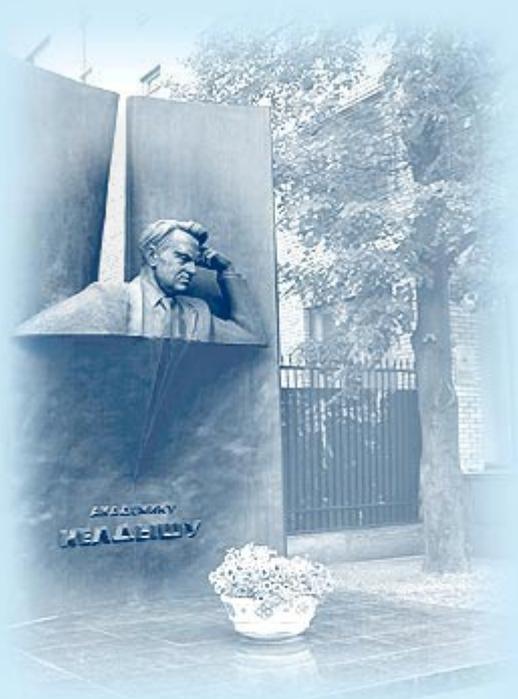




ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 94 за 2021 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

М.Б. Гавриков, А.А. Таюрский

Некоторые математические
вопросы ионизации плазмы

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Некоторые математические вопросы ионизации плазмы // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. № 94. 48 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2021-94>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-94>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук

М.Б. Гавриков, А.А. Таюрский

**Некоторые математические вопросы
ионизации плазмы**

Москва — 2021

Гавриков М.Б., Тайурский А.А.

Некоторые математические вопросы ионизации плазмы

В работе решён ряд математических задач теории ионизации применительно к процессам в стационарных плазменных двигателях (СПД). Рассмотрены две основные одномерные математические модели ионизации – гидродинамическая и кинетическая. В центре внимания находится вопрос о существовании ионизационных колебаний (бривинг-мод). На базе гидродинамической модели решена краевая задача для стационарных уравнений ионизации. Доказана её однозначная разрешимость и отсутствие бривинг-мод. В случае, когда в области течения ионная скорость имеет единственный нуль с положительной производной, доказано, что стационарная краевая задача имеет счётное число решений, и сформулировано необходимое и достаточное условие существования бривинг-мод. Наконец, дано аналитическое решение уравнений ионизации в случае постоянных скоростей атомов и ионов, а полученные формулы применены к решению задачи Коши, краевой и смешанной задач в простейших областях. В случае кинетической модели ионизации численно показано существование бривинг-мод и проведён сравнительный анализ полученных результатов с гидродинамическим случаем.

Ключевые слова: ионизационные колебания, бривинг-моды, характеристики

Mikhail Borisovich Gavrikov, Aleksei Aleksandrovich Taiurskii

Some mathematical questions of plasma ionization

A number of mathematical problems of the theory of ionization in relation to processes in stationary plasma thrusters (SPT) are solved in this work. Two main one-dimensional mathematical models of ionization are considered – hydrodynamic and kinetic. The main question is the existence of ionization oscillations (breathing modes). On the basis of a hydrodynamic model, a boundary value problem for stationary ionization equations is solved. Its unique solvability and the absence of breathing modes are proved. In the case when the ion velocity in the flow region has a single zero with a positive derivative, it is proved that the stationary boundary value problem has a countable number of solutions, and a necessary and sufficient condition for the existence of breathing modes is formulated. Finally, an analytical solution of the ionization equations is given in the case of constant velocities of atoms and ions, and the formulas obtained are applied to the solution of the Cauchy problem, boundary value and mixed problems in the simplest regions. In the case of the kinetic model of ionization, the existence of breathing modes is numerically shown and the results obtained are compared with the hydrodynamic case.

Key words: ionization oscillations, breathing modes, characteristics

Введение

Ниже рассматриваются математические задачи, связанные с ионизацией плазмы, применительно к процессам, происходящим в стационарных плазменных двигателях (СПД). СПД были предложены А.И. Морозовым и с 1971 г. успешно и безальтернативно используются для коррекции орбит космических летательных аппаратов. История вопроса изложена в [1–3]. Согласно упрощённой принципиальной схеме, приведённой на рис. 1, СПД представляет собой коаксиальную камеру с керамическими боковыми стенками, в торцах которой расположены анод и катод с подведённой к ним разностью потенциалов, приводящей к появлению в камере продольного электрического поля E . Кроме того, система обмоток с постоянными токами создаёт в камере почти радиальное магнитное поле H . Нейтральный газ – ксенон (Xe) подаётся в СПД со стороны анода, ионизуется посредством ударной ионизации электронами, и возникающие ионы Xe^+ ускоряются продольным электрическим полем до скоростей ~ 15 км/с и покидают камеру в сторону катода, нейтрализуясь на нём. В результате возникает реактивная сила тяги, передаваемая жёстко связанному с камерой летательному аппарату, на получение которой и направлена работа СПД. Длина типичного [4] СПД-100М составляет $L = 2.5$ см, внутренний и внешний радиусы камеры установки равны $R_1 = 3.5$ см, $R_2 = 5$ см, время непрерывной работы двигателя после выхода на квазистационарный режим $\sim 10^4$ ч.

