



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 96 за 2021 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**А.Н. Козлов, В.С. Коновалов,  
С.О. Новикова**

Исследование пульсирующих течений ионизирующегося водорода в плазменном ускорителе на основе двумерной модели

Статья доступна по лицензии  
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Козлов А.Н., Коновалов В.С., Новикова С.О. Исследование пульсирующих течений ионизирующегося водорода в плазменном ускорителе на основе двумерной модели // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. № 96. 24 с.  
<https://doi.org/10.20948/prepr-2021-96>  
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-96>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.Келдыша  
Российской академии наук**

**А.Н. Козлов, В.С. Коновалов, С.О. Новикова**

**Исследование  
пульсирующих течений  
ионизирующегося водорода  
в плазменном ускорителе  
на основе двумерной модели**

**Москва — 2021**

*Козлов А.Н., Коновалов В.С., Новикова С.О.*

**Исследование пульсирующих течений ионизирующегося водорода  
в плазменном ускорителе на основе двумерной модели**

Представлено численное исследование процесса ионизации водорода в канале квазистационарного плазменного ускорителя. Расчеты пульсирующих и стационарных течений ионизирующегося водорода проведены в рамках двумерной МГД модели в приближении локального термодинамического равновесия с учетом переноса излучения и при условии равномерной подачи газа на входе в канал. В результате серии расчетов определено эмпирическое условие стационарности осесимметричных течений ионизирующегося водорода.

**Ключевые слова:** течения ионизирующегося водорода, уравнения магнитной газодинамики, условие стационарности течений, перенос излучения

*Andrey Nikolaevich Kozlov, Venyamin Sergeevich Konovalov,  
Svetlana Olegovna Novikova*

**Study of pulsating flows of ionizing hydrogen in the plasma accelerator  
based on two-dimensional model**

Numerical study of the hydrogen ionization process in the channel of the quasi-stationary plasma accelerator is presented. Calculations of pulsating and stationary flows of ionizing hydrogen were carried out within the framework of two-dimensional MHD model in the approximation of local thermodynamic equilibrium, taking into account the radiation transport and under the condition of uniform gas supply at the channel inlet. As a result of a series of calculations, the empirical condition for the stationarity of axisymmetric flows of ionizing hydrogen was determined.

**Key words:** flows of ionizing hydrogen, equations of magnetogasdynamics, stationarity flow condition, and radiation transport

## Оглавление

Введение .....	3
РМГД модель в приближении ЛТР .....	5
Результаты расчетов течений ионизирующегося водорода.....	11
Эмпирическое условие стационарности течений .....	18
Законы подобия и условие стационарности течений .....	19
Заключение.....	21
Библиографический список.....	21

## Введение

Фазовый переход от газообразного состояния среды к плазме в результате ионизации является одним из примеров нелинейных наук, а исследования переходов между различными состояниями материи составляют одно из фундаментальных научных направлений, имеющих актуальные практические приложения (см., например, [1-5]).

Процесс ионизации газа и переход от газообразного состояния к плазме в каналах квазистационарных плазменных ускорителей (КСПУ) [5-17] относятся к малоизученным явлениям. В данном случае представлено численное исследование пульсирующих и стационарных течений ионизирующегося водорода в канале плазменного ускорителя. Исследование перехода от слабоионизованного газа к плазме в канале КСПУ проведено в рамках единой системы магнитогазодинамических уравнений для достаточно плотной среды. Соответствующая модифицированная система МГД уравнений является следствием уравнений переноса в трехкомпонентной среде [4], состоящей из атомов, ионов и электронов. Ранее использовалось предположение о скачкообразном изменении проводимости среды [18-19], а также предположение о локальном термодинамическом равновесии (ЛТР) [20-22]. В рамках данных моделей было проведено сопоставление расчетных и экспериментальных данных, в том числе для вольтамперных характеристик разряда, отвечающих зависимости максимального напряжения в канале от максимального значения разрядного тока в электрической цепи ускорителя. Установлено также соответствие результатов расчетов и экспериментальных данных для локальных параметров квазистационарных компрессионных потоков плазмы на выходе из ускорителя.

Кроме того, разработаны численные модели, в которых для изучения процесса ионизации система МГД уравнений была дополнена уравнением кинетики ионизации и рекомбинации в рамках модифицированного диффузионного приближения [23-26] с учетом реальной структуры энергетических уровней атома. В результате была выявлена неравновесная природа процессов на фронте ионизации, где наблюдается четко выраженное отклонение от ионизационно-рекомбинационного равновесия. Это существенно изменило прежние представления о процессе ионизации в канале КСПУ. В настоящее время особое внимание уделяется исследованию переноса излучения в потоках ионизирующегося газа и плазмы [22, 27, 28].

Установки КСПУ могут включать две ступени. Первая ступень состоит из набора малых коаксиальных ускорителей, в которых происходит процесс ионизации и предварительного ускорения плазмы. Вторая ступень представляет собой большой коаксиальный ускоритель, подключенный к независимой электрической цепи. Вторая ступень предназначена для дополнительного ускорения плазмы. Схема простейшего плазменного ускорителя и механизм ускорения плазмы представлены на рис. 1.

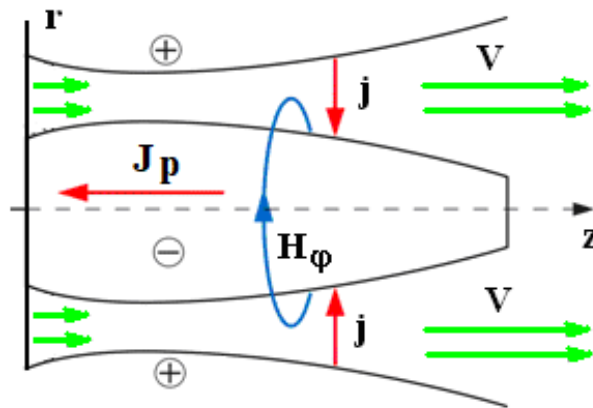


Рис. 1. Схема плазменного ускорителя

Малые плазменные ускорители первой ступени КСПУ схематично состоят из двух коаксиальных электродов, подключенных к электрической цепи. Между электродами подается нейтральный газ. В результате пробоя между электродами формируется фронт ионизации, отвечающий фазовому переходу от газообразного состояния материи к плазме. В простейших системах указанные процессы происходят при наличии основной азимутальной компоненты магнитного поля, которое генерируется электрическим током, проходящим вдоль внутреннего электрода. Ток в плазме имеет преимущественно радиальное направление. Соответственно, ускорение плазмы происходит благодаря силе Ампера  $\frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H}$ . Многофункциональные установки

КСПУ предназначены для различных технологических приложений, термоядерных исследований и представляют интерес для разработки перспективных мощных электрореактивных плазменных двигателей.

Теоретические и численные исследования потоков ионизирующегося газа и плазмы в первой и второй ступенях КСПУ представлены большим количеством публикаций (см., например, [5, 6, 18-22, 24-35]). Эти исследования направлены также на изучение трансзвуковых потоков плазмы, в том числе при наличии дополнительного продольного магнитного поля [31, 32], на исследование приэлектродных процессов, обусловленных эффектом Холла [33, 34], на изучение компрессионных потоков [5, 18, 35] и динамики примесей.

Изучение свойств потоков ионизирующегося газа и плазмы проводится с помощью аналитических моделей для стационарных течений и на основе численных моделей для квазистационарных течений, рассчитанных методом установления. Для стационарных течений ионизирующегося газа разработаны основы теории процессов на фронте ионизации [25]. Нестационарные пульсирующие режимы течений ионизирующегося газа, выявленные также в экспериментах, изучены в рамках квазиодномерной модели [26, 36]. В данной работе пульсирующие режимы течений ионизирующегося газа рассмотрены на основе двумерной МГД модели, и в результате серии расчетов определено условие стационарности двумерных течений ионизирующегося водорода.

## РМГД модель в приближении ЛТР

В представленных численных исследованиях использована модель радиационной магнитной газодинамики (РМГД) с учетом радиационного переноса тепла в уравнении для внутренней энергии. Плотность потока энергии излучения для низкотемпературной достаточно плотной плазмы может оказывать влияние на перераспределение энергии в среде. При этом энергией излучения, плотностью импульса излучения и тензором плотности потока импульса излучения можно пренебречь в уравнениях радиационной магнитной газодинамики в рассматриваемом нерелятивистском случае.

Во введении было отмечено, что процесс ионизации в задачах нелинейной плазмодинамики описывается различными способами (см., например, [1-5, 18-26]). В данной работе используется модифицированная МГД модель в рамках приближения локального термодинамического равновесия (ЛТР).

Модель течения ионизирующегося газа основана на уравнениях переноса трехкомпонентной среды, состоящей из атомов, ионов и электронов [4]. Уравнение диффузии магнитного поля следует из уравнений Максвелла и закона Ома  $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \frac{1}{c} [\mathbf{V}, \mathbf{H}]$ . Инерцией электронов и током смещения пренебрегаем. Течения ионизирующегося газа исследуется для водорода, часто используемого в экспериментах. Массы атомов и ионов равны  $m_a = m_i = m$ . Известно, что на фронте ионизации температура возрастает до уровня  $1 \div 3$  эВ. Концентрация газа, поступающего в канал, предполагается достаточно высокой  $n = 10^{16} \div 10^{18} \text{ см}^{-3}$ . В этом случае можно считать, что среда является квазинейтральной  $n_i = n_e$ , а скорости компонент среды равны между собой  $\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_e = \mathbf{V}_a = \mathbf{V}$ . Кроме того, можно ограничиться случаем однотемпературной смеси. Преобразования исходных уравнений с учетом сделанных предположений приводят к следующей модифицированной системе РМГД уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{V}) &= 0, & \rho \frac{d \mathbf{V}}{d t} + \nabla P &= \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H}, & \frac{d}{d t} &= \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla), \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \text{div}(\rho \varepsilon \mathbf{V}) + P \text{div} \mathbf{V} &= \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} - \text{div} \mathbf{q} - \text{div} \mathbf{W}, & & & (1) \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \text{rot}(\mathbf{V} \times \mathbf{H}) - c \text{rot} \frac{\mathbf{j}}{\sigma}, & \mathbf{j} &= \frac{c}{4\pi} \text{rot} \mathbf{H}, \\ P &= P_a + P_i + P_e = (1 + \alpha)(c_p - c_v) \rho T, & \varepsilon &= (1 + \alpha) c_v T + \varepsilon_I, \\ k_B / m = R &= c_p - c_v = c_v (\gamma - 1), & \alpha &= n_e / (n_a + n_i), & \mathbf{q} &= -\kappa_{e \rightarrow a} \nabla T, \end{aligned}$$

где  $\rho = m n$  – плотность тяжелых частиц,  $n = n_a + n_i$  – концентрация тяжелых частиц,  $P$  – суммарное давление,  $\alpha$  – степень ионизации,  $\mathbf{q}$  – тепловой поток,  $\kappa_{e \rightarrow a}$  – электрон-атомарная теплопроводность,  $\mathbf{W}$  – поток энергии излучения.

