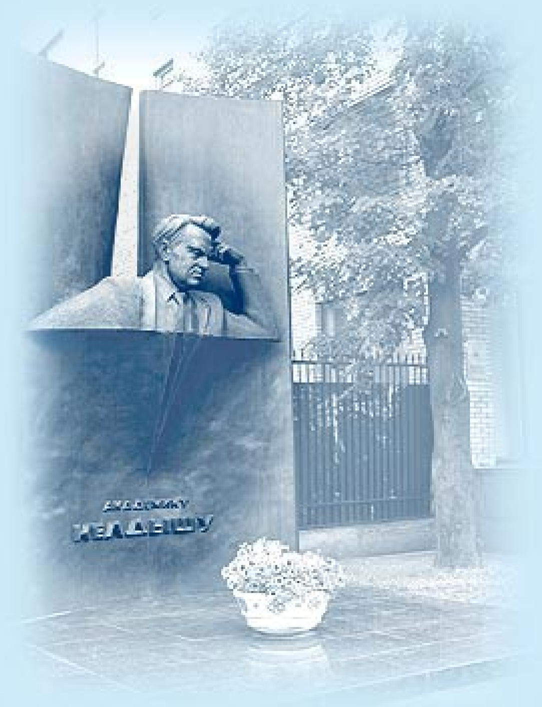
ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 14 за 2022 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

В.П. Варин

Некоторые приложения критерия Бруна

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Варин В.П. Некоторые приложения критерия Бруна // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2022. № 14. 22 с.
https://doi.org/10.20948/prepr-2022-14
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2022-14

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

В.П. Варин

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ КРИТЕРИЯ БРУНА

Москва, 2022

УДК 521.1+531.314

В.П. Варин. Некоторые приложения критерия Бруна. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2022.

Рассматриваются теоретико–числовые модификации алгоритмов преобразования рациональных последовательностей. Эти алгоритмы широко применяются в численном анализе. Мы применяем их для конструирования обыкновенных цепных дробей некоторых фундаментальных постоянных. Эти алгоритмы совместно с критерием Бруна позволяют в ряде случаев установить иррациональность нужных величин алгоритмически с использованием только рациональной арифметики.

Ключевые слова. Критерий Бруна. обыкновенные цепные дроби, доказательства иррациональности.

V.P. Varin. Some applications of Brun's criterion. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, 2022.

We consider some number–theoretic modifications of algorithms transforming rational sequences. These algorithms are widely applicable in numerical analysis. We use them for construction of the regular continued fractions for some fundamental constants. These algorithms together with the Brun's criterion allow in a number of cases to establish irrationality of the values algorithmically with the use of only the rational arithmetic.

Key words. Brun's criterion, regular continued fractions, irrationality proofs.

1. ВВЕДЕНИЕ

Данный препринт рекомендуется читать после либо вместе с предыдущим препринтом автора [35]. Здесь мы выводим некоторые следствия из опубликованных результатов, которые не вошли в [35] либо за недостатком места, либо по причине их недоработки.

В дальнейшем оба этих препринта предполагается выпустить как одну статью. Поэтому некоторое дублирование материала предыдущего препринта носит исключительно технический характер и нужно только для связности изложения.

Структура данного препринта повторяет [35] вплоть до названий разделов. Однако в каждом разделе оставлены только те факты, которые нужны для дальнейшего изложения. При этом нумерация формул независима от [35], но ссылки даются по номерам библиографии в [35], за исключением добавленных ссылок.

Раздел 5 является новым и содержит основные результаты данной публикации.

2. УСКОРЕНИЕ СХОДИМОСТИ В СМЫСЛЕ ДИРИХЛЕ

В отличие от обычно понимаемой скорости сходимости как, скажем, количества членов ряда, которые требуется просуммировать,чтобы получить желаемый результат, скорость сходимости в теории чисел понимается в смысле Дирихле, т.е. в смысле наилучшего диофантова приближения. Иными словами, последовательность рациональных чисел $\{p/q\}$ хорошо приближает вещественное число x, если $|p - q\,x|$ стремится к нулю. Поскольку знаменатели q в такой последовательности не ограничены (иначе x рационально), то необходимо, чтобы скорость сходимости измерялась величиной знаменателя q. Например,

$$\left|\frac{p}{q} - x\right| < \frac{1}{q^{1+\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0. \tag{1}$$

В этом случае число x должно быть иррациональным, так как в противном случае, т.е. $x = a/b$, $a, b \in \mathbb{N}$, получим последовательность натуральных чисел $|pb - qa|$, которая стремится к нулю.

Классический (слегка обобщенный) критерий иррациональности Бруна (см. [10]) состоит в следующем.

Пусть дана (a) возрастающая; или (b) убывающая ограниченная последовательность рациональных чисел

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \frac{p_n}{q_n}, \ldots,$$

где $q_n < q_{n+1}$, $n \geq 1$. Тогда эта последовательность имеет предел, т.е. $p_n/q_n \to B$, $n \to \infty$. Пусть последовательность

$$\frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1}, \frac{p_3 - p_2}{q_3 - q_2}, \dots, \frac{p_{n+1} - p_n}{q_{n+1} - q_n}, \dots,$$

является (a) убывающей; или (b) возрастающей. Тогда число B иррационально.

Данный критерий (сформулированный в [10] для случая (a)), по оценке самого Бруна, имеет весьма ограниченное применение. Однако он дает пример того, что приведение дробей может нарушить критерий иррациональности.

Рассмотрим последовательность

$$s(n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \left\{1, 2, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{65}{24}, \frac{163}{60}, \frac{1957}{720}, \frac{685}{252}, \frac{109601}{40320}, \frac{98641}{36288}, \dots\right\}, \tag{2}$$

которая стремится к числу $\mathbf{e}$, но для которой критерий Бруна очевидно нарушается. Однако если взять приводимую последовательность

$$s(n) = \frac{\mathbf{e}\,\Gamma(n+1,1)}{\Gamma(n+1)} = \left\{1, 2, \frac{5}{2}, \frac{16}{6}, \frac{65}{24}, \frac{326}{120}, \frac{1957}{720}, \frac{13700}{5040}, \dots\right\},$$

где $\Gamma()$ – это обычная и неполная Гамма-функции, то, как показал еще сам Брун (см. [10]), критерий иррациональности Бруна выполнен.

Заметим также, что ряд (2) является разложением Энгеля для числа $\mathbf{e}$ (см. [11]), поэтому автоматически сходится к иррациональному числу.

