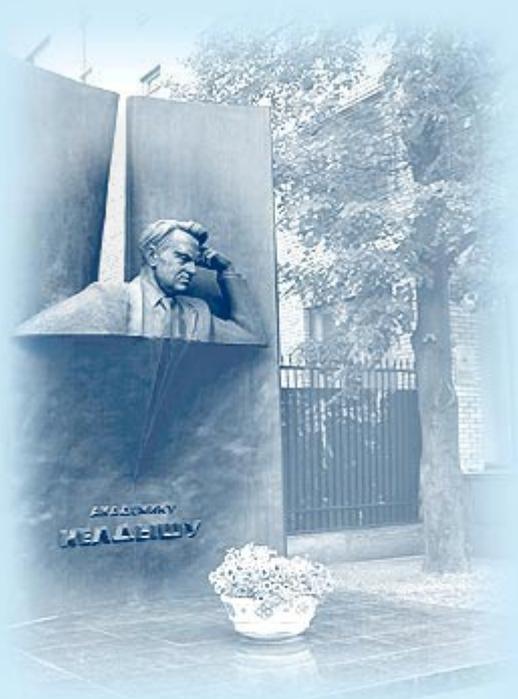




ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • [Электронная библиотека](#)

[Препринты ИПМ](#) • [Препринт № 98 за 2021 г.](#)



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**[А.Д. Брюно](#), [А.Б. Батхин](#),  
[З.Х. Хайдаров](#)**

**Примеры вычисления линий  
уровня многочленов на  
ПЛОСКОСТИ**

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Брюно А.Д., Батхин А.Б., Хайдаров З.Х. Примеры вычисления линий уровня многочленов на плоскости // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. № 98. 36 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2021-98>  
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-98>

Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М. В. КЕЛДЫША  
Российской академии наук

А. Д. Брюно, А. Б. Батхин, З. Х. Хайдаров  
Примеры вычисления линий уровня  
многочленов на плоскости

Москва — 2021

УДК 517.5+004.421.6

**Александр Дмитриевич Брюно, Александр Борисович Батхин, Зафар Хайдар угли Хайдаров**

Примеры вычисления линий уровня многочленов на плоскости. Препринты института прикладной математики им. М. В. Келдыша, Москва, 2021.

Здесь изложена теория и 3 нетривиальных примера вычисления линий уровня вещественных многочленов на вещественной плоскости. При этом используются следующие алгоритмы компьютерной алгебры: факторизация многочлена, вычисление базиса Грёбнера, построение многоугольника Ньютона, изображение алгебраической кривой на плоскости. Показано, как преодолевать вычислительные трудности.

**Ключевые слова:** многочлен, критическая точка, критическая кривая, линия уровня, многоугольник Ньютона, базис Грёбнера.

**Alexander Dmitrievich Bruno, Alexander Borisovich Batkhin, Zafar Khaydar ugli Khaydarov**

Examples of computation of level lines of polynomials in a plane.

Here we present a theory and 3 nontrivial examples of computation of level lines of real polynomials in the real plane. We apply the following algorithms of the computer algebra: factorization of a polynomial, computation of Gröbner basis, construction of Newton's polygon, representation of an algebraic curve in a plane. Furthermore, it is shown how to overcome computational difficulties.

**Key words:** polynomial, critical point, critical curve, level line, Newton polygon, Gröbner basis.

## Оглавление

1	Введение . . . . .	3
2	Теория . . . . .	3
3	Большой многочлен . . . . .	6
4	Пример 1 при $x = 0$ . . . . .	9
5	Пример 2 при $y = 0$ . . . . .	17
6	Пример 3 при $z = 0$ . . . . .	26
	Список литературы . . . . .	34
	Список рисунков . . . . .	36

©А.Д.Брюно, А.Б.Батхин, З.Х.Хайдаров, 2021.

©Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша, 2021

# 1. Введение

Пусть  $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . Рассмотрим вещественный многочлен  $f(X)$ . При постоянной  $c \in \mathbb{R}$  кривая на плоскости  $\mathbb{R}^2$

$$f(X) = c \quad (1.1)$$

является *линией уровня* многочлена  $f(X)$ .

Наша задача — описать все линии уровня многочлена  $f(X)$  на вещественной плоскости  $X \in \mathbb{R}^2$ .

В разделе 2 кратко изложена теория построения линий уровня вещественного многочлена на вещественной плоскости согласно [1] и [2]. В разделе 3 выписан многочлен 6-й степени от трёх переменных  $x, y, z$ , возникший в задаче линейной устойчивости положения равновесия некоторой механической системы [3]. Нули этого многочлена описывают границу области устойчивости. Затем в разделах 4, 5 и 6 рассматриваются сечения этой границы плоскостями  $x = 0, y = 0, z = 0$  соответственно. На каждой из этих трёх плоскостей вычисляются линии уровня соответствующих многочленов. При этом используются алгоритмы компьютерной алгебры: факторизация многочлена, вычисление базиса Грёбнера, построение многоугольника Ньютона, изображение алгебраической кривой на плоскости [4–7]. Показано, как преодолевать вычислительные трудности.

## 2. Теория

**2.1. Основная теорема.** Пусть  $C_* = \inf f(X)$  и  $C^* = \sup f(X)$  по  $X \in \mathbb{R}^2$ .

**Теорема.** *Имеется конечное множество критических значений  $c$ :*

$$C_* < c_1^* < c_2^* < \dots < c_m^* < C^*, \quad (2.1)$$

*которым соответствуют критические линии уровня*

$$f(X) = c_j^*, \quad j = 1, \dots, m, \quad (2.2)$$

*а для значений  $c$  из каждого из  $m + 1$  интервала*

$$I_0 = (C_*, c_1^*), \quad I_j = (c_j^*, c_{j+1}^*), \quad j = 1, \dots, m - 1, \quad I_m = (c_m^*, C^*) \quad (2.3)$$

*линии уровня топологически эквивалентны. Если  $C_* = c_1^*$  или  $C^* = c_m^*$ , то интервалы  $I_0$  или  $I_m$  отсутствуют.*

Поэтому для выявления расположения всех линий уровня многочлена  $f(X)$  надо найти все критические значения  $c_j^*$ , изобразить  $m$  критических

линий уровня (2.2) и по одной линии уровня для произвольного значения  $c$  из  $m + 1$  интервала (2.3). Способ вычисления этих линий уровня с помощью степенной геометрии описан в [1] и отчасти в [8, гл. I, § 2]. Более традиционный подход см. в [9, гл. I]. Локальное строение линий уровня многочлена рассматривалось в [8, гл. I, § 3]. Здесь некоторые результаты из [8, гл. I, § 3] дополнены.

**2.2. Критические точки и критические кривые.** Точка  $X = X^0$  называется *простой* для многочлена  $f(X)$ , если в ней отлична от нуля хотя бы одна из частных производных  $\partial f/\partial x_1, \partial f/\partial x_2$ .

**Определение 1.** Точка  $X = X^0$  для многочлена  $f(X)$  называется *критической порядка  $k$* , если в точке  $X = X^0$  равны нулю все частные производные от  $f(X)$  до порядка  $k$ , т.е. все

$$\frac{\partial^l f}{\partial x_1^i \partial x_2^j}(X^0) = 0, \quad 1 \leq i + j = l \leq k,$$

и отлична от нуля хотя бы одна частная производная порядка  $k + 1$ .

**Определение 2.** Кривая

$$g(X) = 0 \tag{2.4}$$

называется *критической* для многочлена  $f(X)$ , если

- 1) она лежит на какой-то линии уровня (1.1) и
- 2) на ней  $\partial f/\partial x_1 \equiv 0$ , или  $\partial f/\partial x_2 \equiv 0$ .

Значения постоянной  $c = f(X)$  в критических точках  $X = X^0$  и на критических линиях (2.4) назовём *критическими* и обозначим  $c_j^*$  согласно (2.1).

**2.3. Локальный анализ линий уровня.** В дальнейшем вблизи точки  $X = X^0$  будем рассматривать аналитические обратимые замены координат

$$y_i = x_i^0 + \varphi_i(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0), \quad i = 1, 2, \tag{2.5}$$

где  $\varphi_i$  — аналитические функции от  $X - X^0$ .

**Лемма 1** ([8, гл. I, § 3]). *Если точка  $X^0$  простая и в ней  $\partial f/\partial x_2 \neq 0$ , то существует замена (2.5), приводящая уравнение (1.1) к виду*

$$f(X) = y_2 = c. \tag{2.6}$$

Она следует из теоремы о неявной функции.

Линии уровня (2.6) — это прямые, параллельные оси  $y_1$ .

Рассмотрим решения уравнения (1.1) вблизи критической точки  $X^0 = 0$  порядка 1. Тогда

$$f(X) = f_0 + ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + \dots$$

Дискриминант  $\Delta$  выписанной квадратичной формы есть  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

**Лемма 2** ([8, гл. I, § 3]). *Если в критической точке первого порядка  $X^0 = 0$  дискриминант  $\Delta \neq 0$ , то существует замена (2.5), приводящая уравнение (1.1) к виду*

$$f(X) = f_0 + \sigma y_1^2 + y_2^2 = c, \quad (2.7)$$

где  $\sigma = 1$  (если  $\Delta < 0$ ) или  $\sigma = -1$  (если  $\Delta > 0$ ).

Это двумерный вариант известной леммы Морса [4, гл. I, § 2].

**Лемма 3.** *Если в критической точке первого порядка  $X^0 = 0$  дискриминант  $\Delta = 0$ , то существует замена (2.5), приводящая уравнение (1.1) к виду*

$$f(X) = f_0 + y_2^2 + \tau y_1^n = c, \quad (2.8)$$

где целое  $n > 2$  и число  $\tau \in \{-1, 0, +1\}$ .

Выражения (2.7) и (2.8) — это *нормальные формы* многочлена  $f(X)$  вблизи его критической точки первого порядка  $X^0 = 0$ .

Пусть теперь критическая точка  $X^0 = 0$  имеет порядок  $k > 1$ . Согласно [1, п. 5] соответствующая ей линия уровня либо не имеет ветвей, входящих в критическую точку  $X^0 = 0$ , либо имеет несколько таких ветвей.

В первом случае критическая линия уровня состоит из этой точки  $X^0 = 0$ , а остальные линии уровня являются замкнутыми кривыми вокруг неё и соответствуют одному знаку разности  $c - f(X^0)$ .

Во втором случае критическая линия уровня состоит из конечного числа ветвей разных кратностей, входящих в критическую точку  $X^0 = 0$ . Они разбивают окрестность этой критической точки на криволинейные секторы. Остальные линии уровня заполняют эти секторы, оставаясь на некотором расстоянии от критической точки  $X^0 = 0$ . При этом в соседних секторах они соответствуют разным знакам разности  $c - f(X^0)$ , если разделяющая их ветвь имеет нечётную кратность, и одному знаку этой разности, если разделяющая их ветвь имеет чётную кратность.

**2.4. Глобальный анализ линий уровня.** Используемые в этом подразделе объекты степенной геометрии — многоугольник Ньютона  $\Gamma(f)$  многочлена  $f$ , ребро  $\Gamma_j^{(1)}$  многоугольника, её внешняя нормаль  $P_j^{(1)}$ , укороченное уравнение  $\hat{f}_j^{(1)}(X)$ , соответствующее ребру  $\Gamma_j^{(1)}$ , — подробно описаны в [1].

**Определение 3.** Пусть  $\Gamma_j^{(1)}$  — ребро многоугольника Ньютона многочлена  $g(X) = f(X) - c$ , которое имеет внешнюю нормаль  $P_j^{(1)} = (p_1, p_2)$  с одной или двумя положительными координатами  $p_i$  и соответствует укороченному многочлену  $\hat{g}_j^{(1)}(X)$ . Тогда пересечение корня  $x_1 = A\tau^{p_1}$ ,  $x_2 = B\tau^{p_2}$  (где постоянные  $A, B \in \mathbb{R}$ ) укороченного многочлена  $\hat{g}_j^{(1)}(X)$  при  $\tau \rightarrow \pm\infty$  с бесконечностью  $x_i = \pm\infty$  назовём *бесконечной точкой пересечения*. Кратность корня — это *кратность* этой точки.

**Лемма 4.** Если все рёбра  $\Gamma_j^{(1)}$  из определения 3 не содержат точки  $(q_1, q_2) = 0$  и  $y$  многочлена  $f(X)$  все бесконечные точки пересечения имеют кратность один, то для всех значений постоянной  $c$  из одного из  $m + 1$  интервалов (2.3) линии уровня (1.1) топологически эквивалентны.

### 3. Большой многочлен

**3.1. Описание.** В работе [3] рассматривалась устойчивость в линейном приближении стационарного решения одной многопараметрической системы Гамильтона. В процессе исследования возникла необходимость изучить нули некоторого многочлена  $g(x, y, z)$  6-го порядка от трёх переменных  $x, y, z$ :

$$\begin{aligned}
 g(x, y, z) = & 4x^5y - 4x^5z + 48x^4y^2 - 92x^4yz + 40x^4z^2 + 344x^3y^3 - 904x^3y^2z \\
 & + 736x^3yz^2 - 192x^3z^3 + 1200x^2y^4 - 4376x^2y^3z + 5360x^2y^2z^2 \\
 & - 2752x^2yz^3 + 512x^2z^4 + 2500xy^5 - 11700xy^4z + 19168xy^3z^2 \\
 & - 14656xy^2z^3 + 5376xyz^4 - 768xz^5 - 7500y^5z + 21800y^4z^2 \\
 & - 25408y^3z^3 + 14848y^2z^4 - 4352yz^5 + 512z^6 + 2x^5 + 82x^4y \\
 & - 64x^4z + 740x^3y^2 - 1152x^3yz + 456x^3z^2 + 3156x^2y^3 - 6784x^2y^2z \\
 & + 5144x^2yz^2 - 1344x^2z^3 + 6490xy^4 - 14464xy^3z + 13816xy^2z^2 \\
 & - 6720xyz^3 + 1344xz^4 + 20250y^5 - 45120y^4z + 37928y^3z^2 \\
 & - 14976y^2z^3 + 2880yz^4 - 256z^5 + 13x^4 + 412x^3y - 344x^3z \\
 & + 2782x^2y^2 - 5176x^2yz + 2200x^2z^2 + 828xy^3 - 12936xy^2z \\
 & + 15888xyz^2 - 5088xz^3 - 37827y^4 + 67608y^3z - 35496y^2z^2 \\
 & + 2016yz^3 + 1872z^4 + 64x^3 + 1728x^2y - 1152x^2z + 15552xy^2 \\
 & - 20736xyz + 6912xz^2 + 46656y^3 - 93312y^2z + 62208yz^2 - 13824z^3.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь, исследуем линии уровня на трёх нулевых сечениях поверхности  $g(x, y, z) = 0$ , т. е. для функций  $f_1(y, z) = g(x, y, z)|_{x=0}$ ,  $f_2(x, z) = g(x, y, z)|_{y=0}$  и  $f_3(x, y) = g(x, y, z)|_{z=0}$ .