Внутренняя энергия на единицу массы  $\varepsilon$  включает дополнительное слагаемое  $\varepsilon_I = \zeta \alpha I / m_i$ , ответственное за потери энергии на ионизацию, где  $I$  - энергия ионизации атома. Уравнение для внутренней энергии в системе (1) содержит джоулев нагрев  $Q_{ei} = \mathbf{j}^2 / \sigma$ , который существенно превосходит тепло, выделяемое при трении с остальными компонентами.

Система уравнений (1) содержит также электропроводность среды  $\sigma = e^2 n_e / m_e \nu_e$ , которая определяется через среднюю частоту столкновений электрона с другими частицами  $\nu_e$ . Средняя частота складывается из частот столкновений с атомами и ионами:  $\nu_e = \nu_{ea} + \nu_{ei}$ ,  $\nu_{ea} = n_a \langle V_e \rangle S_{ea}$ ,  $\nu_{ei} = n_i \langle V_e \rangle S_{ei}$ , где  $S_{ea}$ ,  $S_{ei}$  - эффективные сечения столкновений.

Теплопроводность среды зависит от ее состояния. В случае больших степеней ионизации заметную роль в суммарном теплопереносе играет классическая электронная теплопроводность, в данных установках поперек азимутального магнитного поля. Если степень ионизации мала, то определенный вклад вносит атомарная теплопроводность.

Приближение ЛТР означает, что концентрации всех трех компонент среды и электронная температура связаны уравнением Саха

$$\frac{n_i n_e}{n_a} = K_1(T) = \frac{2 \Sigma_i}{\Sigma_a} \left( \frac{m_e k_B T}{2 \pi \hbar^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{I}{k_B T}\right), \quad (2)$$

где  $\Sigma_a$  и  $\Sigma_i$  - статистические суммы атома и иона,  $K_1$  - константа ионизационного состояния. Уравнение ионизационного равновесия (2) предполагает, что в любом локальном объеме достаточно плотной плазмы с известными значениями температуры и плотности происходит два взаимно обратных процесса. При этом прямой процесс ионизации атома из основного состояния в результате электронного удара будет уравновешен обратным процессом рекомбинации при столкновении иона с электронами:

$A + e \leftrightarrow A^+ + e + e$ . Уравнение Саха определяет состав среды при условии квазинейтральности. Учтем, что  $n_e = n_i = \alpha n$  и  $n_a = n - n_i = (1 - \alpha) n$ , где  $n = n_a + n_i$ . Тогда из уравнения (2) для степени ионизации следует соотношение

$$\alpha = -K_1(T) / 2n + \sqrt{(K_1(T) / 2n)^2 + K_1(T) / n}. \quad (3)$$

Плотность энергии излучения  $U$  и плотность потока энергии излучения  $\mathbf{W}$  являются интегральными характеристиками излучения, которые определяются через интенсивность излучения  $I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$  вдоль выбранного направления и для определенного участка спектра,

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_0^\infty \int_{4\pi} I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) d\Omega d\nu, \quad \mathbf{W}(\mathbf{r}) = \int_0^\infty \int_{4\pi} I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \boldsymbol{\Omega} d\Omega d\nu. \quad (4)$$

Плотность энергии излучения  $U$  можно не учитывать в МГД уравнениях, поскольку она мала по сравнению с тепловой или внутренней энергией среды ( $U \ll \rho \varepsilon$ ). В то же время поток энергии излучения  $W \sim cU$  может играть определенную роль в перераспределении энергии.

Уравнение переноса для интенсивности излучения в общем случае имеет следующий вид

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \eta_\nu(\mathbf{r}) - \kappa_\nu(\mathbf{r}) \cdot I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}), \quad (5)$$

где  $I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$  – интенсивность излучения с частотой  $\nu$ , которое распространяется в направлении телесного угла  $\boldsymbol{\Omega}$  и отвечает точке с координатой  $\mathbf{r}$ . Уравнение (5) записано в предположении изотропии рассеяния. Поскольку скорость распространения излучения существенно выше характерных скоростей плазмодинамических процессов, то поле излучения мгновенно подстраивается под распределение параметров потока, и можно ограничиться решением стационарного уравнения переноса излучения

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \eta_\nu(\mathbf{r}) - \kappa_\nu(\mathbf{r}) \cdot I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}), \quad (6)$$

в котором коэффициент поглощения  $\kappa_\nu(\mathbf{r})$  и излучательная способность  $\eta_\nu(\mathbf{r})$  зависят от плотности и температуры среды, а также спектрального параметра  $\nu$ , связанного с энергией фотона  $h\nu$ . В общем случае для определения значений коэффициента поглощения и излучательной способности следует провести расчет спектра атома и вычислить населенности состояний атомов на основе решения уравнений поуровневой кинетики. Коэффициент поглощения и излучательная способность складываются из трех частей, отвечающих поглощению и излучению в линиях, фотоионизации и фоторекомбинации, а также рассеянию. В уравнении (6) излучательная способность и коэффициент поглощения, исправленный на вынужденное излучение, определяются с помощью следующих соотношений [1, 37-41]:

$$\begin{aligned} \kappa_\nu &= n \sum_{\substack{k < j \\ k, j=1}}^{K-1} x_k \frac{\pi e^2}{m_e c} f_{kj} \phi_{kj}(\nu) \left( 1 - \frac{n_j g_k}{n_k g_j} \right) + n \sigma_K^{ff}(\nu) (1 - e^{-h\nu/k_B T}) + \\ &+ n \sum_{k=1}^{K-1} x_k \sigma_k^{PI}(\nu) \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi \hbar^2}{m_e k_B T} \right)^{3/2} \frac{n_i g_k}{n_{tot} n_k \Sigma_i} \exp\left( \frac{h\nu_k - h\nu}{k_B T} \right) \right), \\ \eta_\nu &= n \sum_{\substack{k > j \\ j, k=1}}^{K-1} x_k \frac{g_j \pi e^2}{g_k m_e c} f_{jk} \phi_{jk}(\nu) \frac{h\nu^3}{\pi c^2} + n \frac{h\nu^3}{\pi c^2} \sigma_K^{ff}(\nu) e^{-h\nu/k_B T} + \\ &+ \sum_{k=1}^{K-1} n_i n_e \frac{(h\nu)^3}{4 \hbar^2 \pi^2 c^2} \left( \frac{2\pi \hbar^2}{m_e k_B T} \right)^{3/2} \sigma_k^{PI}(\nu) \frac{g_k}{\Sigma_i} \exp\left( \frac{h\nu_k - h\nu}{k_B T} \right), \quad (7) \end{aligned}$$



где  $\nu$  – частота фотона,  $x_k = n_k / n$  – относительная концентрация  $k$ -го состояния атома,  $g_k$  – статистический вес  $k$ -го состояния атома,  $f_{kj}$  – сила осцилляторов при переходе атома из  $k$ -го в  $j$ -е состояние,  $\phi_{kj}(\nu)$  – профиль линии соответствующего связанно-связанного перехода,  $\sigma_k^{PI}(\nu)$  – сечение фотоионизации из  $k$ -го состояния,  $\sigma_K^{ff}(\nu)$  – сечение обратного тормозного поглощения. В формулах (7) суммирование проводится по всем состояниям, за исключением состояния  $k = K$ , отвечающего ионам с концентрацией  $n_i$ .

Разные по природе механизмы уширения спектральных линий определяют ее профиль, который рассчитывается по формуле Фойгта:

$$\phi_{kj}(\nu) = \frac{\gamma_e}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-s^2} ds}{(\nu - \nu_{kj} - s D)^2 + \gamma_e^2}, \quad (8)$$

где  $D = \nu_{kj} V_a / c$  – ширина Доплера,  $V_a$  – характерная скорость атома,  $\gamma_e$  – суммарная ширина, обусловленная взаимодействием атома с окружающими его ионами, электронами и излучением. Профиль линии по формуле Фойгта имеет вид колоколообразной кривой, а характерная ширина профиля соответствует времени жизни состояния. Методика вычисления профиля Фойгта по формуле (8) изложена в [42]. Формула Фойгта используется для вычисления отдельных профилей, например, для  $\alpha$ - и  $\beta$ -линий серии Лаймана в водородной плазме. Профили данных линий в численной модели описываются более детально по сравнению с профилями остальных линий. Для детального описания профилей используется несколько спектральных групп, с помощью которых подробно описывается форма ядра и крыльев линий. Линии остальной части спектра рассматриваются в рамках одной группы. При этом весь спектр разбивается на 300 и более спектральных групп.

Существенным фактором уширения спектральных линий для характерных концентраций  $n \sim 10^{14} \div 10^{17} \text{ см}^{-3}$  и температуры  $T \sim 1 \text{ эВ}$  является взаимодействие с электронами. В этом случае для вычисления величины  $\gamma_e$  рассматривают уширение за счет электронного удара, используя формулы, представленные в [1, 41]. Для вычисления сечений различных процессов и силы осцилляторов  $f_{kj}$  также используют известные соотношения.

