



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 22 за 2022 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

М.Б. Гавриков, А.А. Таюрский

Граничная задача для
плоских нелинейных
уединённых волн в
холловской МГД

Статья доступна по лицензии
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Граничная задача для плоских нелинейных уединённых волн в холловской МГД // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2022. № 22. 31 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2022-22>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2022-22>

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

М.Б. Гавриков, А.А. Таюрский

**Граничная задача для плоских нелинейных
уединённых волн в холловской МГД**

Москва — 2022

Гавриков М.Б., Тайурский А.А.

Граничная задача для плоских нелинейных уединённых волн в холловской МГД

Выведены уравнения плоских нелинейных бегущих волн в холловской МГД. Получен первый интеграл “энергии” уравнений бегущих волн и доказана их гамильтоновость в лагранжевых координатах. Проведена классификация особых точек уравнений бегущих волн. Поставлена и для изотермической плазмы, покоящейся на бесконечности, численно решена граничная задача нахождения плоских уединённых волн, параметры которых имеют заданные значения на бесконечности, и бегущих по пространству с заданной фазовой скоростью. Аналитически найдены диапазоны изменения фазовой скорости, для которых граничная задача разрешима. Показано, что существуют два семейства решений граничной задачи, различающиеся величиной фазовой скорости, – быстрые волны, фазовая скорость которых больше звуковой, и медленные волны с фазовой скоростью, меньшей звуковой. Проведена верификация найденных уединённых волн подстановкой их в уравнения холловской МГД.

Ключевые слова: холловская МГД, бегущая волна, уединённая волна (солитон), фазовая скорость, граничная задача

Mikhail Borisovich Gavrikov, Aleksei Aleksandrovich Taiurskii

Boundary value problem for plane nonlinear solitary waves in Hall MHD

The equations for plane nonlinear traveling waves in the Hall MHD are derived. The first integral of the “energy” of the equations of traveling waves is obtained and their Hamiltonian property in Lagrangian coordinates is proved. A classification of singular points of the equations of traveling waves is carried out. For an isothermal plasma resting at infinity, the boundary problem of finding plane solitary waves whose parameters have given values at infinity and propagating through space with a given phase velocity is also posed. The ranges of change in the phase velocity are analytically found for which the boundary value problem is solvable. It is shown that there are two families of solutions to the boundary value problem, which differ in the magnitude of the phase velocity – fast waves, the phase velocity of which is greater than the sonic one, and slow waves with a phase velocity less than the sonic one. The solitary waves found were verified by substituting them into the Hall MHD equations.

Key words: Hall MHD, traveling wave, solitary wave (soliton), phase velocity, boundary value problem

Введение

Плоские нелинейные бегущие волны в сплошной среде – это решения уравнений динамики сплошной среды, зависящие от радиуса-вектора $\mathbf{r}$ и времени t в комбинации $\theta = \langle \mathbf{r}, \mathbf{k} \rangle - at$, где $a = \text{const}$ называется фазовой скоростью, величина θ – фазой волны, а $\mathbf{k}$ – фиксированный единичный вектор, определяющий направление распространения волны. Таким образом, в бегущей волне профили всех параметров сплошной среды перемещаются в пространстве (“бегут”) как единое целое без искажений со скоростью a вдоль вектора $\mathbf{k}$.

Особый интерес представляют специальные типы бегущих волн – уединённые волны (солитоны), для которых все параметры сплошной среды при $\theta \rightarrow \pm\infty$ имеют конечные и равные пределы. Эти предельные значения при нахождении солитона рассматриваются как граничные условия.

При исследовании солитонов в сплошной среде используются два подхода. В первом – солитоны получаются как решения модельных уравнений, линейка которых в настоящее время довольно внушительная, начиная с уравнений КдФ (Кортевега-де-Фриза), НУШ (Нелинейное уравнение Шрёдингера) и т.п. [1–3] и кончая уравнениями для плазмы типа КП (Кадомцева-Петвиашвили) [4], Захарова [5] и др. [6–8]. Во втором подходе уравнения для бегущих волн (и в частности солитонов) выводятся из первых принципов, а солитоны ищутся как специальные решения полученных уравнений. В качестве первых принципов при гидродинамическом описании сплошной среды рассматриваются законы сохранения массы, энергии, импульса с добавлением к ним в случае плазмы законов электродинамики. Ниже мы руководствуемся вторым подходом, поскольку достоверность решений модельных уравнений для плазмы требует дополнительной верификации, а при выводе модельных уравнений используются неформальные, порой контрафактные приёмы. В то же время уравнения бегущих волн, получаемые из первых принципов, как правило, намного сложнее модельных, но их достоверность такая же, как и породивших их первых принципов. Учитывая сказанное, исследование солитонов из первых принципов сопряжено с серьёзными проблемами, и число решённых задач невелико.

Выделим в качестве достижений ионно-звуковые солитоны [9] и солитоны в холодной двухжидкостной квазинейтральной плазме [10–13], полученные на базе уравнений электромагнитной гидродинамики [14] (в западной литературе именуемых “extended MHD” и “inertial MHD”). Последние применялись в [15] для исследования структуры фронта ударной волны в бесстолкновительной плазме. В [16] численно исследовалось взаимодействие указанных солитонов и было установлено, что они взаимодействуют подобно материальным частицам (см. также [14]). К солитонам, изученным в [10], в монографии [14] добавлен ещё один допускающий полное аналитическое описание класс уединённых

волн, представляющих собой волновые пакеты поперечных колебаний, бегущих вдоль магнитного поля.

Уравнения бегущих волн в холодной квазинейтральной двухжидкостной плазме [14, 16] достаточно сложны и до сих пор полностью не проинтегрированы. Они существенно упрощаются в приближении холловской МГД, так что, как показано в настоящей работе, граничная задача о нахождении уединённой волны в указанном приближении получисленно-полуаналитически может быть полностью решена. При этом возможен в полном объёме учёт температур электронов и ионов.

Численно существование плоских уединённых волн в холловской магнитной гидродинамике (МГД), часто используемой в плазменных исследованиях, было установлено в [17, 18]. В этой работе решается граничная задача для уединённых волн в холловской МГД. В частности, найдены границы изменения фазовой скорости, для которой существует уединённая волна, бегущая справа налево или слева направо.

Наличие уединённых волн в холловской МГД указывает на появление дисперсии, отсутствующей в классической МГД. Как следует из работы, возникновение дисперсии в холловской МГД обусловлено холловскими слагаемыми в законе Ома и, значит, именно эти слагаемые ответственны за возникновение солитонов в холловской МГД.

§1. Основные уравнения

Уравнения холловской МГД для бездиссипативной плазмы в гауссовской системе единиц имеют вид [19]:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{U} &= 0, \quad \rho \frac{d\mathbf{U}}{dt} = -p_{\Sigma} + \frac{1}{c} [\mathbf{j}, \mathbf{H}], \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla, \\ \frac{dp_i}{dt} + \gamma p_i \operatorname{div} \mathbf{U} &= 0, \quad \frac{dp_e}{dt} + \gamma p_e \operatorname{div} \mathbf{U} - \lambda_i \rho^{\gamma-1} \mathbf{j} \cdot \nabla \left(\frac{p_e}{\rho^{\gamma}} \right) = 0, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0 \text{ (закон Фарадея), } \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H} \text{ (закон Ампера),} \\ \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} [\mathbf{U}, \mathbf{H}] + \frac{\lambda_i}{c\rho} [\mathbf{j}, \mathbf{H}] - \frac{\lambda_i}{\rho} \nabla p_e \text{ (закон Ома),} \end{aligned} \tag{1}$$

где ρ – объёмная плотность плазмы, $\mathbf{U}$ – гидродинамическая скорость, $p_{\Sigma} = p_i + p_e$, p_i , p_e – давления ионов и электронов, $\lambda_i = m_i / (Ze)$, Z – кратность заряда ионов. При этом предполагается, что электронная и ионная компоненты плазмы суть идеальные политропные газы с общим показателем адиабаты $\gamma \geq 1$. Случай $\gamma = 1$ соответствует изотермической плазме. Уравнения идеальной классической МГД получатся, если в системе (1) отбросить два последних слагаемых в правой части закона Ома, $\sim [\mathbf{j}, \mathbf{H}]$ и $\sim \nabla p_e$ (называемых обычно

холловскими членами), а в уравнении для электронного давления – последнее слагаемое в левой части, $\sim \mathbf{j} \cdot \nabla(p_e / \rho')$, и после этого сложить уравнения для электронного и ионного давлений. Возникновение плоских бегущих волн в холловской МГД обусловлено, как будет показано ниже, холловским членом $\sim [\mathbf{j}, \mathbf{H}]$ в правой части закона Ома.

Рассмотрим плоские бегущие волны в плазме, подчинённой системе (1), распространяющиеся вдоль оси Ox с фазовой скоростью a . Для таких волн $\mathbf{k} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{r} = (x, y, z)$, и они являются решениями системы (1), зависящими только от t , x , причём в комбинации $\theta = x - at$. Система (1) в случае плоской симметрии, $\partial / \partial y = \partial / \partial z = 0$, примет вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + U_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial U_x}{\partial x} &= 0, \quad \rho \left(\frac{\partial U_x}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p_\Sigma}{\partial x} + \frac{1}{c} (j_y H_z - j_z H_y), \\
 \rho \left(\frac{\partial U_y}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_y}{\partial x} \right) &= \frac{1}{c} j_z H_x, \quad \rho \left(\frac{\partial U_z}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) = -\frac{1}{c} j_y H_x, \\
 \frac{\partial p_i}{\partial t} + U_x \frac{\partial p_i}{\partial x} + \gamma p_i \frac{\partial U_x}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial p_e}{\partial t} + U_x \frac{\partial p_e}{\partial x} + \gamma p_e \frac{\partial U_x}{\partial x} = 0, \\
 \frac{1}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t} &= 0, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0, \\
 j_x &= 0, \quad j_y = -\frac{c}{4\pi} \frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad j_z = \frac{c}{4\pi} \frac{\partial H_y}{\partial x}, \\
 E_y &= -\frac{1}{c} (U_z H_x - U_x H_z) + \frac{\lambda_i}{c\rho} j_z H_x, \quad E_z = -\frac{1}{c} (U_x H_y - U_y H_x) - \frac{\lambda_i}{c\rho} j_y H_x.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Из системы (2) следует $H_x = \text{const}$, и она является замкнутой и определённой относительно неизвестных функций ρ , U_x , U_y , U_z , p_i , p_e , H_y , H_z , E_y , E_z , которые из этой системы в принципе могут быть найдены. После нахождения указанных функций продольное электрическое поле E_x вычисляется по формуле:

$$E_x = -\frac{1}{c} (U_y H_z - U_z H_y) + \frac{\lambda_i}{c\rho} (j_y H_z - j_z H_y) - \frac{\lambda_i}{\rho} \frac{\partial p_e}{\partial x}.$$

Плоские бегущие волны – это решения системы (2) вида $\rho(\theta)$, $U_x(\theta)$, ..., $E_z(\theta)$, $\theta = x - at$, которые предполагаются определёнными и непрерывно дифференцируемыми на всей прямой $\theta \in \mathbb{R}$. (Из закона Ома, заметим, следует, что при $H_x \neq 0$ функции $H_y(\theta)$, $H_z(\theta)$ дважды непрерывно дифференцируемы на прямой). Физические требования налагают на указанные функции ряд дополнительных ограничений. Например, на всей прямой выполнены

неравенства $\rho(\theta) > 0$, $p_i(\theta) > 0$, $p_e(\theta) > 0$. Подставляя функции $\rho(\theta)$, $U(\theta)$, ..., $E_z(\theta)$ в (2), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) относительно указанных функций, которая имеет несколько первых интегралов, позволяющих частично её проинтегрировать и тем самым понизить порядок полученной системы ОДУ. Перечислим указанные первые интегралы.