**3.2. Вычисление критических значений, точек и кривых .** Учитывая полиномиальный характер задачи, вычисление критических значений  $c_j^*$  и соответствующих им критических точек и кривых удобно проводить с использованием алгоритмов компьютерной алгебры, в первую очередь, вычисляя базисы Грёбнера соответствующих идеалов с подходящими мономиальными порядками (подробнее, см. [7, Гл. 2, 3]).

Идеал, определяющий критические точки и кривые, состоит из многочлена  $f(X) - c$  и его частных производных по  $X$ :

$$\mathcal{J} = \left\{ f(X) - c, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\}. \quad (3.2)$$

Как следует из основной теоремы, число критических значений  $c_j^*$  конечно. Тогда базис Грёбнера  $\mathcal{GBJ}$  идеала (3.2) для чисто лексикографического порядка  $c \succ x_1 \succ x_2$  содержит полином  $h(c)$ , зависящий только от переменной  $c$ . Среди вещественных корней этого полинома следует искать критические значения  $c_j^*$ , для которых имеются вещественные критические линии уровня.

Базис Грёбнера, задаваемый идеалом  $\mathcal{GBJ}$ , имеет размерность либо 0, либо 1. В первом случае критических кривых нет, ибо идеал  $\mathcal{GBJ}$  нульмерен. Во втором случае некоторым критическим значениям  $c_j^*$  соответствуют критические кривые.

Вычисление и исследование идеала  $\mathcal{GBJ}$  удобно выполнять с использованием какой-либо системы компьютерной алгебры (СКА), как свободно распространяемой (например, `Sympy`, `Sage`, `Singular`, `Macaulya2`) или коммерческой (например, `Maple`, `Mathematica`, `Magma`). В любой из них имеются процедуры построения базисов Грёбнера для различных лексикографических порядков, а также некоторые дополнительные процедуры для проверки нульмерности идеала, вычисления его размерности и др. Все вычисления в последующих разделах работы были выполнены в СКА `Maple` с использованием пакета `Groebner`. Отметим, что имеется пакет `PolynomialIdeals`, в состав которого входят процедуры примарной декомпозиции или декомпозиции идеала на его нульмерные подидеалы и другие, но, во-первых, все процедуры этого пакета реализуются с помощью процедур пакета `Groebner`, а во-вторых, авторы предпочитают детально контролировать процесс вычислений.

Используется следующий порядок вычислений.

1) Составляется идеал  $\mathcal{J}$  и для него вычисляется базис Грёбнера  $\mathcal{GBJ}$  с чисто лексикографическим порядком  $c \succ x_1 \succ x_2$  с применением процедуры

Basis пакета Groebner.

2) Базис  $\mathcal{GBJ}$  позволяет найти все критические значения  $c_j^*$  с помощью полинома  $h(c)$  либо точно, либо в виде алгебраических чисел. Такой полином автоматически определяется для указанного выше лексикографического порядка, или с помощью процедуры `UnivariatePolynomial` и, по возможности, раскладывается на множители.

3) Среди критических значений  $c_j^*$  отбираются те, которым соответствуют вещественные критические точки и критические кривые. Для этого для каждого множителя  $h_j(c)$  многочлена  $h(c)$  вычисляется новый базис Грёбнера на основе ранее вычисленного базиса и этого множителя, но уже с другими лексикографическими порядками:  $c \prec x_1 \prec x_2$  и  $c \prec x_2 \prec x_1$ . Это есть некоторый вариант примарной декомпозиции, который позволяет определить многочлены только от  $x_1$  или от  $x_2$ , задающие координаты критических точек.

4) Теперь для каждого примарного идеала следует найти его множество вещественных нулей. Если критическое значение  $c_j^*$  принадлежит  $\mathbb{Q}$ , то все вычисления выполняются точно. Если же оно есть иррациональное алгебраическое число, то можно поступить так, как описано в [1, п. 5.6], т. е. проводить все вычисления по модулю идеала, определяющего критическое значение и критическую точку. В данной работе вычисления иррациональных критических значений и иррациональных координат критических точек проводятся приближённо с повышенной точностью.

5) Характер каждой критической точки определяется с использованием дискриминанта  $\Delta$  квадратичной формы разложения функции  $f(X)$  вблизи неё согласно леммам 2 и 3. Разложения вещественных ветвей линий уровня в окрестности каждой критической точки и на бесконечности вычисляются с использованием алгоритмов степенной геометрии. В частности, в СКА Maple удобно выполнять такие вычисления с помощью пакета `PolyhedralSets`, а также пакета процедур из пакета `algcurves`.

6) Проведенные вычисления позволяют выполнить построение эскизов линий уровня так, как это описано в [2].

**3.3. Замечания об обозначениях.** Последующие разделы работы содержат большое число различных объектов, поэтому дадим здесь краткое описание принятой нотации.

– Каждое из нулевых сечений поверхности, заданной многочленом (3.1), обозначается символом  $f_j$ , где  $j$  принимает значения 1, 2, 3, соответствующие той переменной, которая полагается равной нулю. Многочлен, определяющий критические значения  $c_i^*$  обозначается  $h_i(c)$ , а его  $k$ -й множитель соответственно  $h_{ik}(c)$ .

– Для соответствующего многочлена  $f_j$  вычисляется его носитель и мно-

гоугольник Ньютона  $\Gamma(f_j)$ . Все рёбра многоугольника нумеруются и обозначаются в тексте  $\Gamma_k^{(1)}$ , а соответствующий  $k$ -му ребру укороченный многочлен обозначается  $\hat{f}_k^{(1)}$ . Нумерация рёбер и укороченных многочленов сквозная в пределах своего раздела. В силу технических трудностей на рисунках многоугольников Ньютона верхний индекс у  $k$ -го ребра  $\Gamma_k^{(1)}$  опускается. Поскольку в вычислениях используются только грани размерности один, то это не должно привести к путанице.

– Если многочлен  $f_j$  преобразуется, то результат его  $i$ -го преобразования обозначается  ${}_i f_j$ . При этом все соответствующие этому многочлену объекты степенной геометрии имеют соответствующий левый нижний индекс, т. е.  ${}_2 \Gamma_3^{(1)}$  обозначает 3-е ребро многоугольника Ньютона многочлена, полученного на втором шаге преобразований, а  ${}_2 \hat{f}_3^{(1)}$  — соответствующий этому ребру многочлен.

## 4. Пример 1 при $x = 0$

**4.1. Критические значения.** Рассмотрим вычисление линий уровня многочлена  $f_1(y, z) = g(x, y, z)|_{x=0}$ .

$$\begin{aligned} f_1 = & -7500y^5z + 21800y^4z^2 - 25408y^3z^3 + 14848y^2z^4 - 4352yz^5 \\ & + 512z^6 + 20250y^5 - 45120y^4z + 37928y^3z^2 - 14976y^2z^3 \\ & + 2880yz^4 - 256z^5 - 37827y^4 + 67608y^3z - 35496y^2z^2 + 2016yz^3 \\ & + 1872z^4 + 46656y^3 - 93312y^2z + 62208yz^2 - 13824z^3. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Для многочлена (4.1) составляем идеал  $Id_1$ , определяющий критические точки и кривые:  $Id_1 = \{f_1 - c, \partial f_1/\partial x, \partial f_1/\partial z\}$ . Для него строим базис Грёбнера  $\mathcal{GBJ}_1$  с чисто лексикографическим порядком  $y \prec z \prec c$ , в который входят полиномы, зависящие соответственно от  $\{c\}$ ,  $\{c, z\}$ ,  $\{c, z\}$ ,  $\{c, y\}$ ,  $\{c, y, z\}$ ,  $\{c, y, z\}$ . Получаем 6 полиномов, некоторые из которых имеют 15-ю степень и выглядят очень громоздко. Поэтому мы их не приводим здесь в явном виде. Пользуемся первым полиномом, определяющим критические значения полинома (4.1), и разлагаем его на множители [7, гл. 2, 3].

$$\begin{aligned} h_1(c) = & c^2(791015625 \cdot 10^{12}c^4 - 4137285273243305806216 \cdot 10^5c^3 + \\ & + 2268208541119374290121362928c^2 - \\ & - 42844219213475982104286084531c + 38437670697580573719552 \cdot 10^6). \end{aligned}$$

Первый множитель этого полинома  $h_{11}(c) = c^2$  задаёт первое критическое значение  $c_1^* = 0$ . Второй множитель  $h_{12}$  имеет два вещественных корня  $c_2^* \approx$

0.9355,  $c_3^* \approx 523029.1004$  и пару комплексных корней. Добавляя каждый множитель многочлена  $h_1(c)$  в найденный выше базис Грёбнера, составляем его примарную декомпозицию. Рассмотрим эти критические значения последовательно.

**4.2. Критическая линия  $h(y, z) = c_1^* = 0$ .** Вычисляя идеал  $SP_1(h_1)$  для двух различных мономиальных порядков, находим соответствующие многочлены от переменных  $y$  и  $z$  соответственно

$$\begin{aligned} & y^8 (y - 2) (y - 14) (8000 y^3 - 50832 y^2 + 111321 y - 84672)^2, \\ & z^8 (z - 3) (z - 27) (2560 z^3 - 22176 z^2 + 63909 z - 61344)^2. \end{aligned}$$

С их помощью определяем, что критическому значению  $c_1^* = 0$  соответствуют четыре критические точки:  $(y_1, z_1) = (0, 0)$ ,  $(y_2, z_2) = (2, 3)$ ,  $(y_3, z_3) \approx (2.3427, 3.2427)$  и  $(y_4, z_4) = (14, 27)$ . Рассмотрим характер каждой из этих критических точек.

Многочлен (4.1) при  $c = 0$  факторизуется на два множителя: линейный

$$3z - 2y \tag{4.2}$$

и полином пятой степени

$$\begin{aligned} h(y, z) = & 2500y^4z - 5600y^3z^2 + 4736y^2z^3 - 1792yz^4 + 256z^5 - 6750y^4 \\ & + 10540y^3z - 5616y^2z^2 + 1248yz^3 - 128z^4 + 12609y^3 \\ & - 14130y^2z + 2412yz^2 + 936z^3 - 15552y^2 + 20736yz - 6912z^2. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Это единственный случай, когда многочлен  $f_j - c_k^*$  факторизуется. Поэтому особенности находим для множителя (4.3), но в критической линии учитываем и (4.2). Далее рассматриваем только многочлен  $h(y, z)$  и для него применяем систему обозначений подраздела 3.3.

*a) Разложение в точке  $(y_1, z_1) = (0, 0)$ .* Здесь конус задачи есть  $\mathcal{K}_3 = \{P = (p_1, p_2) < 0\}$ . Непосредственные вычисления показывают, что квадратичная форма  $h_2$  ряда Тейлора многочлена  $h$  есть полный квадрат  $h_2 = -1728(3y - 2z)^2$  и имеет общий множитель с кубической формой  $h_3$ . Таким образом, теорема о неявной функции неприменима, и здесь необходимо применить следующую технику [1, см. 5.2].

Вычисляем выпуклую оболочку носителя многочлена (4.3) с использованием пакета `PolyheralSets`. Многоугольник Ньютона и его рёбра показаны на рис. 1.

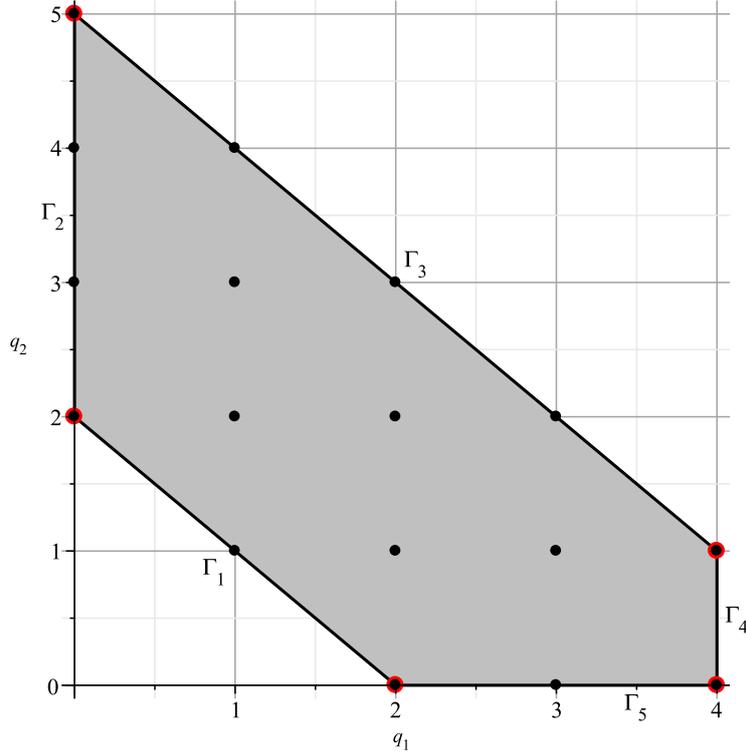


Рис. 1. Многоугольник Ньютона и его рёбра для многочлена (4.3).

Рёбру  $\Gamma_1^{(1)}$  соответствует укороченный многочлен  $\hat{h}_1^{(1)} = -1728(3y - 2z)^2$ . Выполним подстановку  $z = 3y/2 + z_1$  и получим многочлен  ${}_1h$  в переменных  $y, z_1$ :

$${}_1h = 6y^5 - 44y^4z_1 + 160y^3z_1^2 - 256y^2z_1^3 + 128yz_1^4 + 256z_1^5 - 12y^4 + 388y^3z_1 - 1728y^2z_1^2 + 480yz_1^3 - 128z_1^4 - 576y^2z_1 + 6624yz_1^2 + 936z_1^3 - 6912z_1^2. \quad (4.4)$$

Его многоугольник Ньютона показан на рис. 2.

