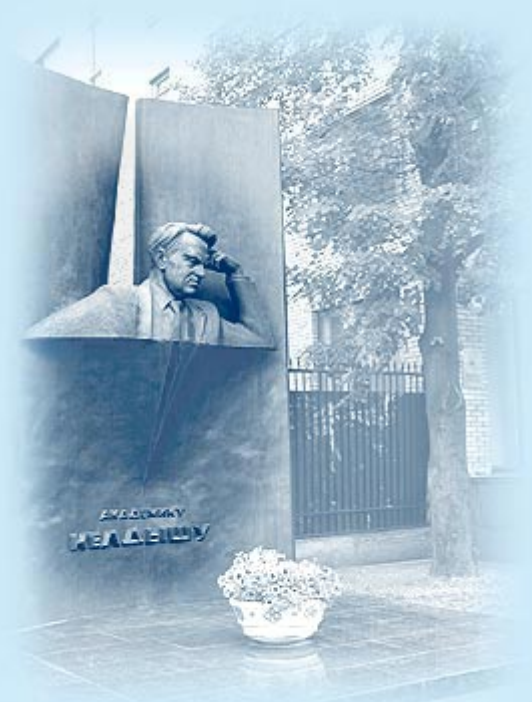




ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 13 за 2022 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

А.Ю. Круковский, Ю.А. Повещенко,
В.О. Подрыга, Д.С. Бойков

Оценки сходимости
некоторых итерационных
алгоритмов численного
моделирования двумерных
уравнений магнитной
гидродинамики

Статья доступна по лицензии
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Оценки сходимости некоторых итерационных алгоритмов численного моделирования двумерных уравнений магнитной гидродинамики / А.Ю. Круковский [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2022. № 13. 16 с.
<https://doi.org/10.20948/prepr-2022-13>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2022-13>

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

**А.Ю. Круковский, Ю.А. Повещенко, В.О. Подрыга,
Д.С. Бойков**

**Оценки сходимости некоторых
итерационных алгоритмов численного
моделирования двумерных уравнений
магнитной гидродинамики**

Москва — 2022

Круковский А.Ю., Повещенко Ю.А., Подрыга В.О., Бойков Д.С.

Оценки сходимости некоторых итерационных алгоритмов численного моделирования двумерных уравнений магнитной гидродинамики

В настоящей работе исследуется сходимость примененных к полностью консервативным разностным схемам (ПКРС) двумерной магнитной гидродинамики методов отдельного и комбинированного решения групп разностных уравнений, разделенных по физическим процессам. В работе получены соответствующие оценки сходимости итерационных процессов для всего семейства ПКРС. Показана область применимости данного метода. Справедливость полученных в работе оценок подтверждена численными расчетами. В зависимости от скорости сходимости итерационного процесса на основе определенных в данной работе оценок были выработаны рекомендации по использованию одного из двух исследуемых методов (отдельного или комбинированного решения групп разностных уравнений).

Ключевые слова: двумерная МГД, семейство полностью консервативных разностных схем, сходимость итерационного процесса.

Krukovskiy A.Yu., Poveschenko Yu.A., Podryga V.O., Boykov D.S.

Convergence estimates of some iterative algorithms for numerical modeling of two-dimensional equations of magnetohydrodynamics

In this work, the convergence of the methods of separate and combined solution of difference equations groups separated by physical processes, applied to completely conservative difference schemes (CCDS) of two-dimensional magnetohydrodynamics, is studied. The corresponding estimates for the convergence of iterative processes for the entire family of CCDS are obtained. The area of applicability of this method is shown. The validity of the estimates obtained in the work is confirmed by numerical calculations. Depending on the velocity of convergence of the iterative process, based on the estimates determined in this work, recommendations were developed on the use of one of the two methods under study (separate or combined solution of groups of difference equations).

Key words: two-dimensional MHD, family of completely conservative difference schemes, convergence of iterative process.

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Национального научного фонда Болгарии, проект № 20-51-18004.

Funding: The reported study was funded by RFBR and National Science Foundation of Bulgaria (NSFB), project number 20-51-18004.

1. Введение

При решении задач двумерной магнитной гидродинамики (МГД) необходимо определить специфику задачи и выбрать численный метод их решения. Созданный на основе такого численного метода комплекс программ способен решать сравнительно небольшой класс задач, а другие задачи решаются либо неэффективно, либо вообще не могут быть решены. Создание же универсального алгоритма для достаточно широкого класса задач обычно не приводит к хорошим результатам из-за его чрезвычайной сложности и громоздкости. Кроме того, применение такого алгоритма к конкретной задаче требует машинных ресурсов гораздо больше, чем решение той же задачи с помощью учитывающих его специфику алгоритмов. В случае проведения широкомасштабного вычислительного эксперимента (ВЭ) это может существенно тормозить работу.

Полностью консервативные разностные схемы (ПКРС) гарантируют выполнение как разностных аналогов основных законов сохранения, так и ряда дополнительных сеточных соотношений [1]. Неявность разностных схем существенно снижает ограничения на величину временного шага. При проведении широкомасштабного ВЭ большое значение имеют машинные ресурсы, затраченные на один расчет. Это время зависит от величины шага по времени на протяжении всего расчета и его "стоимости". Требования к алгоритмам и их программным реализациям можно сформулировать так: 1) экономичность, т.е. минимальные машинные ресурсы при расчете одной задачи; 2) универсальность, т.е. алгоритм должен обеспечивать проведение расчетов в достаточно широкой предметной области; 3) гибкость, т.е. переход от одной постановки задачи к другой должен требовать минимальных затрат труда и времени.