Уравнение неразрывности даёт:

$$-a \frac{d\rho}{d\theta} + U_x \frac{d\rho}{d\theta} + \rho \frac{dU_x}{d\theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{d\theta}(\rho u) = 0 \Leftrightarrow \rho u = J = \text{const}, \quad u = U_x - a, \quad (3)$$

где u – продольная скорость плазмы в системе отсчёта бегущей со скоростью a волны. Из первого интеграла (3) следует, что при $J \neq 0$ для всех θ имеем либо $u(\theta) > 0$, либо $u(\theta) < 0$, в частности, знаки J и $u(\theta)$ совпадают, при $J = 0$ имеем $U_x(\theta) \equiv a$.

Уравнение для ионного давления при $J \neq 0$ даёт:

$$u \frac{dp_i}{d\theta} + \gamma p_i \frac{du}{d\theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{d\theta} \ln(p_i |u|^\gamma) = 0 \Leftrightarrow p_i |u|^\gamma \equiv K_i = \text{const} > 0.$$

Если $J = 0$, то $u(\theta) \equiv 0$, левое тождество в последней цепочке эквивалентностей выполнено всегда для любого $p_i(\theta)$, и, значит, для $K_i = 0$ равенство $p_i |u|^\gamma \equiv K_i$ тоже выполнено для любого $p_i(\theta)$. Аналогичное рассуждение применимо и к уравнению для электронного давления. В итоге получим первые интегралы

$$p_i |u|^\gamma \equiv K_i, \quad p_e |u|^\gamma \equiv K_e, \quad p_\Sigma |u|^\gamma \equiv K = K_i + K_e, \quad (4)$$

где при $J \neq 0$ константы K , K_i , K_e положительные, а при $J = 0$ эти константы равны нулю.

Уравнения импульсов с учётом $H_x = \text{const}$ приводят к первым интегралам:

$$Ju + p_\Sigma + \frac{H_y^2 + H_z^2}{8\pi} \equiv D, \quad JU_y - \frac{H_x H_y}{4\pi} \equiv q_y^0, \quad JU_z - \frac{H_x H_z}{4\pi} \equiv q_z^0, \quad (5)$$

где $D > 0$, q_y^0 , q_z^0 – произвольные константы.

Уравнения электродинамики дают ещё два первых интеграла

$$\frac{a}{c} H_y + E_z \equiv R, \quad \frac{a}{c} H_z - E_y \equiv S, \quad (6)$$

где R , S – произвольные константы.

Наконец, закон Ома приводит к тождествам

$$E_y = -\frac{1}{c}(U_z H_x - U_x H_z) + \frac{\lambda_i H_x}{4\pi\rho} \frac{dH_y}{d\theta}, \quad E_z = -\frac{1}{c}(U_x H_y - U_y H_x) + \frac{\lambda_i H_x}{4\pi\rho} \frac{dH_z}{d\theta}. \quad (7)$$

Рассмотрим сначала вырожденные случаи, анализ которых основан на интегралах (3)–(7).

1° $J = 0$, $H_x = 0$. Тогда из (3)–(7) следует, что ρ , p_i , p_e , H_y , H_z , U_y , U_z – произвольные непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условию

$$p_i + p_e + \frac{H_y^2 + H_z^2}{8\pi} \equiv D = \text{const} > 0,$$

причём ρ , p_i , p_e – положительные функции. Кроме того, $U_x(\theta) \equiv a$, $E_z = \frac{a}{c} H_z$,

$$E_y = \frac{a}{c} H_z.$$

2° $J \neq 0$, $H_x = 0$. Тогда из (3)–(7) следует, что все параметры бегущей волны (включая и E_z) суть константы, причём $U_x \neq a$.

3° $J = 0$, $H_x \neq 0$. Тогда из (3)–(7) следует, что H_y , H_z , E_y , E_z , U_y , U_z , $U_x \equiv a$ – константы, а p_i , p_e , ρ – произвольные положительные непрерывно дифференцируемые функции, подчинённые единственному условию $p_i(\theta) + p_e(\theta) \equiv \text{const}$.

Таким образом, в незамагниченной плазме ($H_x = 0$) плоские бегущие волны либо тривиальные – при $J \neq 0$ все параметры волны константы, либо при $J = 0$ имеется функциональный произвол из 6 свободных функций в задании волны, а $U_x \equiv a$.

Ниже считается $J \neq 0$, $H_x \neq 0$. Подставляя в (7) выражения для E_y , E_z из (6) и выражения для U_y , U_z из (5), а также равенство $U_x = u + a$, получим после несложных преобразований:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_i H_x}{4\pi J} u \frac{dH_y}{d\theta} + \frac{1}{c} \left(u - \frac{H_x^2}{4\pi J} \right) H_z - q_y &= 0, \quad q_y = -S + \frac{H_x q_z^0}{cJ}, \\ \frac{\lambda_i H_x}{4\pi J} u \frac{dH_z}{d\theta} - \frac{1}{c} \left(u - \frac{H_x^2}{4\pi J} \right) H_y - q_z &= 0, \quad q_z = R - \frac{H_x q_y^0}{cJ}. \end{aligned} \quad (8)$$

К системе (8) надо добавить первое тождество (5), которое с учётом интегралов (4) запишется в виде:

$$Ju + \frac{K}{|u|^\gamma} + \frac{H_y^2 + H_z^2}{8\pi} = D. \quad (9)$$

Замкнутая система уравнений (8), (9) относительно функций H_y , H_z , u , зависящая от произвольных констант $H_x \neq 0$, $J \neq 0$, $D > 0$, $K > 0$, q_y , q_z , называется *уравнениями плоских нелинейных бегущих волн в холловской МГД*. По её решению остальные параметры бегущей волны восстанавливаются по формулам:

$$U_x = u + a, \quad \rho = \frac{J}{u}, \quad p_\Sigma = \frac{K}{|u|^\gamma}, \quad U_y = \frac{H_x H_y}{4\pi J} + \frac{q_y^0}{J}, \quad U_z = \frac{H_x H_z}{4\pi J} + \frac{q_z^0}{J}, \quad (10)$$

$$E_y = \frac{a}{c} H_z - S, \quad E_z = -\frac{a}{c} H_y + R,$$

где S , R , q_y^0 , q_z^0 – произвольные константы, связанные с константами q_y , q_z формулами (8). Таким образом, по каждому решению системы (8), (9) получается двухпараметрическое семейство бегущих волн. Продольное электрическое поле E_x в волне получается с константным произволом: произвольно фиксируем $0 < K_e < K$, положим $p_e = K_e / |u|^\gamma$, тогда для поля E_x имеем выражение

$$E_x = -\frac{1}{c}(U_y H_z - U_z H_y) - \frac{\lambda_i}{4\pi\rho} \frac{d}{d\theta}(H_y^2 + H_z^2) - \frac{\lambda_i K_e}{\rho} \frac{d}{d\theta}(|u|^{-\gamma}).$$

Формулы (10) проясняют физический смысл констант интегрирования: J – объёмная плотность продольного потока массы, D – объёмная плотность продольного потока импульса, $(q_y, q_z) = \mathbf{E}'_\perp$, где $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{U}_0, \mathbf{H}]$ – электрическое поле в системе отсчёта, движущейся относительно лабораторной системы со скоростью $\mathbf{U}_0 = (a, q_y^0 / J, q_z^0 / J)$.

Ниже считается $(q_y, q_z) \neq 0$. Если $q_y = q_z = 0$, то система (8), (9) легко интегрируется. Действительно, умножая первое уравнение (8) на H_y , а второе на H_z и складывая полученные результаты, имеем с учётом $u \neq 0$, $H_x \neq 0$ тождество $d / d\theta(H_y^2 + H_z^2) \equiv 0$, откуда $H_y^2 + H_z^2 = \text{const}$. Но тогда из уравнения (9) получим соотношение

$$|J| \cdot |u| + \frac{K}{|u|^\gamma} = \text{const},$$

откуда $u = \text{const}$ и, значит, в силу (10), $p_i = \text{const}$, $p_e = \text{const}$, $U_x = \text{const}$, $\rho = \text{const}$. Если $u = H_x^2 / (4\pi J)$, то из (8), учитывая $q_y = q_z = 0$, следует $H_y = \text{const}$, $H_z = \text{const}$ и в силу (10) $U_y = \text{const}$, $U_z = \text{const}$, $E_y = \text{const}$,

$E_z = \text{const}$ и, значит, все параметры бегущей волны суть константы. Если $u \neq H_y^2 / (4\pi J)$, то система (8), учитывая $q_y = q_z = 0$, даёт линейную однородную систему уравнений относительно H_y , H_z , решением которой, очевидно, являются функции H_y , H_z , изменяющиеся по синусоидальному закону с частотой колебаний $\omega = (4\pi J - H_x^2 / u) / (c\lambda_i H_x)$. Тогда из (10) следует, что по такому же закону изменяются и функции U_y , U_z , E_y , E_z . В число полученных таким образом волн входят и классические альфвеновские волны, бегущие по однородной плазме вдоль оси Ox .

При исследовании бегущих волн можно считать $J > 0$, поскольку случай $J < 0$ сводится к случаю $J > 0$. А именно, рассмотрим решение системы

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_i H_x}{4\pi |J|} \bar{u} \frac{d\bar{H}_y}{d\theta} + \frac{1}{c} \left(\bar{u} - \frac{H_x^2}{4\pi |J|} \right) \bar{H}_z - \bar{q}_y &= 0, \\ \frac{\lambda_i H_x}{4\pi |J|} \bar{u} \frac{d\bar{H}_z}{d\theta} - \frac{1}{c} \left(\bar{u} - \frac{H_x^2}{4\pi |J|} \right) \bar{H}_y - \bar{q}_z &= 0, \end{aligned} \quad (8')$$

$$|J| \bar{u} + \frac{K}{\bar{u}^\gamma} + \frac{\bar{H}_y^2 + \bar{H}_z^2}{8\pi} = D, \quad \bar{q}_y = q_y, \quad \bar{q}_z = -q_z, \quad \bar{u} > 0. \quad (9')$$

Тогда каждое решение системы (8'), (9') даёт решение системы (8), (9), вычисляемое по формулам $u(\theta) = -\bar{u}(\theta)$, $H_y(\theta) = \bar{H}_y(\theta)$, $H_z(\theta) = -\bar{H}_z(\theta)$, и все решения системы (8), (9) для $J < 0$ могут быть получены указанным способом.

Учитывая сказанное, ниже будем считать $J > 0$, $H_x \neq 0$, $(q_y, q_z) \neq 0$.