На самом деле, критерий Бруна оказывается значительно более вездесущим, чем это можно заключить по (весьма скудной) литературе об этом критерии. Справедлива следующая

Теорема. *Пусть дано произвольное иррациональное число* $0 < B < 1$ *и его разложение в обыкновенную цепную дробь. Тогда последовательности* (a) *четных;* (b) *нечетных подходящих дробей удовлетворяют критерию Бруна* (a) *и* (b) *соответственно.*

Доказательство. Любое иррациональное число $0 < B < 1$ однозначно раскладывается в обыкновенную цепную дробь по алгоритму Евклида:

$$B = \mathop{\mathbf{K}}_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}, \quad b_n \in \mathbb{N}.$$

Как известно, числители p_n и знаменатели q_n подходящих дробей удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\begin{cases} p_n = b_n\, p_{n-1} + p_{n-2}, & p_{-1} = 1,\ p_0 = 0, \\ q_n = b_n\, q_{n-1} + q_{n-2}, & q_{-1} = 0,\ q_0 = 1, \end{cases} \tag{3}$$

а последовательности $\{p_{2\,n}/q_{2\,n}\}$ и $\{p_{2\,n-1}/q_{2\,n-1}\}$ являются соответственно возрастающей и убывающей.

Критерии Бруна (a) и (b) для этих последовательностей записываются как

$$C_n^{(a)}=\frac{p_{2\,n+2}-p_{2\,n}}{q_{2\,n+2}-q_{2\,n}},\ C_{n+1}^{(a)}<C_n^{(a)},\quad C_n^{(b)}=\frac{p_{2\,n+1}-p_{2\,n-1}}{q_{2\,n+1}-q_{2\,n-1}},\ C_{n+1}^{(b)}>C_n^{(b)}.$$

Утверждение теоремы следует из следующих тождеств:

$$\frac{p_{2\,n+2}}{q_{2\,n+2}}-\frac{p_{2\,n}}{q_{2\,n}}=C_{n+1}^{(b)}-C_n^{(b)},\quad \frac{p_{2\,n+1}}{q_{2\,n+1}}-\frac{p_{2\,n-1}}{q_{2\,n-1}}=C_n^{(a)}-C_{n-1}^{(a)}.$$

На самом деле, это не два тождества, а одно, что видно, если подставить туда $n=m/2$. Тогда получим

$$\frac{p_{m+2}}{q_{m+2}}-\frac{p_m}{q_m}=\frac{p_{m+3}-p_{m+1}}{q_{m+3}-q_{m+1}}-\frac{p_{m+1}-p_{m-1}}{q_{m+1}-q_{m-1}}$$

и еще такое же равенство, где $m\to m-1$.

Последнее тождество тривиально проверяется заменой p_{m+3}, q_{m+3}, p_{m+1}, q_{m+1} по их рекуррентным формулам. Ч.Т.Д.

3. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Весьма популярный линейный метод ускорения сходимости – это экстраполяция Ричардсона (см. [3]). Мы изложим его в форме (предложенной Невиллем [15]), удобной для реализации в CAS.

Пусть дана последовательность $s(n)$, сходимость которой требуется ускорить. Выбирается монотонная последовательность $t(n)\to 0$, $n\to\infty$, которая моделирует скорость сходимости $s(n)$. Последовательность $t(n)$ можно рассматривать как условное «время», которое измеряет близость величины $s(n)$ к своему пределу в зависимости от близости величины $t(n)$ к нулю. Рассмотрим рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned}&R(n,0)=s(n),\\&R(n,k)=\frac{t(n+k)\,R(n,k-1)-t(n)\,R(n+1,k-1)}{t(n+k)-t(n)},\quad k>0.\end{aligned}$$

Последнюю формулу легко модифицировать так, чтобы $t(n)\to\infty$.

Пусть, например, $s(n)=P(t(n))$, где $P(x)=a_m\,x^m+\ldots+a_1\,x+a_0$ – это полином степени m. Тогда, как легко проверить, для любой последовательности $t(n)$, $R(n,k)\equiv a_0$ при $k\geq m$ и $n\in\mathbb{N}$.

Иными словами, метод Ричардсона точен на полиномиальных последовательностях в указанном смысле. Поэтому, если последовательность $s(n)$ хорошо приближается такими последовательностями и если удачно подобрать время $t(n)$, то последовательности $R(n,m)$, $n,m \in \mathbb{N}$, могут весьма быстро сходиться.

Метод Ричардсона, как и другие методы, рассмотренные ниже, весьма чувствителен к выбору времени $t(n)$, т.е. вспомогательной последовательности. Это относится как к скорости сходимости в обычном смысле, так и к скорости сходимости в смысле Дирихле. Никаких правил выбора $t(n)$, насколько нам известно, не существует.

Приведем пример, показывающий чувствительность метода Ричардсона к выбору вспомогательной последовательности $t(n)$.

Последовательность $H(n)-\ln n$, $n \to \infty$, стремится к константе Эйлера γ, где $H(n)$ – это гармоническое число. Поэтому и $H(n^2)-2\ln n \to \gamma$. Таким образом, получаем последовательность рациональных чисел $2\,H(n) - H(n^2) = \gamma + O(1/n)$. На самом деле удобнее взять последовательность

$$2\,H(n) - H(n^2+n) = \gamma + O(1/n^2). \tag{4}$$

Исходя из данной асимптотической оценки, возьмем $t(n) = 1/n^2$. Тогда получим

$$|\gamma - R(1,10)| < 0.56 \times 10^{-6},$$

где числитель и знаменатель числа $R(1,10)$ состоят из 74 цифр.

Теперь возьмем время $t(n) = 1/n/(n+1)$, которое имеет примерно ту же асимптотику. Тогда получим

$$|\gamma - R(1,10)| < 0.41 \times 10^{-15}, \tag{5}$$

где числитель и знаменатель числа $R(1,10)$ состоят из 72 цифр.

Приведем одно весьма полезное (но редко используемое) тождество

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C\left(\frac{x-a}{h}, k\right) \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k+j}\, C(k,j)\, f(a+j\,h), \tag{6}$$

которое представляет собой *ряд Ньютона*, или сумму *прямых* (при $h>0$), либо *обратных* (при $h<0$) конечных разностей. Здесь a – это произвольный вещественный параметр. При конечном суммировании rhs(6) – это интерполяционный полином Ньютона.

При $h \to 0$ формула (6) дает обычный ряд Тейлора в точке $x = a$.

Формула (6) может давать как сходящиеся ряды, т.е. разложения гладкой функции $f(x)$, так и расходящиеся асимптотические ряды.

Приведем пример использования ряда Ньютона для вычисления константы Эйлера–Гомпертца. Напомним, что

$$\{\mathbf{e}\,\Gamma(n,1)\} = \{\delta, 1, 2, 5, 16, 65, 326, 1957, 13700, 109601, \ldots\},\ n \in \mathbb{N}_0,$$

т.е. для $f(x) = \mathbf{e}\,\Gamma(x,1)$ значения $f(x)$ целочисленны при $x \in \mathbb{N}$. Причем они вычисляются по простой рекуррентной формуле, $f(n) = (n-1)\,f(n-1)+1$. Так как $f(0) = \delta$, то можно (попытаться) экстраполировать значения $f(n)$ в натуральных числах в число 0, т.е. выразить δ рядом Ньютона.