Населенности различных состояний атома в приближении локального термодинамического равновесия определяются с помощью уравнения Саха (2) и формулы Больцмана:

$$x_k = \frac{n_a}{n} \frac{g_k}{\sum_a} \exp(-(E_k - E_1) / k_B T), \quad (9)$$

где  $E_k = Z^2 e^2 / (2 a_0 k^2)$  – энергия  $k$ -ого уровня атома, а  $a_0$  – радиус Бора.

В численной модели уравнения (1) используются в безразмерном виде. Единицами измерения являются длина канала  $L$ , характерная концентрация или плотность газа  $n_o$  ( $\rho_o = m n_o$ ) и температура  $T_o$  на входе в канал ускорителя, а также характерная величина азимутального магнитного поля на входе  $H_o = 2J_p / c R_o$ , где  $J_p$  – разрядный ток в системе,  $R_o$  – характерный радиус канала. Данные величины формируют единицы давления  $P_o = H_o^2 / 4\pi$ , скорости  $V_o = H_o / \sqrt{4\pi\rho_o}$ , времени  $t_o = L / V_o$ , электрического поля  $E_o = H_o V_o / c$  и тока в плазме  $j_o = c H_o / 4\pi L$ . Переход к безразмерным значениям потока энергии излучения  $\mathbf{W}$  осуществляется с помощью следующей единицы измерения:  $W_o = V_o H_o^2 / 4\pi$ .

Безразмерные МГД уравнения содержат ряд безразмерных параметров. К ним относятся отношение характерного газового давления к магнитному  $\beta = 8\pi P_o / H_o^2$  ( $P_o = k_B n_o T_o$ ), параметр  $T^* = I / k_B T_o$  и магнитная вязкость  $\nu_m = 1 / \text{Re}_m = c^2 / 4\pi L V_o \sigma$ , которая обратно пропорциональна магнитному числу Рейнольдса  $\text{Re}_m$ . Магнитная вязкость содержит величины  $\sigma_{10}$  и  $\sigma_{20}$ , которые выражаются через исходные размерные параметры и физические константы:

$$\nu_m = \frac{1}{\text{Re}_m} = \frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2}, \quad \sigma_1 = \frac{\alpha \sigma_{10}}{(1-\alpha)\sqrt{T}}, \quad \sigma_2 = \sigma_{20} T^{3/2}. \quad (10)$$

Численная модель предполагает консервативную или дивергентную форму записи уравнений магнитной газодинамики, и вместо уравнения для внутренней энергии, которое содержит неконсервативное слагаемое  $P \text{div } \mathbf{V}$ , в модели используется эквивалентное уравнение для энтропии или пропорциональной ей функции  $S = \ln \frac{P}{\rho^\gamma}$ . Соответствующее уравнение имеет

дивергентный вид. При этом давление и температура вычисляются с помощью соотношений  $P = \rho^\gamma e^S$  и  $T = 2 \rho^{\gamma-1} e^S / \beta (1 + \alpha)$ .

Заметим, что температура электронной компоненты участвует в определении степени ионизации. В то же время уравнение для внутренней энергии в (1) является следствием трех уравнений переноса энергии для компонент среды при условии равенства их температур. Однако основная часть энергии, выделяемой в результате трения между электронами и ионами, первоначально представлена в качестве отдельного слагаемого  $\mathbf{j}^2 / \sigma$  в уравнении для электронной температуры. Это означает, что уравнение для внутренней энергии, по сути, определяет электронную температуру, необходимую для вычисления степени ионизации.

Граничные условия на электродах, входе и выходе из канала ускорителя завершают постановку задачи. Полагаем, что на входе при  $z = 0$  подается газ с известными распределениями и значениями плотности  $\rho(r) = f_1(r)$  и температуры  $T(r) = f_2(r)$ . Считаем, что ток поддерживается постоянным и поступает в систему только через электроды. Тогда на входе имеем  $j_z = 0$  или  $r H_\varphi = r_o = const$ , где  $r_o = R_o / L$ . Дозвуковая подача осуществляется вдоль координатных линий. Учет, например, конечной проводимости или магнитной вязкости (10) в параболической части системы МГД уравнений предполагает постановку граничных условий для магнитного поля на всех границах.

На аноде  $r = r_a(z)$  и катоде  $r = r_k(z)$ , образующих стенки канала, граничные условия отвечают эквипотенциальности электродов ( $E_\tau = 0$ ) и непроницаемости их поверхности ( $V_n = 0$ ).

В процессе ионизации в канале ускорителя формируются трансзвуковые потоки, и на выходе предполагается свободное вытекание плазмы. При этом в средней наиболее узкой части канала происходит переход скорости потока через скорость быстрой магнитозвуковой волны или скорость сигнала  $C_s$  [5] при наличии единственной азимутальной компоненты поля

$$C_s = \sqrt{C_g^2 + C_A^2}, \quad C_g^2 = \gamma P / \rho, \quad C_A^2 = H^2 / \rho. \quad (11)$$

Для уравнения переноса излучения использовалось простое граничное условие  $I_\nu = 0$ , которое предполагает отсутствие излучения на поверхности электродов. Расчеты показали, что излучение стенок, которое можно учесть на основе данных о степени черноты металлов в зависимости от температуры [43], не оказывает заметного влияния на поле излучения внутри канала.

Численное интегрирование уравнений (1) ведется в области переменных  $(z, r)$ , соответствующей форме канала, изображенной на рис. 2. Алгоритм численного решения включает отображение расчетной области на единичный квадрат в плоскости  $(y, z)$  с помощью соотношения

$$r = (1 - y) r_k(z) + y r_a(z). \quad (12)$$

Численная модель двумерных осесимметричных течений ионизирующегося газа и плазмы предполагает расщепление по координатным направлениям и физическим факторам, учитывая смешанный тип МГД уравнений. Для расчета гиперболической части уравнений используется разностная схема с коррекцией потоков (см., например, [44]). Параболическая часть системы МГД уравнений содержит коэффициенты электропроводности и теплопроводности, которые для рассматриваемых течений ионизирующегося газа резко меняются на фронте ионизации вместе с термодинамическими параметрами среды, определяемыми в результате решения уравнений магнитной газодинамики. Для учета диссипативных факторов с сильно меняющимися коэффициентами используется потоковый вариант метода прогонки [45].

Соотношения (4) предполагают, что задача о переносе излучения в потоках ионизирующегося газа и плазмы должна решаться в трехмерной постановке для осесимметричного течения в канале ускорителя. Сетка для 3D задачи о переносе излучения может быть получена поворотом исходной сетки в плоскости переменных  $(z, r)$  на 360 градусов вокруг оси канала с заданным шагом. Интенсивность излучения должна быть определена по разным направлениям для дальнейшего вычисления интегральных значений плотности и потока энергии излучения (4) в любом узле или ячейки координатной сетки. С этой целью строится дополнительная угловая сетка по азимутальному и полярному углу. Разбиение телесного угла  $\Omega = 4\pi$  на элементы угловой сетки производится методом, обеспечивающим равномерное распределение лучей по направлениям (см., например, [46, 47]). Для каждого узла координатной сетки используется до 440 лучей в полном телесном угле  $\Omega = 4\pi$ .

Метод длинных характеристик [37-39] предполагает трассировку лучей для того, чтобы определить точки их пересечений с гранями ячеек трехмерной координатной сетки и место падения лучей на одну из границ трехмерной расчетной области. Метод характеристик позволяет в деталях учесть геометрию канала ускорителя. В процессе трассировки расчетной области, используя лучи, выходящие из произвольного узла координатной сетки, невидимые теневые области исключаются из расчета потока энергии излучения для данного узла сетки. В пределах отдельно взятой ячейки можно считать, что коэффициент поглощения и излучательная способность постоянны. В этом случае коэффициенты  $\kappa_\nu$  и  $\eta_\nu$  вычисляются с помощью формул (7) по среднему значению плотности и температуры в центре ячейки. Характеристика или луч последовательно проходят через ячейки с разными оптическими свойствами. Сшивка решений для уравнения (6) проводится на границах ячеек. В итоге получим решение на всей характеристике, проходящей через определенное количество ячеек или однородных областей с известными коэффициентами поглощения и излучательными способностями. Более детально постановка задачи о переносе излучения в канале КСПУ изложена в [22].

## **Результаты расчетов течений ионизирующегося водорода**

Большая часть расчетов течений ионизирующегося водорода, в том числе представленные далее варианты, были проведены на сетке  $(51 \times 151)$ , равномерной соответственно по направлениям  $y$  и  $z$  с учетом соотношения (12). Для расчета гиперболической части системы МГД уравнений используется явный метод, и шаг по времени ограничен условием Куранта. Расчеты интегральных характеристик излучения выполнены в 3D постановке задачи о переносе излучения для трехмерной сетки, генерация которой осуществлялась поворотом исходной сетки на азимутальный угол с шагом 6 градусов.

Расчеты квазистационарных и пульсирующих осесимметричных двумерных течений ионизирующегося водорода проведены в канале установки

КСПУ-Т (см., например, [10]). Для достаточно больших разрядных токов наблюдаются квазистационарные течения ионизирующегося газа. Например, при характерной концентрации на входе, равной  $n_0 = 4 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ , установление течений ионизирующегося водорода происходит при разрядных токах  $J_p \geq 62 \text{ кА}$ .