В работе [2] исследовалась сходимость примененного к неявной ПКРС МГД [2, 3] метода комбинированного решения групп разностных уравнений, разбитых по физическим процессам ("динамическая группа", "тепловая группа" и "электромагнитная группа"). В этом методе три группы объединяются следующим образом: в первую "новую" группу включаются уравнения динамики и электромагнитного поля, а вторая группа состоит из уравнений энергии. При этом уравнение состояния является уравнением-связкой между двумя группами. Уравнения этих групп решаются методом Ньютона относительно выделенных переменных, а остальные переменные считаются "замороженными" и берутся с предыдущей итерации. Последовательное решение этих групп разностных уравнений связано внешним итерационным процессом, сходимость которого определяется точностью выполнения общего баланса энергии. Полученные в работе результаты подтверждены численными расчетами.

Как показали расчеты практических задач [3-7], наряду с неявными

разностными схемами часто целесообразно использовать схемы с весами по времени [1]. Основным недостатком явных схем является существенное ограничение на временной шаг для достаточно широкого класса задач [1]. Целью данной работы является исследование сходимости итерационных алгоритмов для схем с весами, чтобы оценить ограничения на временной шаг, которые дает выбор алгоритма решения системы разностных уравнений. Это позволит выбрать для конкретной задачи наиболее эффективную разностную схему, и для этой разностной схемы будут выработаны рекомендации при использовании алгоритмов решения систем разностных уравнений (причем даже для одной задачи в различные моменты времени более эффективными могут оказаться разные алгоритмы).

Наряду с методом комбинированного решения групп разностных уравнений в работе рассматривается также метод раздельного решения групп разностных уравнений.

2. Исходная система уравнений

Рассмотрим обычную запись системы уравнений МГД с соответствующими уравнениями состояния в декартовой системе координат [8]:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \operatorname{div} \vec{U} &= 0, \\
 \rho \frac{d\vec{U}}{dt} &= \operatorname{grad} P + \frac{1}{c} [\vec{j} \times \vec{B}], \\
 \rho \frac{d}{dt} \left(\varepsilon + \frac{\vec{U}^2}{2} \right) &= \operatorname{div}(\rho \vec{U}) + \vec{E} \cdot \vec{j} + \operatorname{div} \vec{W}, \\
 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= -c \cdot \operatorname{rot} \vec{E}, \\
 \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \\
 \vec{E} &= c \left(\frac{1}{4\pi\sigma} \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c^2} [\vec{U} \times \vec{B}] \right), \\
 \vec{j} &= \sigma \left(\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{U} \times \vec{B}] \right) = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \vec{B}, \\
 \vec{W} &= -\kappa \operatorname{grad} T, \\
 P &= \rho RT, \quad \varepsilon = \frac{P}{(\gamma - 1)\rho}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь t – время, $\vec{U}(u, w, v)$ – скорость вещества, ρ – плотность; R – газовая постоянная, γ – показатель адиабаты, P – газодинамическое давление, T – температура, ε – удельная внутренняя энергия, отнесенная к единице массы,

$\vec{W}(W_x, W_y, W_z)$ – поток тепла через поперечное сечение области, $\vec{B}(B_x, B_y, B_z)$ – вектор магнитной индукции, $\vec{E}(E_x, E_y, E_z)$ – вектор электрического поля, $\vec{j}(j_x, j_y, j_z)$ – плотность тока, σ и κ – коэффициенты электро- и теплопроводности, c – скорость света в вакууме.

3. Разностная схема

Отметим следующее обстоятельство. Анализ сходимости итерационного процесса решения системы разностных уравнений МГД методом отдельных прогонок был проведен для одномерного плоского случая в [9] и для двумерного случая в декартовых координатах [2]. Рассматривался случай $\sigma=\infty$ и $\kappa=0$. Было показано, что для неявных схем процесс будет безусловно устойчивым лишь при выполнении условия:

$$\frac{B^2}{8\pi} \leq (2 - \gamma)P, \quad (2)$$

а при условии $\frac{B^2}{8\pi} > (2 - \gamma)P$ условие устойчивости в одномерном случае имеет вид

$$\Delta t < \frac{\Delta m}{2\rho \sqrt{\frac{B^2}{8\pi\rho} + (\gamma - 2)\frac{P}{\rho}}}, \quad (3)$$

где Δm – масса ячейки, Δt – шаг по времени.

В двумерном случае условие устойчивости выглядит следующим образом:

$$\Delta t < \frac{\Delta m}{2\rho(h_x + h_y) \sqrt{(\gamma - 2)\frac{P}{\rho} + \frac{B^2}{8\pi\rho}}}, \quad (4)$$

где h_x, h_y – шаги по пространству (определены в п. 4).

Данное ограничение на временной шаг для широкого класса задач оказывается весьма жестким. Заметим, что оно возникает при решении методом отдельных прогонок уравнений динамики и электромагнитного поля, например, в рамках адиабатической МГД. Дальнейший учет диссипативных процессов, как показано в [9], ослабляет ограничение на временной шаг. Поэтому при исследовании устойчивости процесса решения системы разностных уравнений МГД методом комбинированного решения будем считать, что диссипативные процессы отсутствуют. Кроме того, ограничимся случаем течения в магнитном поле, ориентированном перпендикулярно плоскости течения ($B_x=B_y=0$).