Единственному ребру  ${}_1\Gamma_1^{(1)}$  этого многоугольника, у которого нормальный конус попадает в конус задачи  $\mathcal{K}_3 = \{P < 0\}$ , соответствует укороченный многочлен  ${}_1\hat{h}_1^{(1)} = 12(y^2 + 24z_1)^2$ . Следовательно, здесь требуется ещё одна подстановка  $z_1 = -y^2/24 + z_2$ . Она приводит к многочлену  ${}_2h$  от переменных  $y, z_2$ :

$$\begin{aligned} {}_2h = & \frac{1}{31104}y^{10} + \frac{1}{2592}y^9 + \frac{5}{1296}y^8z_2 + \frac{47}{2592}y^8 - \frac{1}{27}y^7z_2 - \frac{5}{27}y^6z_2^2 + \frac{35}{144}y^7 \\ & - \frac{35}{27}y^6z_2 + \frac{4}{3}y^5z_2^2 + \frac{40}{9}y^4z_2^3 - \frac{79}{64}y^6 - \frac{65}{6}y^5z_2 + \frac{92}{3}y^4z_2^2 - \frac{64}{3}y^3z_2^3 \\ & - \frac{160}{3}y^2z_2^4 + \frac{4}{3}y^5 + \frac{839}{8}y^4z_2 + 100y^3z_2^2 - \frac{704}{3}y^2z_2^3 + 128yz_2^4 + 256z_2^5 \\ & - 164y^3z_2 - 1845y^2z_2^2 + 480yz_2^3 - 128z_2^4 + 6624yz_2^2 + 936z_2^3 - 6912z_2^2. \end{aligned} \quad (4.5)$$

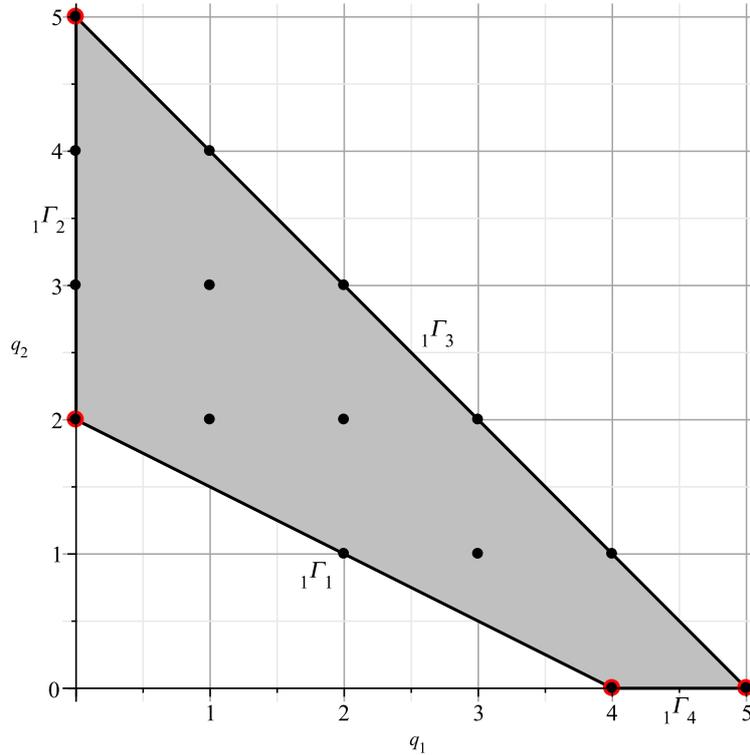


Рис. 2. Многоугольник Ньютона и его рёбра для многочлена (4.4).

Его многоугольник Ньютона (см. рис. 3) имеет единственное ребро  $2\Gamma_1^{(1)}$  с нормальным конусом из конуса задачи  $\mathcal{K}_3 = \{P < 0\}$ , которому соответствует многочлен  $2\hat{h}_1^{(1)} = 4y^5/3 - 6912z_2^2$ . Таким образом, получаем два решения  $z_2 = \pm y^{5/2}/72$ . Выполняя обратную подстановку, в итоге получаем разложения двух ветвей

$$z_{1,2} = \frac{3}{2}y - \frac{1}{24}y^2 \pm \frac{1}{72}y^{5/2},$$

которые в особой точке  $(0, 0)$  имеют касание второго порядка.

Вычисления с использованием функции `puisex` из пакета `algcures` системы `Maple` или с использованием функции `AsymptoticSolve` системы `Mathematica` приводят к таким же результатам.

б) Точка  $(y_2, z_2) = (2, 3)$  лежит на прямой  $z = 3y/2$ , являющейся корнем многочлена (4.2). Эта точка является критической точкой самопересечения.

в) Точка  $(y_3, z_3) \approx (2.3427, 3.2427)$  была подробно рассмотрена в статье [1] первых двух авторов, поэтому здесь мы приведём только итоговый результат. Дискриминант квадратичной формы  $h_2(y_3 + \eta, z_3 + \zeta)$ , вычисленный с большой точностью, равен нулю, а кратный корень этой квадратичной формы не обнуляет кубическую форму  $h_3(y_3 + \eta, z_3 + \zeta)$ . Следовательно, указанная точка является точкой возврата кривой  $f_1(y, z) = 0$ , а её разложение в окрестности

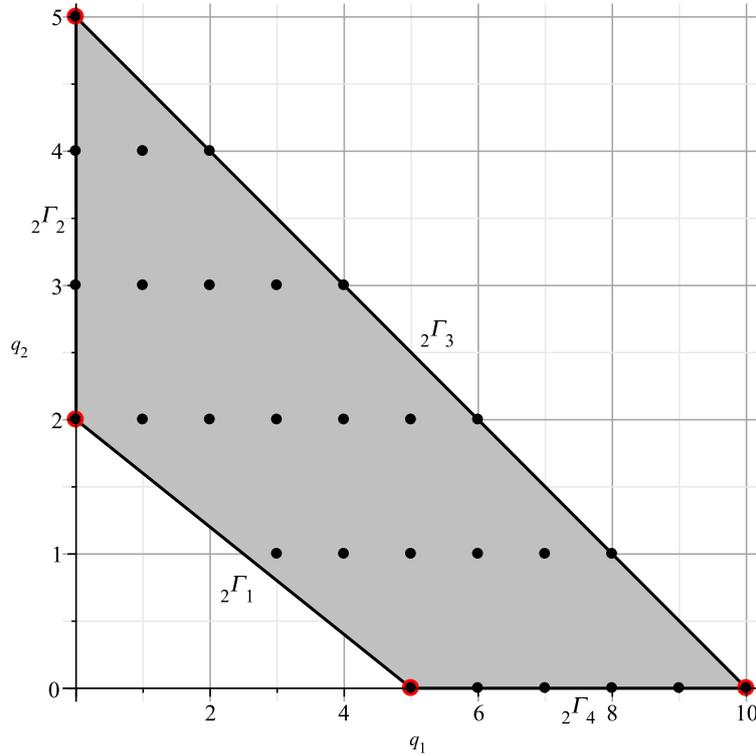


Рис. 3. Многоугольник Ньютона и его рёбра для многочлена (4.5).

особой точки описывается формулой

$$z = 0.823545771 + 1.03264746 y + 0.05480984628 (2.342744299 - y)^{3/2}$$

при  $y \leq y_3 \approx 2.342744299$ .

з) В точке  $(y_4, z_4) = (14, 27)$  вычисляем (с точностью до постоянного множителя) квадратичную форму  $h_2$ :

$$f_1(y_4 + \eta, z_4 + \zeta) = 243\eta^2 - 256\zeta\eta + 68\zeta^2.$$

Её дискриминант  $\Delta = -560$ , следовательно, по лемме 2 критическая точка  $(y_4, z_4)$  является изолированной.

д) Рёбрам  $\Gamma_2^{(1)}$  и  $\Gamma_5^{(1)}$  соответствуют укороченные многочлены

$$\hat{h}_2^{(1)} = 8z^2 (32z^3 - 16z^2 + 117z - 864) \text{ и } \hat{h}_5^{(1)} = -27y^2 (250y^2 - 467y + 576).$$

Их нули дают координаты пересечения кривой  $h = 0$  с осями  $Oz$  и  $Oy$  соответственно. Многочлен  $\hat{h}_2^{(1)}$  имеет два вещественных корня: 0 и 2.7470, а многочлен  $\hat{h}_5^{(1)}$  — только корень 0.

е) Ребру  $\Gamma_4^{(1)}$  соответствует укороченный многочлен  $\hat{h}_4^{(1)} = 250y^4(10z - 27)$ . Значит, при  $y \rightarrow \infty$  имеем  $z \rightarrow 27/10$ . Применяя технику из [1], находим

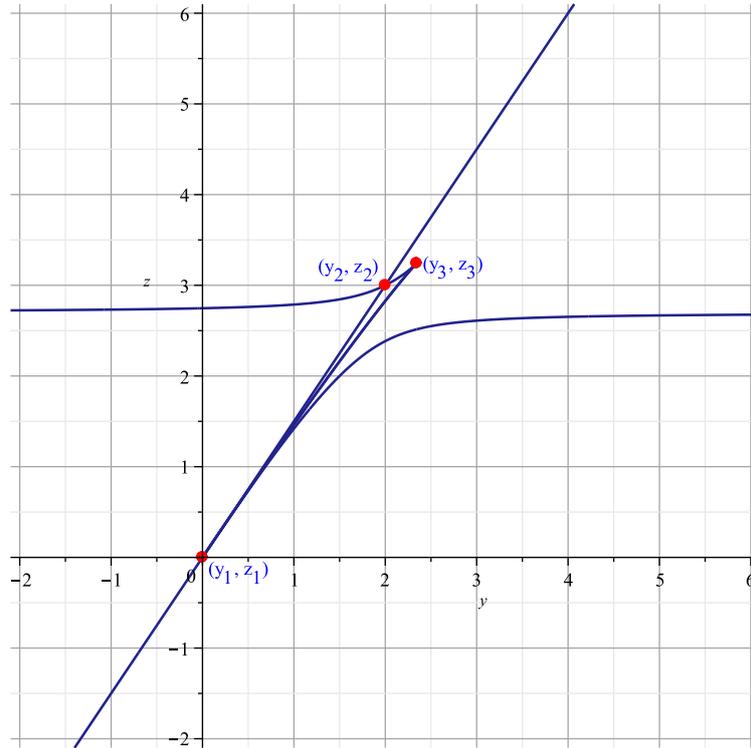


Рис. 4. Линии уровня для критического значения  $c_1^* = 0$  многочлена  $f_1$ .

разложение ветви кривой на бесконечности:

$$z = \frac{27}{10} - \frac{243}{2500y}. \quad (4.6)$$

Итак, кривая  $h = 0$  имеет горизонтальную асимптоту  $z = 27/10$ . Этой асимптоте соответствует бесконечная точка пересечения первой кратности.

Стремящейся к  $\infty$  координате  $z$  в многоугольнике  $\Gamma$  соответствует верхняя вершина, т.е. при  $z = \infty$  нет точек кривой (4.3).

Конусам задач  $\mathcal{K}_1$  и  $\mathcal{K}_2$  соответствуют только вершины многоугольника Ньютона рис. 1.

жс) Ребру  $\Gamma_3^{(1)}$  соответствует укороченный многочлен

$$\begin{aligned} \hat{h}_3^{(1)} &= 2500y^4z - 5600y^3z^2 + 4736y^2z^3 - 1792yz^4 + 256z^5 \\ &= 4z(25y^2 - 28yz + 8z^2)^2, \end{aligned}$$

который не имеет нетривиальных вещественных корней. Следовательно, ветвей, соответствующих конусу задачи  $\mathcal{K}_1 = \{P : p_1 > 0, p_2 > 0\}$ , нет.

На рис. 4 показана линия уровня  $f_1 = 0$ , состоящая из линии  $h = 0$  и прямой (4.2)  $3z - 2y = 0$ . Изолированная критическая точка  $(y_4, z_4) = (14, 27)$  не попала на рисунок. Прямой  $y = 3z/2$  также соответствует простая бесконечная точка пересечения.

**4.3. Критическая линия**  $f_1(y, z) = c_2^* \approx 0.9355$ . Из второго идеала  $SP_2(h_1)$  получаем по два действительных и комплексных значений  $c_j$ . Рассматривая только вещественные значения, находим, что критическому значению  $c_2^* \approx 0.9355$  соответствует критическая точка  $(y_5, z_5) \approx (1.8205, 2.6593)$ , координаты которой суть корни многочленов

$$\begin{aligned} 18750 y^4 - 285290 y^3 + 1217757 y^2 - 2088009 y + 1280664, \\ 8000 z^4 - 211120 z^3 + 1348356 z^2 - 3312315 z + 2843316. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Вычисляем квадратичную форму ряда Тейлора многочлена (4.1) в этой точке:

$$f_1(y_5 + \eta, z_5 + \zeta) \approx 0.93558 - 392.0146\eta^2 + 568.6296\zeta\eta - 209.3918\zeta^2,$$

и получаем, что её дискриминант  $\Delta \approx -4998.9489$  отрицательный, следовательно, точка  $(1.8205, 2.6593)$  является изолированной критической точкой.

Эта линия пересекается с осями в точках  $(0, 0)$  и  $(0, 2.747016946)$ . Её асимптотики суть  $y = 3/2z$  и (4.6). Сама линия показана на рис. 5.

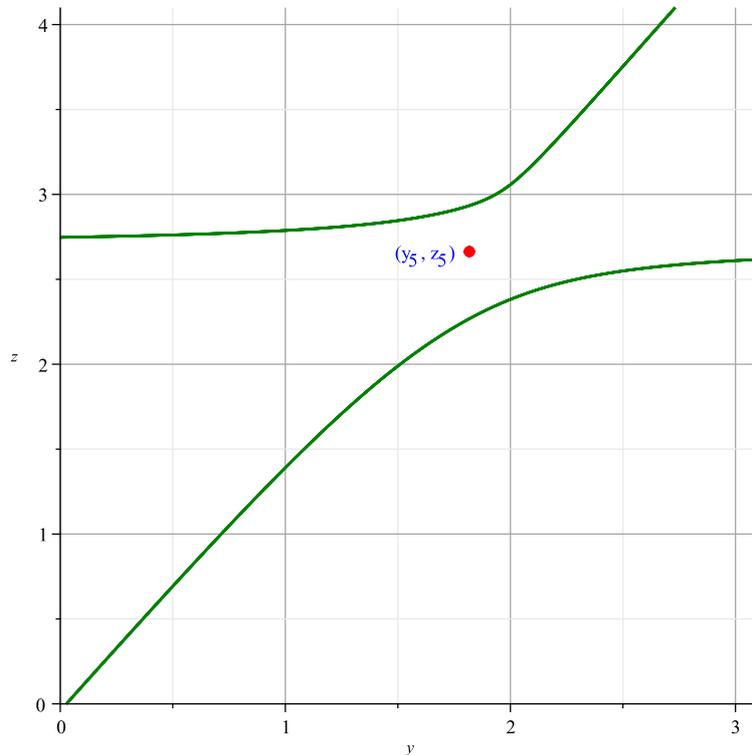


Рис. 5. Линии уровня для критического значения  $c_2^* \approx 0.9355$  многочлена  $f_1$ .

