymbol{q}}{\theta} + \frac{r}{\theta}, \tag{13}$$

где η — энтропия единицы объема среда, θ — температура.

4 Электрогидродинамика

Цель настоящего раздела — представить последовательный термодинамически обоснованный вывод уравнений электрогидродинамики, то есть математической модели, описывающей самосогласованным образом движение деформируемой среды в присутствии электрического поля.

Приведенные ниже в настоящем разделе формулировки и вывод хорошо известны, см., например, [Romano2010, Можен1991]. Тем не менее он изложен с высокой степенью детальности с целью пояснения основных моментов вывода уравнений модели методами рациональной термомеханики. Помимо этого, последовательность шагов вывода и ряд его промежуточных результатов существенно используется в разделе 5 при выводе модели типа диффузной границы для описания динамики развития канала пробоя с учетом термомеханических эффектов.

4.1 Основные уравнения и законы сохранения в дифференциальной форме

Система уравнений модели включает в себя группу уравнений Максвелла в квази(электро)стационарном приближении (см. раздел 3) и группу уравнений термомеханики, рассмотренную ниже. При остуствии электрического поля термомеханическая часть модели повторяет гиперупругую модель Годунова-Роменского (см. [Годунов1998]) и допускает сходные обобщения в части учета, например, вязкоупругих и пластических эффектов.

Система уравнений гидродинамики включает в себя уравнения законов сохранения массы, импульса и энергии. Для дальнейшего изложения, в частности, применения процедуры Колмана-Нолла, они должны быть записаны в лагранжевой форме. В этих уравнениях все пространственные производные определены в эйлеровых переменных. Производные по времени вычисляются при фиксированных лагранжевых координатах — то есть являются субстанциональными.

Система законов сохранения модели имеет вид:

$$\dot{\rho} = -\rho \operatorname{div} \boldsymbol{u}, \tag{14a}$$

$$\rho \dot{\boldsymbol{u}} = \operatorname{div} \boldsymbol{T} + \rho \boldsymbol{f}, \tag{14b}$$

$$\rho \dot{E} = \operatorname{div}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_{\mathrm{E}} - \boldsymbol{q}) + \rho \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{u} + \rho r. \tag{14c}$$

В уравнениях выше ρ — (массовая) плотность среды; $\boldsymbol{u}$ — скорость; $\boldsymbol{T}$ — действующий в среде тензор напряжений; $\boldsymbol{f}$ — массовая плотность внешних сил; $E = e + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^2$ — массовая плотность полной энергия среды, e — массовая плотность внутренней энергии; $\boldsymbol{q}$ — вектор плотности потока тепла; $\boldsymbol{a}$ — вектор плотности потока энергии, связанный с работой внутренних напряжений,

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{u}; \tag{15}$$

$\boldsymbol{a}_{\mathrm{E}}$ — вектор плотности потока энергии, связанный с электромагнитным полем в среде,

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{E}} = \boldsymbol{E}' \times \boldsymbol{H}'; \tag{16}$$

r — массовая плотность внешних источников энергии.

Энтропийное неравенство постулириуется в виде:

$$\rho\dot{\eta} + \operatorname{div}\left(\frac{\boldsymbol{q}}{\theta}\right) - \frac{\rho r}{\theta} \geqslant 0, \tag{17}$$

где η — энтропия, θ — термодинамическая температура.

Отметим, что в уравнениях выше внутренняя энергия не представляется в виде суммы «тепловой энергии» и «энергии электромагнитного поля». Аналогично, тензор напряжений $\boldsymbol{T}$ является полным тензором напряжений, который учитывает как «термомеханические», так и пондеромоторные внутренние силы электродинамической природы, действующие в среде.

Уравнения (14) должны быть дополнены уравнением совместности деформации и скорости, которое имеет вид:

$$\nabla\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{F}^{-1})^T \cdot \dot{\boldsymbol{F}}, \tag{18}$$

где $\boldsymbol{F}$ — тензор градиента деформации. Это уравнение имеет геометрический смысл (то есть не связано с «физикой» процесса движения среды) и в настоящей работе рассматривается как определяющее соотношение для $\boldsymbol{F}$ при известном поле скорости движения среды $\boldsymbol{u}$ и подходящем начальном условии при $t = 0$, см. [Годунов1998, Кондауров2002].

Приведенные выше уравнения могут описывать движение как жидкости (то есть среды с шаровым тензором напряжений), так и деформируемого твердого тела (то есть среды с полным тензором напряжений). В обоих случаях уравнение (14a) является следствием уравнения (18). Отметим, что в первом случае шаровой тензор напряжений в среде определяется давлением, которое зависит только от плотности среды (или от удельного объема; но не от полного тензора градиента деформации).

В этом случае уравнение (18) может не включаться в полную систему уравнений, а уравнение(14a) — рассматриваться как первичное.

Далее будет рассмотрен общий случай гиперупругой среды (это означает, что существует функция плотности энергии деформации, которая определяет связь тензора деформации и тензора напряжений). Определяющие соотношения для среды с шаровым тензором напряжений будут получены как частный случай общей модели. Конечная форма определяющих соотношений, во избежание громоздких выкладок, будет приведена для этого частного случая.

Как уже отмечалось, уравнения (14) должны быть дополнены системой уравнений Максвелла в квази(электро)стационарном приближении (9).

4.2 Диссипативное неравенство для свободной энергии

Получим уравнение баланса внутренней энергии. Для этого умножим уравнение (14b) на $\boldsymbol{u}$, откуда:

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^2\right) = \rho\boldsymbol{u}\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \boldsymbol{u}\cdot\operatorname{div}\boldsymbol{T} + \rho\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{f}.$$

Подставим результат в уравнение энергии (14c) с учетом тождества

$$\rho\frac{dE}{dt} = \rho\left[\frac{de}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^2\right)\right] \equiv \rho\left(\frac{de}{dt} + \boldsymbol{u}\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\right),$$

и в результате получим:

$$\rho\dot{e} + \boldsymbol{u}\cdot\operatorname{div}\boldsymbol{T} = \operatorname{div}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_{\mathrm{E}}) - \operatorname{div}\boldsymbol{q} + \rho r, \tag{19}$$

или, с учетом (15):

$$\rho\dot{e} = \boldsymbol{T} : \nabla\boldsymbol{u} - \nabla\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{E}} - \nabla\cdot\boldsymbol{q} + \rho r. \tag{20}$$

Следующим шагом в выводе модели является переход к диссипативному неравенству для свободной энергии Гельмгольца. Для этого нужно сначала определить ее.

Традиционно переход от внутренней энергии e к свободной энергии ψ осуществляется с помощью преобразования Лежандра по паре параметров (η,θ), см. [Alberty2001, Rosensweig1989]. В этом случае для $e = e(\eta, \boldsymbol{D}', \ldots)$ имеем

$$\tilde{\psi} = \tilde{\psi}(\theta, \boldsymbol{D}', \ldots), \quad \tilde{\psi} = e - \eta\theta.$$

Однако для задач электродинамики более удобно определить свободную энергию Гелмьгольца путем преобразования Лежандра по двум парам переменных (η,θ) и $(\boldsymbol{D}', \boldsymbol{E}')$. В этом случае для $e = e(\eta, \boldsymbol{D}', \ldots)$ имеем $\psi = \hat{\psi}(\theta, \boldsymbol{E}', \ldots)$,

$$\psi = e - \theta\eta - \frac{1}{\rho}\boldsymbol{E}'\cdot\boldsymbol{D}', \tag{21}$$

см. [Rosensweig1989, раздел 13.6]. Далее будем использовать последний способ.

Отметим, что термодинамические потенциалы e и ψ зависят от значений электромагнитных полей в собственной системе отсчета $\mathcal{D}'$ элемента среды.