Введем пространства сеточных функций, определенных в узлах и ячейках разностной сетки, обозначив их H_Ω и H_ω соответственно. Для записи сеточных

функций $f \in H_\Omega$ будем использовать индексы (i,j): $f_{ij} = f \in H_\Omega$. Сеточные функции $g \in H_\omega$ будем отмечать индексами (m,l): $g_{ml} = g \in H_\omega$. Положим массы всех ячеек $\Delta m_{ml} = \Delta m = \text{const}$.

В предположениях, описанных выше, система (1) аппроксимируется неявной ПКРС в лагранжевых переменных:

$$\Delta m u_t = \sum_{n \in \mathcal{M}_2} \left(\frac{\partial S_n}{\partial x} \right) \left(R(\hat{\rho}_n \hat{T}_n \sigma_1 + (1 - \sigma_1) \rho_n T_n) + \frac{\hat{B}_n B_n}{8\pi} \right), \quad (5)$$

$$\Delta m w_t = \sum_{n \in \mathcal{M}_2} \left(\frac{\partial S_n}{\partial y} \right) \left(R(\hat{\rho}_n \hat{T}_n \sigma_1 + (1 - \sigma_1) \rho_n T_n) + \frac{\hat{B}_n B_n}{8\pi} \right), \quad (6)$$

$$\Delta m \left(\frac{1}{\rho} \right)_t = S_t = \sum_{k \in \mathcal{M}_1} \left(\left(\frac{\partial S_n}{\partial x_k} \right) u_k^{(0,5)} + \left(\frac{\partial S_n}{\partial y_k} \right) w_k^{(0,5)} \right), \quad (7)$$

$$\hat{B} \hat{S} = B S, \quad (8)$$

$$\frac{1}{\gamma - 1} (\hat{T} - T) = - \frac{\hat{\rho} \hat{T}}{\Delta m} (\hat{S} - S). \quad (9)$$

Здесь σ_1 – весовой множитель, $0 \leq \sigma_1 \leq 1$, $\wedge$ – величина с верхнего слоя по времени, $S_{ml} = 0,5 \left[(x_{i+1j} - x_{ij+1})(y_{i+1j+1} - y_{ij}) + (x_{i+1j+1} - x_{ij})(y_{ij+1} - y_{i+1j}) \right]$ – площадь ячейки, $\Delta m_{ml} = \hat{\rho}_{ml} \hat{S}_{ml} = \rho_{ml} S_{ml} = \Delta m = \text{const}$.

Уравнения системы (5)–(9) записаны на разностных шаблонах $\mathcal{M}_1(m,l)$ и $\mathcal{M}_2(i,j)$, где $\mathcal{M}_1$ – шаблон ячейки (см. рис. 1), $\mathcal{M}_2$ – шаблон узла (см. рис. 2).

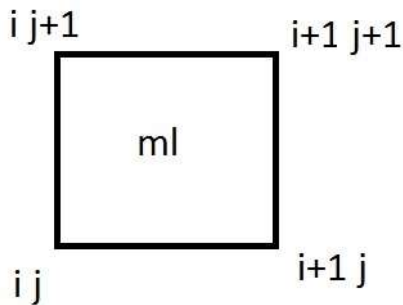


Рис.1. Шаблон ячейки.

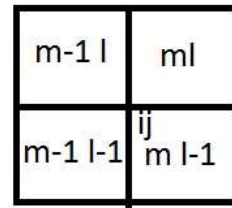


Рис.2. Шаблон узла.

При записи системы уравнений (5)–(9) использованы безындексные представления сеточных функций [1].

Сеточные функции x , y , u и w определены в узлах разностной сетки, а сеточные функции ρ , P , T , B и S – в ячейках.

4. Оценки сходимости алгоритма

Отметим, что для расчетов течений излучающей многозарядной плазмы исходные модели типа (1) значительно усложняются: добавляются уравнения

кинетики ионизации, радиационного электрообмена, учитываются двухтемпературность, процессы тепло- и электропроводности и влияния на них магнитного поля, применяются различные модификации закона Ома (например, учитывается эффект Холла), используются табличные данные по состоянию вещества. Полный анализ сходимости методов решения нелинейных уравнений, соответствующих таким методам, провести зачастую либо не удастся, либо количество упрощающих предположений таково, что результаты анализа мало пригодны для практического исследования.

В данной работе сходимость алгоритма исследуется для линеаризованной системы уравнений (5)–(9). Такой подход к изучению решения нелинейной системы двумерных МГД уравнений, несмотря на теоретическую неполноту, позволяет сформулировать физически содержательные критерии сходимости, которыми удобно пользоваться при проведении практических расчетов. Полученные при анализе линеаризованной системы оценки можно далее использовать для изучения сходимости метода решения в нелинейном случае, поскольку линеаризация является центральным пунктом многих методик [1, 10, 11]. Выводы из линейного анализа проверены в методических расчетах.