На рис. 2 и 3 представлен соответствующий пример установившегося течения ионизирующегося водорода при условии равномерной подачи на входе в канал, когда  $\rho(r)=1$  и  $T(r)=1$  при  $z=0$ . Данный вариант расчета отвечает следующему набору исходных размерных параметров задачи: концентрация на входе  $n_0 = 4 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ , температура  $T_0 = 750 \text{ }^\circ\text{К}$ , разрядный ток  $J_p = 62 \text{ кА}$  и характерная длина канала  $L = 10 \text{ см}$ . Данным значениям отвечают  $V_0 = 0.86 \cdot 10^6 \text{ см/с}$  и безразмерные параметры:  $\beta = 0.17$ ,  $r_0 = 0.5$  ( $r_0 = R_0 / L$ ),  $\sigma_{10} = 457.9$  и  $\sigma_{20} = 0.02$ . Направление тока в плазме на рис. 2в соответствует выбранной полярности электродов. Считаем, что внешний электрод является анодом. Масштаб векторов на рис. 2в определяется значением  $V_* = 8 \cdot V_0$ .

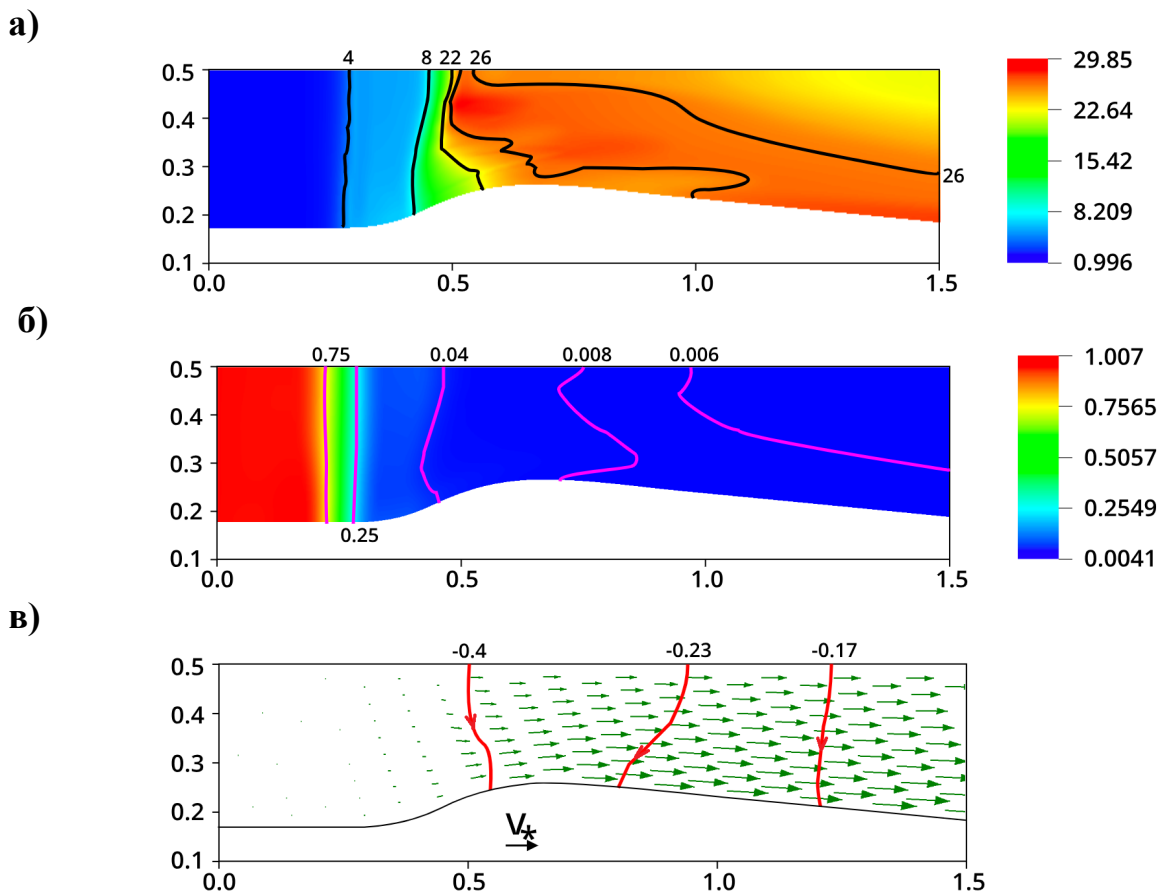


Рис. 2. Распределения а) температуры, б) плотности, в) векторного поля скоростей и плазменного тока в квазистационарном потоке ионизирующегося водорода при  $J_p = 62 \text{ кА}$ ,  $n_0 = 4 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ ,  $T_0 = 750 \text{ }^\circ\text{К}$ ,  $L = 10 \text{ см}$

На рис. 3 представлены соответствующие одномерные графики зависимости суммарной концентрации атомов и ионов водорода, температуры, скорости потока, газодинамической скорости звука  $V_g$  и скорости сигнала  $V_s$  вдоль средней координатной линии  $y = 0.5$  с учетом соотношения (12).

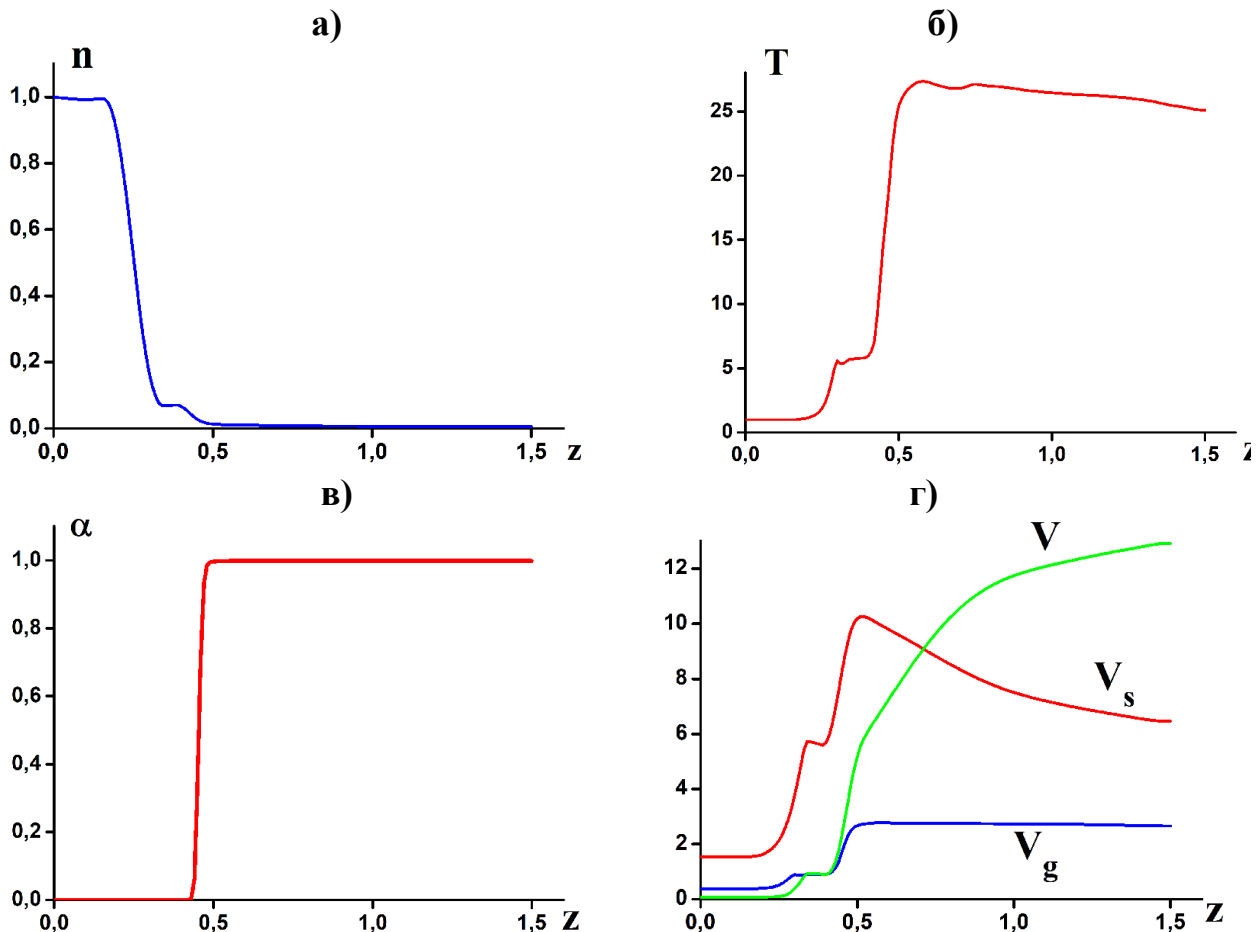


Рис. 3. Распределения МГД переменных вдоль средней координатной линии: а) концентрация атомов и ионов, б) температура, в) степень ионизации, г) скорость потока  $V$ , скорость звука  $V_g$ , скорость сигнала  $V_s$  при  $J_p = 62 \text{ kA}$

На данных рисунках видно, что в сужающейся части канала формируется фронт ионизации, в окрестности которого степень ионизации и температура резко увеличиваются. За фронтом благодаря силе Ампера происходит быстрое ускорение плазмы, сопровождающееся ее разрежением. В процессе ускорения наблюдается последовательный переход скорости потока через газодинамическую скорость звука  $V_g$  и скорость сигнала  $V_s$  [5]. Рис. 3г показывает, что переход через скорость сигнала наблюдается в наиболее узкой части канала в соответствии с теоретическими исследованиями [29].

Решение задачи о переносе излучения позволяет получить более полное представление о характере распространения излучения и открывает новые возможности для проведения комплексных исследований. Используемая 3D модель переноса излучения предполагает параллельные вычисления [48-50].