§2. Первый интеграл и гамильтоновость уравнений бегущих волн

Уравнения бегущих волн (8), (9) состоят из дифференциальных уравнений (8) относительно H_y , H_z , куда входит и функция $u(\theta)$, и алгебраического уравнения (9), из которого в принципе можно выразить $u(\theta)$ через $H_y(\theta)$ и $H_z(\theta)$. Основная проблема в том, что u , в силу уравнения (9), при $K > 0$ – двузначная функция (H_y, H_z) . Уравнение (9) задаёт в пространстве (H_y, H_z, u) сфероид вращения – двумерную поверхность, являющуюся объединением двух замкнутых кусков, называемых ниже *северным* и *нижним полушариями* (рис. 1), которые определяются при $\gamma = 1$ (изотермическая плазма) уравнениями:

$$u = u_{\pm}(H_y, H_z) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{D}{J} - \frac{H_y^2 + H_z^2}{8\pi J} \pm \left[\left(\frac{D}{J} - \frac{H_y^2 + H_z^2}{8\pi J} \right)^2 - \frac{4K}{J} \right]^{1/2} \right\}, \quad (11)$$

$$H_y^2 + H_z^2 \leq H_m^2, \quad H_m = [8\pi(D - 2(JK)^{1/2})]^{1/2},$$

причём знак “+” отвечает северному полушарию, а знак “–” – южному. Северное и южное полушария пересекаются по окружности Γ радиуса H_m , называемой ниже *экватором*. Двумерная поверхность, определяемая уравнением (9), является результатом вращения овала $Ju + K/|u|^\gamma + H_z^2/(8\pi) = D$ в плоскости (H_z, u) вокруг оси u (рис. 1). При $\gamma = 1$ характерные точки овала имеют вид $u_* = (K/J)^{1/2}$, $u_{\pm} = \{D/J \pm [D^2/J^2 - 4K/J]^{1/2}\}/2$. Северное полушарие получается вращением дуги WNE , а южное – дуги WSE вокруг оси u .

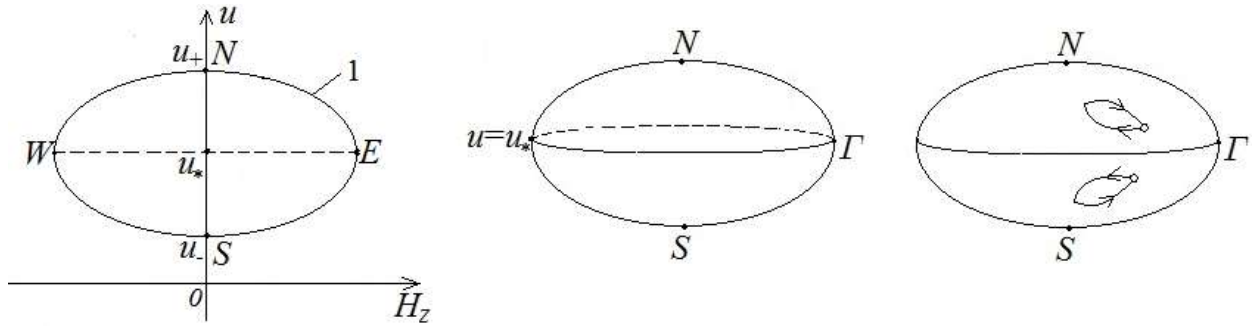


Рис. 1. Сфероид вращения вокруг оси u овала 1: $Ju + K/|u|^\gamma + H_z^2/(8\pi) = D$

Решениями уравнений бегущих волн (8), (9) являются непрерывно дифференцируемые кривые $(H_y(\theta), H_z(\theta), u(\theta))$, заданные для всех $\theta \in \mathbb{R}$, лежащие на сфероиде (9), для которых функции $H_y(\theta)$, $H_z(\theta)$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений (8). Бегущая волна, лежащая только в северном или только в южном полушарии, ищется из системы ОДУ (8), где положено $u = u_+(H_y, H_z)$ для северного и $u = u_-(H_y, H_z)$ для южного полушарий, в замкнутом круге $H_y^2 + H_z^2 \leq H_m^2$ на плоскости $\{(H_y, H_z)\}$. Самый сложный случай, когда бегущая волна расположена одновременно и в северном, и в южном полушариях и в силу этого, по соображениям непрерывности, пересекает экватор Γ . Анализ этого случая существенно упрощается использованием следующего результата:

Бегущая волна может пересекать экватор Γ самое большее в двух точках $A, B \in \Gamma$, которые получаются пересечением Γ прямой,

ортогональной вектору (q_y, q_z) и проходящей через центр экватора; кроме того, вектор $(dH_y / d\theta, dH_z / d\theta)$ в точках A и B касается экватора.

Доказательство (для случая $\gamma = 1$). Дифференцируя по θ тождество (9), получим

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \left(J - \frac{K}{u^2} \right) \frac{du}{d\theta} + \frac{1}{4\pi} H_y \frac{dH_y}{d\theta} + \frac{1}{4\pi} H_z \frac{dH_z}{d\theta} = \\ &= \left(J - \frac{K}{u^2} \right) \frac{du}{d\theta} + \frac{J}{\lambda_i H_x u} (q_y H_y + q_z H_z), \end{aligned}$$

где были поставлены значения производных $dH_y / d\theta$, $dH_z / d\theta$ из уравнений (8). Пусть при $\theta = \theta_0$ точка $(H_y(\theta_0), H_z(\theta_0), u(\theta_0))$ лежит на экваторе, тогда $u(\theta_0) = u_* = \sqrt{K/J}$ и $H_y^2(\theta_0) + H_z^2(\theta_0) = H_m^2$. Значит, $J - K/u(\theta_0)^2 = 0$ и из проведенного вычисления следует $q_y H_y(\theta_0) + q_z H_z(\theta_0) = 0$. Иными словами, экваториальная точка $(H_y(\theta_0), H_z(\theta_0))$ ортогональна вектору (q_y, q_z) . Кроме того, из равенств (8) следует, что в точках A и B имеем $H_y dH_y / d\theta + H_z dH_z / d\theta = 0$, т.е. вектор $(dH_y / d\theta, dH_z / d\theta)$ ортогонален (H_y, H_z) и, значит, касается Γ , ч.т.д. #

Точки A и B ищутся из системы уравнений $H_y q_y + H_z q_z = 0$, $H_y^2 + H_z^2 = H_m^2$, откуда

$$A = \frac{H_m}{\sqrt{q_y^2 + q_z^2}} (-q_z, q_y), \quad B = -\frac{H_m}{\sqrt{q_y^2 + q_z^2}} (-q_z, q_y).$$

Бегущие волны, проходящие через A и B (если они есть), получаются решением системы (8) в северном и южном полушарии по отдельности, т.е. для $u = u_+(H_y, H_z)$ и $u = u_-(H_y, H_z)$, с начальными условиями $(H_y(0), H_z(0)) = A$, $(H_y(0), H_z(0)) = B$ в замкнутом круге $H_y^2 + H_z^2 \leq H_m^2$. Если из полученных решений удастся “склеить” непрерывно дифференцируемую функцию на прямой, то это будет означать существование бегущих волн, проходящих через A и B . Решение этой задачи выходит за рамки настоящей работы. Отметим лишь, что начальные условия (т.е. точки A и B) лежат на границе круга $H_y^2 + H_z^2 \leq H_m^2$, где правая часть системы (8) непрерывна, но недифференцируема.

Методологически полезно рассмотреть также случай холодной плазмы, $K = 0$. Тогда уравнение (9) упрощается

$$Ju + \frac{H_y^2 + H_z^2}{8\pi} = D \quad (9^*)$$

и $u(\theta)$ выражается однозначно через $H_y(\theta)$ и $H_z(\theta)$. Непрерывно дифференцируемое на прямой решение системы (8), (9^{*}) лежит в круге $H_y^2 + H_z^2 \leq 8\pi D$, однако на границу круга интегральная кривая (8) попасть не может, ибо тогда ρ обращается в бесконечность и тем более не может выйти за пределы указанного круга, поскольку там ρ становится отрицательной. Таким образом, физический смысл имеют только непрерывно дифференцируемые решения (8) (где считается $u = D/J - (H_y^2 + H_z^2)/(8\pi J)$), заданные на всей числовой оси и лежащие внутри круга $H_y^2 + H_z^2 < 8\pi D$.

Система (8), (9) имеет первый интеграл “энергии”.

Теорема 1. 1) Пусть $\gamma > 1$, $\varepsilon(u) = \frac{H_x^2}{8\pi c J} \left(Ju + \frac{K}{u^\gamma} \right) - \frac{Ju^2}{4c} - \frac{\gamma K}{2c(\gamma-1)u^{\gamma-1}}$

$$I(u, H_y, H_z) = \varepsilon(u) + \frac{q_z H_y - q_y H_z}{8\pi}. \quad (12)$$

Тогда для любого непрерывно дифференцируемого решения системы (8), (9)

$$\frac{dI}{d\theta}(u(\theta), H_y(\theta), H_z(\theta)) \equiv 0 \text{ и, значит, } I = \text{const}.$$

2) Пусть $\gamma = 1$, $\varepsilon(u) = \frac{H_x^2}{8\pi c J} \left(Ju + \frac{K}{u} \right) - \frac{Ju^2}{4c} + \frac{K \ln u}{2c}$, а $I(u, H_y, H_z)$ задано формулой (12), тогда $I = \text{const}$ на любом непрерывно дифференцируемом решении системы (8), (9).

Доказательство. Имеем для $\gamma \geq 1$

$$\varepsilon'(u) = -\frac{1}{2c} \left(u - \frac{H_x^2}{4\pi J} \right) \left(J - \frac{\gamma K}{u^{\gamma+1}} \right).$$

Кроме того, из (9) следует тождество:

$$\left(J - \frac{\gamma K}{u^{\gamma+1}} \right) \frac{du}{d\theta} + \frac{1}{4\pi} \left(H_y \frac{dH_y}{d\theta} + H_z \frac{dH_z}{d\theta} \right) \equiv 0.$$

Используя последнее тождество, проведём вычисления для любого непрерывно дифференцируемого решения $(H_y(\theta), H_z(\theta), u(\theta))$ системы (8), (9):

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{d\theta} &= \frac{\partial I}{\partial H_y} \frac{dH_y}{d\theta} + \frac{\partial I}{\partial H_z} \frac{dH_z}{d\theta} + \frac{\partial I}{\partial u} \frac{du}{d\theta} = \frac{q_z}{8\pi} \frac{dH_y}{d\theta} - \frac{q_y}{8\pi} \frac{dH_z}{d\theta} + \varepsilon'(u) \frac{du}{d\theta} = \\
&= \frac{q_z}{8\pi} \frac{dH_y}{d\theta} - \frac{q_y}{8\pi} \frac{dH_z}{d\theta} - \frac{1}{2c} \left(u - \frac{H_x^2}{4\pi J} \right) \left(J - \frac{\gamma K}{u^{\gamma+1}} \right) \frac{du}{d\theta} = \\
&= \frac{q_z}{8\pi} \frac{dH_y}{d\theta} - \frac{q_y}{8\pi} \frac{dH_z}{d\theta} + \frac{1}{8\pi c} \left(u - \frac{H_x^2}{4\pi J} \right) \left(H_y \frac{dH_y}{d\theta} + H_z \frac{dH_z}{d\theta} \right) = \\
&= \frac{1}{8\pi} \frac{dH_y}{d\theta} \left[q_z + \frac{1}{c} \left(u - \frac{H_x^2}{8\pi J} \right) H_y \right] - \frac{1}{8\pi} \frac{dH_z}{d\theta} \left[q_y - \frac{1}{c} \left(u - \frac{H_x^2}{8\pi J} \right) H_z \right] = \\
&= \frac{1}{8\pi} \frac{dH_y}{d\theta} \frac{dH_z}{d\theta} \frac{\lambda_i H_x}{4\pi J} u - \frac{1}{8\pi} \frac{dH_z}{d\theta} \frac{dH_y}{d\theta} \frac{\lambda_i H_x}{4\pi J} u \equiv 0,
\end{aligned}$$

где в последнем преобразовании использованы равенства (8). Теорема доказана. #

Пусть τ – лагранжева параметризация, $d/d\tau = u d/d\theta$ и $\mathcal{H}_{\pm}(H_y, H_z) = I(H_y, H_z, u_{\pm}(H_y, H_z)) \cdot 32\pi^2 J / (\lambda_i H_x)$. Тогда система (8) на северном и южном полушариях имеет вид:

$$\frac{dH_y}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{H}_{\pm}}{\partial H_z}, \quad \frac{dH_z}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{H}_{\pm}}{\partial H_y}, \quad (13)$$

т.е. записывается в гамильтоновой форме.