Вычисляя полную производную по времени обеих частей (21) и умножая результат на ρ, получим:

$$\rho\dot{\psi} = \rho\dot{e} - \rho\eta\dot{\theta} - \rho\theta\dot{\eta} - \rho\overline{\left(\frac{1}{\rho}\boldsymbol{E}'\cdot\boldsymbol{D}'\right)}^{\boldsymbol{\cdot}}.$$

Отсюда, воспользовавшись энтропийным неравенством (17) и балансовым уравнением для внутренней энергии (19), получим неравенство для свободной энергии Гельмгольца:

$$\rho\dot{\psi} \leqslant -\rho\eta\dot{\theta} + \boldsymbol{T} : \nabla\boldsymbol{u} - \nabla \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{E}} - \frac{\boldsymbol{q}}{\theta} \cdot \nabla\theta - \rho\overline{\left(\frac{1}{\rho}\boldsymbol{E}' \cdot \boldsymbol{D}'\right)}^{\,\cdot}. \tag{22}$$

Рассмотрим выражение (16), определяющее вектор плотности потока энергии поля. С учетом (4),(6) и (7b) имеем:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{E}} = \nabla \cdot (\boldsymbol{E}' \times \boldsymbol{H}') = \boldsymbol{H}' \cdot \nabla \times \boldsymbol{E}' - \boldsymbol{E}' \cdot \nabla \times \boldsymbol{H}' = -\boldsymbol{E}' \cdot \nabla \times \boldsymbol{H}' \\ = -\boldsymbol{E} \cdot \nabla \times (\boldsymbol{H} - \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{D}) = -\boldsymbol{E} \cdot \nabla \times \boldsymbol{H} + \boldsymbol{E} \cdot \nabla \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{D}).\end{aligned}$$

Выражая первое слагаемое с учетом (8c), получим:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{E}} = -\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j} - \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{E} \cdot \nabla \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{D}). \tag{23}$$

Далее, для второго слагаемого в (23) имеем:

$$\begin{aligned}-\boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} &= -\boldsymbol{E} \cdot \left[\dot{\boldsymbol{D}} - (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{D}\right] = -\boldsymbol{E} \cdot \dot{\boldsymbol{D}} + \boldsymbol{E} \cdot (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{D} \\ &= -\frac{d}{dt}\left(\rho\frac{\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D}}{\rho}\right) + \boldsymbol{E} \cdot (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{D} + \boldsymbol{D} \cdot \dot{\boldsymbol{E}} \\ &= -\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D}}{\rho}\right) + \boldsymbol{E} \cdot (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{D} + \boldsymbol{D} \cdot \dot{\boldsymbol{E}} - \frac{\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D}}{\rho}\dot{\rho} \\ &= -\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D}}{\rho}\right) + \boldsymbol{E} \cdot (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{D} + \boldsymbol{D} \cdot \dot{\boldsymbol{E}} + (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D})\nabla \cdot \boldsymbol{u}. \end{aligned} \tag{24}$$

Для третьего слагаемого в (23) справедливо:

$$\boldsymbol{E} \cdot \nabla \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{D}) = \boldsymbol{E} \cdot \left[\boldsymbol{u}\nabla \cdot \boldsymbol{D} - \boldsymbol{D}\nabla \cdot \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{D} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{D}\right]. \tag{25}$$

Подставляя (24) и (23) в (23), с учетом (9a) и (6) приходим к:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{E}} &= -\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j} - \rho\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D}}{\rho}\right) + \boldsymbol{D} \cdot \dot{\boldsymbol{E}} + \boldsymbol{D} \otimes \boldsymbol{E} : \nabla\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{E}\nabla \cdot \boldsymbol{D} \\ &= -\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j} - \rho\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D}}{\rho}\right) + \boldsymbol{D} \cdot \dot{\boldsymbol{E}} + \boldsymbol{D} \otimes \boldsymbol{E} : \nabla\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{E}\rho_{\mathrm{E}} \\ &= -\boldsymbol{E} \cdot (\boldsymbol{j} - \rho_{\mathrm{E}}\boldsymbol{u}) - \rho\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D}}{\rho}\right) + \boldsymbol{D} \cdot \dot{\boldsymbol{E}} + \boldsymbol{D} \otimes \boldsymbol{E} : \nabla\boldsymbol{u} \\ &= -\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j}' - \rho\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D}}{\rho}\right) + \boldsymbol{D} \cdot \dot{\boldsymbol{E}} + \boldsymbol{D} \otimes \boldsymbol{E} : \nabla\boldsymbol{u}.\end{aligned} \tag{26}$$

Обратим внимание, что в последнее выражение входят только те связанные с электромагнитным полем величины, которые определены в собственной системе отсчета $\mathcal{D}'$ (это — $\boldsymbol{j}'$), либо принимают значения, одинаковые в лабораторной и собственной системах отсчета (это — $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}'$ и $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}'$).

Наконец, подставляя (26) в (22), получим необходимое для применения процедуры Колмана-Нолла диссипативное неравенство для свободной энергии:

$$\rho\dot{\psi} \leqslant -\rho\eta\dot{\theta} + (\boldsymbol{T} - \boldsymbol{D}\otimes\boldsymbol{E}) : \nabla\boldsymbol{u} + \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}' - \boldsymbol{D}\cdot\dot{\boldsymbol{E}} - \frac{\boldsymbol{q}}{\theta}\cdot\nabla\theta. \tag{27}$$

4.3 Процедура Колмана-Нолла

В настоящем разделе полученное выше неравенство для свободной энергии будет использовано для определения вида определяющих соотношений модели. Указанная процедура называется процедурой Колмана–Нолла [Coleman1963]. Она основана на той идее, что, как только определен факт наличия функциональных связей между параметрами, описывающими течение, неравенство для свободной энергии можно рассматривать не как ограничение на термодинамический процесс, а как ограничение на реологические и другие определяющие соотношения, определяющие, помимо основных уравнений законов сохранения, модель процесса.

Другими словами, неравенство для свободной энергии используется не для того, чтобы «отобрать» допустимые с точки зрения термодинамики процессы, а для того, чтобы «отобрать» такие определяющие соотношения, которые сделают допустимым любой процесс, описываемый с их помощью.

Будем считать, что множество первичных параметров состояния модели задано как $\chi = \{\boldsymbol{F}, \boldsymbol{E}, \theta, \boldsymbol{g}\}$, где $\boldsymbol{g} \equiv \nabla\theta$, так что, в силу принципа равноприсутствия, имеем $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\chi)$, для $\mathcal{A} = \psi, \eta, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{j}'$. Отсюда

$$\dot{\psi} = \sum_{\alpha\in\chi} \frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\dot{\alpha}.$$

Подставляя последнее выражение в (27) и приводя подобные слагаемые, с учетом (18) получим:

$$-\frac{\boldsymbol{q}}{\theta}\cdot\nabla\theta + \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}' - \left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{E}} + \boldsymbol{D}\right)\cdot\dot{\boldsymbol{E}} - \rho\left(\eta + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)\dot{\theta} \\ + \left[(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{D}\otimes\boldsymbol{E})\left(\boldsymbol{F}^{-1}\right)^T - \rho\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{F}}\right] : \dot{\boldsymbol{F}} - \rho\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{g}}\cdot\dot{\boldsymbol{g}} \geqslant 0.$$

Это неравенство будет выполняться в том (частном) случае, если

- положить $\partial\psi/\partial\boldsymbol{g} = 0$, тогда $\psi = \psi(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{E}, \theta)$;

- определить вектор плотности электрического тока как $\boldsymbol{j}' = \boldsymbol{K_j} \cdot \boldsymbol{E}' \equiv \boldsymbol{K_j} \cdot \boldsymbol{E}$, где $\boldsymbol{K_j}$ — положительно определенный тензор коэффициентов электропроводности второго ранга. Это соотношение выражает закон Ома в простейшем виде в собственной системе отсчета элемента среды;

- определить энтропию как $\eta = -\partial\psi/\partial\theta$;

- определить тензор напряжений как

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{D} \otimes \boldsymbol{E} + \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{F}^T; \tag{28}$$

- определить вектор плотности теплового потока как $\boldsymbol{q} = -\boldsymbol{K} \cdot \nabla\theta$, где $\boldsymbol{K}$ — симметричный положительно определенный тензор коэффициентов теплопроводности второго ранга;

- определить вектор индукции электрического поля как

$$\boldsymbol{D} = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{E}}. \tag{29}$$

В таком виде значения полей заданы, как только задана зависимость свободной энергии ψ от множества ее параметров χ.