При построении алгоритма решения системы нелинейных уравнений двумерной МГД используется принцип локального расщепления физических процессов, реализующийся через разделение системы разностных уравнений по видам физических процессов: уравнения динамики плазмы (D), уравнения электромагнитного поля (EM) и уравнения теплового баланса (T), описывающие энергообмен между компонентами плазмы (если рассматривается процесс релаксации температур ионов и электронов), а также энергетику ионизации-рекомбинации и взаимодействия вещества с излучением. В простейшем (однотемпературном) случае уравнение (T) одно – (9). Оно описывает изменение температуры жидкой частицы при адиабатических изменениях ее объема. При построении конкретного алгоритма уравнения различных видов объединяются в группы (аналогично [1]). В данной работе рассматривается алгоритм, в котором разбиение на группы таково: к первой группе относят динамические (D) и электромагнитные (EM) уравнения, а ко второй – тепловые (T) уравнения. Уравнения в каждой из этих двух групп решаются относительно определенных переменных, причем переменные, не входящие в данную группу, считаются "замороженными" и берутся с предыдущей итерации. Последовательное решение групп уравнений связывается внешним итерационным процессом, в котором контролируется точность решения разностных уравнений и точность выполнения энергобаланса.

Линеаризованные уравнения системы (5)–(9), соответствующие принятым выше ограничениям и характеру итерационного процесса, запишем в виде

$$\Delta m \frac{u_{ij}^{s+1} - u_{ij}}{\Delta t} = \sum_{n \in III_2} \left(\frac{\partial S_n}{\partial x_{ij}} \right) \left(R(\rho_n T_n + \sigma_1(T_n \delta \rho_n^{s+1} + \rho_n \delta T_n^s)) + \frac{B_n^{s+1} B_n}{8\pi} \right), \quad (10)$$

$$\Delta m \frac{w_{ij}^{s+1} - w_{ij}}{\Delta t} = \sum_{n \in III_2} \left(\frac{\partial S_n}{\partial y_{ij}} \right) \left(R(\rho_n T_n + \sigma_1(T_n \delta \rho_n^{s+1} + \rho_n \delta T_n^s)) + \frac{B_n^{s+1} B_n}{8\pi} \right), \quad (11)$$

$$\delta \rho_{ml}^{s+1} = -\frac{\rho_{ml}^2}{\Delta m} (S_{ml}^{s+1} - S_{ml}), \quad (12)$$

$$B_{ml}^{s+1} = B_{ml} \left(1 - \frac{\rho_{ml}}{\Delta m} (S_{ml}^{s+1} - S_{ml}) \right), \quad (13)$$

$$\delta T_{ml}^s = -\frac{\gamma - 1}{\Delta m} \rho_{ml} T_{ml} (S_{ml}^s - S_{ml}), \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} S_{ml}^{s+1} - S_{ml} = & \frac{\Delta t}{4} \left[(y_{ij+1} - y_{i+1j}) (u_{i+1j+1} - u_{ij} + u_{i+1j+1}^{s+1} - u_{ij}^{s+1}) + \right. \\ & + (x_{i+1j} - x_{ij+1}) (w_{i+1j+1} - w_{ij} + w_{i+1j+1}^{s+1} - w_{ij}^{s+1}) + (y_{i+1j+1} - y_{ij}) (u_{i+1j} - u_{ij+1} + u_{i+1j}^{s+1} - u_{ij+1}^{s+1}) + \\ & \left. + (x_{i+1j+1} - x_{ij}) (w_{ij+1} - w_{i+1j} + w_{ij+1}^{s+1} - w_{i+1j}^{s+1}) \right]. \end{aligned}$$

Здесь искомые величины будем обозначать индексом "s" – соответственно номеру итерации.

Исключая из (10) и (11) $\delta \rho_{ml}^{s+1}$, B_{ml}^{s+1} и δT_{ml}^s с помощью (12)–(14), получим систему уравнений, связывающую U_{ij}^{s+1} и U_{ij}^s ($\vec{U} = (u, w)$):

$$(\Lambda_1 U^{s+1})_{ij} = -(\Lambda_2 U^s)_{ij} + F_{ij}, \quad (15)$$

где $F_{ij} = (F_{ij}^{(1)}, F_{ij}^{(2)})$, $F_{ij}^{(1)}$ и $F_{ij}^{(2)}$ – свободные члены в преобразованных уравнениях (10) и (11) соответственно, в которые входят величины с предыдущего слоя по времени.

$$\begin{aligned} (\Lambda_1 U)_{ij} = & (\Lambda_1(u)_{ij}, \Lambda_1(w)_{ij}), \quad (\Lambda_2 U)_{ij} = (\Lambda_2(u)_{ij}, \Lambda_2(w)_{ij}), \\ \Lambda_1(u)_{ij} = & \kappa u_{ij} + \sum_{n \in III_2} c1_n \left(\frac{\partial S_n}{\partial x_{ij}} \right) H_n, \quad \Lambda_1(w)_{ij} = \kappa w_{ij} + \sum_{n \in III_2} c1_n \left(\frac{\partial S_n}{\partial y_{ij}} \right) H_n, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_2(u)_{ij} = & \sum_{n \in III_2} c2_n \left(\frac{\partial S_n}{\partial x_{ij}} \right) H_n, \quad \Lambda_2(w)_{ij} = \sum_{n \in III_2} c2_n \left(\frac{\partial S_n}{\partial y_{ij}} \right) H_n, \\ H_{ml} = & (y_{ij+1} - y_{i+1j}) (u_{i+1j+1} - u_{ij}) + (x_{i+1j} - x_{ij+1}) (w_{i+1j+1} - w_{ij}) + \\ & + (y_{i+1j+1} - y_{ij}) (u_{i+1j} - u_{ij+1}) + (x_{i+1j+1} - x_{ij}) (w_{ij+1} - w_{i+1j}), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\kappa = 4 \left(\frac{\Delta m}{\Delta t} \right)^2, \quad c1_{ml} = \sigma_1 P_{ml} \rho_{ml} + \frac{B_{ml}^2 \rho_{ml}}{8\pi}, \quad c2_{ml} = \sigma_1 (\gamma - 1) P_{ml} \rho_{ml}.$$

Рассмотрим итерационный процесс (15) на множестве сеточных функций, принимающих нулевые значения на границе:

$$U \in \Omega_h^\circ, \quad U|_{\Gamma_h} = 0.$$

Покажем, что разностные операторы Λ_1 и Λ_2 обладают следующими свойствами: $\Lambda_1 = \Lambda_1^* > 0$, $\Lambda_2 = \Lambda_2^* > 0$.