Доказательство. Имеем $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\pm}$, $u(H_y, H_z) = u_{\pm}(H_y, H_z)$,

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial H_z} = \left\{ \frac{\partial I}{\partial H_z} + \frac{\partial I}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial H_z} \right\} \frac{32\pi^2 J}{\lambda_i H_x} = \frac{32\pi^2 J}{\lambda_i H_x} \left\{ -\frac{q_y}{8\pi} - \frac{1}{2c} \left(u - \frac{H_x^2}{4\pi J} \right) \left(J - \frac{\gamma K}{u^{\gamma+1}} \right) \frac{\partial u}{\partial H_z} \right\}.$$

Но дифференцируя (9) по H_z , получим

$$\left(J - \frac{\gamma K}{u^{\gamma+1}} \right) \frac{\partial u}{\partial H_z} + \frac{H_z}{4\pi} = 0.$$

Используя последнее тождество, продолжим преобразования:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial H_z} &= \frac{32\pi^2 J}{\lambda_i H_x} \left\{ -\frac{q_y}{8\pi} + \frac{1}{8\pi c} \left(u - \frac{H_x^2}{4\pi J} \right) H_z \right\} = \frac{4\pi J}{\lambda_i H_x} \left\{ -q_y + \frac{1}{c} \left(u - \frac{H_x^2}{4\pi J} \right) H_z \right\} = \\
&= -u \frac{dH_y}{d\theta} = -\frac{dH_y}{d\tau}.
\end{aligned}$$

Аналогично проверяется второе равенство в (13), ч.т.д. #

Рассмотрим важный подкласс бегущих волн – уединённые волны. Бегущая волна называется *уединённой* (или *солитоном*), если все параметры волны имеют конечные и равные зависящие от параметра пределы при $\theta \rightarrow \pm\infty$. Исключая паталогические случаи, ограничимся ниже уединёнными волнами, для которых первые производные по θ всех параметров волны при $\theta \rightarrow \pm\infty$ сходятся к нулю. Тогда предельные значения параметров уединённой волны дают *особую точку* системы (8), (9). Точнее, если $H_y^\infty, H_z^\infty, u^\infty$ – предельные значения H_y, H_z, u , соответственно при $\theta \rightarrow \pm\infty$, то точка $(H_y^\infty, H_z^\infty, u^\infty)$ лежит на сфероиде (9), а правая часть (8) в указанной точке обращается в нуль.

С геометрической точки зрения уединённая волна реализуется как интегральная кривая системы (8), лежащая на сфероиде (9), которая за бесконечное время выходит из некоторой точки на сфероиде и за бесконечное время входит в эту же точку (рис. 1). При этом роль времени играет фаза волны θ . Указанная точка с необходимостью является особой точкой системы (8), (9) и определяется предельными значениями параметров волны на $\pm\infty$, которые ниже называются *граничными условиями*. Как показывает проведённое исследование, геометрическая петля, реализующая уединённую волну, всегда лежит либо в северном, либо в южном полушариях и не пересекает экватор.

Цель работы – решить граничную задачу для уединённой волны: найти все уединённые волны, распространяющиеся вдоль оси Ox с заданной фазовой скоростью, параметры которых имеют заданные предельные значения на $\pm\infty$. Из сказанного выше ясно, что для решения поставленной задачи необходимо найти все особые точки системы (8), (9) и отобрать из них те, для которых существует интегральная кривая этой системы, исходящая и входящая в особую точку за бесконечное время.

§3. Классификация особых точек уравнений бегущих волн

Система уравнений бегущих волн (8), (9) зависит от шести произвольных констант – $H_x \neq 0, J \neq 0, D > 0, K \geq 0, q_y, q_z$, что усложняет нахождение и анализ особых точек этой системы. Сократим наполовину число констант за счёт специального выбора координат в поперечной плоскости и обезразмеривания.

За счёт поворота декартовой системы координат в поперечной плоскости на некоторый угол α можно добиться выполнения равенства $q_z = 0$. Действительно, запишем систему (8), (9) в эквивалентной комплексной плоскости:

$$\frac{\lambda_1 H_x}{4\pi J} u \frac{dH}{d\theta} - \frac{i}{c} \left(u - \frac{H_x^2}{4\pi J} \right) H - q = 0, \quad Ju + \frac{K}{|u|^\gamma} + \frac{|H|^2}{8\pi} = D,$$

где $H = H_y + iH_z$, $q = q_y + iq_z$. Замена переменной $H = Be^{i\alpha}$ приводит к равносильной системе:

$$\frac{\lambda_i H_x}{4\pi J} u \frac{dB}{d\theta} - \frac{i}{c} \left(u - \frac{H_x^2}{4\pi J} \right) B - qe^{-i\alpha} = 0, \quad Ju + \frac{K}{|u|^\gamma} + \frac{|B|^2}{8\pi} = D.$$

Выбирая α так, чтобы $\text{Im}(qe^{-i\alpha}) = 0$, приходим к требуемому результату.

Далее обезразмерим систему (8), (9), выбрав в качестве характерных масштабов $H_0 = \sqrt{4\pi D}$ (напряжённость магнитного поля), $v_0 = \frac{D}{2|J|}$ (скорость),

$p_0 = \frac{D}{2}$ (давление), $\rho_0 = \frac{4J^2}{D}$ (плотность), L_0 (длина) – произвольное. Тогда $v_0 = H_0^2 / (4\pi\rho_0)$ и в безразмерном виде получим

$$\Lambda\beta\xi|u|\frac{dH_y}{d\theta} + \left(\frac{|u|}{2} - \beta^2 \right) H_z - p_y = 0, \quad \Lambda\beta\xi|u|\frac{dH_z}{d\theta} - \left(\frac{|u|}{2} - \beta^2 \right) H_y - p_z = 0, \quad (14)$$

$$|u| + \frac{K}{|u|^\gamma} + H_y^2 + H_z^2 = 2, \quad (15)$$

где $\beta = \text{sgn } J \cdot \frac{H_x}{H_0}$, $K = \frac{K_i + K_e}{\rho_0 v_0^\gamma}$, $\xi = \frac{c\sqrt{\lambda_i \lambda_e}}{L_0 \sqrt{4\pi\rho_0}}$, $\Lambda = \sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda_e}}$, $\lambda_e = \frac{m_e}{e}$, $p_y = \frac{cq_y}{v_0 H_0}$,

$p_z = \frac{cq_z}{v_0 H_0}$, а u , H_y , H_z – безразмерные значения неизвестных функций.

Как отмечалось выше, можно считать $p_z = 0$. Обозначим $p = p_y$, тогда безразмерная система уравнений бегущих волн (14), (15) зависит от трёх безразмерных параметров $\beta \neq 0$, $K \geq 0$, $p \neq 0$ (число подобия ξ можно фиксировать, например, считать равным 1 за счёт выбора масштаба длины L_0 , а Λ – материальная константа, определяемая массами и зарядами плазменных компонент). Итак, число произвольных констант в уравнениях бегущих волн уменьшилось вдвое.

Система (14), (15) имеет первый интеграл, который получается обезразмериванием интеграла (12):

$$I(H_y, H_z, u) = \begin{cases} \frac{\beta^2 |u|}{2} - \frac{u^2}{8} - \frac{\gamma K}{4(\gamma-1)|u|^{\gamma-1}} + \frac{\beta^2 K}{2|u|^\gamma} + p_z H_y - p_y H_z, & \gamma > 1, \\ \frac{\beta^2 |u|}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{K \ln|u|}{4} + \frac{\beta^2 K}{2|u|^\gamma} + p_z H_y - p_y H_z, & \gamma = 1. \end{cases} \quad (16)$$

По-прежнему считаем $J > 0$, и тогда $u > 0$. Особые точки (H_y, H_z, u) системы (14), (15) для заданных p, β, K ищутся как решение системы уравнений

$$\left(\frac{u}{2} - \beta^2\right)H_z - p = 0, \quad \left(\frac{u}{2} - \beta^2\right)H_y = 0, \quad u + \frac{K}{u} + H_y^2 + H_z^2 = 2. \quad (17)$$

Последнее уравнение (17) задаёт сфероид (см. выше), для которого $u_- \leq u \leq u_+$, $u_{\pm} = 1 \pm \sqrt{1-K}$. Северное и южное полушария сфероида задаются уравнениями

$$u = u_{\pm}(H_y, H_z) = \{2 - (H_y^2 + H_z^2) \pm [(2 - H_y^2 - H_z^2)^2 - 4K]^{1/2}\} / 2, \\ H_y^2 + H_z^2 \leq H_m^2, \quad H_m = [2(1 - \sqrt{K})]^{1/2}.$$

Экватор задаётся равенствами: $u = u_* = \sqrt{K}$, $H_y^2 + H_z^2 = H_m^2$. Поскольку $p \neq 0$, то для решения (17) имеем $H_y = 0$. Значит, особые точки лежат на главном меридиане сфероида $H_y = 0$ и совпадают с точками пересечения гиперболы и овала:

$$u = 2\beta^2 + \frac{2p}{H_z} \Leftrightarrow p - \left(\frac{u}{2} - \beta^2\right)H_z = 0, \quad u + \frac{K}{u} + H_z^2 = 2. \quad (18)$$

Количество и расположение особых точек зависит от соотношения p, K, β . Будем считать $p > 0$. Случай $p < 0$ сводится к случаю $p > 0$ изменением знака у H_z . Сначала решим более простую задачу классификации особых точек, т.е. решений системы (18), для всех достаточно малых $p > 0$. Простые геометрические соображения позволяют нарисовать особые точки в меридиональной плоскости (H_z, u) , являющиеся решениями системы (18) для достаточно малых $p > 0$ в зависимости от соотношения K и β . Выделим 5 случаев: (I) $2\beta^2 \geq u_+$, (II) $u_+ > 2\beta^2 > u_*$, (III) $2\beta^2 = u_*$, (IV) $u_* > 2\beta^2 > u_-$, (V) $u_- \geq 2\beta^2$. В каждом из этих случаев особые точки для достаточно малых $p > 0$ изображены на рис. 2, из которого следует, в частности, что особые точки не попадают на экватор. Как следует из рис. 2, в случаях (I) и (V) есть две особые точки, одна из которых лежит на северном, а другая на южном полушариях. В случаях (II)–(IV) имеется четыре особых точки, причём в случае (II) три из них находятся на северном полушарии, а одна на южном, а в случае (IV), наоборот – три на южном и одна на северном полушарии. Наконец, в случае (III) по две особые точки находятся на южном и северном полушариях.