В том случае, если рассматриваемая среда является жидкостью, процедура Колмана-Нолла проводится аналогично — достаточно считать, что вместо градиента деформации $\boldsymbol{F}$ свободная энергия зависит от плотности ρ и использовать закон сохранения массы (14а) вместо уравнения для градиента деформации (18).

Дальнейшее уточнение определяющих соотношений модели связано с заданием конкретного вида свободной энергии и использует ряд дополнительных допущений. Эти вопросы рассмотрены в следующем разделе.

4.4 Определяющие соотношения

В настоящем разделе уточняется вид ранее полученных определяющих соотношений. Для этого необходимо конкретизировать вид свободной энергии системы

$$\psi = \psi(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{E}, \theta). \tag{30}$$

«Гиперупругость» → «жидкость». Прежде всего отметим, что использовать в качестве меры деформации тензора градиента деформации $\boldsymbol{F}$ (см. уравнение (18)) как аргумента уравнения состояния не слишком удобно. Градиент деформации несет в себе полную локальную информацию о деформации среды, однако он, например, отличен от нуля для поворотов среды как твердого тела. По этой причине в качестве меры деформации обычно используют тот или иной тензор деформации, например, правый и левый тензор деформаций Коши-Грина $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F}^T$ или тензор Фингера (метрический тензор деформации) $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{C}^{-1}$.

Свободная энергия системы является скалярной функцией тензорного аргумента. Для того чтобы ее значения не зависели от системы координат, в которой вычисляются значения компонент тензора градиента деформации или тензора деформации, она должна зависеть только от инвариантов своего тензорного аргумента (тензора градиента деформации или используемого тензора деформации), то есть от величин

$$\mathcal{I}_1 = \operatorname{tr} \boldsymbol{A}, \quad \mathcal{I}_2 = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}^2 \boldsymbol{A} - \operatorname{tr} \boldsymbol{A}^2\right), \quad \mathcal{I}_3 = \det \boldsymbol{A},$$

где $\boldsymbol{A}$ — соответствующий тензорный аргумент свободной энергии.

В силу того, что нас интересуют прежде всего анализ влияния сил электромагнитной природы, в дальнейшем будем считать, что «механические» (то есть возникающие при отсутствии электрического поля) напряжения сводятся к давлению. Это означает, что тензор напряжений является шаровым, а свободная энергия зависит только от третьего инварианта тензора градиента деформации

$$\mathcal{I}_3 = \det \boldsymbol{F} = \frac{\rho_0}{\rho}, \tag{31}$$

где ρ — плотность элемента среды в актуальной конфигурации, ρ_0 — плотность этого же элемента среды в отсчетной конфигурации. Таким образом, далее рассматривается случай:

$$\psi = \psi^{+}(\boldsymbol{F}, \ldots) = \psi^{\times}(\det \boldsymbol{F}, \ldots) = \psi^{\dagger}(\rho, \ldots). \tag{32}$$

Более полный случай гиперупругого материала может быть получен совершенно аналогично рассмотрению ниже на основе общих определяющих соотношений, приведенных в предыдущем разделе. Примеры уравнений состояния для гиперупругих моделей приведены, например, в [Melly2021, Zafar2021, Bien-aimé2020, Guo2006].

Для случая (32) имеем:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{F}} = \frac{\partial \psi}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial \boldsymbol{F}}. \tag{33}$$

Для второго множителя с учетом (31) справедливо

$$\frac{\partial \rho}{\partial \boldsymbol{F}} = -\frac{\rho}{(\det \boldsymbol{F})^2}\frac{\partial \det \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{F}} = -\frac{\rho}{(\det \boldsymbol{F})^2} J \boldsymbol{F}^{-T} = -\rho \boldsymbol{F}^{-T}, \tag{34}$$

где также было использовано соотношение (см. [Кондауров2002])

$$\frac{\partial \det \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{F}} = J \boldsymbol{F}^{-T}, \quad J = |\det \boldsymbol{F}|.$$

В результате, из (28),(33) и (34) получим:

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{D} \otimes \boldsymbol{E} - \rho^2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \boldsymbol{I}, \tag{35}$$

где I — единичный тензор и

$$\psi = \psi(\rho, \boldsymbol{E}, \theta) \tag{36}$$

вместо (30).

Декомпозиция свободной энергии. Далее будем считать, что свободную энергию можно представить в виде:

$$\psi = \psi(\rho, \boldsymbol{E}, \theta) = \psi_{\mathrm{hd}}(\rho, \theta) + \psi_{\mathrm{E}}(\rho, \theta, \boldsymbol{E}), \tag{37}$$

где слагаемое ψ_{hd} соответствует чисто «гидродинамической» части свободной энергии, то есть той, которая отлична от нуля при отсутствии электрического поля; слагаемое ψ_{E} — связано с наличием электрического поля. Другими словами,$\psi(\rho, \theta, \boldsymbol{E} = 0) = \psi_{\mathrm{hd}}(\rho, \theta)$, $\psi_{\mathrm{E}}(\rho, \theta, \boldsymbol{E} = 0) = 0$.

Гидродинамическая часть. Рассмотрим гидродинамическую часть свободной энергии $\psi_{\mathrm{hd}} = \psi_{\mathrm{hd}}(\rho, \theta)$. Эта свободная энергия не зависит от электрического поля и, таким образом, определяется (или определяет) обычное уравнение состояния жидкости, как в классических задачах гидродинамики.

Для завершенности изложения положим, что жидкость является идеальным совершенным газом. В этом случае ее свободная внутренняя энергия в своих естественных переменных ($v = 1/\rho$ — удельный объем, η — энтропия) определяется как

$$e_{\mathrm{hd}}(v, \eta) = e_0 \left(\frac{v}{v_0}\right)^{\gamma - 1} \cdot \exp \frac{\eta - \eta_0}{c_v},$$

где v_0, η_0, e_0 — «опорные» значения соответствующих параметров, $e_0 = e_{\mathrm{hd}}(v_0, \eta_0)$; $c_v = \mathrm{const} > 0$ и $\gamma = \mathrm{const} > 1$ — параметры (теплоемкость при постоянном объеме и показатель адиабаты, соответственно).

С использованием преобразования Лежандра следуют выражения для свободной энергии Гельмгольца, которое имеет вид (см. [Зипунова2021a, Zipunova2021c]):

$$\psi_{\mathrm{hd}} = \psi_{\mathrm{hd}}(\rho, \theta) = \psi_0 \frac{\theta}{\theta_0} - c_v \theta \ln \left[\frac{\theta}{\theta_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{(\gamma - 1)}\right].$$

Отсюда можно получить выражение для давления и энтропии:

$$p_{\mathrm{hd}} = -\rho^2 \frac{\partial \psi_{\mathrm{hd}}}{\partial \rho} = (\gamma - 1) c_v \theta \rho, \quad \eta_{\mathrm{hd}} = -\frac{\partial \psi_{\mathrm{hd}}}{\partial \theta} = \eta_0 + c_v \ln \left[\frac{e_{\mathrm{hd}}}{e_0} \left(\frac{v_0}{v} \right)^{(\gamma-1)} \right].$$

Как следствие указанных определений, справедливы следующие привычные соотношения:

$$e_{\mathrm{hd}} = c_v \theta, \quad p_{\mathrm{hd}} = (\gamma - 1)\rho e_{\mathrm{hd}}, \quad p_{\mathrm{hd}} v = R\theta, \; R = (\gamma - 1) c_v,$$

где $v = 1/\rho$ — удельный объем, p_{hd} — термодинамическое давление.

Внутренняя энергия системы с учетом электрического поля имеет вид:

$$e = e_{\mathrm{hd}} + e_{\mathrm{E}}, \quad e_{\mathrm{E}} = \frac{1}{2\rho} \boldsymbol{E}^{\boldsymbol{2}}.$$

Электродинамическая часть. Рассмотрим теперь часть свободной энергии $\psi_{\mathrm{E}} = \psi_{\mathrm{E}}(\rho, \theta, \boldsymbol{E})$, связанную с наличием в среде электрического поля.