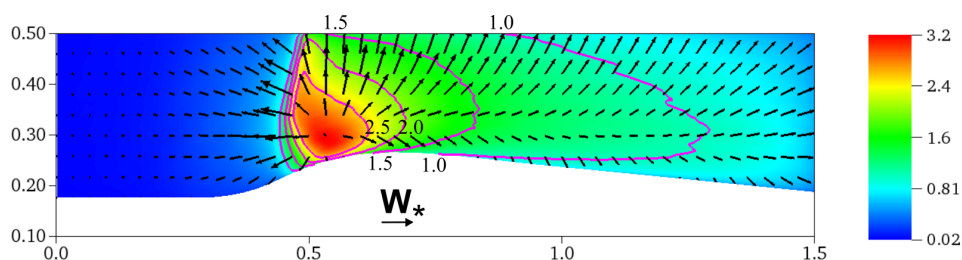


Рис. 4. Распределение плотности энергии излучения и векторное поле плотности потока энергии излучения в канале ускорителя при  $J_p = 62 \text{ kA}$

На рис. 4 представлено поле излучения в потоке ионизирующегося водорода, которое соответствует распределениям плотности и температуры, изображенным на рис. 2а и 2б. Цветная картина на рис. 4 отвечает распределению плотности энергии излучения  $U$ , на фоне которой черными стрелками изображено векторное поле плотности потока энергии излучения  $\mathbf{W}$  в потоке ионизирующегося водорода. На рисунке приведено распределение безразмерной величины  $\tilde{U}$ , связанной с плотностью энергии излучения следующим соотношением  $\tilde{U} = c \cdot U / U_0$ , где  $U_0 = 10^8 \text{ эрг} / \text{см}^2 \text{ сек}$ . Масштаб векторов задан вектором  $W_* = 9.2 \cdot 10^7 \text{ эрг} / \text{см}^2 \text{ сек}$ , указанным на рис. 4.

Видно, что в окрестности фронта ионизации расположена область с относительно высокими значениями плотности энергии излучения  $U$ . Этой области соответствует красно-желтый цвет на рис. 4. Поток энергии излучения  $\mathbf{W}$  направлен во все стороны от данной области, в том числе в направлении набегающего потока слабоионизованного водорода. Это, очевидно, приводит к его предварительной ионизации перед фронтом и в глубине объема поступающего газа.

Уменьшение разрядного тока в установках КСПУ приводит к возникновению пульсирующих нестационарных течений ионизирующегося газа. Например, для рассматриваемой характерной концентрации на входе, равной  $n_0 = 4 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ , для прежних значений  $T_0$  и  $L$  явно выраженным пульсирующим течениям ионизирующегося водорода отвечают разрядные токи  $J_p \leq 53 \text{ kA}$ . Данный верхний предел примерно на 10 кА меньше минимальных значений разрядных токов, отвечающих стационарным течениям. На рис. 5а представлено изменение температуры с течением времени за фронтом ионизации при значении разрядного тока  $J_p = 50 \text{ kA}$  в точке, отвечающей  $z = 0.9$  и расположенной на средней координатной линии. Период соответствующих колебаний  $\Delta t \approx 0.5$  составляет примерно половину пролетного времени. На рис. 6 для  $J_p = 50 \text{ kA}$  изображены распределения степени ионизации, скорости потока  $V$  и скорости сигнала  $V_s$  вдоль средней координатной линии для момента времени  $t = 1.4$  на рис. 5а.

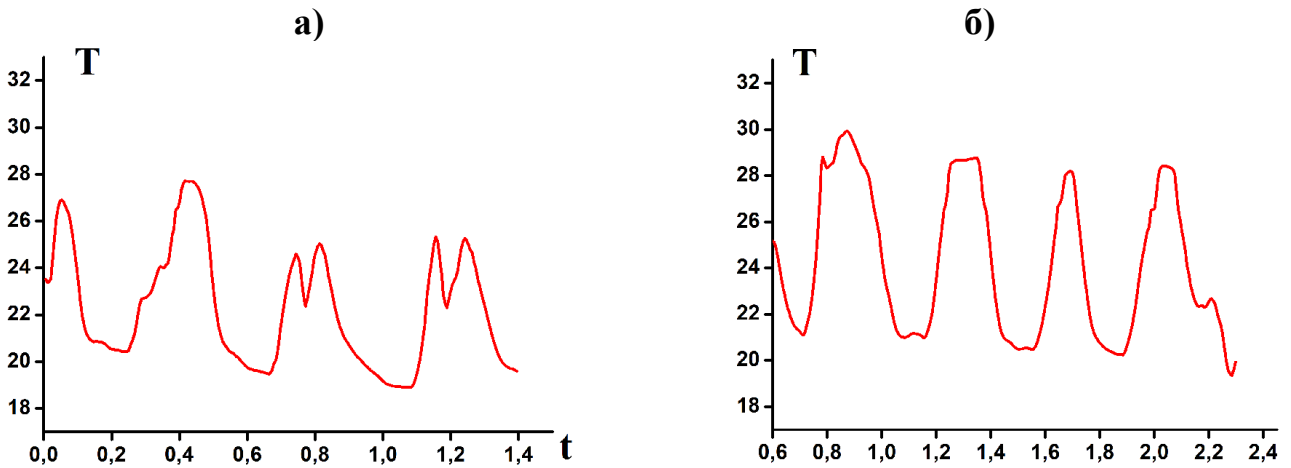


Рис. 5. Изменение температуры с течением времени за фронтом ионизации при значениях тока: а)  $J_p = 50 \text{ kA}$  и б)  $J_p = 45 \text{ kA}$

На рис. 6б видно, что переход скорости потока через скорость сигнала происходит в расширяющейся части канала, что недопустимо для стационарных течений в каналах типа сопла. Данное обстоятельство очевидно взаимосвязано с возникновением нестационарных течений. Следует заметить, что для указанного значения разрядного тока  $J_p = 50 \text{ kA}$  фронт ионизации расположен при  $z \approx 0.5$  в соответствии с рис. 6а.

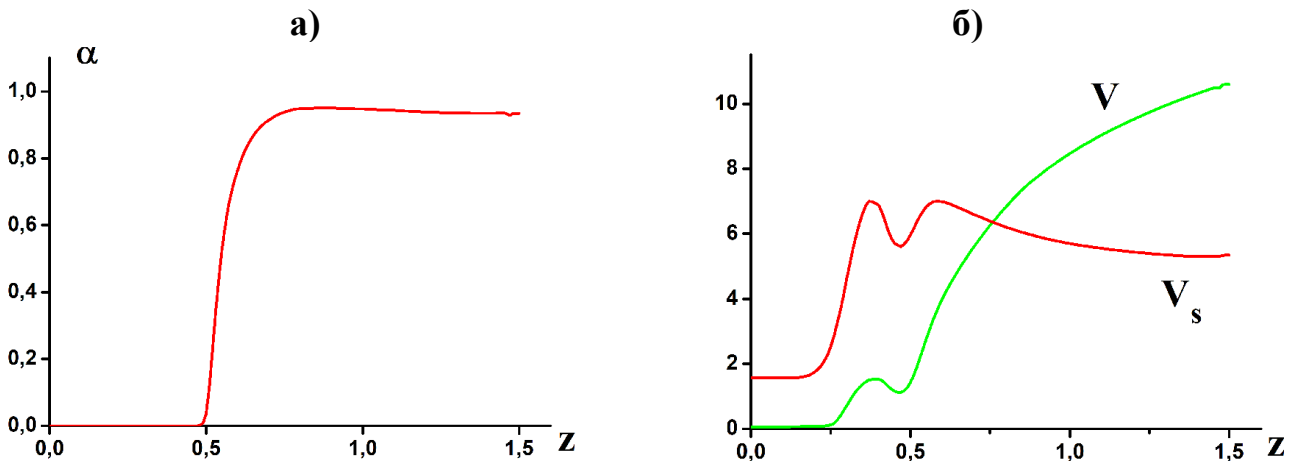


Рис. 6. Распределения переменных вдоль средней координатной линии в нестационарном потоке в момент времени  $t = 1.4$  (рис. 5а): а) степень ионизации, б) скорость потока  $V$  и скорость сигнала  $V_s$  при  $J_p = 50 \text{ kA}$

Дальнейшее уменьшение разрядного тока до  $J_p = 45 \text{ kA}$  сопровождается ростом амплитуды колебаний в соответствии с рис. 5б, который отвечает точке для  $z = 1.2$  на средней координатной линии. На рис. 7 представлены двумерные распределения температуры, плотности, векторного поля скоростей и плазменного тока в нестационарном потоке ионизирующегося водорода для момента времени  $t = 2.3$  на рис. 5б.