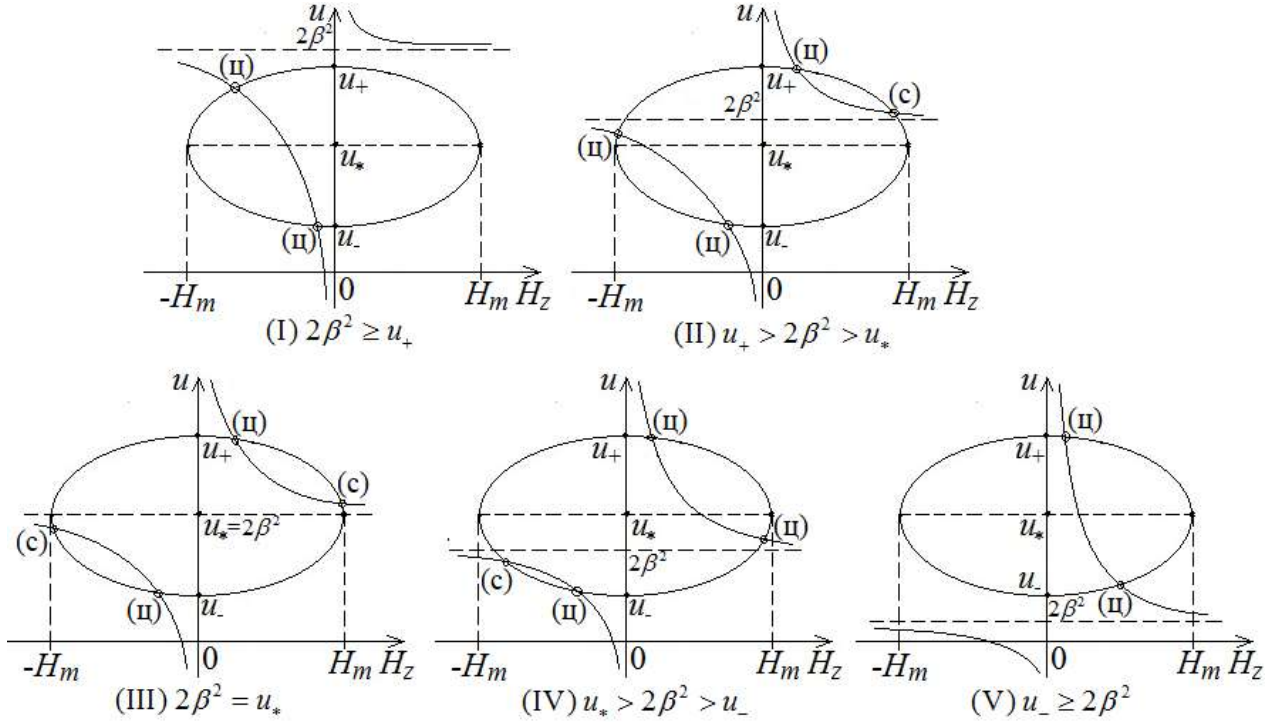


Рис. 2. Особые точки уравнений бегущих волн для достаточно малых p при различных соотношениях β и K

Поскольку особые точки системы (14), (15) не лежат на экваторе, их проекции на экваториальную плоскость $u = u_*$ имеют вид $(0, H_z)$ и лежат внутри экваториального круга $H_y^2 + H_z^2 < H_m^2$, а сами особые точки восстанавливаются по проекциям посредством отображений $u_+(H_y, H_z)$ или $u_-(H_y, H_z)$, в зависимости от того, где лежит особая точка – на северном или южном полушарии соответственно. Очевидно, указанные проекции особых точек системы (14), (15) являются особыми точками в открытом круге $H_y^2 + H_z^2 < H_m^2$ системы (14), куда надо подставить $u_+(H_y, H_z)$ или $u_-(H_y, H_z)$, исходя из того, где лежит особая точка системы (14), (15) – на северном или южном полушарии, соответственно. Учитывая сказанное, проведём классификацию особых точек системы (14), (15) для всех достаточно малых $p \neq 0$ по типам их проекций, являющихся особыми точками системы (14), с подстановкой в неё $u = u_{\pm}(H_y, H_z)$ по указанному выше правилу.

Прямое вычисление матрицы Якоби M_J правой части системы (14) даёт

$$M_J = \frac{1}{\Lambda \beta \xi u} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{H_z}{2} \left[\frac{2p}{H_z^2} + \frac{\partial u}{\partial H_z} \right] \\ \frac{p}{H_z} & 0 \end{bmatrix},$$

где u , $\partial u / \partial H_z$ вычисляются для $u = u_{\pm}$ в точке $(0, H_z)$, являющейся проекцией особой системы (14), (15). Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\det(M_J - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \frac{p}{2} \left[\frac{2p}{H_z^2} + \frac{\partial u}{\partial H_z} \right] \frac{1}{(\Lambda \beta \xi u)^2} = 0, \quad (19)$$

где I_2 – единичная матрица второго порядка.

Выше считалось $p > 0$. Для достаточно малых по модулю $p < 0$ особые точки системы (14), (15) получаются зеркальным относительно оси u отражением графиков на рис. 2 в каждом из пяти случаев (I)–(V). Выражение для матрицы Якоби M_J выше справедливо для $p \neq 0$ любого знака. Поэтому из формулы (19) следует, что проекции особых точек системы (14), (15) на экваториальную плоскость являются особыми точками системы (14) либо типа “центр” (корни (19) чисто мнимые и сопряжённые), либо типа “седло” (корни (19) ненулевые вещественные разного знака) в зависимости от справедливости неравенства $p(2p / H_z^2 + \partial u / \partial H_z) > 0$ (центр), либо $p(2p / H_z^2 + \partial u / \partial H_z) < 0$ (седло). Для $p > 0$ отсюда следует: особая точка есть

$$\text{центр} \Leftrightarrow \frac{2p}{H_z^2} + \frac{\partial u}{\partial H_z} > 0, \quad \text{седло} \Leftrightarrow \frac{2p}{H_z^2} + \frac{\partial u}{\partial H_z} < 0. \quad (20)$$

Для $p < 0$ эти условия меняются местами. Неравенства (20) имеют простой геометрический смысл: для $p > 0$ в точке пересечения гиперболы $u = 2\beta^2 + 2p / H_z$ и овала $u + K / u + H_z^2 = 2$ в случае центра касательная к овалу лежит выше касательной к гиперболы, а в случае седла – ниже, при условии, что обе касательные ориентированы вдоль положительного направления оси H_z . На рис. 2 приведены типы особых точек в соответствии с указанным правилом: (с) – седло, (ц) – центр. Для $p < 0$ вердикты “ниже”, “выше” меняются местами: в точке пересечения гиперболы и овала в случае центра касательная к овалу лежит ниже касательной к гиперболе, а в случае седла – выше.

Особые точки системы (14), (15) классифицировались выше по типу особых точек системы (14) в открытом круге $H_y^2 + H_z^2 < H_m^2$. В свою очередь, особые точки системы (14) классифицировались по линейному приближению систему (14). В случае особых точек типа центра и седла этого достаточно для топологически правильного восстановления поведения интегральных кривых нелинейной системы (14) в окрестности особой точки по их поведению в окрестности нуля линеаризации в особой точки системы (14). В случае седла это следует из **теоремы Гробмана-Хартмана** [20], а в случае центра – из **теоремы Ляпунова о центре** [21], применимость которой вытекает из наличия, согласно **Теореме 1**, у системы (14) аналитического в открытом круге

$H_y^2 + H_z^2 < H_m^2$ первого интеграла $\mathcal{H}_{\pm}(H_y, H_z) = I(H_y, H_z, u_{\pm}(H_y, H_z))$, для которого в особой точке выполнены соотношения $\partial \mathcal{H}_{\pm} / \partial H_y = \partial \mathcal{H}_{\pm} / \partial H_z = 0$.

Рассмотрим классификацию особых точек системы (14), (15) для конечных $p > 0$. Исследуем по отдельности пересечения правой и левой веток гиперболы $u = 2\beta^2 + 2p/H_z$ с овалом. Начнём с правой ветки. Пусть $2\beta^2 < u_*$. Элементарные геометрические соображения показывают, что существуют два критических значения $p_{\text{кр}}^+$ и p_*^+ , для которых при $p > p_{\text{кр}}^+$ правая ветка гиперболы не пересекается с овалом, а при $p = p_{\text{кр}}^+$ касается его, и, значит, в этом случае есть единственная точка пересечения, являющаяся особой для системы (14), (15). При $p = p_*^+$ правая ветка проходит через восточный (Е) полюс экватора – в этом случае есть две особые точки, одна из которых (Е-полюс) лежит на экваторе, а вторая на северном полушарии. Наконец, при $p_*^+ < p < p_{\text{кр}}^+$ и $0 < p < p_*^+$ есть две особые точки – в первом случае они обе лежат на северном полушарии, а во втором случае одна из них расположена на северном, а вторая – на южном полушариях. Именно этот последний случай и реализовывался выше для вариантов (IV) и (V) применительно к правой ветке гиперболы. Таким образом, число особых точек, возникающих как пересечение правой ветки гиперболы с овалом, варьируется от нуля до двух и графически изображено на рис. 3. Добавим, что при $u_+ < 2\beta^2 \leq u_*$ на рис.3а исчезают кривые №4 и №5 (а значение p_*^+ не определено), при $2\beta^2 \geq u_+$ остаётся только кривая №1 (значения $p_{\text{кр}}^+$ и p_*^+ не определены).

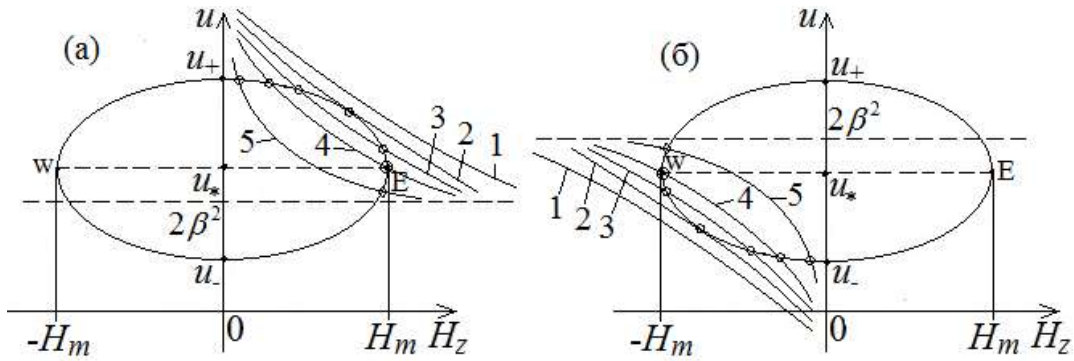


Рис. 3. (а) 1: $p > p_{\text{кр}}^+$, 2: $p = p_{\text{кр}}^+$, 3: $p_*^+ < p < p_{\text{кр}}^+$, 4: $p = p_*^+$, 5: $0 < p < p_*^+$;
(б) 1: $p > p_{\text{кр}}^-$, 2: $p = p_{\text{кр}}^-$, 3: $p_*^- < p < p_{\text{кр}}^-$, 4: $p = p_*^-$, 5: $0 < p < p_*^-$.

Аналогично рассматривается пересечение левой ветки гиперболы с овалом. Итоговая картина изображена для $2\beta^2 > u_*$ на рис. 3б. В этом случае тоже есть два критических значения $p_{\text{кр}}^-$, p_*^- параметра $p > 0$, а число точек пересечения варьируется от нуля до двух. При $p = p_*^-$ левая ветка гиперболы

проходит через западный (W) полюс экватора – в этом случае есть две особые точки, одна из которых (W-полюс) лежит на экваторе, а вторая – на южном полушарии. Подробности см. на рис. 3б. При $u_* \geq 2\beta^2 > u_-$ на рис. 3б исчезают кривые №4 и №5 (а значение p_*^- не определено), а при $2\beta^2 < u_-$ остаётся только кривая №1 (а значения $p_{кр}^-$, p_*^- не определены).