Вычислим скалярное произведение

$$\begin{aligned} (\Lambda_1 U, U) &= \sum_{ij} \left(\Lambda_1(u)_{ij} u_{ij} \Delta m + \Lambda_1(w)_{ij} w_{ij} \Delta m \right) = \\ &= \Delta m \kappa \sum_{ij} (u_{ij}^2 + w_{ij}^2) + \Delta m \sum_{ij} \sum_{n \in III_2} c1_n H_n \left[\left(\frac{\partial S_n}{\partial x_{ij}} \right) u_{ij} + \left(\frac{\partial S_n}{\partial y_{ij}} \right) w_{ij} \right] = \Delta m \kappa \sum_{ij} (u_{ij}^2 + w_{ij}^2) + \\ &+ \frac{\Delta m}{2} \sum_{ij} c1_{m-1l-1} \left[(y_{i-1j} - y_{ij-1})(u_{ij} - u_{i-1j-1}) + (x_{ij-1} - x_{i-1j})(w_{ij} - w_{i-1j-1}) + \right. \\ &\left. + (y_{ij} - y_{i-1j-1})(u_{ij-1} - u_{i-1j}) + (x_{ij} - x_{i-1j-1})(w_{i-1j} - w_{ij-1}) \right]^2 = (U, \Lambda_1 U) > 0, \end{aligned}$$

т.е. $\Lambda_1 = \Lambda_1^* > 0$. Здесь суммирование идет по всем узлам, кроме граничных; $m=i, l=j$.

Вычислим скалярное произведение

$$\begin{aligned} (\Lambda_2 U, U) &= \sum_{ij} \left(\Lambda_2(u)_{ij} u_{ij} \Delta m + \Lambda_2(w)_{ij} w_{ij} \Delta m \right) = \Delta m \sum_{ij} \sum_{n \in III_2} c2_n H_n \left[\left(\frac{\partial S_n}{\partial x_{ij}} \right) u_{ij} + \right. \\ &\left. + \left(\frac{\partial S_n}{\partial y_{ij}} \right) w_{ij} \right] = \frac{\Delta m}{2} \sum_{ij} c2_{m-1l-1} \left[(y_{i-1j} - y_{ij-1})(u_{ij} - u_{i-1j-1}) + (x_{ij-1} - x_{i-1j})(w_{ij} - w_{i-1j-1}) + \right. \\ &\left. + (y_{ij} - y_{i-1j-1})(u_{ij-1} - u_{i-1j}) + (x_{ij} - x_{i-1j-1})(w_{i-1j} - w_{ij-1}) \right]^2 = (U, \Lambda_2 U) > 0, \end{aligned}$$

т.е. $\Lambda_2 = \Lambda_2^* > 0$.

Запишем итерационный процесс (15) в каноническом виде:

$$BU_t + AU = F, \quad U_t = \frac{U^{s+1} - U^s}{\tau_s}, \quad (18)$$

где $B = \Lambda_1$, $A = \Lambda_1 + \Lambda_2$, $\tau_s \equiv 1$, причем $B = B^* > 0$, $A = A^* > 0$.

Операторы A и B не зависят от номера итерации, т.е. процесс является стационарным. Как показано в [11], достаточным условием для сходимости этого итерационного процесса является выполнение неравенства:

$$B \geq 0.5 \tau_s A, \quad (19)$$

или, что эквивалентно в силу (15), $\Lambda_1 \geq \Lambda_2$.

Вычислим скалярное произведение

$$\begin{aligned}
 R &= ((\Lambda_1 - \Lambda_2)U, U) = \sum_{ij} ((\Lambda_1 - \Lambda_2)(u)_{ij} u_{ij} \Delta m + (\Lambda_1 - \Lambda_2)(w)_{ij} w_{ij} \Delta m) = \\
 &= \Delta m \kappa \sum_{ij} (u_{ij}^2 + w_{ij}^2) + \frac{\Delta m}{2} \sum_{ij} (c1_{m-1l-1} - c2_{m-1l-1}) \left[(y_{i-1j} - y_{ij-1})(u_{ij} - u_{i-1j-1}) + \right. \\
 &\left. + (x_{ij-1} - x_{i-1j})(w_{ij} - w_{i-1j-1}) + (y_{ij} - y_{i-1j-1})(u_{ij-1} - u_{i-1j}) + (x_{ij} - x_{i-1j-1})(w_{i-1j} - w_{ij-1}) \right]^2.
 \end{aligned}$$