Будем рассматривать простейший случай, когда вектора индукции и напряженности электрического поля связаны линейно. В этом случае положим

$$\psi_{\mathrm{E}}(\rho, \theta, \boldsymbol{E}) = -\frac{1}{2\rho} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{E}} \cdot \boldsymbol{E},$$

где $\boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{E}} = \boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{E}}(\rho, \theta)$ — симметричный тензор коэффициентов диэлектрической проницаемости второго ранга. Отсюда, с учетом (29), имеем

$$\boldsymbol{D} = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{E}} = -\rho \frac{\partial \psi_{\mathrm{E}}}{\partial \boldsymbol{E}} = \boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{E}} \cdot \boldsymbol{E}.$$

В простейшем случае изотропной среды имеем $\boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{E}} = \epsilon_{\mathrm{E}} \boldsymbol{I}$, где $\epsilon_{\mathrm{E}} = \epsilon_{\mathrm{E}}(\rho, \theta)$ — коэффициент диэлектрической проницаемости. Тогда:

$$\psi_{\mathrm{E}}(\rho, \theta, \boldsymbol{E}) = -\frac{1}{2\rho} \epsilon_{\mathrm{E}} \boldsymbol{E}^2, \quad \boldsymbol{D} = \epsilon_{\mathrm{E}} \boldsymbol{E}.$$

Тензор напряжений. После того, как частные аддитивные части свободной энергии определены, появляется возможность конкретизировать вид тензора напряжений, действующего в среде. Непосредственным использованием определения (28) с учетом (35) и сделанных допущений, приходим к:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T} = \boldsymbol{D} \otimes \boldsymbol{E} - \rho^2 \frac{\partial \psi_{\mathrm{hd}}}{\partial \rho} \boldsymbol{I} - \rho^2 \frac{\partial \psi_{\mathrm{E}}}{\partial \rho} \boldsymbol{I} = \\ = -\rho^2 \frac{\partial \psi_{\mathrm{hd}}}{\partial \rho} \boldsymbol{I} + \left[\left(\frac{1}{2} \rho \epsilon'_{\mathrm{E},\rho} \boldsymbol{E}^2 - \frac{1}{2} \boldsymbol{E}^2 \right) \boldsymbol{I} + \epsilon_{\mathrm{E}} \boldsymbol{E} \otimes \boldsymbol{E} \right], \end{aligned} \tag{38}$$

где $(\cdot)'_{,\rho}$ — производная по ρ.

Последнее выражение запишем в виде:

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}_{\mathrm{hd}} + \boldsymbol{T}_{\mathrm{E}}, \tag{39a}$$

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{hd}} = p_{\mathrm{hd}}\boldsymbol{I}, \quad p_{\mathrm{hd}} = -\rho^2 \frac{\partial \psi_{\mathrm{hd}}}{\partial \rho}\boldsymbol{I}, \tag{39b}$$

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{E}} = -\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{E}^2 - p_{\mathrm{str}}\right)\boldsymbol{I} + \epsilon_{\mathrm{E}}\boldsymbol{E}\otimes\boldsymbol{E}, \quad p_{\mathrm{str}} = \frac{1}{2}\rho\epsilon'_{\mathrm{E},\rho}\boldsymbol{E}^2. \tag{39c}$$

Здесь $\boldsymbol{T}_{\mathrm{hd}}$ — «гидродинамический» шаровой тензор напряжений, p_{hd} — «гидродинамическое» давление, $\boldsymbol{T}_{\mathrm{E}}$ — «электродинамический» тензор напряжений, который действует в среде только при наличии электрического поля, p_{str} — так называемое электрострикционное (или просто стрикционное) давление. Оно отлично от нуля только в том случае, если диэлектрическая проницаемость среды зависит от ее плотности.

В виде (39) выражение для тензора напряжений приводится, например, в работе [Жакин2012], см. также [Можен1991].

4.5 Полная система уравнений модели

Полная система уравнений модели, как уже отмечалось, включает в себя уравнения механики (14) и уравнение Максвелла в квази(электро)стационарном приближении, записанные в форме (10). Первичными переменными модели являются ρ – плотность, $\boldsymbol{u}$ — скорость движения среды, θ — температура, Φ — электрический потенциал и ρ_{E} — плотность электрического заряда. Все остальные параметры модели, входящие в уравнения (14) и (10) могут быть определены с использованием приведенных в предыдущих разделах определяющих соотношений и заданного уравнения состояния в форме (30) или эквивалентной ему.

5 Электрогидродинамика с фазовым полем

Цель настоящего раздела — представить термодинамически обоснованный вывод уравнений модели типа диффузной границы для описания динамики развития канала пробоя. По существу, построенная модель является «слиянием» модели эдектрогидродинамики, рассмотренной в предыдущем разделе, и модели фазового поля, предложенной в работе [Зипунова2021a], которая учитывает закон сохранения энергии, но не учитывает движение среды, см. также [Zipunova2021c].

Вывод модели в настоящем разделе с технической точки зрения существенно опирается на вывод электрогидродинамической модели предыдущего раздела 4. Поэтому все основные уравнения и соотношения в настоящем разделе формулируются явно (даже если они повторяют уравнения предыдущего раздела в точности) — однако при описании части выкладок делается отсылка к предыдущему разделу 4. Это же касается комментариев, поясняющих конкретные шаги вывода, которые в основном не повторяются.

Как и ранее, вывод модели фазового поля выполнен с применением теории микросил и микронапряжений, см. [Fried1993, Gurtin1994, Gurtin1995, Gurtin1996, Gurtin2010]. Краткое описание ее основных положений дано в работах [Зипунова2021a, Zipunova2021c].

Система уравнений электрогидродинамики включает в себя (а) группу уравнений Максвелла в квази(электро)стационарном приближении (см. раздел 3); (б) группу уравнений термомеханики и (в) уравнение типа Аллена-Кана, описывающего эволюцию фазового поля.

При остуствии электрического поля и фазового поля термомеханическая часть модели повторяет гиперупругую модель Годунова-Роменского [Годунов1998] и допускает сходные обобщения в части учета, например, вязкоупругих и пластических эффектов. Связанная модель электрогидродинамики, включающая группы уравнений (а) и (б), была рассмотрена в разделе 4. При отсутствии движения среды рассматриваемая ниже модель сводится к рассмотренной в [Зипунова2021a, Зипунова2022].

5.1 Основные уравнения и законы сохранения в дифференциальной форме

Система основных уравнений включает следующие группы уравнений.

Система законов сохранения термомеханики. Система уравнений термомеханики включает в себя уравнения законов сохранения массы, импульса и энергии. Для дальнейшего изложения, в частности, применения процедуры Колмана-Нолла, они должны быть записаны в лагранжевой форме. В этих уравнениях все пространственные производные определены в эйлеровых переменных. Производные по времени вычисляются при фиксированных лагранжевых координатах — то есть являются субстанциональными.

Система законов сохранения имеет вид:

$$\dot{\rho} = -\rho \operatorname{div} \boldsymbol{u}, \tag{40a}$$

$$\rho \dot{\boldsymbol{u}} = \operatorname{div} \boldsymbol{T} + \rho \boldsymbol{f}, \tag{40b}$$

$$\rho \dot{E} = \operatorname{div}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_{\mathrm{E}} - \boldsymbol{q}) + \rho \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{ph}} + \rho r. \tag{40c}$$

В уравнениях выше ρ — плотность среды; $\boldsymbol{u}$ — скорость; $\boldsymbol{T}$ — действующий в среде симметричный тензор напряжений; $\boldsymbol{f}$ — массовая плотность внешних сил; $E = e + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^2$ — полная энергия элемента среды, e — массовая плотность внутренней энергии, $\boldsymbol{q}$ — вектор плотности потока тепла, $\boldsymbol{a}$ — вектор плотности потока энергии, связанный с работой внутренних напряжений;

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{u}; \tag{41}$$

$\boldsymbol{a}_\mathrm{E}$ — вектор плотности потока энергии, связанный с электромагнитным полем в среде,

$$\boldsymbol{a}_\mathrm{E} = \boldsymbol{E}' \times \boldsymbol{H}'; \tag{42}$$

r — массовая плотность внешних источников энергии.

Таким образом, все основные уравнения, равно как и входящие в них величины, определены полностью аналогично (14), за исключением члена

$$\boldsymbol{a}_\mathrm{ph} = \operatorname{div}(\dot{\phi}\boldsymbol{\xi}) + \dot{\phi}\gamma, \tag{43}$$

входящего в закон сохранения энергии (40c).