Вычисление критических значений $p_*^\pm$. Пусть $u_* > 2\beta^2$. По определению p_*^+ , правая ветвь гиперболы $u = 2\beta^2 + 2p / H_z$ для $p = p_*^+$ содержит восточный полюс экватора $E(H_m, u_*)$ и, значит, $u_* = 2\beta^2 + 2p_*^+ / H_m$, откуда

$$p_*^+ = (u_* / 2 - \beta^2) H_m = (\sqrt{K} - 2\beta^2) [2(1 - \sqrt{K})]^{1/2} / 2.$$

Аналогично, пусть $u_* < 2\beta^2$. По определению p_*^- , левая ветвь гиперболы $u = 2\beta^2 + 2p / H_z$ для $p = p_*^-$ содержит западный полюс экватора $E(-H_m, u_*)$ и, значит, $u_* = 2\beta^2 - 2p_*^- / H_m$, откуда

$$p_*^- = (u_* / 2 - \beta^2)(-H_m) = (2\beta^2 - \sqrt{K}) [2(1 - \sqrt{K})]^{1/2} / 2.$$

Итак, $p_*^\pm$ вычисляются в явном виде.

Вычисление критических значений $p_{кр}^\pm$. Условие касания гиперболы и овала в их общей точке состоит в параллельности касательных к гиперболе и овалу в этой точке. Пусть общая точка имеет координаты (H_z, u) . Касательный вектор к гиперболе в этой точке равен $(1, -2p / H_z^2)$. Нормаль к овалу в этой точке равна $(2H_z, 1 - K / u^2)$ и, значит, касательный вектор есть $(1 - K / u^2, -2H_z)$. Итак, условие касания гиперболы и овала в точке (H_z, u) запишется в виде:

$$\left(1, -\frac{2p}{H_z^2}\right) \parallel \left(1 - \frac{K}{u^2}, -2H_z\right) \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & -2p / H_z^2 \\ 1 - K / u^2 & -2H_z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow p = \frac{H_z^3}{1 - K / u^2}.$$

Поскольку точка касания удовлетворяет уравнениям гиперболы и овала, то для нахождения трёх неизвестных H_z , u , p имеем систему из трёх уравнений:

$$u = 2\beta^2 + \frac{2p}{H_z}, \quad u + \frac{K}{u} + H_z^2 = 2, \quad p = \frac{H_z^3}{1 - K / u^2}. \quad (21)$$

Подставим p из третьего уравнения (21) в первое

$$u - 2\beta^2 = \frac{2H_z^2}{1 - K / u^2},$$

и в полученное соотношение подставим выражение для H_z^2 , которое вытекает из второго равенства (21):

$$(u - 2\beta^2)(1 - K/u^2) = 2(2 - u - K/u).$$

Умножая на u^2 обе части последнего равенства, приходим к кубическому уравнению для нахождения u :

$$P(u) \equiv 3u^3 - 2u^2(\beta^2 + 2) + Ku + 2\beta^2 K = 0. \quad (22)$$

Найдя u из равенства $P(u) = 0$, из второго уравнения (21) находим H_z и тогда из третьего соотношения (21) вычислим p .

Свойства уравнения (22) собраны в следующей теореме.

Теорема 2. 1) *Имеют место равенства:*

$$\begin{aligned} P(u_-) &= 2\sqrt{1-K}u_-(2\beta^2 - u_-), \quad P(u_+) = 2\sqrt{1-K}u_+(u_+ - 2\beta^2), \\ P(u_*) &= P(\sqrt{K}) = -4K(1 - \sqrt{K}), \quad P(0) = 2\beta^2 K, \quad P(+\infty) = +\infty, \quad P(-\infty) = -\infty. \end{aligned}$$

2) Если $u_- < 2\beta^2 < u_+$, то $P(2\beta^2) = 4\beta^2[(2\beta^2 - 1)^2 + K - 1] < 0$.

Доказательство: 1) Прямая подстановка $u = u_{\pm} = 1 \pm \sqrt{1-K}$ в многочлен (22) приводит к первым двум равенствам, а подстановка $u = u_* = \sqrt{K}$ – к третьему. Остальные соотношения очевидны.

2) Выражение для $P(2\beta^2)$ проверяется прямым вычислением. Также элементарно проверяется, что неравенство $(2\beta^2 - 1)^2 + K - 1 > 0$ равносильно двум неравенствам $u_- < 2\beta^2 < u_+$. Теорема доказана. #

Из **Теоремы 2** следует, что при $2\beta^2 < u_+$ имеем $P(u_*) < 0 < P(u_+)$, и на интервале (u_*, u_+) существует и притом единственный нуль многочлена $P(u)$, обозначаемый u_+^0 , а при $u_- < 2\beta^2$ имеем $P(u_-) > 0 > P(u_*)$, и на интервале (u_-, u_*) существует, и притом единственный нуль, многочлена $P(u)$, обозначаемый u_-^0 . Поэтому, с учётом (21), получаем:

$$\begin{aligned} p_{\text{кр}}^- &= \frac{H_z^3}{1 - K/(u_-^0)^2}, \quad H_z = -\sqrt{2 - (u_-^0 + K/u_-^0)}, \quad u_- < u_-^0 < \sqrt{K}, \\ p_{\text{кр}}^+ &= \frac{H_z^3}{1 - K/(u_+^0)^2}, \quad H_z = \sqrt{2 - (u_+^0 + K/u_+^0)}, \quad \sqrt{K} < u_+^0 < u_+. \end{aligned}$$

При $2\beta^2 \geq u_+$ значение $p_{\text{кр}}^+$ не определено, а при $2\beta^2 \leq u_-$ не определено значение $p_{\text{кр}}^-$. Вспомогательные величины $u_{\pm}^0$ необходимо определять численно. Если $u_- < 2\beta^2 < u_+$, то, согласно **Теореме 2**, при $u_* < 2\beta^2$ имеем $u_+^0 \in (2\beta^2, u_+)$, а

при $2\beta^2 < u_*$ имеем $u_-^0 \in (u_-, 2\beta^2)$, что несколько упрощает численное нахождение величин $u_{\pm}^0$.

Теперь можно уточнить понятие достаточно малого $p > 0$, которое в каждом из пяти рассмотренных выше случаев конкретизируется следующим образом. В случае (I) $0 < p < p_*^-$, (II) $0 < p < \min\{p_*^-, p_{кр}^+\}$, (III) $0 < p < \min\{p_{кр}^+, p_{кр}^-\}$, (IV) $0 < p < \min\{p_{кр}^-, p_*^+\}$, (V) $0 < p < p_*^+$.

В приведённой классификации особых точек системы (14), (15) для конечных $p > 0$ остались без ответа три частных вопроса. Во-первых, неясно соотношение между величинами $p_{кр}^{\pm}$, $p_*^{\pm}$ — известно лишь, что $p_{кр}^+ > p_*^+$, $p_{кр}^- > p_*^-$. Эти соотношения устанавливаются после численного нахождения этих величин и только после этого может быть окончательно проведена классификация особых точек. Во-вторых, в случае $p = p_{кр}^{\pm}$ неясен тип единственной особой точки, геометрически реализующей себя как точка касания гиперболы и овала. Для этой точки корни характеристического многочлена (19) нулевые, и по линейному приближению тип особой точки не восстанавливается — при $\lambda = 0$ теоремы Гробмана-Хартмана и Ляпунова о центре не работают. В-третьих, в случае $p = p_*^{\pm}$ исследование особой точки, лежащей на экваторе (E или W полюсы), сталкивается с двумя проблемами. С одной стороны, точки E и W лежат на границе круга $H_y^2 + H_z^2 \leq H_m^2$, и правые части системы (14) не определены в открытых окрестностях этих точек. С другой стороны, правые части системы (14) непрерывны в круге $H_y^2 + H_z^2 \leq H_m^2$, но не дифференцируемы на его границе и, в частности, в точках E и W. Как следствие, элементы матрицы Якоби в этих точках становятся бесконечными и эти особые точки не могут быть исследованы по линейному приближению.

§4. Граничная задача для уединённой волны

Рассмотрим систему (8), (9) с $q_z = 0$. Пусть на бесконечности заданы величины (граничные условия):

$$\begin{aligned} H_z(\pm\infty) = H_{\infty}, \quad H_y(\pm\infty) = 0, \quad H_x(\pm\infty) = H_x, \\ \rho(\pm\infty) = \rho_{\infty}, \quad p_{\Sigma}(\pm\infty) = p_{\infty}, \quad U(\pm\infty) = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

и задана фазовая скорость волны a . Поставим задачу нахождения уединённой волны, имеющей на $\pm\infty$ заданные значения параметров (23) и бегущей вдоль оси Ox с фазовой скоростью a . Для этой волны значение $u(\pm\infty)$ и величины J ,

D , K , q_y^0 , q_z^0 однозначно определяются по граничным значениям (23) формулами (10):

$$u(\pm\infty) = -a, J = -\rho_\infty a, K = \rho_\infty |a|^\gamma, D = \rho_\infty a^2 + p_\infty + \frac{H_\infty^2}{8\pi}, q_y^0 = 0, q_z^0 = -\frac{H_x H_\infty}{4\pi}.$$

Значения констант $q_z = 0$, $q_y = -c^{-1} H_\infty (a - H_x^2 / (4\pi \rho_\infty a))$ однозначно определяются требованием, чтобы точка ($H_y = 0$, $H_z = H_\infty$, $u = -a$) на сфероиде (9) являлась особой точкой для системы (8), (9), и, значит, правые части системы (8) в этой точке обращаются в нуль. Из алгебраических соотношений (8) вычисляются константы $R = 0$, $S = a H_\infty / c$, а из (10) получим $E_y(\pm\infty) = E_z(\pm\infty) = 0$.

Безразмерные значения параметров уединённой волны относительно характерных масштабов, “привязанных” к граничным значениям (23), $H_0 = H_\infty$, $\rho_0 = \rho_\infty$, $v_0 = H_\infty / (4\pi \rho_\infty)^{1/2}$, L_0 – любое, подчиняются в случае $\gamma = 1$ системе уравнений, полученной обезразмериванием системы (8), (9):

$$\frac{\Lambda \beta \xi}{|a|} |u| \frac{dH_y}{d\theta} + \left(u + \frac{\beta^2}{a}\right) H_z - p = 0, \quad \frac{\Lambda \beta \xi}{|a|} |u| \frac{dH_z}{d\theta} - \left(u + \frac{\beta^2}{a}\right) H_y = 0, \quad (24)$$

$$u + \frac{K}{|u|} + \frac{1}{2|a|} (H_y^2 + H_z^2) = |a| + \frac{K}{|a|} + \frac{1}{2|a|}, \quad (25)$$

где a – безразмерное значение фазовой скорости, p – безразмерное значение константы q_y , $\Lambda = (\lambda_i / \lambda_e)^{1/2}$, $\lambda_e = m_e / e$, а $\beta = H_x / H_0$, $K = p_\infty / (\rho_\infty v_0^2)$, $\xi = c \sqrt{\lambda_i \lambda_e} / (L_0 \sqrt{4\pi \rho_0})$ – безразмерные константы (числа подобия).