**4.4. Критическая линия**  $f_1(y, z) = c_3^* \approx 523029.1004$ . Также из идеала  $SP_2(h_1)$  находим, что критическому значению  $c_3^* = 523029.1004$  соответствует критическая точка  $(y_6, z_6) \approx (9.5641, 18.3933)$ , координаты которой

суть другие вещественные корни многочленов (4.7). Вычисление квадратичной формы ряда Тейлора многочлена (4.1) в этой точке даёт результат:

$$f_1(y_6 + \eta, z_6 + \zeta) \approx 523029.101 - 0.0001\zeta - 0.00038\eta + 3.108 \cdot 10^6\eta^2 - 3.109 \cdot 10^6\eta\zeta + 766031.179\zeta^2.$$

Мы видим, что в разложении свободный член близок к  $c_3^*$  и коэффициенты линейных членов малы. Дискриминант данной квадратичной формы  $\Delta \approx 1.4 \cdot 10^{11}$  положительный, следовательно, точка  $(9.5641, 18.3933)$  является точкой самопересечения.

Эта линия пересекается с осями в точках  $(2.0996, 0)$ ,  $(0, -2.6070)$  и  $(0, 3.5223)$ , её асимптотики те же, её эскиз показан на рис. 6.

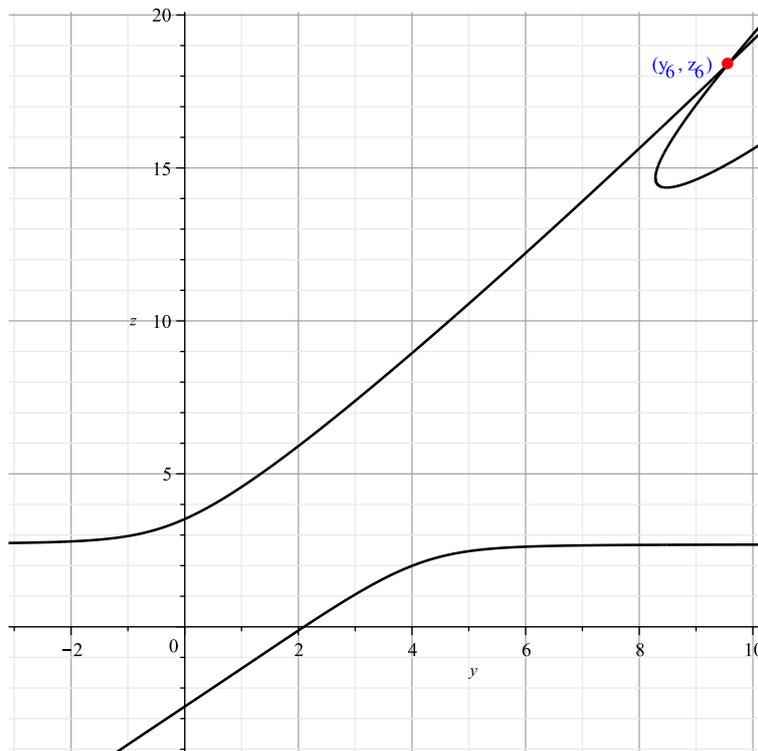


Рис. 6. Линии уровня для критического значения  $c_3^* \approx 523029.1004$  многочлена  $f_1$

**4.5. Все критические линии уровня многочлена  $f_1$ .** На рис. 7 показаны все критические линии уровня многочлена  $f_1$  для соответствующих критических значений  $c_j^*$ , а также критические точки. В силу выбранного масштаба, критические точки уровня  $c_1^*$  плохо различимы. Подробнее эти точки показаны на рис. 4. На нём в криволинейном треугольнике с вершинами  $(y_1, z_1)$ ,  $(y_2, z_2)$ ,  $(y_3, z_3)$  лежит точка  $(y_5, z_5)$ . Некритические линии уровня лежат между критическими линиями и критическими точками рис. 7.

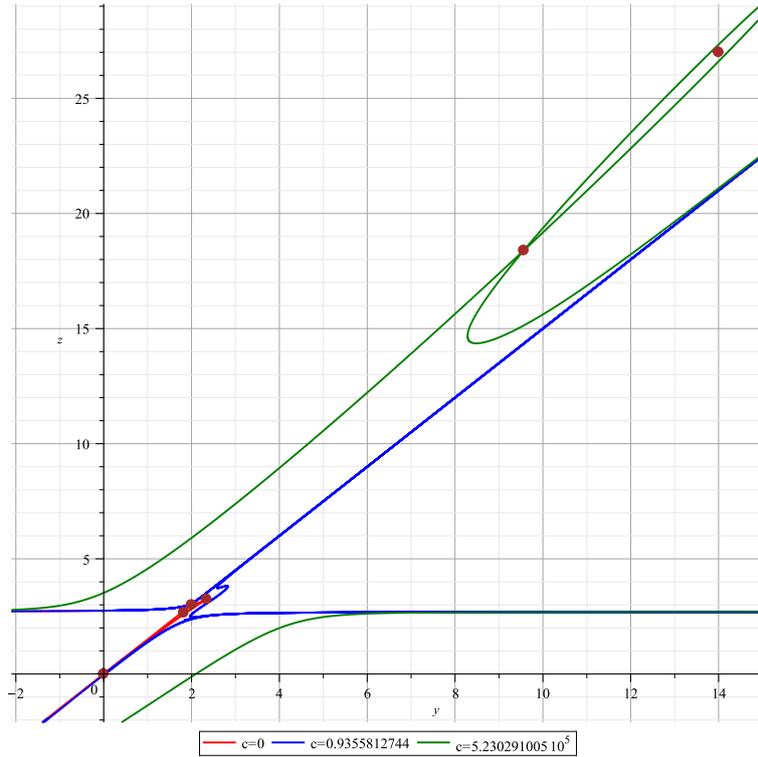


Рис. 7. Все критические линии уровня многочлена  $f_1$

## 5. Пример 2 при $y = 0$

### 5.1. Критические значения. Рассмотрим

$$\begin{aligned}
 f_2 = & -4x^5z + 40x^4z^2 - 192x^3z^3 + 512x^2z^4 - 768xz^5 + 512z^6 + 2x^5 \\
 & - 64x^4z + 456x^3z^2 - 1344x^2z^3 + 1344xz^4 - 256z^5 + 13x^4 - 344x^3z \\
 & + 2200x^2z^2 - 5088xz^3 + 1872z^4 + 64x^3 - 1152x^2z + 6912xz^2 - 13824z^3.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Идеал, определяющий критические точки и кривые и включающий в себя функцию  $f_2 - c$  и его первые производные, состоит из следующих полиномов

$$Id_2 = \{f_2 - c, \partial f_2 / \partial x, \partial f_2 / \partial z\}.$$

Для этого идеала строим базис Грёбнера  $\mathcal{GBJ}_2$  с чистым лексикографическим порядком  $c \succ z \succ x$ , найденный с помощью процедуры `Groebner [Basis]`. Первый полином этого базиса есть

$$\begin{aligned}
 h_2(c) = & c(16c^2 - 17435c + 15925248) \times \\
 & \times (18225 \cdot 10^8 c^4 + 219593845975 \cdot 10^5 c^3 - 166039069316301172071c^2 + \\
 & + 199547881177990316949504c - 84569630503397437621665792).
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Он зависит только от  $c$  и определяет критические значения полинома (5.1). Критическое значение  $c_1^* = 0$  является корнем множителя  $h_{21}(c) = c$ . Множитель  $h_{22}(c) = 16c^2 - 17435c + 15925248$  не имеет вещественных корней, значит, не выявляет вещественные критические значения  $c_j$ . Ещё два иррациональных критических значения  $c_2^* \approx -17590.60940$  и  $c_3^* \approx 4162.403160$  задаются конями третьего множителя в (5.2).

Идеал  $\mathcal{GBJ}_2$  имеет нулевую размерность, его примарная декомпозиция даёт три идеала. Можно сразу исключить из рассмотрения идеал  $SP_2(h_2)$ , содержащий множитель  $h_{22}(c) = 16c^2 - 17435c + 15925248$ , который не имеет вещественных корней.

**5.2. Критическая линия  $f_2(x, z) = c_1^* = 0$ .** Идеал  $SP_1(h_2)$ , являющийся примарной декомпозицией множителя  $h_{21}(c) = c$ , включает многочлены

$$\begin{aligned}
 & c, \\
 & 262144z^{14} + 3178496z^{13} + 17618944z^{12} + 53712704z^{11} + 83353369z^{10} \\
 & + 42910541z^9 - 34250732z^8 + 92661536z^7 + 44242816z^6 \\
 & - 44658432z^5 + 36578304z^4, -2687921593523634176z^{13} \\
 & - 34906091624775188480z^{12} - 209646836565166307328z^{11} \\
 & - 717809757784574929984z^{10} - 1395096902560948574269z^9 \\
 & - 1391000168810966419626z^8 - 414219249823112818193z^7 \\
 & - 989978918218726674788z^6 - 1359995427547542403776z^5 \\
 & + 44989667987413693824xz^3 - 427910073600905300160z^4 \\
 & + 44989667987413693824xz^2 - 179958671949654775296z^3, \\
 & -21973906577585552490496z^{13} - 274219691042743274733568z^{12} \\
 & - 1569796991169618160588800z^{11} \\
 & - 5004433077233995232707904z^{10} - 8441114957318849630660081z^9 \\
 & - 5521961458811860727741337z^8 + 2910068553190244608309880z^7 \\
 & - 4856586515216271331078816z^6 - 4913807691571657866494208z^5 \\
 & + 3773420647566644086822656z^4 - 70543799404264671916032xz^2 \\
 & + 293932497517769466316800z^3 + 17635949851066167979008x^2 \\
 & - 211631398212794015748096xz + 634894194638382047244288z^2.
 \end{aligned}$$

*а)* Корень его первого полинома — вещественное число  $c_1^* = 0$ . Среди корней полиномов идеала  $SP_1(h_2)$  ищем вещественные значения. Таковыми являются две критические точки  $(0, 0)$  и  $(-8, -4)$ .

*б)* Рассмотрим характер вещественных критических точек. При  $c_1 = 0$  в критической точке  $(0, 0)$  квадратичная форма  $h_2$  ряда Тейлора многочлена (5.1) обнуляется и теорема о неявной функции здесь не применима, поэтому применяем анализ особой точки согласно [1, п. 5.2]. Вычисляем выпуклую оболочку носителя многочлена (5.1) с использованием пакета `PolyhedralSets`.

Носитель и многоугольник Ньютона показаны на рис. 8. Ребру  $\Gamma_1^{(1)}$  соответствует укороченный многочлен  $\hat{f}_1^{(1)} = 64(x - 6z)^3$ . Выполним подстановку  $z = x/6 + z_1$  и получим многочлен в переменных  $x$  и  $z_1$ :

$$\begin{aligned} {}_1f_2 = & \frac{100}{729}x^6 - 13824z_1^3 + 1872z_1^4 - 256z_1^5 + 512z_1^6 + \frac{20}{81}x^5z_1 \\ & - \frac{8}{27}x^4z_1^2 - \frac{448}{27}x^3z_1^3 - 32x^2z_1^2 - 3840xz_1^3 + \frac{256}{3}x^2z_1^4 - \frac{8}{81}x^4z_1 \\ & - \frac{104}{27}x^3z_1^2 - \frac{4672}{9}x^2z_1^3 + \frac{3392}{3}xz_1^4 - 256xz_1^5 - \frac{16}{3}x^4 - \frac{296}{243}x^5. \end{aligned}$$

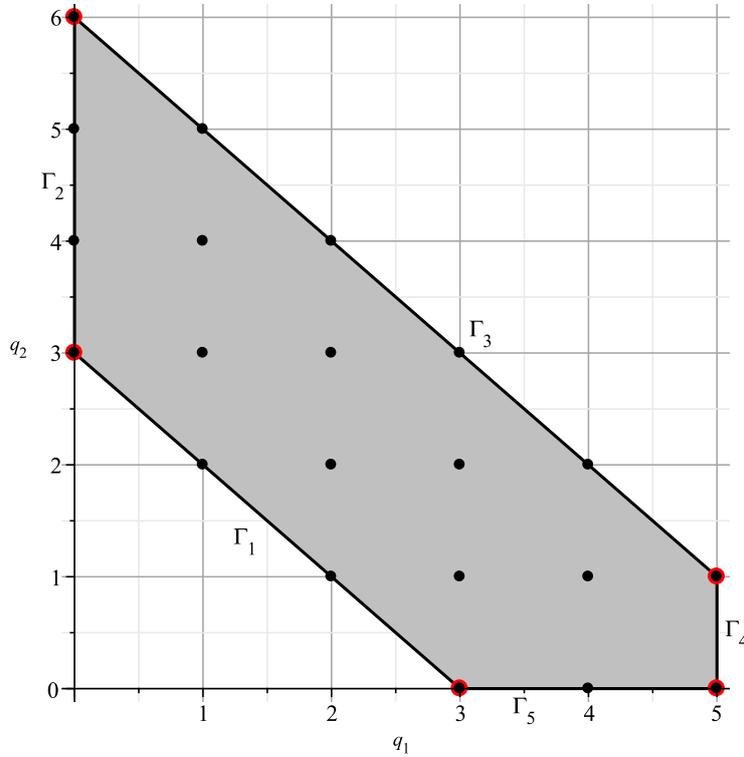


Рис. 8. Многоугольник Ньютона для многочлена  $f_2$ .

Его многоугольник Ньютона показан на рис. 9. Единственному ребру  ${}_1\Gamma_1^{(1)}$  многоугольника Ньютона, нормальный конус которого попадает в конус нашей задачи  $K = \{P < 0\}$ , соответствует укороченный многочлен  ${}_1\hat{f}_1^{(1)} = 13824z_1^3 - 16x^4/3$ . Следовательно, здесь требуется ещё одна подстановка  $z_1 = 18^{1/3}x^{4/3}/36 + z_2$ . Она приводит к ещё одному многочлену от переменных  $x, z_2$ , который содержит слагаемые с дробными степенями. Дабы избежать больших объёмов вычислений, сразу произведём замену вида  $x = x_1^3$

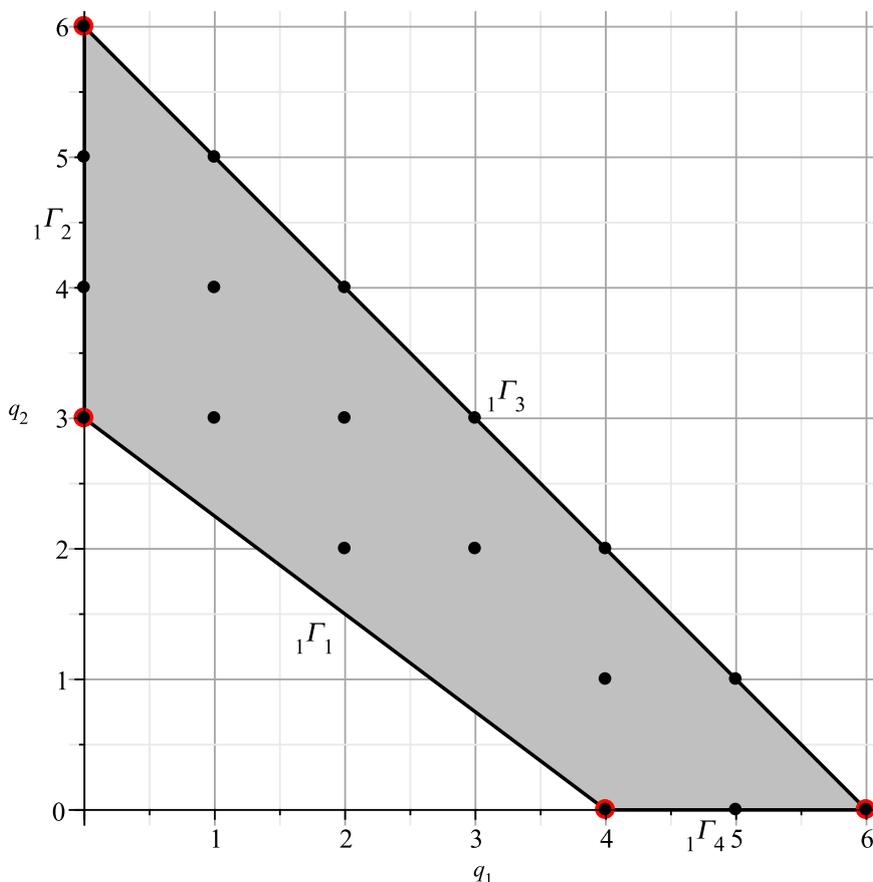


Рис. 9. Многоугольник Ньютона для многочлена  ${}_1f_2$ .