Формула (6) может давать сходящиеся ряды для константы δ. Возьмем, например, $f(x) = \mathbf{e}\,\Gamma(x,1)/\Gamma(x+1)$. Далее, как и раньше, положим $h = 1$, $a = 1$. Тогда получим

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C(x-1,k) \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k+j}\, C(k,j)\, f(j+1).$$

Подстановка $x = 0$ в последнюю формулу дает (после некоторого исследования)

$$\delta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L(k,1)}{k+1}, \tag{7}$$

где $L(n,x)$ – это полином Лагерра. Напомним, что

$$L(k,1) = \sum_{j=0}^{k} \frac{(-k)_j}{(j!)^2}.$$

Для значений полиномов Лагерра в $x = 1$ существует довольно сложная асимптотическая формула, которую мы опускаем. Из нее следует, что $L(k,1)/(k+1) = O(1/k^{5/4})$, т.е. ряд (7) сходится, хотя и медленно.

Используя рекуррентную формулу для полиномов Лагерра, получаем линейную однородную рекурсию для частичных сумм $s(n)$ ряда (7):

$$n\,(n+1)\,s(n) = (3\,n-1)\,n\,s(n-1) - (3\,n-1)\,(n-1)\,s(n-2) + (n-1)^2\,s(n-3),$$

где $s(0) = 1$, $s(1) = 1$, $s(2) = 5/6$. Эта рекурсия может быть преобразована стандартными средствами CAS в линейное ОДУ второго порядка (которое мы опускаем) для производящей функции последовательности $s(n)$. Полученное уравнение интегрируемо, так что имеем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} s(n)\,x^n = \frac{\mathbf{e}\,(\mathrm{Ei}(1,1) - \mathrm{Ei}(1,1/(1-x)))}{x\,(1-x)}.$$

Заметим, что полиномы Лагерра регулярно появляются при исследовании константы Эйлера–Гомпертца (см., например, [26]).

4. НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Закономерности в последовательности рациональных чисел часто бывают видны, если преобразовать ее в цепную дробь Эйлера (известную еще Д. Бернулли). Пусть дана сходящаяся последовательность $s(n)$. Рассмотрим ее как последовательность $s(n) = p_n/q_n$ подходящих дробей. Вычислим

$$\begin{aligned} a_1 &= p_1, \quad a_n = \frac{p_{n-1}\, q_n - p_n\, q_{n-1}}{p_{n-1}\, q_{n-2} - p_{n-2}\, q_{n-1}},\ n > 1, \\ b_1 &= q_1, \quad b_n = \frac{p_n\, q_{n-2} - p_{n-2}\, q_n}{p_{n-1}\, q_{n-2} - p_{n-2}\, q_{n-1}},\ n > 1, \end{aligned} \tag{8}$$

где $p_0 = 0$ и $q_0 = 1$. Тогда

$$s(n) = \mathop{\mathbf{K}}_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k}.$$

Перейдем к изложению ρ–алгоритма, который обычно используют для ускорения монотонных последовательностей, для которых ε–алгоритм неэффективен. Однако, как мы увидим, ρ–алгоритм работает и для знакопеременных рядов (упоминание чего мы не нашли в литературе).

Пусть дана последовательность $s(n)$ (например, частичных сумм ряда s). Выберем последовательность $t(n)$, $n \in \mathbb{N}$, моделирующую скорость сходимости $s(n)$ к своему пределу. Таким образом, рассматриваются сходящиеся ряды или последовательности. Считается, что ρ–алгоритм не применим к расходящимся рядам, хотя доказательство этого факта мы не нашли в литературе.

В отличие от метода Ричардсона (см. разд. 3) последовательность $t(n)$ может стремиться к нулю или к другой константе, или к бесконечности, а также быть осциллирующей в случае, если таковой является последовательность $s(n)$.

Построим двумерную таблицу $T(n,k)$, $n,k \in \mathbb{N}_0$, по рекуррентному соотношению

$$\begin{aligned} &T(n,k) = 0, \quad k < 0, \quad T(n,0) = s(n), \\ &T(n,k) = T(n+1,k-2) + \frac{t(n+k) - t(n)}{T(n+1,k-1) - T(n,k-1)}, \quad k > 0. \end{aligned}$$

Мы использовали данное обозначение потому, что ρ–алгоритм, на самом деле, идентичен алгоритму Тиле построения интерполяционной рациональной аппроксимации в виде цепной дроби. Мы обнаружили данный факт эмпирически, но он, разумеется, уже известен (см. [32]).

Данное свойство ρ–алгоритма сразу показывает его сходство и отличие от метода Ричардсона. В отличие от последнего, ρ–алгоритм точен на последовательностях значений рациональных функций (а значит, и полиномиальных).

Дадим обобщение алгоритма Тиле для построения интерполирующей цепной дроби.

Выберем значение $p \in \{-1, 0, 1, 2, \ldots\}$, которое является параметром. Пусть $s(n) = f(t(n+p))$, т.е. последовательность $s(n)$ является значениями функции $f(x)$ в точках $x = t(n+p)$, $n \in \mathbb{N}$. Положим

$$\begin{aligned} a_n &= x - t(n+p), \quad n \geq 1, \\ b_n &= T(p+1, n) - T(p+1, n-2), \quad n \geq 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Тогда цепная дробь

$$f_n(x) = b_0 + \mathop{\mathbf{K}}_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k} \tag{10}$$

по построению является рациональной функцией и $f_n(x) = f(x)$ в узлах интерполяции $x \in \{t(p+1), t(p+2), \ldots, t(p+n)\}$.

Таким образом, цепная дробь $f_n(x)$ обрывается в случае, если $f(x)$ является рациональной функцией.

Пусть теперь $\lim_{n\to\infty} t(n) = t_*$, где t_* пока конечно. Тогда бесконечная цепная дробь $f_\infty(t_*)$ сходится (вообще говоря) к значению $f(t_*)$. Например, при $t(n) \to 0$ для вычисления a_n и b_n сразу можно положить $x = 0$, и т.п.

Традиционно ρ–алгоритм используется при $t(n) \to \infty$, причем монотонно. Обычно берут $t(n) = n$ (что было в оригинальном ρ–алгоритме Винна (см. [33])). Так же как и для ε–алгоритма, вычисляются диагональные последовательности $T(j, 2\,n)$, но здесь $j \geq 0$. Величины $T(j, n)$ для нечетных n также являются вспомогательными.