В соотношении (43) ϕ — фазовое поле, $\boldsymbol{\xi}$ — поле внутренних микронапряжений, γ — поле внешних микросил, π — поле внутренних микросил. Непосредственно величина $\boldsymbol{a}_\mathrm{ph}$ представляет собой выражение для работы микросил и микронапряжений, действующих в системе и определяющих эволюцию фазового поля как кинематической переменной. Вид выражения для $\boldsymbol{a}_\mathrm{ph}$ постулируется, см. работы [Fried1993, Gurtin1994, Gurtin1995, Gurtin1996, Gurtin2010].

Уравнение баланса микросил и микронапряжений. Уравнение баланса микросил и микронапряжений в дифференциальной форме имеет вид:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\xi} + \pi + \gamma = 0. \tag{44}$$

Вид этого соотношения также постулируется общей теорией микросил и микронапряжений, см. ссылки выше.

Энтропийное неравенство. Энтропийное неравенство постулириуется в виде:

$$\rho\dot{\eta} + \operatorname{div}\left(\frac{\boldsymbol{q}}{\theta}\right) - \frac{\rho r}{\theta} \geqslant 0, \tag{45}$$

где η — энтропия, θ — термодинамическая температура.

Система уравнений Максвелла в квази(электро)стационарном приближении. Группа уравнений Максвелла в квази(электро)стационарном приближении имеет вид (9).

Определяющее соотношение для градиента деформации среды. В качестве определяющего соотношения для градиента деформации среды используется уравнение совместности деформации и скорости, которое имеет вид:

$$\nabla \boldsymbol{u} = (\boldsymbol{F}^{-1})^T \cdot \dot{\boldsymbol{F}}. \tag{46}$$

Как и ранее, в общем случае закон сохранения массы (40a) является следствием уравнения (46).

5.2 Диссипативное неравенство для свободной энергии

Получим уравнение баланса внутренней энергии, действуя полностью аналогично разделу 4.2. В рассматриваемом случае оно будет иметь вид

$$\rho\dot{e} = \boldsymbol{T} : \nabla \boldsymbol{u} - \nabla \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{E}} - \nabla \cdot \boldsymbol{q} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{ph}} + \rho r, \tag{47}$$

отличаясь от (47) только наличием члена $\boldsymbol{a}_{\mathrm{ph}}$, определяющего работу микросил и микронапряжений.

Подставляя (43) в (47) с учетом (44), получим из (47):

$$\rho\dot{e} = \boldsymbol{T} : \nabla \boldsymbol{u} - \nabla \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{E}} - \nabla \cdot \boldsymbol{q} + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla\dot{\phi} - \dot{\phi}\pi + \rho r. \tag{48}$$

Следующим шагом в выводе модели является переход к диссипативному неравенству для свободной энергии Гельмгольца. Для этого нужно сначала определить ее. Снова повторяя шаги раздела 4.2, получим:

$$\psi = \hat{\psi}(\theta, \boldsymbol{E}', \ldots), \quad \psi = e - \theta\eta - \frac{1}{\rho}\boldsymbol{E}' \cdot \boldsymbol{D}'. \tag{49}$$

Вычисляя полную производную по времени обеих частей (49) и умножая результат на ρ, получим:

$$\rho\dot{\psi} = \rho\dot{e} - \rho\eta\dot{\theta} - \rho\theta\dot{\eta} - \rho\overline{\left(\frac{1}{\rho}\boldsymbol{E}' \cdot \boldsymbol{D}'\right)}^{\boldsymbol{\cdot}}.$$

Отсюда, воспользовавшись энтропийным неравенством (45) и уравнением баланса внутренней энергии (48), придем к следующему неравенству для свободной энергии Гельмгольца:

$$\rho\dot{\psi} \leqslant -\rho\eta\dot{\theta} + \boldsymbol{T} : \nabla \boldsymbol{u} - \nabla \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{E}} + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla\dot{\phi} - \dot{\phi}\pi - \frac{\boldsymbol{q}}{\theta} \cdot \nabla\theta - \rho\overline{\left(\frac{1}{\rho}\boldsymbol{E}' \cdot \boldsymbol{D}'\right)}^{\boldsymbol{\cdot}}. \tag{50}$$

Заметим, что, в отличие от аналогичного уравнения (22), в уравнение (50) входят члены, зависящие от микросил и микронапряжений, действующих в среде.

Используя полученное ранее выражение (26) для члена (42), из (50) получим окончательный вид диссипативного неравенства для свободной энергии:

$$\rho\dot{\psi} \leqslant -\rho\eta\dot{\theta} + (\boldsymbol{T} - \boldsymbol{D}\otimes\boldsymbol{E}) : \nabla\boldsymbol{u} + \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}' - \boldsymbol{D}\cdot\dot{\boldsymbol{E}} - \frac{\boldsymbol{q}}{\theta}\cdot\nabla\theta + \boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\dot{\phi} - \dot{\phi}\pi, \quad (51)$$

необходимое для применения процедуры Колмана-Нолла.

5.3 Процедура Колмана-Нолла

Будем считать, что множество первичных переменных модели, определяющих состояние среды, задано как $\chi = \{\boldsymbol{F}, \boldsymbol{E}, \theta, \boldsymbol{g}, \phi, \boldsymbol{p}, h\}$, где $\boldsymbol{g} \equiv \nabla\theta$, $\boldsymbol{p} \equiv \nabla\phi$, $h \equiv \dot{\phi}$. Отсюда, в силу принципа равноприсутствия, имеем $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\chi)$ для $\mathcal{A} = \psi, \eta, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{j}'$. Отсюда

$$\dot{\psi} = \sum_{\alpha\in\chi} \frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\dot{\alpha}.$$

Подставляя последнее выражение в (27) и приводя подобные слагаемые, с учетом (46) получим:

$$\begin{aligned}
&-\frac{\boldsymbol{q}}{\theta}\cdot\nabla\theta + \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}' - \left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{E}} + \boldsymbol{D}\right)\cdot\dot{\boldsymbol{E}} - \rho\left(\eta + \frac{\psi}{\theta}\right)\dot{\theta} \\
&\qquad + \left[(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{D}\otimes\boldsymbol{E})\left(\boldsymbol{F}^{-1}\right)^T - \rho\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{F}}\right] : \dot{\boldsymbol{F}} - \rho\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{g}}\cdot\dot{\boldsymbol{g}} \\
&\qquad\qquad + \left(\boldsymbol{\xi} - \rho\frac{\partial\psi}{\partial\nabla\phi}\right)\cdot\nabla\dot{\phi} + \left(-\pi - \rho\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\right)\dot{\phi} - \rho\frac{\partial\psi}{\partial\dot{\phi}}\ddot{\phi} \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Это неравенство будет выполняться в том (частном) случае, если

- положить $\partial\psi/\partial\boldsymbol{g} = 0$ и $\partial\psi/\partial h = 0$, тогда $\psi = \psi(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{E}, \theta, \phi, \boldsymbol{p})$;
- определить вектор плотности электрического тока как $\boldsymbol{j}' = \boldsymbol{K_j}\cdot\boldsymbol{E}' \equiv \boldsymbol{K_j}\cdot\boldsymbol{E}$, где $\boldsymbol{K_j}$ — положительно определенный тензор коэффициентов электропроводности второго ранга. Далее будем считать $\boldsymbol{K_j} = \boldsymbol{K_j}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{E}, \theta, \phi)$. Это соотношение выражает закон Ома в простейшем виде в собственной системе отсчета элемента среды;
- определить энтропию как $\eta = -\partial\psi/\partial\theta$;

- определить тензор напряжений как

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{D} \otimes \boldsymbol{E} + \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{F}^T; \tag{52}$$

- определить вектор плотности теплового потока как $\boldsymbol{q} = -\boldsymbol{K} \cdot \nabla\theta$, где $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{E}, \theta, \phi)$ — симметричный положительно определенный тензор коэффициентов теплопроводности второго ранга;

- определить вектор индукции электрического поля как

$$\boldsymbol{D} = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{E}}; \tag{53}$$

- определить вектор поля внутренних микронапряжений как

$$\boldsymbol{\xi} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \nabla\phi}; \tag{54}$$

- определить поле внутренних микросил как

$$\pi = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \phi} - \beta\dot{\phi}. \tag{55}$$

Теперь получим уравнение для эволюции параметра порядка как следствие уравнения баланса микросил и микронапряжений. Для этого подставим (54) и (55) в (44) и запишем результат в виде:

$$\beta\dot{\phi} = \nabla \cdot \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \nabla\phi}\right) - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \phi} + \gamma. \tag{56}$$

Это уравнение является уравнением типа Аллена-Кана, описывающего эволюция фазового поля ϕ.