Заметим, что для всех (i, j) справедливо неравенство

$$\begin{aligned}
 &\max(|u_{ij} - u_{i-1j-1}|, |u_{ij-1} - u_{i-1j}|, |w_{ij} - w_{i-1j-1}|, |w_{i-1j} - w_{ij-1}|) \leq \\
 &\leq \sqrt{2(u_{ij}^2 + u_{i-1j-1}^2 + u_{i-1j}^2 + u_{ij-1}^2 + w_{ij}^2 + w_{i-1j-1}^2 + w_{i-1j}^2 + w_{ij-1}^2)}.
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для любого U справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{ij} \left[(y_{i-1j} - y_{ij-1})(u_{ij} - u_{i-1j-1}) + (x_{ij-1} - x_{i-1j})(w_{ij} - w_{i-1j-1}) + \right. \\
 &\left. + (y_{ij} - y_{i-1j-1})(u_{ij-1} - u_{i-1j}) + (x_{ij} - x_{i-1j-1})(w_{i-1j} - w_{ij-1}) \right]^2 \leq \\
 &\leq 2 \sum_{ij} (u_{ij}^2 + u_{i-1j-1}^2 + u_{i-1j}^2 + u_{ij-1}^2 + w_{ij}^2 + w_{i-1j-1}^2 + w_{i-1j}^2 + w_{ij-1}^2) \cdot \\
 &\cdot \left[(y_{i-1j} - y_{ij-1}) + (x_{ij-1} - x_{i-1j}) + (y_{ij} - y_{i-1j-1}) + (x_{ij} - x_{i-1j-1}) \right]^2 \leq \\
 &\leq 8(h_x + h_y)^2 \sum_{ij} (u_{ij}^2 + u_{i-1j-1}^2 + u_{i-1j}^2 + u_{ij-1}^2 + w_{ij}^2 + w_{i-1j-1}^2 + w_{i-1j}^2 + w_{ij-1}^2),
 \end{aligned}$$

где

$$h_x = \max_{i,j} (|x_{ij-1} - x_{i-1j}|, |x_{ij} - x_{i-1j-1}|), \quad h_y = \max_{i,j} (|y_{ij-1} - y_{i-1j}|, |y_{ij} - y_{i-1j-1}|).$$

Кроме того, справедливо тождество:

$$\sum_{ij} (u_{ij}^2 + w_{ij}^2) = \frac{1}{4} \sum_{ij} (u_{ij}^2 + u_{i-1j-1}^2 + u_{i-1j}^2 + u_{ij-1}^2 + w_{ij}^2 + w_{i-1j-1}^2 + w_{i-1j}^2 + w_{ij-1}^2).$$

Поэтому для любого U справедливо неравенство

$$\begin{aligned}
 32(h_x + h_y)^2 \sum_{ij} (u_{ij}^2 + w_{ij}^2) &\geq \sum_{ij} \left[(y_{i-1j} - y_{ij-1})(u_{ij} - u_{i-1j-1}) + (x_{ij-1} - x_{i-1j})(w_{ij} - w_{i-1j-1}) + \right. \\
 &\left. + (y_{ij} - y_{i-1j-1})(u_{ij-1} - u_{i-1j}) + (x_{ij} - x_{i-1j-1})(w_{i-1j} - w_{ij-1}) \right]^2.
 \end{aligned}$$

Учитывая последнее неравенство, имеем

$$\begin{aligned}
 R &\geq \frac{\Delta m}{2} \sum_{ij} \left(\frac{\kappa}{16(h_x + h_y)^2} + c1_{m-1l-1} - c2_{m-1l-1} \right) \left[(y_{i-1j} - y_{ij-1})(u_{ij} - u_{i-1j-1}) + \right. \\
 &+ (x_{ij-1} - x_{i-1j})(w_{ij} - w_{i-1j-1}) + (y_{ij} - y_{i-1j-1})(u_{ij-1} - u_{i-1j}) + (x_{ij} - x_{i-1j-1})(w_{i-1j} - w_{ij-1}) \left. \right]^2 \geq \\
 &\geq \frac{\Delta m}{2} N \min_{ij} \left(\sum_{ij} \left(\frac{\kappa}{16(h_x + h_y)^2} + c1_{m-1l-1} - c2_{m-1l-1} \right) \left[(y_{i-1j} - y_{ij-1})(u_{ij} - u_{i-1j-1}) + \right. \right. \\
 &+ (x_{ij-1} - x_{i-1j})(w_{ij} - w_{i-1j-1}) + (y_{ij} - y_{i-1j-1})(u_{ij-1} - u_{i-1j}) + (x_{ij} - x_{i-1j-1})(w_{i-1j} - w_{ij-1}) \left. \right]^2 \Big),
 \end{aligned}$$

где N – число узлов разностной сетки, за исключением граничных.

Следовательно, сходимость итерационного процесса (15) имеет место, если условие

$$\frac{\kappa}{16(h_x + h_y)^2} + c1_{m-1l-1} - c2_{m-1l-1} \geq 0$$

справедливо в каждой ячейке разностной сетки, т.е. при

$$\frac{B^2}{8\pi} \geq \sigma_1(\gamma - 2)P, \quad (20)$$

а в противном случае условие сходимости имеет вид:

$$\Delta t < \frac{\Delta m}{2\rho(h_x + h_y) \sqrt{\sigma_1(\gamma - 2) \frac{P}{\rho} - \frac{B^2}{8\pi\rho}}}. \quad (21)$$

Отсюда следует, что при $\sigma_1 = 0$ (явная схема) (20) выполняется автоматически. При $0 < \sigma_1 < 1$ данный метод решения требует небольших ограничений на временной шаг, которые гораздо “мягче” ограничений, накладываемых на сходимость самой явностью схемы. Таким образом, при “частичной явности” уравнений (5), (6) данный метод решения не накладывает дополнительных ограничений на временной шаг.