Приведем пример применения алгоритма Тиле к осциллирующей последовательности, что для ρ–алгоритма считается недопустимым. Возьмем произведение Валлиса

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{5}\frac{6}{7}\frac{8}{7}\frac{8}{9}\ldots,$$

где общий член c_n имеет вид

$$c_n = \begin{cases} (n+1)/n, & n \text{ odd} \\ n/(n+1), & n \text{ even.} \end{cases}$$

Заметим, что мы могли бы попарно перемножить соседние члены этого произведения и получить монотонную последовательность (и сходный результат). Но мы возьмем осциллирующую последовательность произведений c_n с узлами интерполяции $t(n) = (-1)^n/(n+1)$. Выбор $t(n) = (-1)^n/n$ здесь был бы крайне неудачным, что априори ниоткуда не следует.

Выберем параметр $p = 0$ и положим $x = 0$ в (9). Тогда для $f_n(0)$ в (10) получим (после преобразования эквивалентности)

$$\frac{\pi}{2} = 2 - \frac{2}{5-}\,\frac{2}{7-}\,\frac{9}{9-}\,\frac{9}{11-}\,\frac{20}{13-}\,\frac{20}{15-}\,\frac{35}{17-}\,\frac{35}{19-}\,\frac{54}{21-}\,\frac{54}{23-}\ldots, \tag{11}$$

где закономерность в частных знаменателях очевидна, а для числителей

$$\{2,\, 9,\, 20,\, 35,\, 54, \ldots\} = \{(n+1)\,(2\,n-1),\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Данная цепная дробь лишь немного не дотягивает до критерия Дирихле (1). Имеем

$$\begin{gathered}\left|f_{10}(0) - \tfrac{\pi}{2}\right| < 0.23 \times 10^{-8},\\ \left|f_{20}(0) - \tfrac{\pi}{2}\right| < 0.44 \times 10^{-16}, \ldots\end{gathered}$$

причем

$$\begin{gathered}\left|\mathrm{num}(f_{10}(0)) - \mathrm{den}(f_{10}(0))\tfrac{\pi}{2}\right| \approx 0.070606,\\ \left|\mathrm{num}(f_{20}(0)) - \mathrm{den}(f_{20}(0))\tfrac{\pi}{2}\right| \approx 0.031318, \ldots.\end{gathered}$$

Применим ρ–алгоритм для вычисления $\zeta(2)$ по ряду

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}, \quad s(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2},$$

который, как известно, сходится очень медленно (Базельская проблема).

Возьмем $t(n) = n$ (как в оригинальном алгоритме Винна). Тогда для $s_0(n) = T(0, 2\,n)$ получим

$$\{s_0(n)\} = \left\{\frac{5}{3}, \frac{125}{76}, \frac{8705}{5292}, \frac{10975}{6672}, \frac{13327519}{8102160}, \frac{124308457}{75570480}, \frac{19427741063}{11810650320}, \ldots\right\}, \tag{12}$$

с невязками

$$\begin{gathered}|s_0(10)) - \zeta(2)| < 0.44 \times 10^{-20},\\ |s_0(40)) - \zeta(2)| < 0.90 \times 10^{-83}, \ldots\end{gathered}$$

причем

$$\begin{gathered}|\mathrm{num}(s_0(10)) - \mathrm{den}(s_0(10))\zeta(2)| < 0.11 \times 10^{-8},\\ |\mathrm{num}(s_0(40)) - \mathrm{den}(s_0(40))\zeta(2)| < 0.33 \times 10^{-17}, \ldots,\end{gathered}$$

т.е. мы получили также ускорение сходимости в смысле Дирихле, т.е. критерий (1) выполнен. Это же относится к другим диагональным аппроксимациям, хотя, например, последовательность $s_1(n) = T(1, 2\,n)$ лучше приближает $\zeta(2)$ численно, но хуже в смысле Дирихле.

Преобразуем теперь последовательность $s_0(n) = T(0, 2\,n)$ в цепную дробь Эйлера по формулам (8). Тогда получим (после преобразования эквивалентности)

$$\zeta(2) = \frac{5}{3+}\,\frac{1}{25+}\,\frac{16}{69+}\,\frac{81}{135+}\,\frac{256}{223+}\,\frac{625}{333+}\,\frac{1296}{465+}\,\frac{2401}{619+}\,\frac{4096}{795+}\,\frac{6561}{993+}\cdots,$$

где $a_1 = 5$, и $a_n = (n-1)^4$, $n > 1$; $b_n = 11\,n^2 - 11\,n + 3$, $n \geq 1$.

На самом деле, мы получили в точности цепную дробь Апери для $\zeta(2)$ (см. [5, 34]). Хотя сам Апери не привел ее в явном виде и данная цепная дробь не получила широкой известности, но она есть в [5] в виде своих подходящих дробей.

Таким образом, последовательность (12) известна в явном виде (см. [34]). Для удобства читателя приведем готовые формулы. Пусть

$$a(n) = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)^2\, C(n+k,k), \quad b(n) = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)^2\, C(n+k,k)\, c(n,k),$$

где

$$c(n,k) = 2\,\sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m-1}}{m^2} + \sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^{n+m-1}}{m^2\, C(n,m)\, C(n+m,m)}.$$

Тогда (12)$=\{b(n)/a(n)\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Данный алгоритм также демонстрирует чувствительность к выбору вспомогательной последовательности $t(n)$, что видно на следующем примере.

Применим ρ–алгоритм для вычисления $\zeta(3)$ по ряду

$$\zeta(3) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}, \quad s(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \tag{13}$$

с той же последовательностью $t(n) = n$. Тогда получим примерно такой же результат ускорения сходимости численно (т.е. примерно с теми же невязками), что и для $\zeta(2)$, но непригодный в смысле Дирихле.

Возьмем теперь $t(n) = n\,(n+1)$. Тогда для $s_0(n) = T(0, 2\,n)$ получим

$$\{s_0(n)\} = \left\{\frac{6}{5}, \frac{351}{292}, \frac{62531}{52020}, \frac{11424695}{9504288}, \frac{35441662103}{29484180000}, \frac{963652602684713}{801669704780000}, \ldots\right\}, \tag{14}$$

с невязками

$$|s_0(10)) - \zeta(3)| < 0.82 \times 10^{-30},$$
$$|s_0(40)) - \zeta(3)| < 0.12 \times 10^{-121}, \ldots,$$

причем

$$|\mathrm{num}(s_0(10)) - \mathrm{den}(s_0(10))\zeta(3)| < 0.30 \times 10^{-7},$$
$$|\mathrm{num}(s_0(40)) - \mathrm{den}(s_0(40))\zeta(3)| < 0.90 \times 10^{-18}, \ldots,$$

т.е. мы экспериментально установили иррациональность $\zeta(2)$ и $\zeta(3)$ с помощью классического алгоритма ускорения сходимости.