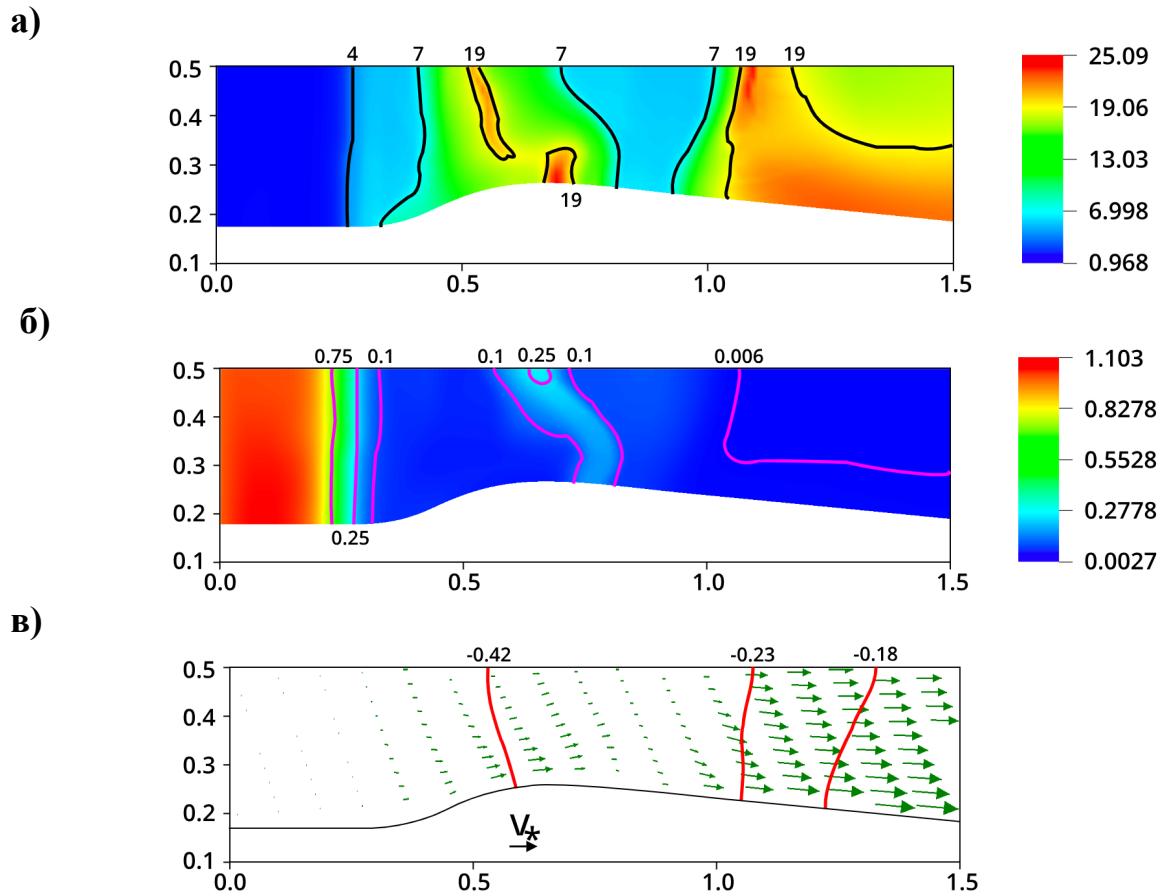


Рис. 7. Распределения а) температуры, б) плотности, в) векторного поля скоростей и плазменного тока в нестационарном потоке ионизирующегося газа в момент времени  $t = 2.3$  (рис. 5б) при  $J_p = 45 \text{ kA}$

Данный нестационарный вариант течения ионизирующегося водорода отвечает равномерной подаче на входе в канал, когда  $\rho(r)=1$  и  $T(r)=1$  при  $z=0$ , и следующему набору исходных размерных параметров задачи: концентрация на входе  $n_0 = 4 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ , температура  $T_0 = 750 \text{ }^\circ\text{K}$ , разрядный ток  $J_p = 45 \text{ kA}$  и длина канала  $L = 10 \text{ см}$ . Этим значениям отвечает  $V_0 = 0.62 \cdot 10^6 \text{ см/с}$  и безразмерные параметры:  $\beta = 0.32$ ,  $r_0 = 0.5$  ( $r_0 = R_0 / L$ ),  $\sigma_{10} = 332.3$  и  $\sigma_{20} = 0.02$  в формуле (10). Направление тока в плазме на рис. 7в соответствует тому, что внешний электрод является анодом. Масштаб векторов на рис. 7в определяется значением  $V_* = 8 \cdot V_0$ .

Картина распределений, изображенных на рис. 7, предшествовала соответствующая эволюция нестационарного течения ионизирующегося водорода. Новые элементы эволюции нестационарного потока связаны с тем, что при уменьшении разрядного тока фронт ионизации смещается к выходу из канала и одновременно возникает новый пробой в сужающейся части канала. На рис. 7а видно, что между областями с относительно высокой температурой расположена область при  $0.8 \leq z \leq 0.9$  с низкой температурой.

На рис. 8 для указанного в момент времени  $t = 2.3$ , отвечающего рис. 5б, и разрядного тока  $J_p = 45 \text{ kA}$  представлены одномерные графики зависимости, соответствующие рис. 7, для концентрации атомов и ионов, температуры, скорости потока, газодинамической скорости звука  $V_g$  и скорости сигнала  $V_s$  вдоль средней координатной линии при  $y = 0.5$  с учетом (12).

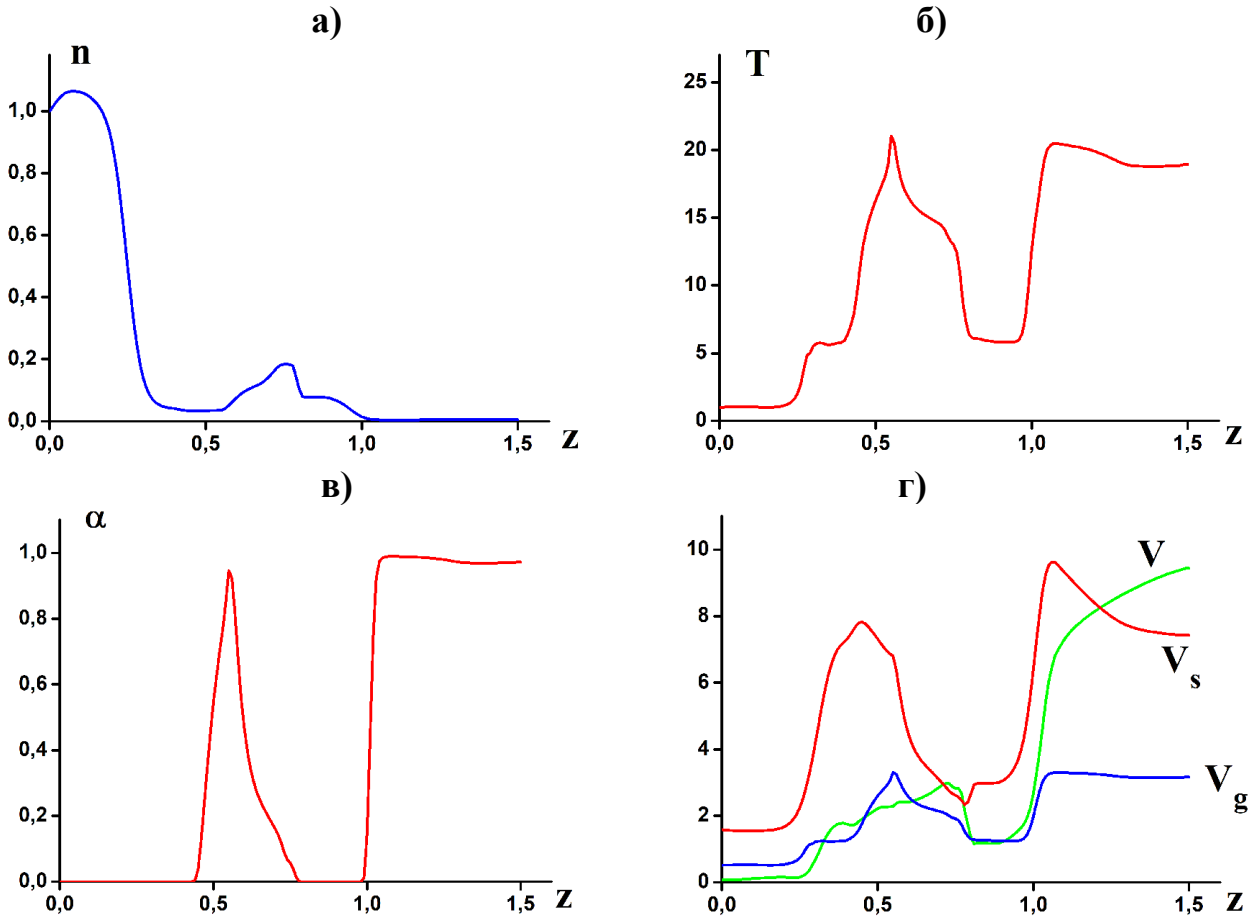


Рис. 8. Распределения МГД переменных вдоль средней координатной линии:  
 а) концентрация атомов и ионов, б) температура, в) степень ионизации,  
 г) скорость потока  $V$ , скорость звука  $V_g$ , скорость сигнала  $V_s$   
 в момент времени  $t = 2.3$  (рис. 5б) при  $J_p = 45 \text{ kA}$

Рис. 8б и 8в отчетливо демонстрируют, что фронт ионизации при  $J_p = 45 \text{ kA}$  сместился к выходу из канала и в данный момент времени  $t = 2.3$  расположен при  $z \approx 1$ . Одновременно в сужающейся части канала при  $0.5 \leq z \leq 0.7$  возникает пробой газа и образуется область плазмы с относительно высокими значениями температуры и степени ионизации.

В итоге формируется так называемый «пулеметный» режим, наблюдаемый в экспериментах для достаточно малых значений разрядного тока. При этом в вылетающем потоке наблюдается чередование областей нагретой хорошо ионизированной плазмы с областями холодной слабо ионизированной среды.

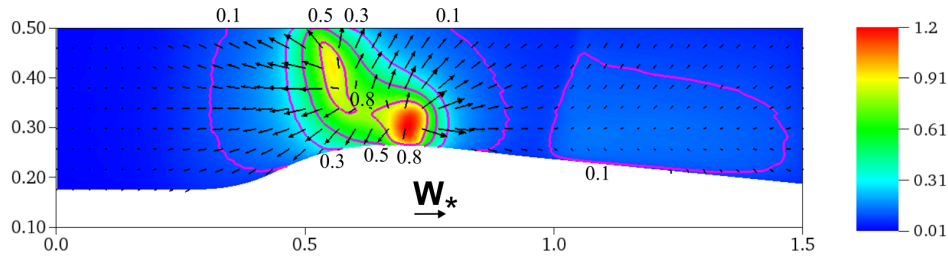


Рис. 9. Распределение плотности энергии излучения и векторное поле плотности потока энергии излучения в канале ускорителя в момент времени  $t = 2.3$  (рис. 5б) при  $J_p = 45 \text{ kA}$

Поле излучения на рис. 9 в нестационарном потоке ионизирующегося водорода соответствует распределениям плотности и температуры, изображенным на рис. 7а и 7б для момента времени  $t = 2.3$  на рис. 5б при разрядном токе  $J_p = 45 \text{ kA}$ . Как и ранее, цветная картина на рис. 9 отвечает распределению плотности энергии излучения  $U$ , на фоне которой черными стрелками изображено векторное поле плотности потока энергии излучения  $\mathbf{W}$  в нестационарном потоке ионизирующегося водорода для указанного момента времени. Распределение безразмерной величины  $\tilde{U}$ , представленное на рисунке, связано с плотностью энергии излучения тем же соотношением  $\tilde{U} = c \cdot U / U_0$ , где  $U_0 = 10^9 \text{ эрг} / \text{см}^2 \text{ сек}$ . Масштаб векторов на рис. 9 определяется указанным вектором  $W_* = 3.8 \cdot 10^8 \text{ эрг} / \text{см}^2 \text{ сек}$ .