Поскольку точка $H_y = 0$, $H_z = 1$, $u = -a$ является особой для системы (24), (25), это позволяет однозначно найти величину $p = -a + \beta^2 / a$. Параметр a ищется более сложным образом.

Рассмотрим случай $a < 0$ (волна движется справа налево), тогда $u > 0$. При $|a| \neq \sqrt{K}$ проекция собой точки $(0, 1, |a|)$ системы (24), (25) на экваториальную плоскость равна $(0, 1)$ и лежит внутри круга $H_y^2 + H_z^2 \leq H_m^2$, $H_m = [2(|a| - \sqrt{K})^2 + 1]^{1/2}$. Матрица Якоби M_J системы (24) в особой точке $(0, 1)$ имеет вид

$$M_J|_{(0,1)} = \frac{1}{\Lambda\beta\xi} \begin{pmatrix} 0 & -\left(p + \frac{\partial u}{\partial H_z}(0,1)\right) \\ p & 0 \end{pmatrix},$$

где для $|a| > \sqrt{K}$ особая точка лежит на северном полушарии и в (24) надо подставить $u = u_+(H_y, H_z)$, а для $|a| < \sqrt{K}$ – лежит на южном полушарии и в (24) надо подставить $u = u_-(H_y, H_z)$, где функции $u_{\pm}(H_y, H_z)$ имеют вид

$$u = u_{\pm}(H_y, H_z) = \frac{1}{2} \left\{ D - \frac{H_y^2 + H_z^2}{2|a|} \pm \sqrt{\left(D - \frac{H_y^2 + H_z^2}{2|a|} \right)^2 - 4K} \right\}, \quad D = |a| + \frac{K}{|a|} + \frac{1}{2|a|},$$

$$H_y^2 + H_z^2 \leq H_m^2.$$

Для существования решения поставленной выше граничной задачи для уединённой волны необходимо и достаточно наличие интегральной кривой системы (24), исходящей и входящей в особую точку (0,1) этой системы за бесконечное время (роль времени, напомним, играет фаза волны θ). Для последнего необходимо, но не достаточно, чтобы точка (0,1) была седловой для системы (24), т.е. собственные числа матрицы M_J были ненулевые вещественные и разного знака, что равносильно неравенству:

$$p \left(p + \frac{\partial u}{\partial H_z}(0,1) \right) < 0. \quad (26)$$

Теорема 3. Пусть $\lambda_{\pm} = \{K + \beta^2 + 1 \pm [(K + \beta^2 + 1)^2 - 4K\beta^2]^{1/2}\} / 2$. Тогда:

1) Особая точка $(0,1,|a|)$ лежит на северном полушарии, а точка (0,1) является седловой для системы (24) тогда и только тогда, когда

$$\max\{K, \beta^2\}^{1/2} < |a| < \lambda_+^{1/2}.$$

2) Особая точка $(0,1,|a|)$ лежит на южном полушарии, а точка (0,1) является седловой для системы (24) тогда и только тогда, когда

$$\lambda_-^{1/2} < |a| < \min\{K, \beta^2\}^{1/2}.$$

3) Для особой точки $(0,1,|a|)$, $|a| \neq \sqrt{K}$, для которой точка (0,1) – седловая для системы (24), сепаратрисса, исходящая из точки (0,1) касается вектора $(\pm\sqrt{A/\rho}, 1)$, где $A = -(p + (\partial u / \partial H_z)(0,1))$, а “ $\pm$ ” – знак величины A (или p).

Доказательство: Пусть $u_{\pm}(H_z) = u_{\pm}(0, H_z)$. С учётом явной формулы для функций $u_{\pm}(H_y, H_z)$ имеем:

$$u'_{\pm}(H_z) = \frac{\partial u_{\pm}}{\partial H_z}(0, H_z) = -\frac{H_z}{2|a|} \left[1 \pm \left(D - \frac{H_z^2}{2|a|} \right) \left(\left(D - \frac{H_z^2}{2|a|} \right)^2 - 4K \right)^{-1/2} \right].$$

Откуда:

$$u'_{\pm}(1) = \frac{\partial u_{\pm}}{\partial H_z}(0, 1) = -\frac{1}{2|a|} \left[1 \pm \frac{|a|^2 + K}{|a|^2 - K} \right]. \quad (27)$$

Докажем утверждения 1) ÷ 3).

1) Особая точка $(0, 1, |a|)$ лежит на северном полушарии $\Leftrightarrow |a| > \sqrt{K}$ (напомним, считается $|a| \neq \sqrt{K}$), точка $(0, 1)$ седловая для системы (24) $\Leftrightarrow$ выполнено неравенство (26). Рассмотрим два случая $p > 0$ и $p < 0$. Пусть $p > 0$, что равносильно $|a|^2 > \beta^2$. Поскольку $|a| > \sqrt{K}$, то в (27) $|a|^2 - K = |a|^2 - K$ и неравенство (26) равносильно такому:

$$\begin{aligned} u'_+(1) < -p &\Leftrightarrow \frac{1}{2|a|} \left[1 + \frac{|a|^2 + K}{|a|^2 - K} \right] > p = \frac{|a|^2 - \beta^2}{|a|} \Leftrightarrow \frac{|a|^2}{|a|^2 - K} > |a|^2 - \beta^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |a|^4 - |a|^2(K + \beta^2 + 1) + K\beta^2 < 0 \Leftrightarrow \lambda_- < |a|^2 < \lambda_+. \end{aligned}$$

Однако левое неравенство в последнем соотношении выполнено всегда, поскольку $|a|^2 > \max\{K, \beta^2\}$ и, легко проверить, $\beta^2 > \lambda_-$, $K > \lambda_-$. Итак, для $p > 0$ неравенство (26) равносильно неравенствам $\max\{K, \beta^2\}^{1/2} < |a| < \lambda_+^{1/2}$.

Если $p < 0$, что равносильно $|a|^2 - \beta^2 < 0$, то неравенство (26) равносильно

$$u'_+(1) > -p \Leftrightarrow \frac{|a|^2}{|a|^2 - K} < |a|^2 - \beta^2.$$

Однако последнее неравенство никогда не выполняется, поскольку $|a|^2 - \beta^2 < 0$, $|a|^2 - K > 0$.

2) Для южного полушария рассуждения аналогичные. Особая точка $(0, 1, |a|)$ лежит на южном полушарии $\Leftrightarrow |a| < \sqrt{K}$. В этом случае в (27) $|a|^2 - K = K - |a|^2$. Снова рассмотрим два случая $p > 0$ и $p < 0$. Пусть $p < 0$,

что равносильно неравенству $|a|^2 < \beta^2$. Тогда неравенство (26) равносильно такому:

$$\begin{aligned} u'_+(1) > -p &\Leftrightarrow \frac{1}{2|a|} \left[1 + \frac{|a|^2 + K}{|a|^2 - K} \right] < p = \frac{|a|^2 - \beta^2}{|a|} \Leftrightarrow \frac{|a|^2}{|a|^2 - K} < |a|^2 - \beta^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |a|^4 - |a|^2(K + \beta^2 + 1) + K\beta^2 < 0 \Leftrightarrow \lambda_- < |a|^2 < \lambda_+. \end{aligned}$$

Однако правое неравенство в последнем соотношении выполнено всегда, поскольку $|a|^2 < \min\{K, \beta^2\}$ и, легко проверить, $\beta^2 < \lambda_+$, $K < \lambda_+$. Итак, для $p < 0$ неравенство (26) равносильно неравенствам $\lambda_-^{1/2} < |a| < \min\{K, \beta^2\}^{1/2}$.

Если $p > 0$, что равносильно $|a|^2 - \beta^2 > 0$, то неравенство (26) равносильно соотношению

$$u'_+(1) < -p \Leftrightarrow \frac{|a|^2}{|a|^2 - K} > |a|^2 - \beta^2.$$

Последнее неравенство не выполняется никогда, поскольку $|a|^2 - \beta^2 > 0$, $|a|^2 - K < 0$.

3) Для седловой точки $(0,1)$ собственные числа матрицы M_J равны $\lambda = \pm\sqrt{pA}$, где, согласно неравенству (26), $pA > 0$. Касательный вектор к исходящей из особой точки сепаратриссы является, как известно [20], собственным вектором матрицы $M_J - \sqrt{pA}I_2$, а к входящей сепаратриссе – матрицы $M_J + \sqrt{pA}I_2$. Итак, касательный вектор (ξ_1, ξ_2) к исходящей сепаратриссе ищется из линейной системы

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{pA} & A \\ p & -\sqrt{pA} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Откуда $\xi_1 = \frac{A}{\sqrt{pA}} \xi_2 = \frac{\sqrt{pA}}{p} \xi_2$. Если $p > 0$, то $A > 0$ и $\xi_1 = \sqrt{A/p} \xi_2$. Полагая

$\xi_2 = 1$, имеем касательный вектор $(\sqrt{A/p}, 1)$. Если $p < 0$, то $A < 0$, $A = -\sqrt{A^2}$ и

$\xi_1 = -\sqrt{A/p} \xi_2$. Полагая $\xi_2 = 1$, получим касательный вектор $(-\sqrt{A/p}, 1)$.

Теорема доказана. #

Аналогично рассматривается случай $a > 0$ (волна бежит слева направо), тогда $u < 0$, и для редукции к уже исследованному случаю проведём замену

переменных $v = -u = |u|$, $B = -H_z$. В новых переменных и для $a > 0$ система (24), (25) переписывается в виде:

$$\frac{\Lambda\beta\xi}{|a|}v\frac{dH_y}{d\theta} + \left(v - \frac{\beta^2}{|a|}\right)B - p = 0, \quad \frac{\Lambda\beta\xi}{|a|}v\frac{dB}{d\theta} - \left(v - \frac{\beta^2}{|a|}\right)H_y = 0, \quad (24')$$

$$v + \frac{K}{v} + \frac{1}{2|a|}(H_y^2 + B^2) = |a| + \frac{K}{|a|} + \frac{1}{2|a|}. \quad (25')$$

Итак, получим систему (24), (25) в случае $a < 0$, но вместо u стоит $v > 0$, а вместо H_z – функция B . Единственное, но важное отличие – особая точка $(H_y = 0, H_z = 1, u = -a)$ системы (24), (25) для $a > 0$ переходит в особую точку $(H_y = 0, B = -1, v = a)$ системы (24'), (25') в новых переменных. Имеем из (25'):

$$v_{\pm}(H_y, B) = \frac{1}{2} \left\{ D - \frac{H_y^2 + B^2}{2|a|} \pm \sqrt{\left(D - \frac{H_y^2 + B^2}{2|a|} \right)^2 - 4K} \right\}, \quad D = |a| + \frac{K}{|a|} + \frac{1}{2|a|},$$

$$H_y^2 + H_z^2 \leq [2(|a| - \sqrt{K})^2 + 1] = H_m^2.$$

При $a > 0$ при анализе системы (24'), (25') будет три отличия. Во-первых, для $v_{\pm}(B) = v_{\pm}(0, B)$ имеем

$$v'_{\pm}(-1) = \frac{1}{2|a|} \left[1 \pm \frac{|a|^2 + K}{|a|^2 - K} \right].$$

Во-вторых, $p = \beta^2 / |a| - |a|$. В-третьих, матрица Якоби правых частей системы (24') в точке $(0, -1)$ имеет вид:

$$M_J|_{(0, -1)} = \frac{1}{\Lambda\beta\xi} \begin{pmatrix} 0 & p + \frac{\partial v}{\partial B}(0, -1) \\ -p & 0 \end{pmatrix}.$$

В частности, критерий седловой точки применительно к $(0, -1)$ и системе (24') остаётся старым $p(p + v'_{\pm}(-1)) < 0$.