Преобразуем теперь последовательность $s_0(n) = T(0, 2\,n)$ для $\zeta(3)$ в цепную дробь Эйлера по формулам (8). Тогда получим (после преобразования эквивалентности)

$$\zeta(3) = \frac{6}{5-}\,\frac{1}{117-}\,\frac{64}{535-}\,\frac{729}{1463-}\,\frac{4096}{3105-}\,\frac{15625}{5665-}\,\frac{46656}{9347-}\,\frac{117649}{14355-}\,\frac{262144}{20893-}\ldots,$$

где $a_1 = 6$, и $a_n = -(n-1)^6$, $n > 1$; $b_n = 34\,n^3 - 51\,n^2 + 27\,n - 5$, $n \geq 1$.

На самом деле, мы получили в точности цепную дробь Апери для $\zeta(3)$ (см. [5, 34]). Ранее эта цепная дробь (как и аналогичная для $\zeta(2)$) выводилась гораздо более извилистым путем. Помимо [5], эта дробь была получена в [6] в результате ускорения сходимости цепной дроби Эйлера для ряда (13) с помощью серии преобразований Бауэра–Муира.

Таким образом, последовательность (14) также известна в явном виде (см. [34]). Для удобства читателя приведем готовые формулы. Пусть

$$a(n)=\sum_{k=0}^{n} C(n,k)^2\, C(n+k,k)^2, \quad b(n)=\sum_{k=0}^{n} C(n,k)^2\, C(n+k,k)^2\, c(n,k),$$

где

$$c(n,k)=\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^3}+\sum_{m=1}^{k}\frac{(-1)^{m-1}}{2\,m^3\,C(n,m)\,C(n+m,m)}.$$

Тогда (14)=$\{b(n)/a(n)\}$, $n\in\mathbb{N}$.

Заметим, что сам Апери не раскрыл источник своего вдохновения, т.е. не объяснил, как он пришел к последовательностям (12) и (14) (см. [4]).

Мы попытались также применить найденные аналогии для ускорения сходимости последовательностей

$$s(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\sigma}, \quad \sigma>3. \tag{15}$$

Однако они не работают.

Так, например, можно было ожидать, что выбор $t(n)=n\,(n+1)\,(n+2)$ приведет к успеху для $\zeta(4)$, но это не так. Выбор $t(n)=n$ оказался самым удачным, но только для численного ускорения сходимости. То же для $\zeta(5)$: выбор $t(n)=n\,(n+1)$ оказался самым удачным, но непригодным для ускорения сходимости в смысле Дирихле.

По-видимому, между $\zeta(2)$, $\zeta(3)$ и последующими значениями $\zeta(s)$, $s>3$, существует некий барьер, природа которого пока не ясна.

Это проявляется не только в конструировании быстро сходящихся рациональных приближений для этих констант. Другой пример дают асимптотические разложения полигамма функций (см., например, [17]). Эти разложения можно преобразовать в сходящиеся цепные дроби. При этом для $\psi_1(1)=\zeta(2)$ и $\psi_2(1)=-2\,\zeta(3)$ получаются просто устроенные дроби с легко выявляемыми закономерностями (см. [17]). Но для $\psi_3(1)$ и далее не удается получить ничего содержательного.

Асимптотические разложения полигамма функций использовались в [28] для конструирования эффективных рациональных аппроксимаций этих функций. Однако были предъявлены (без объяснения причин) только аппроксимации для $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ (см. [28, p. 229]).

По нашему мнению, аппроксимации для $\psi_3(x)$ и далее получаются просто слишком громоздкими и без выявленных закономерностей в их структуре. Поэтому они, вероятно, бесполезны.

Наконец, применим алгоритм Тиле к ускорению последовательности (4) с тем же временем $t(n) = 1/n/(n+1)$. Тогда получим, что цепные дроби $f_{10}(0)$ дают лучшую оценку, чем (5), для $p = 0, 1, 2, \ldots$ Причем порядок точности увеличивается вместе с p. Однако полученные дроби имеют очень большую длину, так что метод Ричардсона здесь более предпочтителен.

5. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ КРИТЕРИЯ БРУНА

Здесь мы рассмотрим некоторые теоретико–числовые модификации приведенных алгоритмов и их приложения (вместе с критерием Бруна) к доказательствам иррациональности.

Как мы видели, некоторые алгоритмы генерируют последовательности рациональных приближений, которые позволяют сразу сделать вывод об иррациональности их предела по критерию (1).

Однако мы также видели, что такие примеры, во-первых, очень редки, и, во-вторых, не ясно, как обобщить полученные результаты.

С другой стороны, эти алгоритмы могут давать исключительно хорошие рациональные приближения нужных констант, но численно, т.е. в обычном смысле. Иными словами, полученная последовательность непригодна для доказательства иррациональности нужной константы напрямую.

Обыкновенные цепные дроби дают наилучшие рациональные приближения нужной константы, причем в двух смыслах (см. [36]). Но может оказаться, что алгоритм ускорения сходимости дает на каждом шаге n (возможно, с запаздыванием, т.е. начиная с шага $m > 1$) лучшее рациональное приближение численно, чем n-я подходящая дробь этой константы.

Насколько нам известно, таких замеров скорости сходимости, например, для константы Апери никто не делал.

Смысл данных замечаний поясняет следующая

Лемма 1. *Пусть дано произвольное иррациональное число $x > 0$ и его разложение в обыкновенную цепную дробь. И пусть рациональное число y находится между двумя подходящими дробями числа x, p_n/q_n и p_{n+1}/q_{n+1}, $n \in \mathbb{N}$. Тогда подходящие дроби числа y совпадают с таковыми для числа x вплоть до n-й включительно.*

Доказательство очевидно. Число x можно записать как конечную цепную дробь $x = [b_0; b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}, r]$, где $0 < r < \infty$ – это некоторое вещественное число. Тогда

$$\frac{p_n}{q_n} = [b_0; b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}, 0], \quad \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = [b_0; b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}, \infty],$$

поэтому существует рациональное $0 < s < \infty$, такое, что

$$y = [b_0; b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}, s], \quad \text{Ч.Т.Д.}$$

Очевидным следствием леммы 1 является тот факт, что если последовательность $\{s(n)\}$ сходится к своему пределу x быстрее, чем последовательность подходящих дробей $\{p_n/q_n\}$ числа x (которую мы обозначим, как $\{K(x,n)\}$) (причем быстрее в обычном, численном смысле), то последовательность подходящих дробей $\{K(s(n),n)\}$ совпадает с таковой для числа x, т.е. $K(x,n) = K(s(n),n)$, $n > \text{const}$.

Проиллюстрируем это наблюдение на последовательности (2). Возьмем число $\mathbf{e}-2$. Тогда

$$\{K(\mathbf{e}-2,n)\} = \left\{1, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{7}, \frac{23}{32}, \frac{28}{39}, \frac{51}{71}, \frac{334}{465}, \frac{385}{536}, \frac{719}{1001}, \frac{6137}{8544}, \frac{6856}{9545}, \ldots\right\}, n \geq 1.$$

Предложение 1. *Последовательность* $\{s(n)-2\}$ (2) *сходится к своему пределу* $\mathbf{e}-2$ *быстрее, чем последовательность ее подходящих дробей.*

Поэтому, согласно лемме 1, последовательность подходящих дробей числа $\mathbf{e}-2$ (начиная с $n=4$) можно генерировать прямо по последовательности частичных сумм $\{s(n)-2\}$ (2). Разумеется, это пока что экспериментальный факт. Мы проверили его до $n = 100$.