Как и ранее, приведенные определяющие соотношения позволяют определить все нужные поля, описывающие состояние среды, как только задана зависимость свободной энергии ψ от множества ее параметров χ.

5.4 Определяющие соотношения

В настоящем разделе уточняется вид ранее полученных определяющих соотношений. Для этого необходимо конкретизировать вид свободной энергии системы

$$\psi = \psi(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{E}, \theta, \phi, \boldsymbol{p}). \tag{57}$$

«Гиперупругость» $\to$ «жидкость». Аналогично предыдущему разделу 4.4 будем считать, что

$$\psi = \psi(\rho, \boldsymbol{E}, \theta, \phi, \boldsymbol{p}) \tag{58}$$

вместо (57). Другими словами, рассматриваемая среда является жидкостью, то есть изменение внутренней энергии элемента среды зависит только от изменения его объема, но не формы. Тем не менее, заметим еще раз (см. раздел 4.4 и (32)), что (58) является частным случаем (57). Поэтому далее будем рассматривать оба выражения (57) и (58), если это не вызывает неоднозначности в трактовке.

Из последнего уравнения следует, что

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{D} \otimes \boldsymbol{E} - \rho^2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \boldsymbol{I}, \tag{59}$$

что полностью аналогично (35).

Декомпозиция свободной энергии. Далее будем считать, что свободную энергию можно представить в виде:

$$\psi = \psi(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{E}, \theta, \phi, \boldsymbol{p}) = \psi_{\mathrm{hd}}(\boldsymbol{F}, \theta, \phi) + \psi_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{F}, \theta, \phi, \boldsymbol{E}) + \psi_{\mathrm{ph}}(\boldsymbol{F}, \theta, \phi, \boldsymbol{p}), \tag{60}$$

где слагаемое ψ_{hd} соответствуем чисто «гидродинамической» части свободной энергии, то есть той, которая отлична от нуля при отсутствии электрического поля и при нулевом градиенте фазового поля; слагаемое ψ_{E} — связано с наличием электрического поля; слагаемое ψ_{ph} — отвечает за слабонелокальную (градиентную) аддитивную часть свободной энергии, связанную с наличием в среде фазового поля.

Гидродинамическая часть. Конкретизация вида «гидродинамической» части свободной энергии полностью повторяет соответствующую часть раздела 4.4. Как следствие, остаются справедливыми все соотношения соответствующего раздела.

Единственным отличием, специфичным для моделей типа диффузной границы, является то, что теперь «гидродинамическая» часть свободной энергии зависит от значения параметра порядка ϕ. Построение выражения для свободной энергии в таком случае может быть сделано несколькими способами, которые чаще всего основаны либо на интерполяции между значениями, соответствующими предельным случаям $\phi = 0, 1$ термодинамических свойств среды (теплоемкости, сжимаемости и так далее), либо на интерполяции непосредственно значений свободной энергии. Более полно вопрос построения уравнения состояния в таком случае рассмотрен в работе [Зипунова2021a].

Электродинамическая часть. Конкретизация «электромагнитной» части свободной энергии снова повторяет соответствующие построения раздела 4.4.

Далее для простоты будем считать, что $\boldsymbol{D}$ — аффинная функция $\boldsymbol{E}$ при фиксированных $\boldsymbol{F}$, θ и ϕ:

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{F},\theta,\boldsymbol{E},\phi) = -\rho\frac{\partial\psi_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{F},\theta,\phi,\boldsymbol{E})}{\partial\boldsymbol{E}}\cdot\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{F},\theta,\phi)\cdot\boldsymbol{E} + \boldsymbol{D}_0(\boldsymbol{F},\theta,\phi),$$

и, как следствие,

$$\psi_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{F},\theta,\phi,\boldsymbol{E}) = -\boldsymbol{E}\cdot\frac{1}{2\rho}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{F},\theta,\phi)\cdot\boldsymbol{E} - \frac{1}{\rho}\boldsymbol{D}_0(\boldsymbol{F},\theta,\phi)\cdot\boldsymbol{E} + \psi_{00}(\boldsymbol{F},\theta,\phi).$$

В простейшем случае изотропной среды имеем $\boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{E}} = \epsilon_{\mathrm{E}}\boldsymbol{I}$, где $\epsilon_{\mathrm{E}} = \epsilon_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{F},\theta,\phi)$ — коэффициент диэлектрической проницаемости. Также, для простоты, предположим, что $\boldsymbol{D}_0 = 0$, $\psi_{00} = 0$. В этом случае имеем:

$$\psi_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{F},\theta,\phi,\boldsymbol{E}) = -\frac{1}{2\rho}\epsilon_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{F},\theta,\phi)\boldsymbol{E}^2, \quad \boldsymbol{D} = \epsilon_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{F},\theta,\phi)\boldsymbol{E}. \tag{61}$$

Электрофизические свойства среды, зависящие от параметра порядка, могут быть получены интерполяций их предельных значений при $\phi = 0, 1$, см. [Зипунова2021a, Zipunova2021c].

Слабонелокальная часть. Аналогично работам [Зипунова2021a, Zipunova2021c] примем следующий вид зависимости свободной энергии ψ_{ph}:

$$\psi_{\mathrm{ph}}(\boldsymbol{F},\theta,\phi,\boldsymbol{p}) = \frac{\Gamma}{2}\frac{1-f(\phi)}{l^2} + \frac{1}{2\rho}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{F},\theta,\phi)\cdot\boldsymbol{p} + \frac{1}{2(k+1)\rho}\lambda_k(\boldsymbol{F},\theta,\phi)\left\|\boldsymbol{p}\right\|^{2(k+1)}. \tag{62}$$

Первое слагаемое в (62) специфично для моделей диффузной границы трещин в упругой среде и модели электрического пробоя. Входящий в него параметр $\Gamma = \mathrm{const}$ определяет количество энергии, необходимой для образования единицы длины канала пробоя, см. [Pitike2014]. Функция $f(\phi)$ — это так называемая «интерполирующая функция» («функция деградации») [Sargado2018], которая интерполирует между значениями $\phi = 0$ и $\phi = 1$. В работе [Pitike2014] она выбрана как $f(\phi) = 4\phi^3 - 3\phi^4$. Необходимость использования такой функции типична для моделей типа диффузной границы [Sargado2018].

Общие свойства, которым обычно удовлетворяет функция деградации, могут быть определены как [Sargado2018]: (а) $f'(s) \geqslant 0$, $s \in (0,1)$; (б)

$f(0) = 0$; (в) $f(1) = 1$; (г) $f'(0) = 0$ (д) $f'(1) \geqslant 0$. Свойство (а) гарантирует монотонную зависимость свойств от значений параметра порядка; (б) и (в) обеспечивают корректное задание свойств в предельных случаях $\phi = 0, 1$; (г) — гарантирует положительность ϕ в ходе эволюции; (д) — контролирует «степень (не)устойчивости» полностью неповрежденной среды к внешнему воздействию и, таким образом, отвечает за скорость образования канала пробоя в полностью неповрежденной среде.

Второе слагаемое в (62) определяет градиентную часть свободной энергии, и, совместно с первым, обеспечивает конечный эффективный радиус $\sim l$ диффузного «канала пробоя».

Третье слагаемое в (62) необходимо для обеспечения математической корректности постановки задачи, см. [Зипунова2020, Zipunova2021b].

Далее для простоты будем считать, что коэффициенты $\boldsymbol{\Lambda}$ и λ_k не зависят от ϕ, то есть $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{F}, \theta)$, $\lambda_k = \lambda_k(\boldsymbol{F}, \theta)$.