Хорошо видно, что областям с высокими значениями температуры и концентрации плазмы при  $0.5 < z < 0.8$  на рис. 7а отвечают области с относительно высокими значениями плотности энергии излучения  $U$ . Данные области представлены красно-желтым цветом на рис. 9. Поток энергии излучения  $\mathbf{W}$  направлен во все стороны от этих областей. Соответственно, поле излучения является еще одной наглядной характеристикой особенностей в распределении плотности и температуры в потоке ионизирующегося водорода, а спектральные и интегральные характеристики излучения могут быть использованы для комплексного изучения процессов в каналах КСПУ.

## Эмпирическое условие стационарности течений

В результате серии численных экспериментов определена граница перехода от пульсирующих режимов к стационарным двумерным течениям ионизирующегося водорода. Этой границе отвечает синяя линия на рис. 10 в плоскости переменных  $(\ln J_{\dot{m}}, \ln J_p)$ , где  $J_{\dot{m}} = \frac{e}{m_i} \dot{m} (\text{kA})$  – расход, выраженный в токовых единицах. Маркеры в форме красных кружков на рис. 10 отвечают стационарным течениям, маркеры в виде черных квадратов соответствуют пульсирующим режимам.

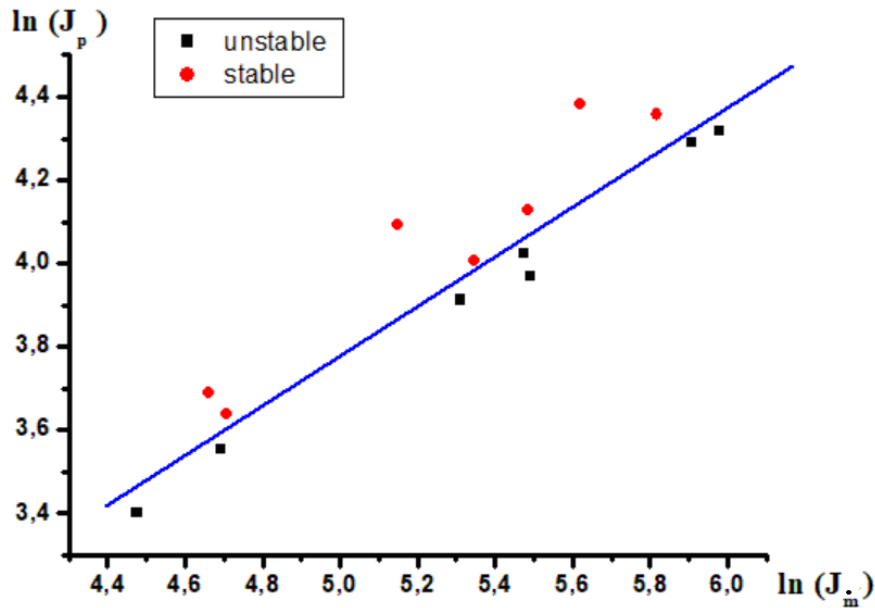


Рис. 10. Граница раздела между стационарными и пульсирующими течениями ионизирующегося водорода

Граница раздела между двумя режимами течения ионизирующегося водорода на рис. 10 описывается формулой  $\ln J_p = \lambda \cdot \ln J_m + b$ , где  $\lambda = 0.7$ . Следовательно, эмпирическое условие стационарности двумерных течений ионизирующегося водорода может быть формализовано с помощью следующего неравенства:

$$\frac{J_p^a}{J_m} > K, \quad (13)$$

где константы  $a = 1/\lambda = 1.43$  и  $K = 1.3$  в общем случае зависят от ряда факторов, в том числе геометрии канала ускорителя. Соответственно, выше синей линии на рис. 10, при больших значениях разрядного тока, имеем стационарные течения ионизирующегося водорода. Ниже данной линии, при достаточно малых значениях разрядного тока, наблюдаются нестационарные пульсирующие течения.

## Законы подобия и условие стационарности течений

В безразмерных переменных решение МГД задачи зависит от граничных условий и безразмерных параметров, которые определяют законы подобия. Различным размерным параметрам задачи могут отвечать одни и те же значения безразмерных параметров, а соответственно, и решения МГД задачи в безразмерных переменных. Такие решения системы уравнений (1) называются подобными. Используя критерии подобия, можно найти условие, позволяющее качественно разделить разные типы решений, отвечающих, например, пульсирующим и стационарным течениям, которые не являются подобными.

Рассмотрим исходную систему уравнений магнитной газодинамики, в которой передача тепла за счет теплопроводности и излучения является незначительным фактором. Ограничимся течениями, в которых характерная температура на входе не меняется  $T_o = const$ . В этом случае, как показали расчеты, магнитная вязкость  $\nu_m = 1 / Re_m = c^2 / 4 \pi L V_o \sigma$  и, соответственно, магнитное число Рейнольдса, определяемые с помощью формул (10), имеют практически одни и те же значения в течениях с различными значениями  $n_o$  и  $J_p$ , но одинаковым значением безразмерного параметра  $\beta = 8 \pi P_o / H_o^2$ , где  $P_o = k_B n_o T_o$ . Поэтому ограничимся анализом данного параметра, постоянство которого означает сохранение следующей комбинации

$$\frac{H_o^2}{n_o} = const. \quad (14)$$

Учтем также, что  $H_o = 2 J_p / c R_o$ , и будем считать, что для рассматриваемых подобных течений геометрия канала фиксирована, т.е.  $L = const$  и  $R_o = const$ . Тогда соотношение (14) можно записать в виде:

$$\frac{J_p^2}{n_o} = const. \quad (15)$$

Условие (14) означает также, что  $V_o = H_o / \sqrt{4 \pi \rho_o} = const$ . Расчеты также показали, что безразмерное значение расхода практически не меняется в подобных течениях. Поэтому для расхода в подобных течениях имеем  $\dot{m} (g/c) \sim m_i n_o V_o \sim n_o$ , и условие (15) можно записать следующим образом

$$\frac{J_p^2}{\dot{m}} = const. \quad (16)$$

Расход представим в токовых единицах  $J_{\dot{m}} = \frac{e}{m_i} \dot{m} (kA)$ , где  $e$  - заряд электрона,  $m_i$  - масса иона. Тогда вместо (16) приходим к следующему соотношению

$$\frac{J_p^2}{J_{\dot{m}}} = const. \quad (17)$$

В итоге имеем условие, которое с определенной степенью достоверности определяет набор подобных решений для различных значений размерных параметров  $J_p$  и  $J_{\dot{m}}$ . Критерий подобия  $J_p^2 / J_{\dot{m}} = K$  можно переписать в виде:

$$\ln J_p = 0.5 \cdot \ln J_{\dot{m}} + 0.5 \cdot \ln K.$$

На плоскости переменных  $(\ln J_{\dot{m}}, \ln J_p)$  подобным течениям отвечают линейные зависимости значений  $\ln J_p$  от величины  $\ln J_{\dot{m}}$ . Аналогичная линейная зависимость определяет также границу раздела между пульсирующими и стационарными течениями, которые не являются подобными. В соотношении (17), которое отвечает достаточно грубым оценкам, показатель степени для разрядного тока равен 2. В то же время в более точном соотношении (13), определяющем эмпирическое условие стационарности течений ионизирующегося водорода, данный показатель равен  $a = 1.43$ .

## Заключение

Численные исследования стационарных и пульсирующих течений ионизирующегося водорода в канале квазистационарного плазменного ускорителя проведены на основе двумерной МГД модели с учетом электропроводности, теплопроводности и переноса излучения, используя приближение локального термодинамического равновесия. Трехмерная модель переноса излучения включает основные механизмы излучения и поглощения фотонов. Расчеты двумерных осесимметричных течений ионизирующегося водорода выполнены при условии равномерной подачи газа на входе в канал ускорителя. Определены интегральные характеристики излучения в стационарных и пульсирующих течениях ионизирующегося водорода. В результате серии расчетов найдено эмпирическое условие стационарности двумерных течений ионизирующегося водорода.