Этот пример объясняет, почему существует столько простых доказательств иррациональности числа $\mathbf{e}$. Иррациональность этого числа прямо следует из его разложения (2) в указанном нами смысле, так как последовательности подходящих дробей удовлетворяют критериям Бруна (см. теорему в разд. 2).

По-видимому, это ситуация является типичной, т.е. последовательность подходящих дробей иррационального числа x сходится к своему пределу (вообще говоря) медленнее, чем последовательность частичных сумм ряда Энгеля числа x (см. [11]). Мы проверили это наблюдение для некоторых известных констант.

В то же время легко построить контрпример, например

$$v = [1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,\ldots] = \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 2\cdot 3} + \ldots.$$

Это разложение Энгеля, как можно проверить, сходится заметно медленнее, чем последовательность $\{K(v,n)\}$.

Заметим, что, во-первых, вычисление любой подходящей дроби рационального числа (например, на компьютере) – это вполне детерминистский процесс, основанный на алгоритме Евклида, и он всегда конечен. Для иррационального числа, т.е. практически для числа, заданного в плавающей арифметике, это всегда не так. Иными словами, мы не можем строго гарантировать правильность всех найденных подходящих дробей, даже если есть возможность увеличивать разрядную сетку.

В рациональной арифметике все эти проблемы со «стохастичностью» не существуют, и вычисления можно считать доказательными.

Во-вторых, само число x, иррациональность которого под вопросом, вообще не участвует в данной вычислительной схеме. Число x получается как предел последовательности, которая выглядит как (а значит, и является, см. лемму 2 ниже) последовательностью подходящих дробей некоторого числа, которое и есть x. Иррациональность при этом автоматически следует из критериев Бруна (см. теорему в разд. 2). Поэтому доказательством иррациональности числа x в данной ситуации было бы доказательство того, что данный процесс не обрывается и не стабилизируется.

Лемма 2. *Пусть дана сходящаяся последовательность рациональных чисел $s(n) = p_n/q_n$. Тогда она является (начиная с некоторого индекса n) последовательностью подходящих дробей своего предела x тогда и только тогда, когда*

$$\frac{p_n - p_{n-2}}{p_{n-1}} = \frac{q_n - q_{n-2}}{q_{n-1}} = b_n \in \mathbb{N}.$$

При этом b_n являются частными знаменателями (начиная с некоторого индекса n) в разложении числа x в обыкновенную цепную дробь.

Доказательство следует из рекуррентного соотношения (3). Ч.Т.Д.

Заметим также, что в условиях леммы 2 цепная дробь Эйлера, вычисленная для этой последовательности по формулам (8), автоматически будет иметь (начиная с некоторого индекса n) частные числители $a_n = 1$, что проверяется простой выкладкой.

И, наконец, в случае, если не все b_n в лемме 2 окажутся целыми, эти члены последовательности можно просто опустить. Цепная дробь Эйлера, полученная из этой подпоследовательности по формулам (8), окажется некоторым сжатием обыкновенной цепной дроби числа x.

Приведем простой пример, как работают леммы 1 и 2 вместе. Рассмотрим уравнение

$$f(x) = x^3 - 2 = 0,$$

корнем которого является $x_* = \sqrt[3]{2}$. Положим $x_0 = 1$ и

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2}{3\,x_n^2}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

что является методом Ньютона решения нелинейного уравнения $f(x) = 0$.

Метод Ньютона, как известно, имеет квадратичную сходимость. Поэтому последовательность $K(x_n, n)$ даст подходящие дроби числа $\sqrt[3]{2}$. Однако сходимость оказывается столь быстрой, что значительно проще использовать модификацию метода Ньютона

$$x_{n+1} = K\left(x_n - \frac{x_n^3 - 2}{3\,x_n^2}, n+1\right) \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Тогда получим все подходящие дроби $x_n = K(\sqrt[3]{2}, n)$, $n \geq 1$ числа $\sqrt[3]{2}$. Частные знаменатели b_n, $n \geq 3$ получим по лемме 2:

$$\{b_n\} = \{5, 1, 1, 4, 1, 1, 8, 1, 14, 1, 10, 2, 1, 4, 12, 2, 3, 2, 1, 3, 4, 1, 1, 2, 14, 3, 12, 1, \ldots\}.$$

Этот метод генерации подходящих дробей числа x с использованием только рациональной арифметики и с сертификатом качества (лемма 2) имеет очевидные преимущества по сравнению с методами генерации подходящих дробей, использующими априорную информацию о числе x и плавающую арифметику.

Как известно, алгебраические иррациональности хуже приближаются рациональными числами, чем трансцендентные. Поэтому весьма вероятно, что метод Ньютона в сочетании с леммами 1, 2 дает эффективный способ разложения корней полиномиальных уравнений в обыкновенные цепные дроби. Например, для полинома $f(x) = x^5 - 2\,x^4 + 7\,x^3 + 3\,x^2 - 1$, имеющего корень $x_* \approx 0.420232964 \approx 2/5$, получим этим способом все подходящие дроби $K(x_*, n)$, начиная со второй. В частности, оборвав цепную дробь перед (локально) большим частным знаменателем, получим рациональное приближение

$$\left|x_* - \frac{108}{257}\right| < 0.5 \times 10^{-6}.$$

Дадим еще один пример для трансцендентного уравнения. Рассмотрим уравнение

$$f(x) = \cos x - \sin x = 0,$$

корнем которого является $x_* = \pi/4$. Положим $x_0 = 1$ и

$$x_{n+1} = K\left(x_n + \frac{P(x_n, n+1)}{Q(x_n, n+1)}, n+1\right) \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

где

$$P(x,n) = \sum_{k=0}^{2\,n} \frac{c_{1,k}\,x^k}{k!}, \quad Q(x,n) = \sum_{k=0}^{2\,n} \frac{c_{2,k}\,x^k}{k!}, \tag{16}$$

и

$$c_{1,n} = \begin{cases} -1, & [(n+1)/2],\ \text{odd} \\ \ \ 1, & [(n+1)/2],\ \text{even.} \end{cases} \qquad c_{2,n} = \begin{cases} -1, & [n/2],\ \text{odd} \\ \ \ 1, & [n/2],\ \text{even.} \end{cases}$$

Здесь $P(x,n)$ и $Q(x,n)$ в (16) – это отрезки рядов Тейлора для функций $\cos x - \sin x$ и $\cos x + \sin x$ соответственно. Тогда получим все подходящие дроби $x_n = K(\pi/4, n)$, $n \geq 1$ числа $\pi/4$, причем верхние показатели суммирования в (16) не могут быть уменьшены (иначе получим не все подходящие дроби). Частные знаменатели b_n, $n \geq 3$ получим по лемме 2:

$$\{b_n\} = \{1, 1, 1, 15, 2, 72, 1, 9, 1, 17, 1, 2, 1, 5, 1, 1, 10, 1, 2, 2, 20, 1, 5, 1, 1, 1, 3, 3 \ldots\}.$$

Применим леммы 1, 2 вместе с нашими наблюдениями к некоторым рациональным последовательностям, полученным в предыдущих разделах.