Поэтому утверждение **Теоремы 3** остаётся в силе и при $a > 0$, если в её формулировке заменить $(0, 1, |a|) \rightarrow (0, -1, |a|)$, $(0, 1) \rightarrow (0, -1)$, $(24) \rightarrow (24')$ и считать $A = -(p + (\partial v / \partial B)(0, -1)) = -(p + v'_{\pm}(-1))$.

Нетрудно проверить, что в размерном виде K и β^2 равны квадратам звуковой и продольной компоненты альфвеновской скорости соответственно,

а $\lambda_{\pm}^{1/2}$ – быстрой (знак “+”) и медленной (знак “–”) магнитозвуковым скоростям, и ограничения на фазовую скорость, полученные в **Теореме 3**, приобретают понятный физический смысл.

Сформулированные в **Теореме 3** условия существования решения граничной задачи для уединённой волны являются необходимыми. При их выполнении для существования решения граничной задачи достаточно, чтобы сепаратрисса, исходящая из особой точки (0,1), снова возвращалась в эту точку. Последнее проверяется численно.

§5. Численные результаты

С учётом результата **Теоремы 3.3** рассмотрим численное решение задачи Коши для системы (24), считая для определённости $a < 0$, с начальным условием $H_y(0) = -\varepsilon(A/\rho)^{1/2}$, $H_z(0) = 1 - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ достаточно малая величина. При этом для $\max\{K, \beta^2\}^{1/2} < |a| < \lambda_+^{1/2}$ в (24) $u = u_+(H_y, H_z)$, а для $\lambda_-^{1/2} < |a| < \min\{K, \beta^2\}^{1/2}$ в (24) $u = u_-(H_y, H_z)$. Начальное условие выбирается на касательной к исходящей сепаратриссе. Эта касательная, согласно **Теореме 3.3**, известна. При достаточной близости начальной точки к особой, что определяется величиной $\varepsilon > 0$, можно сколь угодно точно приближённо восстановить сепаратриссу. В частности, величина $\varepsilon > 0$ уменьшается до стабилизации результатов расчёта. Для численного решения системы (24) использован метод Рунге-Кутты 4-го порядка и считалось $\varepsilon = 10^{-6}$.

Результаты расчётов доказывают существование уединённой волны для всех $|a|$ из указанных в **Теореме 3.1, 3.2** диапазонов, профили параметров которой вычисляются по безразмерным соотношениям (10):

$$\begin{aligned} u(\theta) &= u_{\pm}(H_y(\theta), H_z(\theta)), \quad E_y(\theta) = a(H_z(\theta) - 1), \quad E_z(\theta) = -aH_y(\theta), \\ U_y(\theta) &= -\frac{\beta}{a}H_y(\theta), \quad U_z(\theta) = \frac{\beta}{a}(1 - H_z(\theta)), \\ U_x(\theta) &= u(\theta) + a, \quad \rho(\theta) = -\frac{a}{u(\theta)}. \end{aligned} \tag{28}$$

Таким образом, проведённый теоретический и численный анализ доказывает существование двух семейств решений граничной задачи для уединённых волн, каждое из которых параметризуется величиной фазовой скорости из указанных в **Теореме 3** диапазонов. Уединённые волны первого семейства лежат на северном полушарии и для них $|a| > \sqrt{K}$ (быстрые холодные волны), а второго семейства – на южном полушарии и для них $|a| < \sqrt{K}$ (медленные горячие волны). В пределе холодной плазмы, $K \rightarrow 0$ волны второго семейства

исчезают. В размерном виде условия $|a| > \sqrt{K}$ или $|a| < \sqrt{K}$ означают, что фазовая скорость по модулю больше или меньше звуковой.

В случае $a > 0$ получается аналогичный результат. Если $a = \sqrt{K}$, то $H_m = 1$ и особая точка $(0,1)$ попадает на границу круга $H_y^2 + H_z^2 = H_m^2$. В этом случае граничная задача требует дополнительного рассмотрения.

Верификация полученных результатов проводится подстановкой их в уравнения холловской МГД (2). Параметры найденного численно солитона с учётом (28) берутся в качестве начального условия для приближённого решения системы (2), которая в безразмерном виде для изотермической плазмы ($\gamma = 1$) записывается в следующей дивергентной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u}, H_y, H_z)}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial H_y}{\partial t} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial H_z}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0, \\ \mathbf{u} &= (\rho, \rho U_x, \rho U_y, \rho U_z), \\ \mathbf{f} &= \left(\rho U_x, \rho U_x^2 + K\rho + \frac{H_y^2 + H_z^2}{2}, \rho U_x U_y - \beta H_y, \rho U_x U_z - \beta H_z \right), \\ E_y &= -(U_z \beta - U_x H_z) + \frac{\Lambda \xi \beta}{\rho} \frac{\partial H_y}{\partial x}, \quad E_z = -(U_x H_y - \beta U_y) + \frac{\Lambda \xi \beta}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial x} \end{aligned} \quad (29)$$

Результаты расчёта системы (29) модифицированным методом Лакса-Вендроффа [14, 16] показывают, что полученная численно уединённая волна действительно со скоростью a движется как единое целое справа налево (рис. 4), пока β не превосходит по модулю некоторое критическое значение. Для больших по модулю β волна с течением времени разрушается, что, вероятно, свидетельствует о её неустойчивости. Исследование неустойчивости уединённой волны требует дополнительного исследования и выходит за рамки настоящей работы.

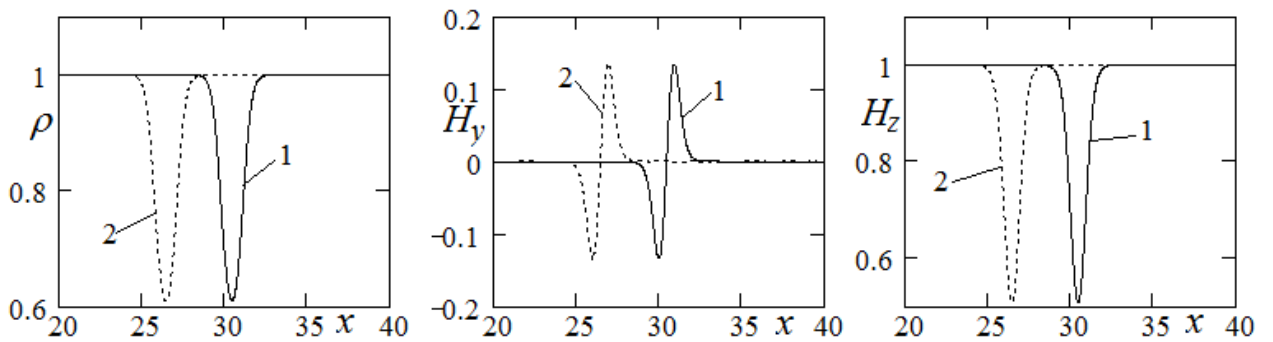


Рис. 4. Профили $\rho(t, x)$, $H_y(t, x)$, $H_z(t, x)$ в моменты времени:

1 – $t = 0$, 2 – $t = 5$.

Заключение

Выше из первых принципов была выведена система уравнений бегущих вдоль оси Ox волн для холловской МГД, состоящая из трёх уравнений – двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно компонент поперечного магнитного поля в волне и алгебраического уравнения, связывающего поперечное магнитное поле и продольную скорость плазмы в волне в системе отсчёта волны. Получены явные формулы, позволяющие вычислить параметры плазмы в бегущей волне через поперечное магнитное поле и продольную скорость. Поставлена и решена граничная задача для уединённой волны. Показано, что эта волна имеет неединственное решение. Аналитически найдены диапазоны изменения фазовой скорости, для которых граничная задача разрешима. Установлено, что существует два семейства уединённых волн, доставляющих решение граничной задачи и запараметризованных фазовой скоростью. Для волн первого семейства (быстрые холодные волны) фазовая скорость больше звуковой, а для волн второго семейства (медленные горячие волны) – меньше. В пределе холодной плазмы медленные горячие уединённые волны исчезают. Проведена верификация найденных уединённых волн подстановкой их в уравнения холловской МГД.

Наличие уединённых волн в холловской МГД указывает на появление дисперсии, отсутствующей в классической МГД. Как следует из работы, возникновение дисперсии в холловской МГД обусловлено холловскими слагаемыми в законе Ома и, значит, именно эти слагаемые ответственны за возникновение уединённых волн в холловской МГД.

Список литературы

1. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов. Метод обратной задачи / Под ред. С.П. Новикова, М.: Наука, 1980.
2. Тахтаджян Л.А., Фадеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука. Гл. ред. Физматлит., 1986.
3. Солитоны в действии / Сб. под ред. К. Лонгрена и Э. Скотта, М.: Мир, 1981.
4. Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И. Об устойчивости уединённых волн в слабодиспергирующих средах // Докл. АН СССР, 1970, Т192, С. 753.
5. Захаров В.Е., Коллапс ленгмюровских волн // ЖЭТФ, 1972. Т. 62. С. 1745.
6. Рыскин Н.М. Уединенные волны пространственного заряда // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2, № 5. С. 84-92.
7. Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. Нелинейные волны. М.: Наука, 2000, с.159.
8. Карпман В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973.
9. Арцимович Л.А., Сагдеев Р.З. Физика плазмы для физиков. М.: Атомиздат, 1979. 320 с.

10. Adlam J.H., Allen J.E. The structure of strong collision-free hydromagnetic waves // *Philosophical Magazine*, 1958. Vol. 3. P. 448–455.
11. Lüst R.V. Über die Ausbreitung von Wellen in einem Plasma // *Fortschritte der Physik*. 1959. V. 7. S. 503–558.
12. Davis L., Lüst R., Schlüter A. The structure of Hydromagnetic shock waves. I. Nonlinear hydromagnetic wave in a cold plasma // *Zeitschr. Fur Naturforsch.*, 1958. 13a. P. 916–936.
13. Saffman P.G. Propagating of a solitary wave along a magnetic field in a cold collision-free plasma // *J. Fluid Mech.*, 1961. V. 11. P. 16–20.
14. Гавриков М.Б. Двухжидкостная электромагнитная гидродинамика. М.: КРАСАНД. 2018. 584 с.
15. Сагдеев Р.З. Коллективные процессы и ударные волны в разреженной плазме // *Вопросы теории плазмы* / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1964. Вып. 4. С. 20–80.
16. Гавриков М.Б., Савельев В.В., Таюрский А.А. Солитоны в двухжидкостной магнитной гидродинамике с учетом инерции электронов // *Изв. вузов. ПНД*. 2010. Т. 18, №4. С. 132–147.
17. Savelyev V.V. Solitary waves in the Hall magnetohydrodynamics // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2018. V. 1094. P. 012031.
18. Savelyev V.V. Nonlinear waves in the Hall magnetic hydrodynamics // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2021. V. 2055 P. 012014.
19. Морозов А.И. Физические основы космических электрореактивных двигателей. М.: Атомиздат, 1978. 328 с.
20. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
21. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.–Л.: ГИТТЛ, 1949. 545 с.

Оглавление

Введение	3
§1. Основные уравнения	4
§2. Первый интеграл и гамильтоновость уравнений бегущих волн	9
§3. Классификация особых точек уравнений бегущих волн	14
§4. Граничная задача для уединённой волны	22
§5. Численные результаты	28
Заключение	30
Список литературы	30