Конкретизация вида «диффузной» части свободной энергии позволяет конкретизировать вид выражений для микросил и микронапряжений. Сделанные допущения эквивалентны тому, что $\boldsymbol{\xi}$ и π являются линейной комбинацией величин $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}\,\|\boldsymbol{p}\|^{2k}$ и h при фиксированных $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{E}$, θ и ϕ, то есть:

$$\pi(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{E}, \theta, \phi, h) = \rho\frac{\Gamma}{2}\frac{f'(\phi)}{l^2} - \rho\frac{\partial\psi_{\mathrm{hd}}(\boldsymbol{F}, \theta, \phi)}{\partial\phi} - \rho\frac{\partial\psi_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{F}, \theta, \phi, \boldsymbol{E})}{\partial\phi} - \beta h, \quad (63a)$$

$$\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{F}, \theta, \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{F}, \theta, \phi) \cdot \boldsymbol{p} + \lambda_k(\boldsymbol{F}, \theta, \phi)\boldsymbol{p}\,\|\boldsymbol{p}\|^{2k}. \quad (63b)$$

Это условие отличается от использованного в [Fried1993] условия аффинности зависимости микросил и микронапряжений от $\boldsymbol{p}$, которое эквивалентно квадратичной зависимости ψ от $\boldsymbol{p}$ — указанное допущение здесь не может быть сделано в силу полиномиальной зависимости ψ от $\boldsymbol{p}$, см. (62).

Тензор напряжений. С учетом (60), запишем (59), в виде:

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}_{\mathrm{hd}} + \boldsymbol{T}_{\mathrm{E}} + \boldsymbol{T}_{\mathrm{ph}}, \quad (64)$$

где «гидродинамический» шаровой тензор напряжений

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{hd}} = -\rho^2\frac{\partial\psi_{\mathrm{hd}}}{\partial\rho}\boldsymbol{I};$$

тензор напряжений, связанный с наличием в среде электрического поля

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{E}} = \boldsymbol{D} \otimes \boldsymbol{E} - \rho^2\frac{\partial\psi_{\mathrm{E}}}{\partial\rho}\boldsymbol{I};$$

тензор напряжений, связанный с изменением состояния (фазы) среды

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{ph}} = -\rho^2 \frac{\partial \psi_{\mathrm{ph}}}{\partial \rho} \boldsymbol{I}.$$

В соответствии с (62) и (61), имеем:

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{hd}} = -p_{\mathrm{hd}} \boldsymbol{I}, \quad p_{\mathrm{hd}} = \rho^2 \frac{\partial \psi_{\mathrm{hd}}}{\partial \rho} \boldsymbol{I}, \tag{65a}$$

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{E}} = -\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{E}^2 - p_{\mathrm{str}}\right)\boldsymbol{I} + \epsilon_{\mathrm{E}} \boldsymbol{E} \otimes \boldsymbol{E}, \quad p_{\mathrm{str}} = \frac{1}{2}\rho \epsilon'_{\mathrm{E},\rho} \boldsymbol{E}^2, \tag{65b}$$

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{ph}} = -\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{p} \cdot \left(\rho \boldsymbol{\Lambda}'_{\rho} - \boldsymbol{\Lambda}\right) \cdot \boldsymbol{p} + \frac{1}{2(k+1)}\left(\rho \lambda'_{k,\rho} - \lambda_k\right) \|\boldsymbol{p}\|^{2(k+1)}\right] \boldsymbol{I}. \tag{65c}$$

Здесь p_{hd} — «гидродинамическое» давление, p_{str} — так называемое электрострикционное (или просто стрикционное) давление. Оно отлично от нуля только в том случае, если диэлектрическая проницаемость среды зависит от ее плотности.

Параметры Λ и λ_k отвечают за геометрический профиль «диффузного» канала пробоя, см.[Зипунова2020, Zipunova2021b]). Далее будем считать, что $\boldsymbol{\Lambda} = \lambda \boldsymbol{I} = \mathrm{const}$, $\lambda_k = \mathrm{const}$. В этом случае из (65c) имеем:

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{ph}} = -\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{p} \cdot (-\boldsymbol{\Lambda}) \cdot \boldsymbol{p} + \frac{1}{2(k+1)}(-\lambda_k) \|\boldsymbol{p}\|^{2(k+1)}\right] \boldsymbol{I}.$$

Отметим, что, в отличие от ранее рассмотренного случая, сейчас тензоры напряжений $\boldsymbol{T}_{\mathrm{hd,E}}$ неявно зависят от фазового поля ϕ — поскольку от него зависят электрофизические и механические свойства среды.

Баланс микросил и микронапряжений. С учетом сделанных допущений на вид свободной энергии (60), конкретизации слабонелокальной части свободной энергии (62) и полученных выражений для микросил и микронапряжений (63) уравнение (56) принимает вид:

$$\beta \dot{\phi} = \nabla \cdot \left(\boldsymbol{\Lambda} \cdot \boldsymbol{p} + \lambda_k \boldsymbol{p} \|\boldsymbol{p}\|^{2k}\right) + \rho \frac{\Gamma}{2} \frac{f'(\phi)}{l^2} - \rho \frac{\partial \psi_{\mathrm{hd}}}{\partial \phi} - \rho \frac{\partial \psi_{\mathrm{E}}}{\partial \phi} + \gamma. \tag{66}$$

Дополнительно учитывая вид (61) электродинамической части свободной энергии, получим из (66):

$$\beta \dot{\phi} = \nabla \cdot \left(\boldsymbol{\Lambda} \cdot \boldsymbol{p} + \lambda_k \boldsymbol{p} \|\boldsymbol{p}\|^{2k}\right) + \rho \frac{\Gamma}{2} \frac{f'(\phi)}{l^2} - \rho \frac{\partial \psi_{\mathrm{hd}}}{\partial \phi} - \frac{1}{2} \frac{\partial \epsilon_{\mathrm{E}}}{\partial \phi} \boldsymbol{E}^2 + \gamma. \tag{67}$$

Вид этого уравнения полностью аналогичен его виду для случая недеформируемой среды, рассмотренного в [Зипунова2021a, Зипунова2022], — за исключением третьего слагаемого в правой части, связанного с изменением энергии среды за счет изменения «гидродинамической» части свободной энергии при изменении фазового поля. Такое слагаемое типично для моделей развития поврeждаемости: при заданном напряженно-деформированном состоянии среды изменение фазового поля может приводить, например, к изменению упругих свойств среды — в результате энергия элемента среды изменяется.

5.5 Интерполяция свойств

Наконец, необходимо задать зависимость электрофизических (диэлектрическая проницаемость и электропроводность) и теплофизических (коэффициент теплопроводности) свойств среды. Это можно сделать интерполяцией соответствующей величины между ее значениями, соответствующими $\phi =$ и $\phi = 1$.

А именно, будем считать, что $a = a(\theta, \phi)$, где a — одна из указанных величин, определена как $a = a(\theta, \phi) = a_{\mathrm{d}}(\theta)\tilde{f}(\phi) + a_{\mathrm{br}}(\theta)(1 - \tilde{f}(\phi))$, где f — подходящая интерполирующая функция. В простейшем случае можно принять $a_{\mathrm{d,br}}(\theta) = \mathrm{const}$.

5.6 Полная система уравнений модели

Полная система уравнений модели включает в себя уравнения механики (40), уравнение Максвелла в квази(электро)стационарном приближении, записанные в форме (10) и уравнение типа Аллена-Кана (66) или (67), описывающее эволюцию параметра порядка (фазового поля) ϕ. Первичными переменными модели являются ρ – плотность, $\boldsymbol{u}$ — скорость движения среды, θ — температура, Φ — электрический потенциал и ρ_{E} — плотность электрического заряда — и параметр порядка ϕ. Все остальные параметры модели, входящие в уравнения (40) и (10), могут быть определены с использованием приведенных в предыдущих разделах определяющих соотношений и заданного уравнения состояния в форме (30) или эквивалентной ему.

Список литературы

[Воробьев2003] Воробьев Г.А., Похолков Ю.П., Королев Ю.Д., Меркулов В.И. Физика диэлектриков (область сильных полей): Учебное пособие. – 2-е изд. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2011. - 245 с.