Цепная дробь (11), полученная с помощью алгоритма Тиле из произведения Валлиса, сходится несколько медленнее (в обычном смысле), чем последовательность подходящих дробей числа $\pi/2$. Однако последовательность четных подходящих дробей дроби (11), как оказалось, сходится быстрее, чем это может обеспечить обычная цепная дробь числа $\pi/2$. Поэтому подходящие дроби последней можно генерировать как $K(\pi/2, n) = K(f_{2n}(0), n)$, $n \geq 1$, где $f_n(0)$ вычисляются по формуле (9).

Последовательность (12), которая совпадает с последовательностью подходящих дробей дроби Апери для числа $\zeta(2)$ (см. [5]), дает все подходящие дроби константы $\zeta(2)$, т.е. $K(\zeta(2), n) = K(s_0(n), n)$, $n \geq 1$.

Последовательность (14), которая совпадает с последовательностью подходящих дробей дроби Апери для числа $\zeta(3)$ (см. [5]), дает все подходящие дроби константы $\zeta(3)$, начиная со второй, т.е. $K(\zeta(3), n) = K(s_0(n), n)$, $n \geq 2$.

Для последующих значений $\zeta(\sigma)$, $\sigma > 3$, как было отмечено, не удается получить последовательности рациональных приближений, которые удовлетворяли бы критерию (1). Однако это не означает, что полученные приближения плохи. Напротив, они весьма хороши в обычном, численном смысле.

Как оказалось, для ускорения последовательностей (15) по ρ-алгоритму нужно взять

$$t(n) = \begin{cases} n\,(n+1), & \sigma \text{ odd} \\ n, & \sigma \text{ even.} \end{cases}$$

Никакой другой выбор $t(n)$ не давал даже похожих результатов.

Последовательность $s_0(n) = T(0, 2\,n)$ для числа $\zeta(4)$, полученная по ρ-алгоритму, дает все подходящие дроби константы $\zeta(4)$, начиная с третьей, т.е. $K(\zeta(4), n) = K(s_0(n), n)$, $n \geq 3$. При этом диагональные последовательности $s_k(n) = T(k, 2\,n)$, $k > 0$ сходятся быстрее, чем $s_0(n)$, но имеют большую длину (как и для последующих значений $\zeta(s)$).

Подчеркнем, что данный алгоритм корректно определен и не зависит от априорного знания чего-либо о константах $\zeta(s)$.

Для констант $\zeta(5)$, $\zeta(6)$, $\zeta(7)$ мы сгенерировали таким образом все их подходящие дроби (до 100-й включительно), начиная с третьей, по их последовательностям $s_0(n) = T(0, 2\,n)$. За исключением $K(s_0(42), 42) - K(\zeta(6), 42) \approx 0.1670026257 \times 10^{-40}$.

Для константы $\zeta(8)$ по какой-то причине подходящие дроби получаются только начиная с седьмой. Но для $\zeta(9)$ они получены начиная с четвертой.

Вообще, $\zeta(2\,n)$, как оказалось, приближаются хуже, чем $\zeta(2\,n+1)$, $n \geq 1$, что видно уже по приближениям, полученным Апери в [5]. Наши результаты лишь подтверждают эту тенденцию. Вероятно, это как-то связано с тем, что величины $\zeta(2\,n+1)$ являются, в каком-то смысле, «более трасцендентными», чем $\zeta(2\,n)$.

Наконец, вернемся к ускорению последовательности (4) (см. также последний абзац разд. 4). Последовательность $s_1(n) = R(1, n)$ для константы Эйлера γ, полученная по методу Ричардсона (см. разд. 3), дает все подходящие дроби константы γ, т.е. $K(\gamma, n) = K(s_1(n), n)$, $n \geq 1$. Мы проверили это до $n = 100$. Частные знаменатели b_n, $n \geq 3$ получим по лемме 2, а $b_1 = b_2 = 1$ получим из уравнений

$$K(s_1(1), 1) = 1 = \frac{1}{b_1}, \quad K(s_1(2), 2) = \frac{1}{2} = \frac{1}{b_1 + \dfrac{1}{b_2}},$$

т.е. для $n \in \mathbb{N}$, $\{b_n\} =$

$$\{1, 1, 2, 1, 2, 1, 4, 3, 13, 5, 1, 1, 8, 1, 2, 4, 1, 1, 40, 1, 11, 3, 7, 1, 7, 1, 1, 5, 1, 49, \ldots\}.$$

При этом

$$\gamma - K(\gamma, 100) \approx 0.999814337 \times 10^{-95}, \quad \gamma - s_1(100) \approx -0.409331070 \times 10^{-135}.$$

Заметим, что ранее алгоритмы вычисления обыкновенной цепной дроби константы γ использовали плавающую арифметику и предварительное вычисление этой константы по другим алгоритмам с очень высокой точностью (см., например, [37]).

Как мы видели, леммы 1, 2 и теорема в разд. 2 прямо указывают на связь скорости сходимости ряда (или последовательности) с иррациональностью его суммы (ее предела).

Разумеется, эта связь была отмечена уже давно и многими авторами (см. [38] и ссылки там). Однако это было сделано совершенно в другом контексте.

Так, в [38] был дан «в определенном смысле неулучшаемый» критерий иррациональности суммы ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n}, \quad a_n, b_n \in \mathbb{N}: \quad a_{n+1} > \left(a_n^2 - a_n\right) \frac{b_{n+1}}{b_n} + 1,\ n > \mathrm{const}, \tag{17}$$

который является переформулировкой критерия Бруна. Этот же критерий можно получить, преобразовав этот ряд в цепную дробь Эйлера и применив критерий Лежандра (см. [35]).

Однако критерий (17) предъявляет очень сильно завышенные требования к скорости сходимости, так как ряд (2) ему, очевидно, не удовлетворяет.