и получим более удобный вид многочлена для вычислений:

$$\begin{aligned}
 {}_2f_2 = & 1152 \cdot 18^{1/3} x_1^4 z_2^2 + \frac{26 \cdot 18^{2/3} x_1^8 z_2^2}{3} - 208 \cdot 18^{1/3} x_1^4 z_2^3 + \frac{1168 \cdot 18^{1/3} x_1^{10} z_2^2}{27} + \frac{16 \cdot 18^{1/3} x_1^{10} z_2}{9} \\
 & - \frac{292 \cdot 18^{2/3} x_1^{14} z_2}{243} - \frac{160 \cdot 18^{2/3} x_1^8 z_2^3}{81} - 32 \cdot 18^{2/3} x_1^8 z_2 - \frac{256 \cdot 18^{1/3} x_1^4 z_2^5}{3} + \frac{320 \cdot 18^{1/3} x_1^4 z_2^4}{9} \\
 & + \frac{160 \cdot 18^{2/3} x_1^8 z_2^4}{27} + \frac{2 \cdot 18^{1/3} x_1^{22}}{2187} + \frac{448 x_1^9 z_2^3}{27} + \frac{256 x_1^6 z_2^4}{3} + 256 x_1^3 z_2^5 - \frac{242 x_1^{12} z_2}{81} \\
 & + \frac{104 x_1^9 z_2^2}{27} - \frac{4672 x_1^6 z_2^3}{9} - \frac{3392 x_1^3 z_2^4}{3} - 32 x_1^6 z_2^2 + 3840 x_1^3 z_2^3 - 256 z_2^5 + 512 z_2^6 - 13824 z_2^3 \\
 & + 1872 z_2^4 - \frac{2 \cdot 18^{2/3} x_1^{14}}{81} + \frac{133 \cdot 18^{1/3} x_1^{16}}{5832} - \frac{18^{2/3} x_1^{20}}{6561} - \frac{23 \cdot 18^{1/3} x_1^{19}}{4374} - \frac{18^{2/3} x_1^{23}}{13122} \\
 & + \frac{13 \cdot 18^{2/3} x_1^{17}}{4374} - \frac{32 x_1^{18} z_2}{243} + \frac{20 \cdot 18^{1/3} x_1^{16} z_2^2}{243} + \frac{2 \cdot 18^{1/3} x_1^{16} z_2}{729} - \frac{2 \cdot 18^{2/3} x_1^{20} z_2}{2187} \\
 & - \frac{256 \cdot 18^{1/3} x_1^{10} z_2^3}{27} + \frac{32 \cdot 18^{2/3} x_1^{14} z_2^2}{81} - \frac{80 x_1^{15} z_2^2}{81} - \frac{320 x_1^{12} z_2^3}{81} + \frac{364 x_1^{15} z_2}{243} + \frac{56 x_1^{12} z_2^2}{81} \\
 & + \frac{x_1^{24}}{13122} - \frac{14 x_1^{21}}{2187} + \frac{46 x_1^{18}}{729} - \frac{64 x_1^{15}}{243} - 320 \cdot 18^{1/3} x_1^7 z_2^2 + \frac{3392 \cdot 18^{1/3} x_1^7 z_2^3}{27} \\
 & + \frac{160 \cdot 18^{2/3} x_1^{11} z_2^3}{81} + \frac{28 \cdot 18^{2/3} x_1^{17} z_2}{729} - \frac{52 \cdot 18^{1/3} x_1^{13} z_2}{243} - \frac{112 \cdot 18^{1/3} x_1^{13} z_2^2}{81} \\
 & - \frac{320 \cdot 18^{1/3} x_1^7 z_2^4}{9} + \frac{80 \cdot 18^{2/3} x_1^{11} z_2}{9} + \frac{10 \cdot 18^{1/3} x_1^{19} z_2}{729} - \frac{424 \cdot 18^{2/3} x_1^{11} z_2^2}{81}.
 \end{aligned}$$

Его многоугольник Ньютона (см. рис. 10) имеет два ребра  ${}_2\Gamma_1^{(1)}$  и  ${}_2\Gamma_2^{(1)}$  из конуса нашей задачи, которым соответствуют следующие укороченные многочлены:

$${}_2\hat{f}_1^{(1)} = \frac{2 \cdot 18^{2/3} (x_1^6 + 1296z_2) x_1^8}{81},$$

$${}_2\hat{f}_2^{(1)} = 32 \cdot 18^{2/3} \left( -x_1^8 + 2 \cdot 18^{2/3} z_2 x_1^4 - 24 \cdot 18^{1/3} z_2^2 \right) z_2.$$

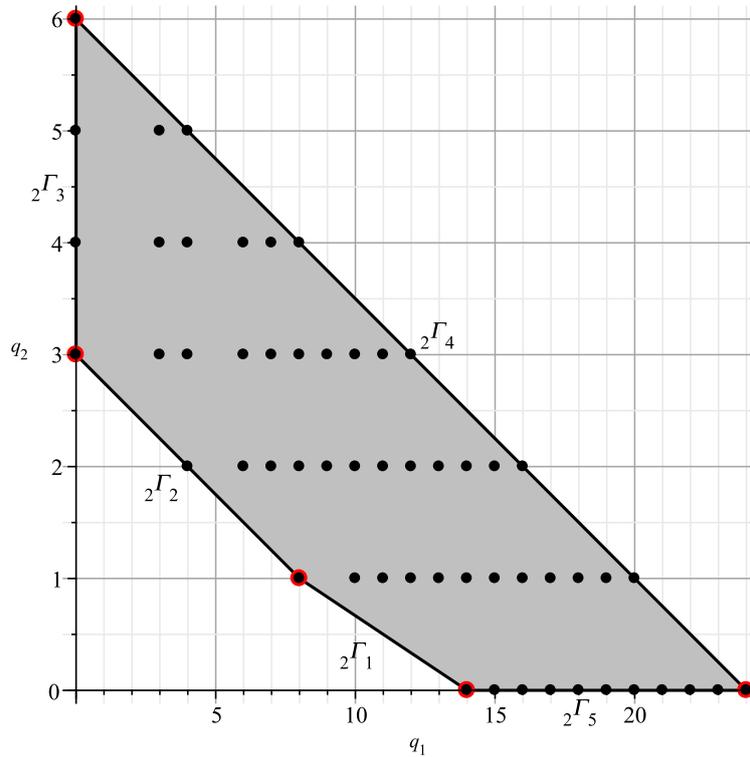


Рис. 10. Многоугольник Ньютона для многочлена  ${}_2f_2$ .

Решением первого укорочённого уравнения будет  $z_2 = -x_1^6/1296$ . Выполняя обратную подстановку как для  $z$ , так и для  $x$ , получаем разложение ветви вблизи точки  $(0, 0)$ .

$$z = \frac{x}{6} - \frac{18^{1/3} (-x)^{4/3}}{36} - \frac{x^2}{1296}.$$

Поскольку соответствующее ребро содержит точку с ординатой 1, то здесь применима теорема о неявной функции, которая даёт однозначную ветвь.

Укороченный многочлен  ${}_2\hat{f}_2^{(1)}$ , соответствующий второму ребру, не имеет нетривиальных вещественных корней, следовательно, ему не соответствует вещественная ветвь. Вычисления с использованием функции `puisex` из пакета `algcures` системы `Maple` приводят к таким же результатам.

б) Также критическому значению  $c_1^* = 0$  соответствует критическая точка  $(x_2, z_2) = (-8, -4)$ . Вычисляем квадратичную форму ряда Тейлора многочлена (5.1) в этой точке, используя команду `mtaylor`:

$$h_2(x_2 + \xi, z_2 + \zeta) = 9216\xi^2 - 28672\xi\zeta + 36864\zeta^2.$$

Дискриминант данной квадратичной формы  $\Delta = -536870912 < 0$ , следовательно, точка  $(-8, -4)$  является изолированной критической точкой.

Для анализа критических линий на бесконечности проанализируем многоугольник Ньютона (рис. 8) многочлена (5.1) и выделим укорочённые многочлены, соответствующие рёбрам, чьи нормали имеют хотя бы одну положительную координату.

Из этого многоугольника Ньютона можно видеть, что два ребра соответствуют бесконечности  $\Gamma_3^{(1)}$  и  $\Gamma_4^{(1)}$ .

Рассмотрим ребро  $\Gamma_3^{(1)}$ , которому соответствует укорочение

$$\hat{f}_3^{(1)} = -4z(-2z + x)(x^2 - 4xz + 8z^2)^2.$$

По нему можно определить первый член разложения  $z = x/2 + z_1$ . Произведя такую замену в (5.1), получаем

$$\begin{aligned} {}_3f_2 = & 4x^5z_1 + 40x^4z_1^2 + 192x^3z_1^3 + 512x^2z_1^4 + 768xz_1^5 + 512z_1^6 - 8x^5 - 24x^4z_1 \\ & + 136x^3z_1^2 + 704x^2z_1^3 + 704xz_1^4 - 256z_1^5 - 128x^4 - 1024x^3z_1 - 2624x^2z_1^2 \\ & - 1344xz_1^3 + 1872z_1^4 - 512x^3 - 4608x^2z_1 - 13824xz_1^2 - 13824z_1^3. \end{aligned}$$

В выпуклой оболочке многочлена выбираем соответствующее бесконечности ребро, тогда его укорочённый многочлен будет выглядеть следующим образом:  ${}_1\hat{f}_3^{(1)} = 4x^5(z_1 - 2)$ . Также по этому укорочению определяется второй член разложения:  $z_1 = 2 + z_2$ . Продолжая аналогично, выявляем первую ветвь разложения в бесконечности

$$z = \frac{x}{2} + 2 + \frac{4}{x} \tag{5.3}$$

Аналогично рассмотрим ребро  $\Gamma_4^{(1)}$ , ему соответствует укороченный многочлен  $\hat{f}_4^{(1)} = -2x^5(2z - 1)$ . Значит при  $x \rightarrow \infty$  имеем  $z \rightarrow \frac{1}{2}$ . Произведём замену  $z = \frac{1}{2} + z_1$  в многочлене (5.1), получаем

$$\begin{aligned} {}_4f_2 = & -4x^5z_1 + 40x^4z_1^2 - 192x^3z_1^3 + 512x^2z_1^4 - 768xz_1^5 + 512z_1^6 \\ & - 24x^4z_1 + 168x^3z_1^2 - 320x^2z_1^3 - 576xz_1^4 + 1280z_1^5 - 9x^4 - 32x^3z_1 \\ & + 952x^2z_1^2 - 4320xz_1^3 + 3152z_1^4 - 18x^3 + 296x^2z_1 + 336xz_1^2 \\ & - 9440z_1^3 - 162x^2 + 3528xz_1 - 17768z_1^2 + 1152x - 9416z_1 - 1611. \end{aligned}$$

У его многоугольника Ньютона возьмём единственное ребро, с нормальным конусом, попадающим в конус нашей задачи. Соответствующее укорочение выглядит так:  ${}_4\hat{f}_2^{(1)} = -x^4(4xz_1 + 9)$ . Для определения 3-го члена разложения произведём ещё одну замену вида:  $z_1 = -9/(4x) + z_2$ . После очередных вычислений соответствующий укороченный многочлен будет иметь вид  ${}_5\hat{f}_2^{(1)} = -4x^5z_2 + 36x^3$ . Таким образом, разложение второй ветви в бесконечности выглядит так:

$$z = \frac{1}{2} - \frac{9}{4x} + \frac{9}{x^2}. \quad (5.4)$$

Вычисленные выше разложения ветвей совпадают с результатами использования функции `puisex` из пакета `algcures` системы Maple.

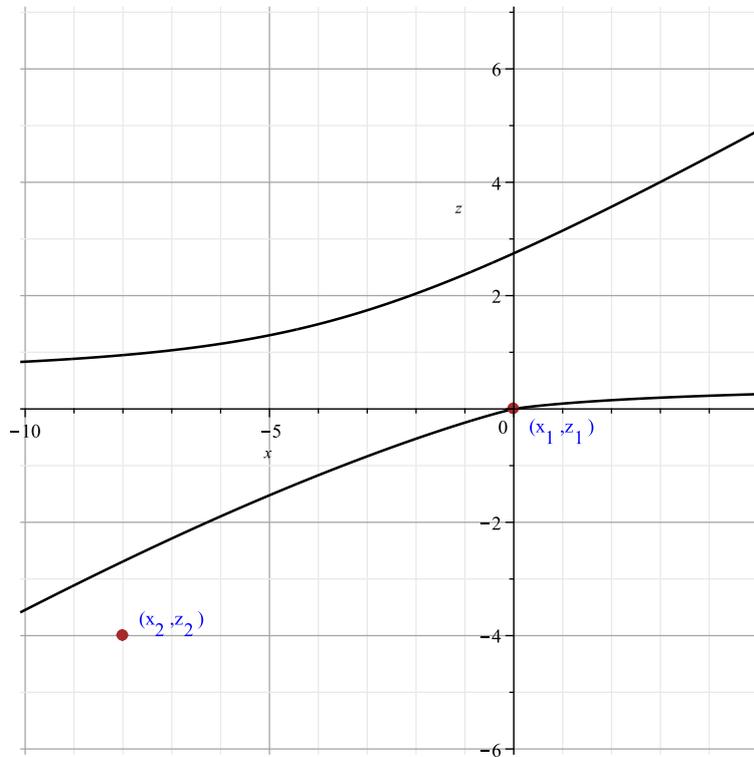


Рис. 11. Линии уровня для критического значения  $c_1^*$  многочлена  $f_2$ .