[Годунов1998] Годунов С.К., Роменский Е.И. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения: Учеб. пособие для вузов. - Новосибирск: Научная книга, 1998. - 267 с. - (Университетская серия; т. 4).

[Жакин2012] Жакин, А. И. Электрогидродинамика // УФН, 2012, том 182, номер 5, 495–520 https://doi.org/10.3367/UFNr.0182.201205b.0495

[Зипунова2020] Зипунова Е.В., Савенков Е.Б. О моделях диффузной границы для описания динамики объектов высшей коразмерности // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 122. 34 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2020-122 https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-122

[Зипунова2021a] Зипунова Е.В., Савенков Е.Б. Неизотермическая консервативная модель динамики развития канала электрического пробоя типа «диффузной границы» // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. № 19. 34 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2021-19 https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-19

[Зипунова2022] Зипунова Е.В., Кулешов А.А., Савенков Е. Б. Неизотермическая модель канала электрического пробоя типа диффузной границы // Сиб. журн. индустр. матем., 25:1 (2022), 39–53. https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2022.25.103

[Кондауров2002] Кондауров В.И., Фортов В.Е. Основы термомеханики конденсированной среды. - М.: Изд-во МФТИ, 2002. - 336 с.

[Можен1991] Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред. Механика электромагнитных сплошных сред. - М.: Мир, 1991. - 560 с.

[Alberty2001] Alberty, A.R. Use of Legendre transforms in chemical thermodynamics // Pure Appl. Chem., Vol. 73, No. 8, pp. 1349–1380, 2001. https://doi.org/10.1351/pac200173081349

[Ambati2015] Ambati, M., Gerasimov, T., De Lorenzis, L. A review on phase-field models of brittle fracture and a new fast hybrid formulation // Computational Mechanics, vol. 55, pp. 383–405. 2015. https://doi.org/10.1007/s00466-014-1109-y

[Bien-aimé2020] Bien-aimé, L.K.M., Blaise, B.B., Beda, T. Characterization of hyperelastic deformation behavior of rubber-like materials // SN Appl. Sci. 2, 648 (2020). https://doi.org/10.1007/s42452-020-2355-6

[Coleman1963] Coleman, B.D., Noll, W. The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity // Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1963, No. 1, pp. 167-178, vol. 13. https://doi.org/10.1007/BF01262690

[Coleman1971a] Coleman, B.D., Dill, E.H. Thermodynamic restrictions on the constitutive equations of electromagnetic theory // Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP) 22, 691–702 (1971). https://doi.org/10.1007/BF01587765

[Coleman1971b] Coleman, B.D., Dill, E.H., On the thermodynamics of electromagnetic fields in materials with fading memory // Arch. Rat. Mech. Anal., 41, 132, 1971.

[Degond1992] Degond, P., Raviart, P.-A. An analysis of the Darwin model of approximation to Maxwel's equations // Forum Mathematicum, 4 (1992), pp. 13-44. https://doi.org/10.1515/form.1992.4.13

[Fried1993] Fried, E., Gurtin, M.E. Continuum theory of thermally induced phase transitions based on an order parameter // Physica D 68 (1993) 326-343. https://doi.org/10.1016/0167-2789(93)90128-N

[Guo2006] Guo L.Z., Sluys, J. Application of a new constitutive model for the description of rubber-like materials under monotonic loading // International Journal of Solids and Structures Volume 43, Issue 9, May 2006, Pages 2799-2819 https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.06.026

[Gurtin1994] Gurtin M.E. Generalized Ginzburg-Landau And Cahn-Hilliard Equations Based On A Microforce Balance // U.S. Army Research Office, Research Report No. 94-NA-020, June 1994. https://doi.org/10.1016/0167-2789(95)00173-5

[Gurtin1995] Gurtin M.E., Polignone D., Vinals J. Two-phase binary fluids and immiscible fluids described by an order parameter // Carnegie Mellon University, Report 95-NA-001, 1995.

[Gurtin1996] Gurtin M.E. Generalized Ginzburg-Landau and Cahn-Hilliard equations based on a microforce balance // Phisica D: Nonlinear Phenomena. 1996. V. 92, N. 3-4. P. 178-192. https://doi.org/10.1016/0167-2789(95)00173-5

[Gurtin2010] Gurtin, M.E., Fried, E., Anand, L. The mechanics and thermodynamics of continua. Cambridge University Press. 2010.

[Kruger2019] Kruger, S.E. The Three Quasi-Static Limits of the Maxwell Equations // arXiv:1909.11264v2 [physics.class-ph] 2 Oct 2019.

[Larsson2007] Larsson, J. Electromagnetics from a quasistatic perspective // Am. J. Phys. 75(3), March 2007. https://doi.org/10.1119/1.2397095

[LeBellac1973] Le Bellac, M., Lévy-Leblond Galilean Electromagnetism // Il Nuovo Cimento, vol. 14B, N.2, 1973. pp. 217–234. https://doi.org/10.1007/BF02895715

[Melly2021] Melly, SK, Liu, L, Liu, Y, Leng, J. A review on material models for isotropic hyperelasticity // Int J Mech Syst Dyn. 2021; 1: 71- 88. https://doi.org/10.1002/msd2.12013

[Montigny2006] Montigny, M. de, Rousseaux, G. On the electrodynamics of moving bodies at low velocities // European Journal of Physics, European Physical Society, 2006, 27 (4), p. 755-768. https://doi.org/10.1088/0143-0807/27/4/007

[Pitike2014] Pitike, K.C., Hong, W. Phase-field model for dielectric breakdown in solids // Journal of Applied Physics 115, 044101 (2014) https://doi.org/10.1063/1.4862929

[Rapetti2014] Rapetti, F., Rousseaux, G. On quasi-static models hidden in Maxwell's equations // Applied Numerical Mathematics 79 (2014) 92–106. https://doi.org/10.1016/j.apnum.2012.11.007

[Raviart1995] Raviart, P.-A., Sonnendrücker, E. Approximate models for the Maxwell equations // Journal of Computational and Applied Mathematics 63 (1995) 69-81. https://doi.org/10.1016/0377-0427(95)00058-5

[Raviart1996] Raviart, P.-A., Sonnendrücker, E. A hierarchy of approximate models for the Maxwell equations // Numer. Math. 73: pp. 329–372 (1996). https://doi.org/10.1007/s002110050196

[Romano2010] Romano, A., Marasco, A. Continuum Mechanics. Advanced Topics and Research Trends. Birkhäuser Boston, Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology. XII+248 pp. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4870-1

[Rosensweig1989] Rosensweig, R.E. Thermodynamics of electromagnetism // Chap. 13 in: Astarita, G. Thermodynamics. An Advanced Textbook for

Chemical Engineers. Springer, Boston, MA. 1989. https://doi.org/10.1007/978-1-4899-0771-4_14

[Rousseaux2013] Rousseaux, G. Forty years of Galilean Electromagnetism (1973–2013) // Eur. Phys. J. Plus (2013) 128: 81. https://doi.org/10.1140/epjp/i2013-13081-5

[Sargado2018] Sargado, J.M., Keilegavlen, E., Berre, I., Nordbotten, J.M. High-accuracy phase-field models for brittle fracture based on a new family of degradation functions // Journal of the Mechanics and Physics of Solids 111 (2018) 458–489. https://doi.org/10.1016/j.jmps.2017.10.015

[vanRienen2003] van Rienen, U., Flehr, J., Schreiber, U., Motrescu, V. Modeling and Simulation of Electro-Quasistatic Fields // International Series of Numerical Mathematics, Vol. 146, 17-31, 2003. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8065-7_2

[Zafar2021] Zafar, M.R., Basu, S. Calibrating surface hyperelastic constitutive models in soft solids // Phys. Rev. E 103, 063003 – Published 14 June 2021 https://doi.org/10.1007/s42452-020-2355-6

[Zipunova2021b] Zipunova, E., Savenkov, E. On the Diffuse Interface Models for High Codimension Dispersed Inclusions // Mathematics. 2021; 9(18):2206. https://doi.org/10.3390/math9182206

[Zipunova2021c] Zipunova, E., Savenkov, E.. Phase field model for electrically induced damage using microforce theory // Mathematics and Mechanics of Solids. December 2021. https://doi:10.1177/10812865211052078

Содержание