Для константы Эйлера γ можно предъявить (в явном виде) последовательность рациональных чисел, которая сходится как угодно быстро. Для этого следует использовать прием, который мы применили в разд. 3 для последовательности (4). Например, для $n \in \mathbb{N}$,

$$s(n) = (n+1)\,H(2^n) - n\,H(2^{n+1}) = \gamma + \frac{1}{4}\frac{n+2}{2^n} - \frac{1}{48}\frac{3\,n+4}{2^{2\,n}} + O\Big(\frac{1}{2^{4\,n}}\Big)\,.$$

Ясно, что так можно получить асимптотику рациональной последовательности $s(n) \to \gamma$, которая будет сильнее любой наперед заданной асимптотики. При этом числители и знаменатели в таких последовательностях известны в явном виде, так как

$$H(n) = \frac{(-1)^{n+1}\,S_1(n+1,2)}{n!}.$$

Таким образом, если удастся получить каким-либо способом априорную оценку скорости сходимости подходящих дробей данного числа, то доказательством его иррациональности было бы предъявление последовательности рациональных чисел, которая сходится заведомо быстрее.

Список литературы

[1] *Cohen H., Villegas F.R., Zagier D.* Convergence Acceleration of Alternating Series // Experimental Mathematics, V. 9. N. 1. p. 3–12. (2000).

[2] *Borwein J., Bailey D., Gigensohn R.* Experimentation in Mathematics: computational paths to discovery. A K Peters, Natick. (2004).

[3] *Brezinski C.* Convergence acceleration during the 20th century // Journal of Computational and Applied Mathematics, V. 122. p. 1–21. (2000).

[4] *van der Poorten A.* A proof that Euler missed… Apery's proof of the irrationality of $\zeta(3)$ // The mathematical Intelligencer, Berlin. V. 1. p. 195–203. (1978).

[5] *Apéry R.* Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ // Astérisque, V. 61, p. 11–13. (1979).

[6] *Belabas K., Cohen H.* Numerical Algorithms for Number Theory. Mathematical Surveys and Monographs, V. 254. Amer. Math. Soc. (2021).

[7] *Finch S. R.* Mathematical Constants. Encycl. of Math. and its Aappl. 94, Cambridge Univ. Press. (2003).

[8] *Weniger E.J.* Nonlinear sequence transformations for the acceleration of convergence and the summation of divergent series // Computer Physics Report. North-Holland. Amsterdam. V. 10. pp. 189–371. (1989).

[9] *Weniger E.J.* Nonlinear sequence transformations for the acceleration of convergence and the summation of divergent series // [arXiv:math/0306302v1] (2003). (http://arXiv.org/abs/math/0306302v1).

[10] *Brun V.* Ein Satz über Irrationalität // Arkiv for Mathematik og Naturvidenskab (Kristiania), V. 31. N. 3. p. 3–6. (1910).

[11] *Perron O.* Irrazionalzahlen. Göschens Lehrbücherei. Berlin, Leipzig. (1921).

[12] *Legendre A.M.* Èlements de Gèomètrie. (2em. ed). Chez Fermin Didot Père et Fils. Paris. (1823).

[13] *Perron O.* Die Lehre von den Kettenbrüchen. Teubner. Berlin. (1913).

[14] *Brezinski C.* History of Continued Fractions and Padé Approximants. Springer Series in Computational Mathematics. V. 12. Springer-Verlag. Berlin, etc. (1991).

[15] *Neville E.H.* Iterative interpolation // J. Indian Math. Soc. V. 20. pp. 87–120 (1934).

[16] *Knopp K.* Theory and applications of infinite series. Blackie & Son. London. (1946).

[17] *Варин В.П.* Факториальное преобразование некоторых классических комбинаторных последовательностей // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т.59. N 6. С. 1747-1770. (2018).

[18] *Nielsen N.* Die Gammafunktion. Teubner, Leipzig, Berlin. (1906) = Chelsea, New York, (1965).

[19] *Watson G. N.* The transformation of an asymptotic series into a convergent series of inverse factorials // Rend. Circ. Mat. Palermo. V. 34. pp. 41–88. (1912).

[20] *Stieltjes T.J.* Recherches sur les fractions continues // Annales de la faculte des sciences de Toulouse 1re serie. V. 8. N. 4. pp. J1–J122. (1894) & 6e serie. V. 4. N. 4. pp. A5–A47. (1895).

[21] *Euler L.* De seriebus divergentibus // Novi Comment. Acad. Sci. Petropolitanae. V. 5, pp. 205–237. (1754/55). reprint: Opera omnia. Ser. I. V. 14. Teubner, Leipzig. pp. 585–617. (1925).

[22] Sloane online encyclopedia of integer sequences. (http://oeis.org).

[23] *Gourdon X., Sebah P.* Collection of formulae for Euler's constant γ // (numbers.computation.free.fr/Constants/constants.html). (2008).

[24] *Kowalenko V.* Properties and Applications of the Reciprocal Logarithm Numbers // Acta Appl. Math. V. 109, pp. 413–437. (2010).

[25] *Coffey M.W., Sondow J.* Rebuttal of Kowalenko's paper as concerns the irrationality of Euler's constant // [arXiv:1202.3093v2] (2012). (http://arxiv.org/abs/1202.3093v2).

[26] *Aptekarev A.I.* On linear forms containing the Euler constant // [arXiv:0902.1768v2] (2009). (http://arxiv.org/abs/0902.1768v2).

[27] *Хованский А.Н.* Приложение цепных дробей к вопросам приближенного анализа. Гос. издат. технико-теоретической лит. Москва. (1956).

[28] *Cuyt A., et all.* Handbook of Continued Fractions for Special Functions. Springer. (2008).

[29] *Press W. H., et all.* Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing, 3rd ed. Cambridge University Press. (2007).

[30] *Wimp J.* Sequence transformations and their applications. Academic Press. New-York. etc. (1981).

[31] *Wynn P.* On the Convergence and Stability of the Epsilon Algorithm // SIAM Journal on Numerical Analysis. V. 3. N. 1. pp. 91–122 (1966).

[32] *Brezinski C., Norman F.A., Redivo-Zaglia M.* The Legacy of Peter Wynn // Mathematics. V. 9. N. 1240. pp. 1–45. (2021). (https://www.mdpi.com/journal/mathematics).

[33] *Wynn P.* On a Procrustean technique for the numerical transformation of slowly convergent sequences and series // Proc. Cambridge Phil. Soc. V. 52. pp. 663–671. (1956).

[34] *Cohen H.* Demonstration de l'irrationalite de $\zeta(3)$ (d'apres R. Apery) // Seminaire de theorie des nombres de Grenoble, V. 6. exp.N. 6. pp. 1–9. (1977-1978).

[35] *Варин В.П.* Преобразование последовательностей в доказательствах иррациональности некоторых фундаментальных констант // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. N. 84. (2021).

[36] *Хинчин А.Я.* Цепные дроби. Госиздат. физ. мат. лит. Москва. (1961).

[37] *Brent R.P.* Computation of the Regular Continued Fraction for Euler's Constant // Mathematics of Computation, V. 31, N. 139. pp. 771–777. (1977),

[38] *Badea C.* A theorem on irrationality of infinite series and applications // ACTA ARITHMETICA LXIII. 4 (1993).