Заметим, что для большинства задач $\gamma < 2$ и, следовательно, условие сходимости (20) выполняется автоматически.

Рассмотрим сходимость метода раздельного решения основных уравнений системы (5)–(9). В этом случае система разностных уравнений разделяется на три группы: к первой группе относятся динамические уравнения, ко второй – уравнения энергии, к третьей – уравнения электромагнитного поля. Далее решение проводится аналогично предыдущему по группам и связывается общим итерационным циклом.

Анализ устойчивости данного алгоритма проводится таким же способом, как показано выше. Итерационный процесс, соответствующий этому

алгоритму, можно свести к виду (16)–(17) при

$$c1_{ml} = \sigma_1 RT_{ml} \rho_{ml}^2; \quad c2_{ml} = \sigma_1 (\gamma - 1) RT_{ml} \rho_{ml}^2 + \frac{B_{ml}^2 \rho_{ml}}{8\pi}.$$

Следовательно, метод раздельного решения МГД уравнений будет сходящимся, если условие

$$\frac{B^2}{8\pi} \leq \sigma_1 (2 - \gamma) P \quad (22)$$

справедливо в каждой ячейке разностной сетки, а в противном случае данный метод сходится при условии:

$$\Delta t < \frac{\Delta m}{2\rho(h_x + h_y) \sqrt{\sigma_1(\gamma - 2) \frac{P}{\rho} + \frac{B^2}{8\pi\rho}}}. \quad (23)$$

Таким образом, условие (22) тем сильнее, чем меньше σ_1 , а при $\sigma_1 = 0$ это условие выполняется только при $B \equiv 0$.

5. Примеры расчетов

Проведенное выше исследование алгоритма комбинированного решения групп разностных уравнений носит в основном качественный характер, поэтому справедливость полученных оценок необходимо проверить численными расчетами.

Рассмотрим следующую модельную задачу. В начальный момент времени $t=0$ покоящееся вещество занимает область: $-4 \leq x \leq 4$, $-1 \leq y \leq 1$. Начальная плотность и температура равны соответственно $\rho_0 = 1$, $T_0 = 1$. Вещество – идеальный газ с уравнением состояния $p = \rho T$, $\varepsilon = \frac{T}{\gamma - 1}$, нетеплопроводный,

$\kappa \equiv 0$. Он помещен в однородное магнитное поле $B = (B_x, B_y, B_z)$, которое является практически «вмороженным»: $\sigma = 10^{10}$. На границах $x = x_{\text{лев}}(t)$ и $x = x_{\text{прав}}(t)$ задана малая скорость $U_{\text{лев}}(t) = -U_{\text{прав}}(t) = \pm 0.02$, на границах $y = y_{\text{лев}}(t)$ и $y = y_{\text{прав}}(t)$ задана нулевая скорость. По обоим направлениям начальное разбиение сетки было равномерным.

В данной постановке акустические колебания в среде должны распространяться со скоростью, много большей скорости выдвижения (вдвижения) поршня, поэтому в любой момент времени распределение плотности газа и магнитного поля почти однородно.

Задача решалась для различных значений величин γ , $B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$ и σ_1 : $1 < \gamma \leq 10$, $0 \leq B \leq 1000$, $0 \leq \sigma_1 \leq 1$.

Расчеты проводились методами как раздельного, так и комбинированного решения групп разностных уравнений.

Практические ограничения на временной шаг хорошо согласуются с полученными в данной работе оценками. При $\gamma \leq 2$ все расчеты комбинированным методом проходили без ограничения на временной шаг (в расчетах $\Delta t = 1$). Расчеты отдельным методом абсолютно устойчивы лишь при $B < 4.6$, при $B = 100$ шаг интегрирования $t \approx 0.0013$, а при $B = 1000$ – $\Delta t \approx 0.00012$, что практически не приемлемо при проведении широкомасштабного ВЭ. Если же σ_1 существенно меньше единицы, то ограничения на временной шаг определяются исключительно устойчивостью разностной схемы. В этом случае (если магнитное поле присутствует, т.е. B тождественно не равно нулю) предпочтительно использовать метод комбинированного решения системы разностных уравнений.

Рассмотрим расчет, моделирующий сжатие плазмы лайнером (газоплазменной оболочкой), ускоряемым электродинамически импульсом тока (см. [12, 13]). В начальный момент времени неподвижная плазма занимает область $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 2$. Начальная температура $T_0 = 1$. Плазма $\rho_{nl}^{(0)} = 0.05$ моделируется в области $0.2 \leq x \leq 2.8$, $0.2 \leq y \leq 1.8$, а в остальной области моделируется лайнер $\rho_l^{(0)} = 1$. Вещество – идеальный газ с уравнением состояния $P = (z+1)R\rho T$, $E = R(z+1)T/(\gamma-1)$, $z=1$ (водородная полностью ионизованная плазма), $\gamma = 5/3$, R – газовая постоянная в уравнении состояния. Газ предполагается нетеплопроводным $\kappa \equiv 0$, он помещен в однородное магнитное поле, которое является практически "вмороженным": $\sigma = 10^{10}$. В начальный момент времени $B_x(0) = B_1$, $B_y(0) = 0$, $B_z(0) = B_3$. На границе области $P(t) = 0$, $B_x(t) = B_1$, $B_z(t) = B_3$, $B_y(t) = B_2 \sin(\pi t/2)$.