## Библиографический список

1. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.
2. Суржиков С.Т. Физическая механика газовых разрядов. М.: изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006.
3. Грановский В.Л. Электрический ток в газе. М.: Наука, 1971.
4. Брагинский С.И. Явления переноса в плазме // Вопросы теории плазмы. Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1963, вып. 1. С. 183-272.
5. Морозов А.И. Введение в плазмодинамику. М.: Физматлит, 2-е изд., 2008.
6. Морозов А.И. Принципы коаксиальных (квази)стационарных плазменных ускорителей (КСПУ) // Физика плазмы. 1990. Т. 16, № 2. С. 131-146.
7. Белан В.Г., Золотарев С.П., Левашов В.Ф., Майнашев В.С., Морозов А.И., Подковыров В.Л., Скворцов Ю.В. Экспериментальное исследование квазистационарного плазменного ускорителя, питаемого от индуктивного и емкостного накопителей // Физика плазмы. 1990. Т. 16, № 2. С. 176-185.
8. Klimov N., Podkovyrov V., Zhitlukhin A., Kovalenko D., Bazylev B., Landman I., Pestchanyi S., Janeschitz G., Federici G., Merola M., Loarte A., Linke J., Hirai T., Compan J. Experimental study of PFCs erosion under ITER-like transient

- loads at plasma gun facility QSPA // *Journal of Nuclear Materials*. 2009. V. 390-391. P. 721-726.
9. Kozlov A.N., Drukarenko S.P., Klimov N.S., Moskacheva A.A., Podkovyrov V.L. The experimental research of the electric characteristics of discharge in the quasi-steady plasma accelerator with the longitudinal magnetic field // *Problems of Atomic Science and Technology. Series: Plasma Physics*. 2009. No. 1. P. 92-94.
  10. Климов Н.С., Коваленко Д.В., Подковыров В.Л., Кочнев Д.М., Ярошевская А.Д., Урлова Р.В., Козлов А.Н., Коновалов В.С. Экспериментальное исследование интегральных характеристик потока плазмы и разряда квазистационарного сильноточного плазменного ускорителя с собственным магнитным полем // *Вопросы атомной науки и техники. Серия: Термоядерный синтез*. 2019. Т. 42. № 3. С. 52-63.
  11. Волошко А.Ю., Гаркуша И.Е., Морозов А.И., Соляков Д.Г., Терешин В.И., Царенко А.В., Чеботарев В.В. Исследование локальной картины течения плазмы в двухступенчатом КСПУ // *Физика плазмы*. 1990. Т. 16, № 2. С. 168-175.
  12. Tereshin V.I., Bandura A.N., Byrka O.V., Chebotarev V.V., Garkusha I.E., Landman I., Makhraj V.A., Neklyudov I.M., Solyakov D.G., Tsarenko A.V. Application of powerful quasi-steady-state plasma accelerators for simulation of ITER transient heat loads on divertor surfaces // *Plasma Phys. Contr. Fusion*. 2007. V. 49. P. A231-A239.
  13. Garkusha I.E., Chebotarev V.V., Herashchenko S.S., Makhraj V.A., Kulik N.V., Ladygina M.S., Marchenko A.K., Petrov Yu.V., Staltsov V.V., Shevchuk P.V., Solyakov D.G., Yelisyeyev D.V. Novel test-bed facility for PSI issues in fusion reactor conditions on the base of next generation QSPA plasma accelerator // *Nuclear Fusion*. 2017. V. 57(11). Ar. 116011.
  14. Garkusha I.E., Solyakov D.G., Chebotarev V.V., Makhraj V.A. and Kulik N.V. Experimental studies of high-energy quasi-steady plasma streams generated by a magnetoplasma analogue of the Laval nozzle in the compression and acceleration regimes // *Plasma Physics Reports*. 2019. V. 45(2). P. 166-178.
  15. Ананин С.И., Асташинский В.М., Баканович Г.И., Костюкевич Е.А., Кузмицкий А.М., Маньковский А.А., Минько Л.Я., Морозов А.И. Исследование процессов формирования плазменных потоков в квазистационарном сильноточном плазменном ускорителе (КСПУ) // *Физика плазмы*. 1990. Т. 16, № 2. С. 186-196.
  16. Astashynski V.M., Ananin S.I., Askerko V. V., Kostyukevich E.A., Kuzmitski A.M., Uglov V.V., Anishchik V.M., Astashynski V.V., Kvasov N.T., Danilyuk L.A. Materials surface modification using quasi-stationary plasma accelerators // *J. Surface and Coating Technology*. 2004. V. 180-181. P. 392-395.
  17. Дьяконов Г.А., Тихонов В.Б. Экспериментальное исследование влияния геометрии ускорительного канала и внешнего магнитного поля на режимы течения плазмы в коаксиальном квазистационарном плазменном ускорителе (КСПУ) типа П-50А // *Физика плазмы*. 1994. Т. 20, № 6. С. 533-540.

18. Брушлинский К.В., Морозов А.И. Расчет двумерных течений плазмы в каналах // Вопросы теории плазмы. /Под ред. М.А.Леонтовича. М.: Атомиздат. 1974, вып. 8. С. 88-163.
19. Брушлинский К.В., Заборов А.М., Козлов А.Н., Морозов А.И., Савельев В.В. Численное моделирование течений плазмы в КСПУ // Физика плазмы. 1990. Т. 16, № 2. С. 147-157.
20. Брушлинский К.В., Калугин Г.А., Козлов А.Н. Численное моделирование течения ионизирующегося газа в канале // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. 1982. № 50. 28 с.
21. Козлов А.Н. Численное исследование двумерных течений ионизирующегося газа в приближении ЛТР // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. 1986. № 174.
22. Kozlov A.N., Konovalov V.S. Numerical study of the ionization process and radiation transport in the channel of plasma accelerator // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2017. V. 51. P. 169-179.
23. Биберман Л.М., Воробьев В.С., Якубов И.Т. Кинетика неравновесной низкотемпературной плазмы. М.: Наука, 1982. 375 с.
24. Козлов А.Н. Кинетика ионизации и рекомбинации в канале плазменного ускорителя // Известия РАН. МЖГ. 2000. № 5. С. 181-188.
25. Бармин А.А., Козлов А.Н. Структура стационарного фронта ионизации в канале плазменного ускорителя // Изв. РАН. МЖГ. 2013. № 4. С. 164-175.
26. Козлов А.Н., Коновалов В.С. Пульсирующие режимы течений ионизирующегося газа в коаксиальных плазменных ускорителях // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2014. № 1. 28 с.
27. Козлов А.Н., Коновалов В.С., Новиков В.Г. Сравнительный анализ трех методов расчета переноса излучения на фронте ионизации в квазистационарных плазменных ускорителях // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2012. № 50. 24 с.
28. Kozlov A.N., Garkusha I.E., Konovalov V.S., Novikov V.G. The radiation intensity of the Lyman alpha line at ionization front in the quasi-steady plasma accelerator // Problems of Atomic Science and Technology. Series: Plasma Physics. 2013, No. 1. P. 128-130.
29. Морозов А.И., Соловьев Л.С. Стационарные течения плазмы в магнитном поле // Вопросы теории плазмы. / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Атомиздат. 1974, вып. 8. С. 3-87.
30. Брушлинский К.В. Математические и вычислительные задачи магнитной газодинамики. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2009. 200 с.
31. Козлов А.Н. Влияние продольного магнитного поля на эффект Холла в канале плазменного ускорителя // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 4. С. 165-175.
32. Kozlov A.N. Basis of the quasi-steady plasma accelerator theory in the presence of a longitudinal magnetic field // Plasma Physics. 2008. V. 74, No. 2. P. 261-286.
33. Козлов А.Н. Двухжидкостная магнитогидродинамическая модель течений плазмы в квазистационарном ускорителе с продольным магнитным полем // Прикладная механика и техническая физика. 2009. Т. 50, № 3. С. 44-55.



34. Козлов А.Н. Исследование приэлектродных процессов в квази-стационарных плазменных ускорителях с непроницаемыми электродами // Физика плазмы. 2012. Т. 38, № 1. С. 15-25.
35. Kozlov A.N. The study of plasma flows in accelerators with thermonuclear parameters // Plasma Physics and Controlled Fusion. 2017. V. 59, No. 11. 115004.
36. Брушлинский К.В., Козлов А.Н., Коновалов В.С. Численные модели стационарных и пульсирующих течений ионизирующегося газа в каналах плазменных ускорителей // ЖВМ и МФ. 2015. Т. 55, № 8. С. 1405-1416.
37. Михалас Д. Звездные атмосферы (1 часть). М.: Мир, 1982. 352 с.
38. Четверушкин Б.Н. Математическое моделирование задач динамики излучающего газа. М.: Наука, 1985. 304 с.
39. Castor John I. Lectures on radiation hydrodynamics. – Lawrence Livermore National Laboratory, 2000.
40. Фортов В.Е. Уравнения состояния вещества: от идеального газа до кварк-глюонной плазмы. М.: Физматлит. 2012. 492 с.
41. Вайнштейн Л.А., Собельман И.И., Юков Е.А. Возбуждение атомов и уширение спектральных линий. М.: Наука. 1979. 319 с.
42. Никифоров А.Ф., Новиков В.Г., Уваров В.Б. Квантово-статистические модели высокотемпературной плазмы. М.: Физматлит, 2000. 399 с.
43. Зигель Р., Хауэлл Дж. Теплообмен излучением. М.: Мир, 1975. 934 с.
44. Оран Э., Борис Дж. Численное моделирование реагирующих потоков. М.: Мир, 1990. 661 с.
45. Дегтярев Л.М., Фаворский А.П. Поточный вариант метода прогонки для разностных задач с сильно меняющимися коэффициентами // ЖВМ и МФ. 1969. Т. 9, № 1. С. 211-218.
46. Лебедев В.И. О квадратурах на сфере // ЖВМ и МФ. 1976. Т. 16, № 2. С. 293-306.
47. Цыбулин И.В., Скалько Ю.И., Павлова Е.С. Распределенный метод длинных характеристик для решения уравнения переноса излучения // Труды Московского физико-технического института. 2015. Т. 7, № 2. С. 51–59.
48. Chetverushkin V.N., Olkhovskaya O.G., Gasilov V.A. Solution of the radiative transfer equation on parallel computer systems // Doklady Mathematics. 2015. V. 92, No. 2. P. 528-531.
49. Гасилов В.А., Болдарев А.С., Дьяченко С.В., Ольховская О.Г., Карташева Е.Л., Болдырев С.Н., Багдасаров Г.А., Гасилова И.В., Бояров М.С., Шмыров В.А. Пакет прикладных программ MARPLE3D для моделирования на высокопроизводительных ЭВМ импульсной магнитоускоренной плазмы // Математическое моделирование. 2012. Т. 24, № 1. С. 55–87.
50. Olkhovskaya O., Kotelnikov A., Yakobovskiy M., Gasilov V. Parallel Ray Tracing Algorithm for Numerical Analysis in Radiative Media Physics // Series: Advances in Parallel Computing. Ebook, V. 32., P. 137 – 146, doi:10.3233/978-1-61499-843-3-137, <https://ebooks.iospress.nl/volumearticle/48602>