Корни укороченных многочленов

$$\begin{aligned} \hat{f}_2^{(1)} &= 16z^3 (32z^3 - 16z^2 + 117z - 864), \\ \hat{f}_5^{(1)} &= x^3 (2x^2 + 13x + 64), \end{aligned}$$

соответствующих рёбрам  $\Gamma_2^{(1)}$  и  $\Gamma_5^{(1)}$  многоугольника Ньютона многочлена (5.1), дают точки пересечения с осями координат. Пересечение с  $Oz$  при  $z = 0$  и  $z \approx 2.747016946$ , а с осью  $Ox$  только при  $x = 0$ .

Для изображения этих линий уровня на плоскости (рис. 11) воспользуемся командой `plot_real_curve` пакета `algcures`. Асимптотики (5.3) и (5.4)

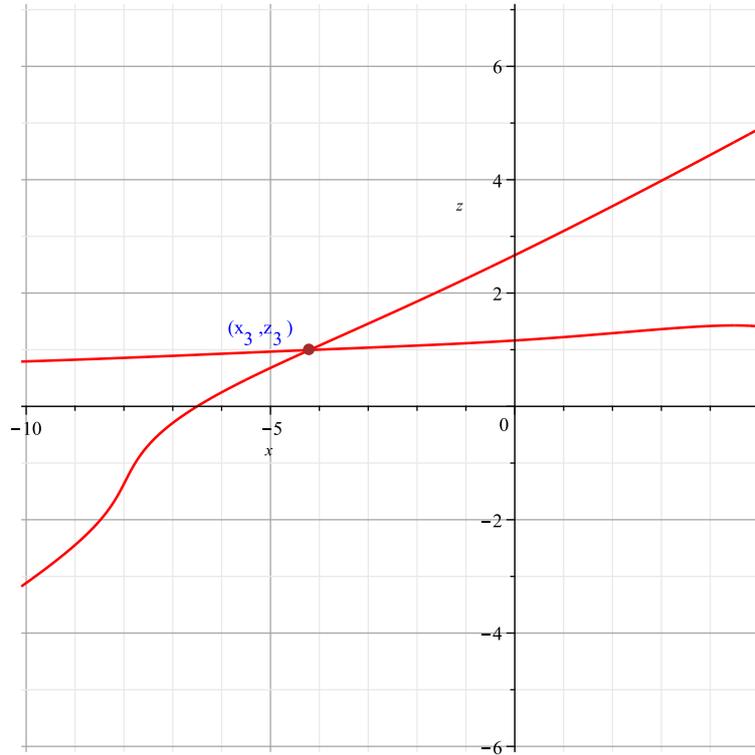


Рис. 12. Линии уровня для критического значения  $c = -17590.6094$  многочлена  $f_2$ .

соответствуют простым бесконечным точкам пересечения. Поэтому здесь работает лемма 4.

**5.3. Критическая линия**  $f_2(x, z) = c_2^* \approx -17590.6094$ . Первый из двух наборов вещественных решений уравнений, входящих в идеал  $SP_3$ , есть критическое значение  $c_2^* \approx -17590.6094$  и соответствующая критическая точка с иррациональными координатами  $(x_3, z_3) \approx (-4.2020, 0.9946)$ . Рассмотрим эту точку, координаты которой являются корнями многочленов 4-й степени. Возьмём их значения приблизительно с большой точностью. Найдём квадратичную форму ряда Тейлора в точке  $(x_3, z_3)$ :

$$h_2(x_3 + \xi, z_3 + \zeta) = -17590.60939 + 1 \cdot 10^{-6}\xi + 704.298847\xi^2 - \\ - 21546.06087\xi\zeta + 50690.90696\zeta^2.$$

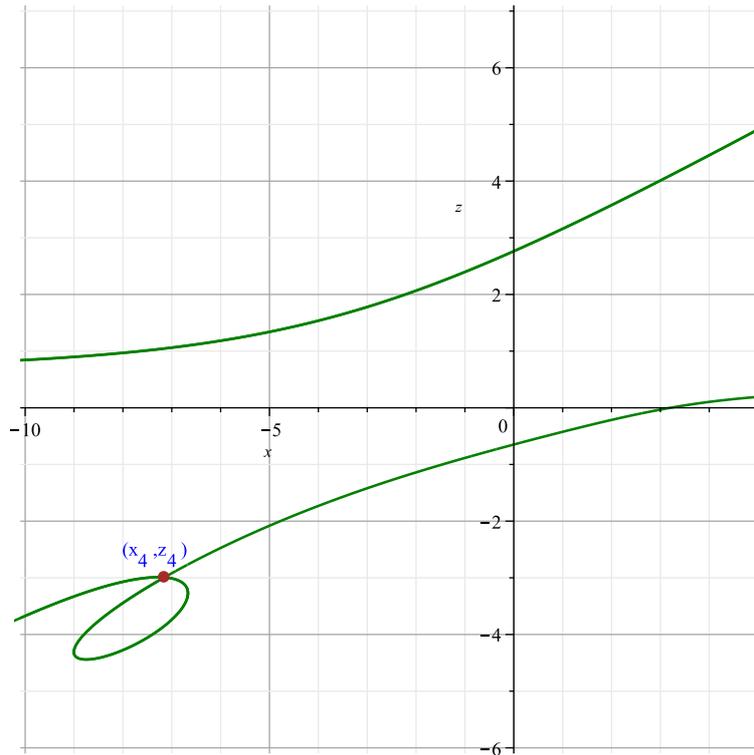
Здесь свободный член близок к  $c_2^*$  и коэффициент линейного члена мал. Поэтому дискриминант этой формы  $\Delta \approx 3.2142 \cdot 10^8$  положительный, следовательно, эта точка по лемме 2 является точкой самопересечения (в ней пересекаются две ветви). Критические линии уровня при  $c_2^*$  пересекают ось  $Ox$  в точке  $(x, z) \approx (-6.5012, 0)$ , а ось  $Oz$  в точках  $(x, z) \approx (0, 1.1627)$  и  $(x, z) \approx (0, 2.6681)$ . Здесь верны асимптотики (5.3) и (5.4). Эскиз этой критической линии показан на рис. 12.

**5.4. Критическая линия**  $f_2(x, z) = c_3^* \approx 4162.4031$ . Второй из двух наборов вещественных решений уравнений, входящих в идеал  $SP_3$ , есть критическое значение  $c_3 \approx 4162.4031$  и соответствующая критическая точка с иррациональными координатами  $(x_4, z_4) \approx (-7.1522, -2.9929)$ . Рассмотрим квадратичную форму разложения ряда Тейлора исходного многочлена (5.1) в критической точке  $(x_4, z_4)$ :

$$h_2(x_4 + \xi, z_4 + \zeta) = 4162.4022 - 0.0004\zeta + 0.00084\xi + 350.751998\xi^2 + 4785.99943\xi\zeta - 11228.6467\zeta^2.$$

Здесь свободный член близок к  $c_3^*$  и коэффициенты линейных членов малы. Поэтому её дискриминант равен  $\Delta \approx 3.8659 \cdot 10^7 > 0$ . Следовательно это точка самопересечения.

Критические линии уровня пересекают ось  $Ox$  в точке  $(x, z) \approx (3.206553809, 0)$ , а ось  $Oz$  в точках  $(x, z) \approx (0, -0.6481)$  и  $(x, z) \approx (0, 2.7632)$ . Эта критическая линия показана на рис. 13.



*Рис. 13.* Линии уровня для критического значения  $c_3^* = 4162.4031$  многочлена  $f_2$ .

**5.5. Все критические линии уровня многочлена  $f_2$ .** На рис. 14 показаны все критические линии уровня многочлена  $f_2$  для соответствующих критических значений  $c_j^*$ , а также критические точки. Некритические линии

уровня расположены между соответствующими критическими согласно (2.3).

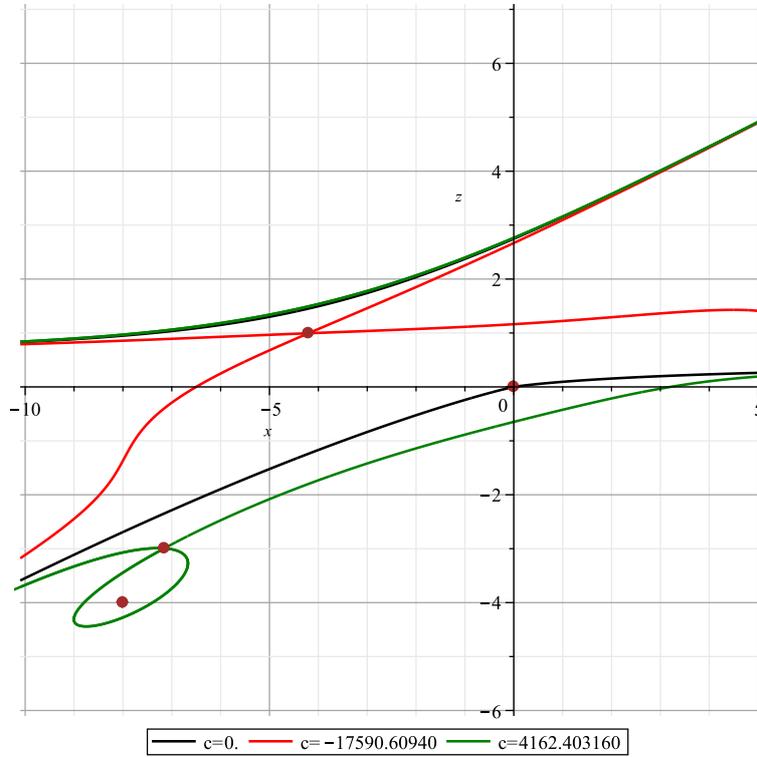


Рис. 14. Все критические линии уровня многочлена  $f_2$

## 6. Пример 3 при $z = 0$

6.1. Критические значения. Рассмотрим последнее нулевое сечение:

$$\begin{aligned}
 f_3 = & 4x^5y + 48x^4y^2 + 344x^3y^3 + 1200x^2y^4 + 2500xy^5 + 2x^5 + 82x^4y + 740x^3y^2 \\
 & + 3156x^2y^3 + 6490xy^4 + 20250y^5 + 13x^4 + 412x^3y + 2782x^2y^2 \\
 & + 828xy^3 - 37827y^4 + 64x^3 + 1728x^2y + 15552xy^2 + 46656y^3.
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Первый полином базиса Грёбнера  $\mathcal{GBJ}_3$  есть

$$\begin{aligned}
 h_3(c) = & c (1738071441650390625c^6 + 8280321886721438116 \cdot 10^5c^5 \\
 & + 13366043451422095808794624c^4 \\
 & + 226388815999145527309322158080c^3 \\
 & + 33335217445009148607411951501312c^2 \\
 & + 14684298419139851546639897167134720c \\
 & - 876052122097662955869886609920884736).
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

Он зависит только от  $c$ , факторизуется на два множителя и определяет критические значения полинома (6.1). Критическое значение  $c_1^* = 0$  является корнем множителя  $h_{11}(c) = c$ . Второй множитель в (6.2) имеет только два вещественных критических значения  $c_2^* \approx -476393.0349992$  и  $c_3^* \approx 51.5040463$ .

**6.2. Критическая линия  $f_3(x, y) = c_1^* = 0$ .** Идеал  $\mathcal{GBJ}_3$  имеет нулевую размерность, его примарная декомпозиция даёт два идеала. Рассмотрим идеал  $SP_1(h_3)$ , являющийся примарной декомпозицией множителя  $h_{31}(c) = c$ , выявляет критическое значение  $c_1^* = 0$ . Корни многочленов, входящих в идеал  $SP_1(h_3)$ , определяют критические точки  $(x_1, y_1) = (0, 0)$  и  $(x_2, y_2) = (-9/2, 3/2)$

a) Рассмотрим характер вещественных критических точек. При  $c_1^* = 0$  в критической точке  $(0, 0)$  квадратичная форма  $h_2$  ряда Тейлора многочлена (6.1) обнуляется и теорема о неявной функции здесь не применима, поэтому применяем анализ особой точки. Вычисляем выпуклую оболочку носителя многочлена (6.1). Многоугольник Ньютона показан на рис.15.

Ребру  $\Gamma_1^{(1)}$ , внешняя нормаль которого входит в конус нашей задачи  $K = \{P < 0\}$ , соответствует укороченный многочлен  $\hat{f}_1^{(1)} = 64(x+9y)^3$ . Выполним подстановку  $y = -x/9 + y_1$  и получим многочлен в переменных  $x$  и  $y_1$ :

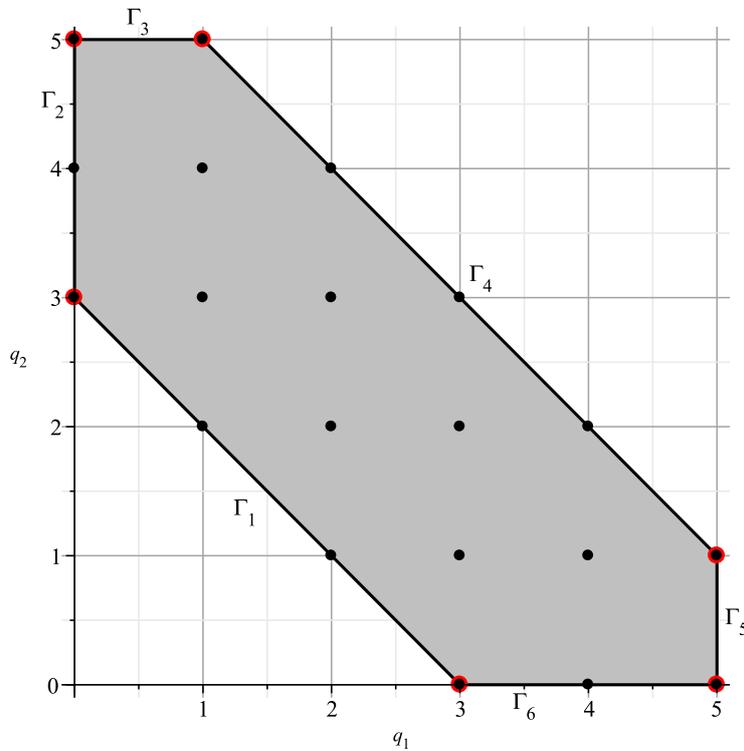


Рис. 15. Многоугольник Ньютона для многочлена  $f_3$ .