Задача решалась для различных значений величины индукции магнитного поля: $0 \leq B_x \leq 1000$, $0 \leq B_y \leq 1000$, $0 \leq B_z \leq 1000$ и значений σ_1 : $0 \leq \sigma_1 \leq 1$.

Расчеты проводились методами отдельного и комбинированного решения групп разностных уравнений.

Решение данной задачи, как и предыдущие тесты, подтверждает практическую ценность полученных в данной работе теоретических оценок. При σ_1 , близких к единице, метод комбинированного решения устойчив для любых значений магнитного поля B , а метод отдельного решения устойчив лишь для $B < 4.6$, а при $B \gg 4.6$ приводит к ограничениям на временной шаг, не пригодным для практического решения данного класса задач. В то же время при небольших магнитных полях ($B < 4.6$) метод отдельного решения групп разностных уравнений оказывается предпочтительнее из-за его большей простоты и дешевизны по сравнению с комбинированным методом решения групп разностных уравнений. При маленьких σ_1 существуют те же проблемы, что и для предыдущего теста.

Заключение

Полученные в настоящей работе оценки сходимости алгоритмов раздельного и комбинированного решения систем разностных уравнений подкреплены численными расчетами. Первоначально необходимо для конкретной физической задачи выбрать оптимальный вес разностной схемы. Если магнитные поля отсутствуют, то целесообразно использовать явную разностную схему. В противном случае необходимо выбрать вес разностной схемы таким образом, что при всевозможных соотношениях параметров вещества и электромагнитного поля, характерных для данной конкретной задачи, ограничения на временной шаг удовлетворяют пользователя (дают ему возможность решить вариант задачи в приемлемое для него время). Для этого нужно сделать соответствующие оценки и провести ряд пробных расчетов. Если это сделать достаточно сложно, то целесообразно использовать неявную разностную схему. При решении конкретной задачи с выбранным весом разностной схемы представляется целесообразным задействовать оба описанных в данной работе численных метода. В начале каждого временного шага необходимо проанализировать физическое состояние параметров вещества и магнитного поля. Если на данном временном шаге выполняется условие сходимости метода раздельного решения системы уравнений двумерной МГД, то более целесообразно использовать этот более экономичный метод. В противном случае необходимо использовать более универсальный метод комбинированного решения системы разностных уравнений.

Библиографический список

1. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М. Наука. 1992. 424 с.
2. Круковский А.Ю., Гасилов В.А., Повещенко Ю.А., Шарова Ю.С., Клочкова Л.В. Реализация полностью консервативной лагранжево-эйлеровой схемы для двумерных задач магнитной гидродинамики // Математическое моделирование. 2020. Т. 32, № 1. С. 50–70.
3. Гасилов В.А., Гуськов С.Ю., Захаров С.В., Круковский А.Ю., Новикова Т.П. Математическая модель и метод расчета имплозии электродинамически ускоряемой плазмы // Препринты ФИАН им. П.Н. Лебедева. 1995. № 29. 20с.
4. Гасилов В.А., Гуськов С.Ю., Захаров С.В., Круковский А.Ю., Новикова Т.П., Розанов В.Б. Численное моделирование процессов нелинейной теплопроводности и радиационной газовой динамики при имплозии вещества во внутренних полостях мишеней ЛТС // Препринты ФИАН им. П.Н. Лебедева. 1999. № 30. 19 с.

5. Браницкий А.В., Грабовский Е.В., Захаров С.В., Зурин Н.В., Круковский А.Ю., Олейник Г.М., Смирнов В.П., Фролов И.М. О проникновении азимутального магнитного потока при сжатии двойного лайнера // Физика плазмы. 1999. Т. 25, № 12. С. 1079–1084.
6. Гасилов В.А., Чуватин А.С., Круковский А.Ю. и др. Комплекс программ “РАЗРЯД”: моделирование ускорения плазмы в сильноточных импульсных системах // Математическое моделирование. 2003. Т. 15, № 9. С. 107–124.
7. Гасилов В.А., Круковский А.Ю., Новиков В.Г., Романов И.В., Цыгвинцев И.П. Численное моделирование токопрохождения в вакуумном диоде с лазерным поджигом // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2013. № 78. 20 с.
8. Куликовский А.Г., Любимов В.А. Магнитная гидродинамика. М.: Логос, 2005. 328 с.
9. Самарский А.А., Волосевич П.П., Волчинская М.И., Курдюмов С.П. Метод конечных разностей для решения одномерных нестационарных задач магнитной гидродинамики // ЖВМиМФ. 1968. Т. 8, № 5. С. 1025–1038.
10. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. М.: Издательство физико-технического института, 1994. 528 с.
11. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.
12. Дюдерштадт Дж., Мозес Г. Инерциальный термоядерный синтез. М.: Энергоатомиздат, 1984. 300 с.
13. Zakharov S.V., Smirnov V.P., Grabovskii E.V., Nedoseev S.L., Oleinik G.M., Zaitsev V.I. Imploding liner as driver for indirect driven target physics studies // Proc. of the IAEA Technical Committee Meeting on Drivers for Inertial Confinement Fusion. Paris, 1994 (International Atomic Energy Agency Vienna, 1995), p. 395.

Оглавление

1. Введение	3
2. Исходная система уравнений	4
3. Разностная схема	5
4. Оценки сходимости алгоритма	6
5. Примеры расчетов	12
Заключение.....	14
Библиографический список.....	14