$$\begin{aligned}
 {}_1f_3 = & \frac{10816}{59049}x^6 + 46656y_1^3 - 37827y_1^4 + 20250y_1^5 + \frac{9152}{6561}x^5y_1 - \frac{8800}{729}x^4y_1^2 \\
 & + \frac{9664}{81}x^3y_1^3 + 32x^3y_1 - 296x^2y_1^2 + 17640xy_1^3 - \frac{1700}{9}x^2y_1^4 + \frac{10400}{729}x^4y_1 \\
 & - \frac{2944}{27}x^3y_1^2 + \frac{24944}{9}x^2y_1^3 - 4760xy_1^4 + 2500xy_1^5 - \frac{16}{3}x^4 - \frac{10880}{6561}x^5.
 \end{aligned}$$

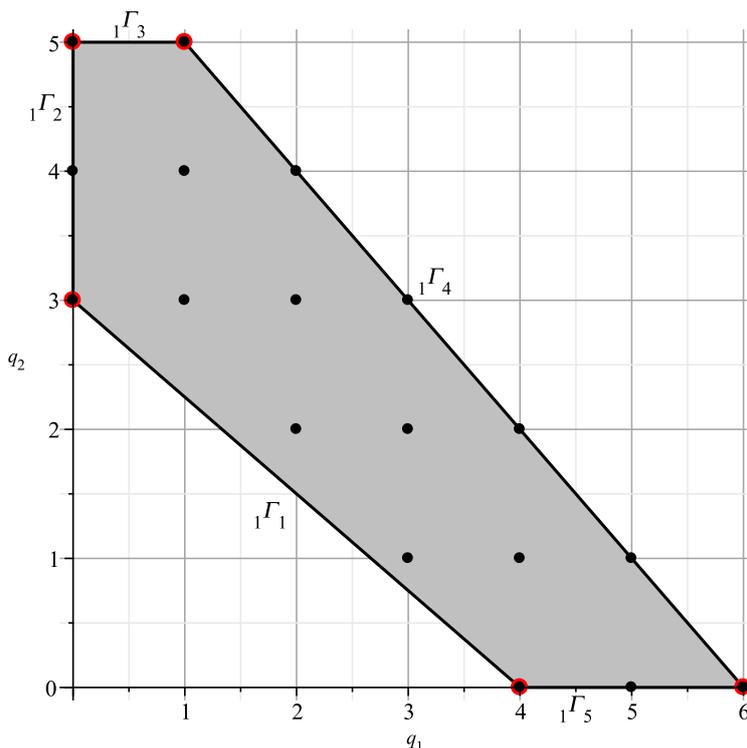


Рис. 16. Многоугольник Ньютона для многочлена  ${}_1f_3$ .

Его многоугольник Ньютона показан на рис. 16. Его единственному ребру  ${}_1\Gamma_1^{(1)}$  с нормальным конусом в конусе нашей задачи  $K = \{P < 0\}$ , соответствует укорочённый многочлен  ${}_1\hat{f}_1^{(1)} = 16x^4/3 + 46656y_1^3$ . Следовательно, здесь требуется ещё одна подстановка  $y_1 = 18^{1/3}x^{4/3}/54 + y_2$ . Она приводит к ещё одному многочлену от переменных  $x, y_2$ . Но при подстановке выявляются дробные степени переменной  $x$ , что в свою очередь приводит к некоторым трудностям. Чтобы упростить дальнейшие действия, тут же произведём ещё

одну замену вида  $x = x_1^3$ . Так получаем многочлен

$$\begin{aligned}
 {}_2f_3 = & 46656y_2^3 - 37827y_2^4 + 20250y_2^5 - \frac{1700x_1^{18}y_2}{19683} + \frac{6250x_1^{15}y_2^2}{2187} - \frac{5128x_1^{15}y_2}{6561} \\
 & + \frac{8075x_1^{12}y_2^2}{729} + \frac{9664x_1^9y_2^3}{81} - \frac{1700x_1^6y_2^4}{9} + 2500x_1^3y_2^5 - \frac{2209x_1^{12}y_2}{729} \\
 & - \frac{2944x_1^9y_2^2}{27} + \frac{24944x_1^6y_2^3}{9} - 4760x_1^3y_2^4 + 32x_1^9y_2 - 296x_1^6y_2^2 + 17640x_1^3y_2^3 \\
 & + \frac{2416x_1^{21}}{177147} + \frac{7892x_1^{18}}{59049} + \frac{2350x_1^{15}}{6561} + \frac{16 \cdot 18^{\frac{1}{3}}x_1^{13}}{27} - \frac{736 \cdot 18^{\frac{2}{3}}x_1^{17}}{19683} \\
 & + \frac{28991 \cdot 18^{\frac{1}{3}}x_1^{16}}{157464} - \frac{74 \cdot 18^{\frac{2}{3}}x_1^{14}}{729} + \frac{2791 \cdot 18^{\frac{1}{3}}x_1^{19}}{177147} - \frac{425 \cdot 18^{\frac{1}{3}}x_1^{22}}{1062882} \\
 & - \frac{14225 \cdot 18^{\frac{2}{3}}x_1^{20}}{4251528} + \frac{625 \cdot 18^{\frac{2}{3}}x_1^{23}}{6377292} + 2592 \cdot 18^{\frac{1}{3}}x_1^4y_2^2 - 2802 \cdot 18^{\frac{1}{3}}x_1^4y_2^3 \\
 & + 48 \cdot 18^{\frac{2}{3}}x_1^8y_2 - \frac{296 \cdot 18^{\frac{1}{3}}x_1^{10}y_2}{27} + 980 \cdot 18^{\frac{1}{3}}x_1^7y_2^2 + \frac{490 \cdot 18^{\frac{2}{3}}x_1^{11}y_2}{27} \\
 & - \frac{467 \cdot 18^{\frac{2}{3}}x_1^8y_2^2}{6} - \frac{9520 \cdot 18^{\frac{1}{3}}x_1^7y_2^3}{27} + 1875 \cdot 18^{\frac{1}{3}}x_1^4y_2^4 + \frac{12472 \cdot 18^{\frac{1}{3}}x_1^{10}y_2^2}{81} \\
 & + \frac{625 \cdot 18^{\frac{2}{3}}x_1^8y_2^3}{9} - \frac{2944 \cdot 18^{\frac{1}{3}}x_1^{13}y_2}{729} + \frac{6236 \cdot 18^{\frac{2}{3}}x_1^{14}y_2}{2187} - \frac{2380 \cdot 18^{\frac{2}{3}}x_1^{11}y_2^2}{243} \\
 & + \frac{6250 \cdot 18^{\frac{1}{3}}x_1^7y_2^4}{27} + \frac{4832 \cdot 18^{\frac{1}{3}}x_1^{13}y_2^2}{729} - \frac{3400 \cdot 18^{\frac{1}{3}}x_1^{10}y_2^3}{243} - \frac{18325 \cdot 18^{\frac{1}{3}}x_1^{16}y_2}{78732} \\
 & - \frac{850 \cdot 18^{\frac{2}{3}}x_1^{14}y_2^2}{2187} + \frac{6250 \cdot 18^{\frac{2}{3}}x_1^{11}y_2^3}{729} + \frac{2416 \cdot 18^{\frac{2}{3}}x_1^{17}y_2}{19683} + \frac{3125 \cdot 18^{\frac{1}{3}}x_1^{19}y_2}{118098}.
 \end{aligned}$$

Его многоугольник Ньютона показан на рис. 17, и имеет два ребра  ${}_2\Gamma_1^{(1)}$  и  ${}_2\Gamma_2^{(1)}$  обращённые, к нулевой точке, которым соответствует следующие укорочённые многочлены

$$\begin{aligned}
 {}_2\hat{f}_1^{(1)} &= \frac{16 \cdot 18^{1/3} (x_1^5 + 81 \cdot 18^{1/3}y_2) x_1^8}{27} \\
 {}_2\hat{f}_2^{(1)} &= 48 \cdot 18^{2/3} \left( x_1^8 + 3 \cdot 18^{2/3}y_2x_1^4 + 54 \cdot 18^{1/3}y_2^2 \right) y_2.
 \end{aligned}$$

Для  ${}_2\hat{f}_1^{(1)}$  корнем будет  $y_2 = -18^{2/3}x_1^5/1458$ . Выполняя обратную подстановку по  $x$  и  $y$ , получаем разложение ветви вблизи точки  $(0, 0)$

$$y = -\frac{x}{9} + \frac{18^{1/3}x^{4/3}}{54} - \frac{8748^{1/3}x^{5/3}}{4374}.$$

Поскольку первое ребро имеет верхнюю точку с ординатой 1, то здесь применима теорема о неявной функции, которая даёт единственную ветвь.

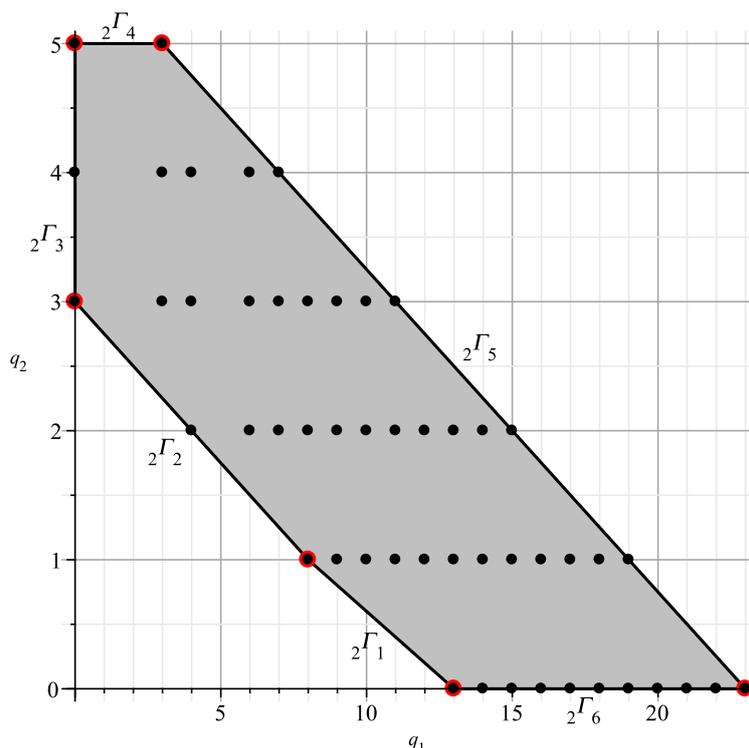


Рис. 17. Многоугольник Ньютона для многочлена  $2f_3$ .

Второе укорочение  $2\hat{f}_2^{(1)}$  не имеет нетривиальных вещественных корней, следовательно, ему не соответствует вещественная ветвь.

б) Также критическому значению  $c_1^* = 0$  соответствует критическая точка  $(x_2, y_2) = (-9/2, 3/2)$ . Вычисляем квадратичную форму ряда Тейлора многочлена (6.1) в этой точке с использованием команды `mtaylor`:

$$h_2(x_2 + \xi, y_2 + \eta) = 576\xi^2 + 1728\xi\eta + 5184\eta^2.$$

Дискриминант  $\Delta = -8957952$  отрицательный, следовательно, точка  $(x_2, y_2)$  является изолированной критической точкой.

в) Для анализа критических линий на бесконечности рассмотрим многоугольник Ньютона (рис.15) многочлена (6.1). Выделим укороченные многочлены, соответствующие рёбрам, чьи нормали имеют хотя бы одну положительную координату. Из этого многоугольника Ньютона можно видеть, что таковых три:  $\Gamma_3^{(1)}$ ,  $\Gamma_4^{(1)}$  и  $\Gamma_5^{(1)}$ .

г) Рассмотрим ребро  $\Gamma_3^{(1)}$ , ему соответствует укороченный многочлен  $\hat{f}_3^{(1)} = 250y^5(10x + 81)$ . Значит, при  $y \rightarrow \infty$  имеем  $x \rightarrow -81/10$ . Произведём замену  $x = -81/10 + x_1$  в многочлене и возьмём соответствующее ребро, попадающее в конус нашей задачи. Соответствующее укорочение выглядит так:  $3\hat{f}_2^{(1)} = 4y^4(625yx_1 - 2916)$ . Для определения 2-го члена разложения произведём ещё одну замену вида:  $x_1 = 2916/625y + x_2$ . После очередных вычислений

соответствующий укороченный многочлен будет иметь вид

$${}_4\hat{f}_3^{(1)} = 2500y^5x_2 + \frac{472392}{125}y^3.$$

Таким образом, разложение первой ветви в бесконечности выглядит так:

$$x \approx -\frac{81}{10} + \frac{2916}{625y} - \frac{118098}{78125y^2}.$$

Ей соответствует простая бесконечная точка пересечения.

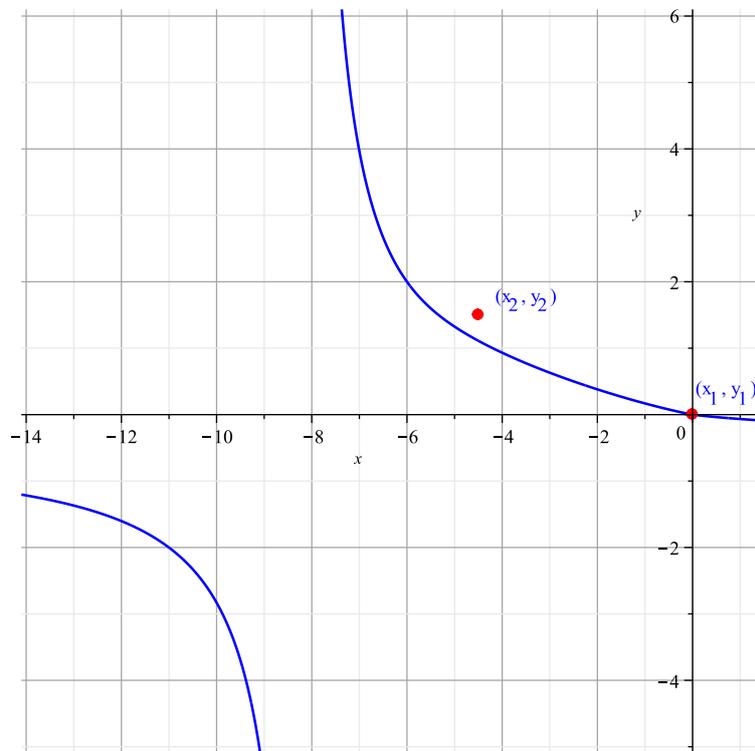


Рис. 18. Линии уровня для критического значения  $c_1^* = 0$  многочлена  $f_3$ .

д) Ребру  $\Gamma_4^{(1)}$  соответствует укороченный многочлен  $\hat{f}_4^{(1)} = 4xy(x^2 + 6xy + 25y^2)^2$ , который не имеет нетривиальных вещественных корней. Следовательно, ветвей в бесконечности не имеет.

е) Аналогично рассмотрим ребро  $\Gamma_5^{(1)}$ , которому соответствует укорочение  $\hat{f}_5^{(1)} = 2x^5(2y + 1)$ . По нему можно определить, что первая замена будет  $y = -1/2 + y_1$ , а также, что при  $x \rightarrow \infty$  имеем горизонтальную асимптоту  $y = -1/2$ . Произведя такую замену, в многоугольнике Ньютона полученного многочлена выбираем соответствующее бесконечности ребро, его укороченный многочлен есть:  ${}_1\hat{f}_5^{(1)} = 4x^4(xy_1 - 4)$ . Также по этому укорочению определяется второй член разложения:  $y_1 = 4/x + y_2$ . Продолжая аналогично, выявляем очередное укорочение  ${}_2\hat{f}_5^{(1)} = 4x^5y_2 + 136x^3$  и, соответственно,

вторую ветвь разложения в бесконечности

$$y \approx -\frac{1}{2} + \frac{4}{x} - \frac{34}{x^2}.$$

Ей также соответствует простая бесконечная точка пересечения.

Пересечение с осями координат можно определить по рёбрам  $\Gamma_2^{(1)}$  и  $\Gamma_6^{(1)}$ , таковым и единственным для осей  $Ox$  и  $Oy$  является точка  $(0, 0)$ . Вычисленные выше разложения ветвей совпадают с результатами использования функции `puisex` из пакета `algcurves` системы `Maple`.

Теперь изобразим линии уровня на плоскости. Для этого воспользуемся командой `plot_real_curve` пакета `algcurves`. Критическую линию уровня и точки для  $c_1^* = 0$  см. на рис. 18.

**6.3. Критическая линия**  $f_3(x, y) = c_2^* \approx -476393.0349$ . При этом  $c_2^*$  имеется только одна критическая точка  $(x_3, y_3) \approx (-11.3777, -1.0391)$ . Её координаты являются первым набором корней многочленов 6-й степени:

$$\begin{aligned} &12000x^6 + 376640x^5 + 4789184x^4 + 32751568x^3 \\ &+ 128618398x^2 + 276229080x + 255518145, \\ &3 \cdot 10^5 y^6 - 607040y^5 + 56704y^4 + 505904y^3 \\ &- 403522y^2 + 143976y - 26487, \end{aligned} \tag{6.3}$$

которые получаются при примарной декомпозиции идеала  $SP_2(h_3)$ , включающего множитель  $h_{32}$ , при лексикографических порядках  $c \succ y \succ x$  и  $c \succ x \succ y$  соответственно. Корни многочленов (6.3) суть иррациональные числа, поэтому также возьмём их приблизительные значения с большой точностью. Найдём квадратичную форму ряда Тейлора в точке  $(x_3, y_3)$ :

$$\begin{aligned} h_2(x_3 + \xi, y_3 + \eta) = &-476393.0342 + 0.0002\eta + 0.00025\xi \\ &+ 373296.3064\eta\xi + 13334.30346\xi^2 + 462406.3700\eta^2. \end{aligned}$$

Здесь постоянная близка к  $c_2^*$ , коэффициенты линейных членов малы, а дискриминант этой формы  $\Delta \approx 1.1468 \cdot 10^{11}$  положительный. Следовательно, эта точка по лемме 2 является точкой самопересечения (в ней пересекаются две ветви). Также критическая линия уровня при  $c_2^*$  пересекает ось  $Oy$  при  $y \approx -1.4798$  и ось  $Ox$  при  $x \approx -12.82060973$ . Она показана на рис. 19.

**6.4. Критическая линия**  $f_3(x, y) = c_3^* \approx 51.5040$ . При этом  $c_3^*$  критическая точка  $(x_4, y_4) \approx (-4.8952, 1.4224)$ . Её координаты являются вторым набором корней многочленов (6.3). Аналогично рассмотрим квадратичную

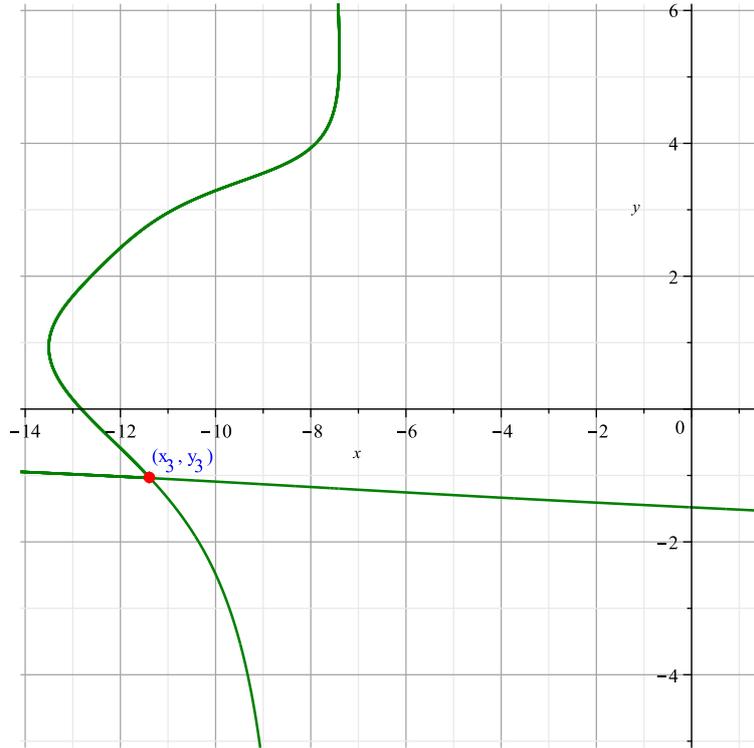


Рис. 19. Линии уровня для критического значения  $c_2^* \approx -476393.035$  многочлена  $f_3$ .

форму разложения ряда Тейлора исходного многочлена в критической точке  $x_4 \approx -4.8952$ ,  $y_4 \approx 1.4224$  соответствующей критическому значению  $c_3 = 51.5040$ :

$$h_2(x_4 + \xi, y_4 + \eta) = 51.5041 + 0.0003\eta - 0.00010\xi - 2046.65935\eta\xi - 408.778677\xi^2 - 1602.0119\eta^2.$$

Здесь постоянная близка к  $c_3^*$  и коэффициенты линейных членов малы. Поэтому дискриминант  $\Delta \approx 1.5693 \cdot 10^6$  положительный, что по лемме 2 означает точку, в которой пересекаются две ветви кривой. Критические линии уровня при  $c_3^*$  пересекают оси  $Ox$  и  $Oy$  при  $x \approx 0.8749$  и  $y \approx 0.1063$  соответственно. Линия уровня и критическая точка изображены на рис. 20.

**6.5. Все критические линии уровня многочлена  $f_3$ .** На рис. 21 показаны все критические линии уровня многочлена  $f_3$  для соответствующих критических значений  $c_j^*$ , а также критические точки. Некритические линии уровня расположены между соответствующими критическими линиями и критическими точками.

Отметим, что для всех трёх многочленов  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  все бесконечные точки пересечения имеют первую кратность. Поэтому применима лемма 4 и все

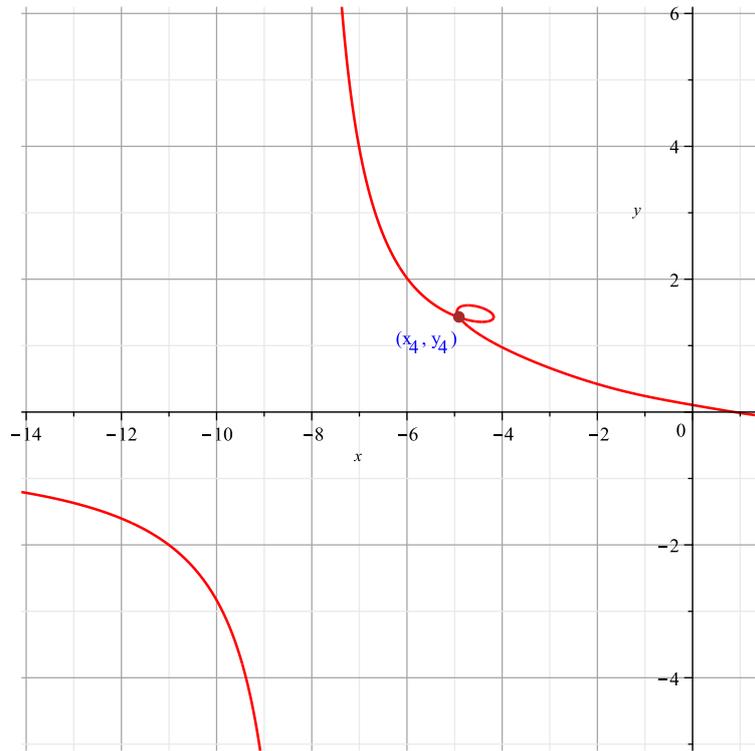


Рис. 20. Линия уровня для критического значения  $c_3^* \approx 51.5040$  многочлена  $f_3$ .

некритические линии уровня расположены между найденными критическими и топологически эквивалентны в интервалах (2.3).

## Список литературы

1. Брюно А. Д., Батхин А. Алгоритмы и программы вычисления корней многочлена от одной или двух неизвестных // Программирование. 2021. № 5. С. 22–43. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0132347421050046>.
2. Брюно А., Батхин А. Линии уровня многочлена на плоскости // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. Москва, 2021. № 57. С. 1–24. DOI: <https://doi.org/10.20948/prepr-2021-57>. eprint: [https://keldysh.ru/papers/2021/rep2021\\_57.pdf](https://keldysh.ru/papers/2021/rep2021_57.pdf). URL: <https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-57>.
3. Батхин А. Б., Брюно А. Д., Варин В. П. Множества устойчивости многопараметрических гамильтоновых систем // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76, № 1. С. 80–133.
4. Милнор Д. Теория Морса: Пер. с англ. Изд. 3-е. М.: Издательство ЛКИ, 2011. 184 с.

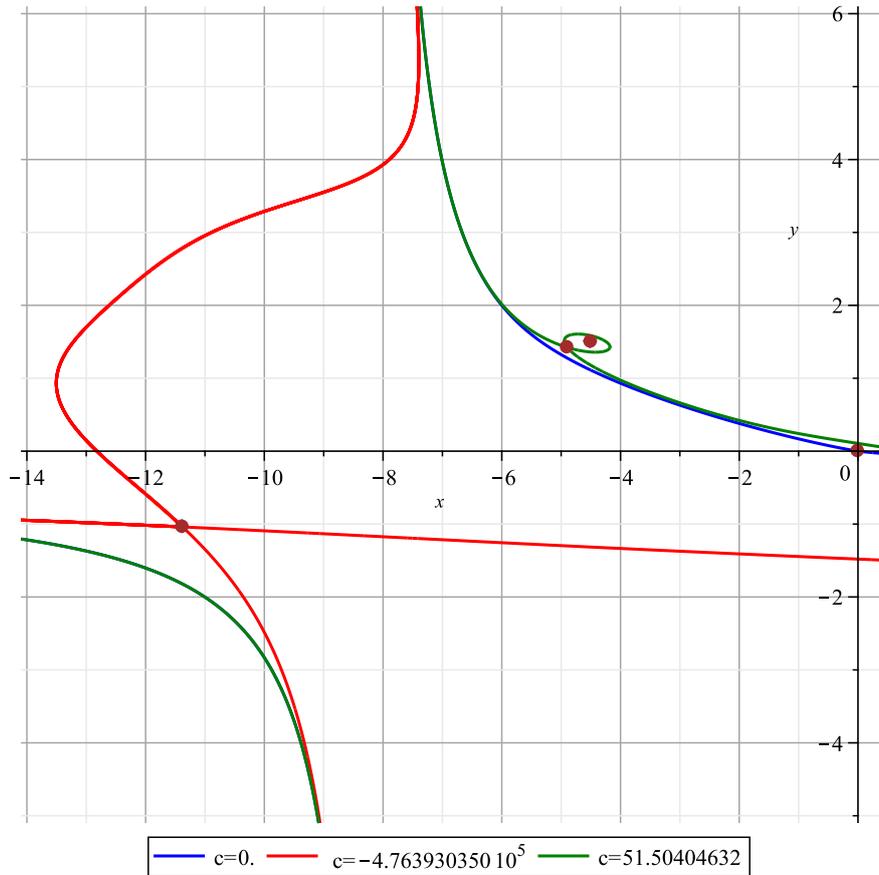


Рис. 21. Все критические линии уровня многочлена  $f_3$ .

5. *Singh C., Singh J.* Accurate contour plotting using 6-node triangular elements in 2D // *Finite Elements in Analysis and Design*. 2009. Vol. 45, no. 2. P. 81–93. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.finel.2008.07.011>.
6. *Hoeij M.* Rational parametrizations of algebraic curves using a canonical divisor // *J. Symbolic Computation*. 1997. Vol. 23. P. 209–227.
7. *Кокс Д., Литтл Д., О’Ши Д.* Идеалы, многообразия и алгоритмы. Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры. М.: Мир, 2000. 687 с.
8. *Брюно А. Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. 252 с.
9. *Kollár J.* *Lectures on Resolution of Singularities*. Princeton, Oxford: Princeton University Press, 2007.

## Список рисунков

1	Многоугольник Ньютона и его рёбра для многочлена (4.3). . . . .	11
2	Многоугольник Ньютона и его рёбра для многочлена (4.4). . . . .	12
3	Многоугольник Ньютона и его рёбра для многочлена (4.5). . . . .	13
4	Линии уровня для критического значения $c_1^*$ многочлена $f_1$ . . . . .	14
5	Линии уровня для критического значения $c_2^*$ многочлена $f_1$ . . . . .	15
6	Линии уровня для критического значения $c_3^*$ многочлена $f_1$ . . . . .	16
7	Все критические линии уровня многочлена $f_1$ . . . . .	17
8	Многоугольник Ньютона для многочлена $f_2$ . . . . .	19
9	Многоугольник Ньютона для многочлена ${}_1f_2$ . . . . .	20
10	Многоугольник Ньютона для многочлена ${}_2f_2$ . . . . .	21
11	Линии уровня для критического значения $c_1^*$ многочлена $f_2$ . . . . .	23
12	Линии уровня для критического значения $c_2^*$ многочлена $f_2$ . . . . .	24
13	Линии уровня для критического значения $c_3^*$ многочлена $f_2$ . . . . .	25
14	Все критические линии уровня многочлена $f_2$ . . . . .	26
15	Многоугольник Ньютона для многочлена $f_3$ . . . . .	27
16	Многоугольник Ньютона для многочлена ${}_1f_3$ . . . . .	28
17	Многоугольник Ньютона для многочлена ${}_2f_3$ . . . . .	30
18	Линии уровня для критического значения $c_1^*$ многочлена $f_3$ . . . . .	31
19	Линии уровня для критического значения $c_2^*$ многочлена $f_3$ . . . . .	33
20	Линия уровня для критического значения $c_3^*$ многочлена $f_3$ . . . . .	34
21	Все критические линии уровня многочлена $f_3$ . . . . .	35