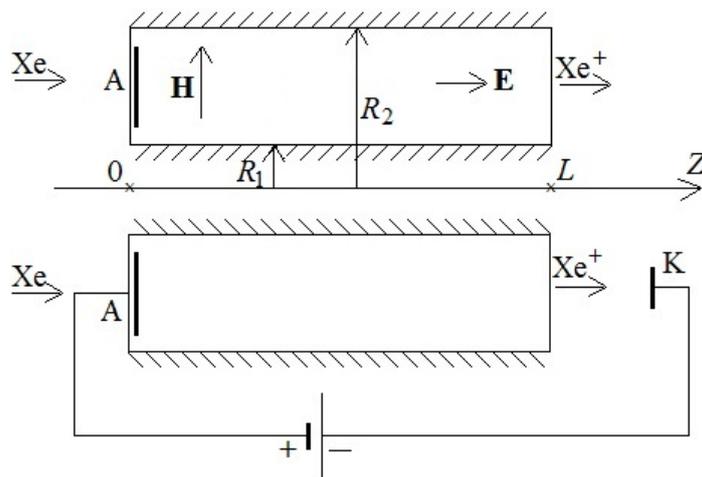


Рис. 1. Принципиальная схема СПД

Анализ основных процессов в СПД – ионизации рабочего вещества (ксенона, Xe) в прианодной области камеры, ускорения образующихся ионов ксенона, рассеяния электронов и ионов на боковых керамических стенках – достаточно сложен и до сих пор не доведён до обоснованных инженерных

методик расчёта, позволяющих получить характеристики проектируемых СПД с приемлемой точностью.

В этой работе с математических позиций детально анализируется процесс ионизации рабочего вещества в камере СПД.

Экспериментально фиксируется принципиально важный эффект низкочастотных (10–30 кГц) колебаний разрядного тока в камере установки. С практической точки зрения этот эффект носит паразитический характер, а механизм указанных осцилляций неясен, но вероятной причиной, предположительно, являются возможные колебания концентраций атомов (n_a) и ионов ксенона (n_i) в СПД при ионизации. Целью работы является анализ этих колебаний, получаемых преимущественно численным решением уравнений одномерной ионизации:

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} + \frac{\partial n_a v_a}{\partial z} = -\beta n_a n_i, \quad \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial n_i v_i}{\partial z} = \beta n_a n_i, \quad 0 \leq z \leq L, \quad t \geq 0 \quad (1)$$

при определённых начальных и граничных условиях для n_a , n_i (см. ниже). Здесь $v_a(z)$, $v_i(z)$ – известные продольные скорости атомов и ионов Хе, $\beta = \text{const} > 0$ – заданная величина (коэффициент ионизации). Удивительным и требующим математического объяснения является факт существования периодических по времени колебаний концентраций n_i и n_a , получаемых при решении системы (1) для неперiodических входных данных – функций $v_a(z)$, $v_i(z)$ и начальных и граничных условий для n_i и n_a . Доминирующее на сегодняшний день в научной литературе объяснение этого феномена основано на модели “хищник-жертва” Лотка-Вольтерра [5, 6], которая описывает динамику численностей популяций жертв (N_1) и хищников (N_2), питающихся жертвами, посредством пары обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ):

$$dN_1 / dt = -\gamma_1 N_1 N_2 + \mu_1 N_1, \quad dN_2 / dt = \gamma_2 N_1 N_2 - \mu_2 N_2, \quad \gamma_1, \gamma_2, \mu_1, \mu_2 > 0. \quad (2)$$

В случае ионизации плазмы “жертвами” считаются атомы ксенона, а “хищниками” – электроны, которые в силу условия квазинейтральности плазмы отождествляются с ионами, причём $\gamma_1 = \gamma_2 = \beta > 0$ – коэффициент ионизации, а регенеративные члены $\mu_1 N_1$, $\mu_2 N_2$ обусловлены переносом атомов и ионов. При этом под N_1 и N_2 понимаются средние по отрезку $[0, L]$ концентрации атомов и ионов ксенона соответственно: $N_1 = \langle n_a \rangle$, $N_2 = \langle n_i \rangle$, где

$\langle f \rangle = L^{-1} \int_0^L f(z) dz$ для любой интегрируемой на $[0, L]$ функции f . Впервые на

феноменологическом уровне модель (2) использовалась для объяснения временных колебаний концентраций n_a и n_i в [7, 8]. В частности, в работе [8]

считалось $\mu_1 = V_a / L$, $\mu_2 = V_i / L$, где V_a , V_i – известные не зависящие от времени скорости атомов на входе в СПД и ионов на выходе. Решениями уравнений Лотка-Вольтерра (2) являются периодические кривые (циклы) на плоскости (N_1, N_2) , расположенные в первом квадранте $N_1 > 0$, $N_2 > 0$ и стягивающиеся к единственной особой точке этой системы $N_1^0 = \mu_2 / \gamma_2$, $N_2^0 = \mu_1 / \gamma_1$ (см. [6]). Предельные значения T_∞ и $\omega_\infty = 2\pi / T_\infty$ периодов и частот циклов при их стягивании к особой точке этой системы (2) проще всего получить решением линеаризованных в окрестности особой точки (N_1^0, N_2^0) уравнений системы (2). Оказывается, предельная частота $\omega_\infty = \sqrt{\mu_1 \mu_2}$ не зависит от γ_1 , γ_2 и для предположений работы [8] даёт значение $\omega_\infty = \sqrt{V_1 V_2} / L$, что примерно совпадает с экспериментально получаемой частотой колебаний разрядного тока в СПД. Этот факт совпадения экспериментальной частоты с частотой, вычисляемой по феноменологической модели (2), имеющий, не исключено, случайный характер, лежит в методологической основе и является оправданием применения модели Лотка-Вольтерра к анализу ионизационных колебаний плазмы в СПД. Дальнейшее развитие модели “хищник-жертва” применительно к процессам в СПД содержится в [9, 10]. Так, в [10] для анализа процесса ионизации предложена двухзональная модель “хищник-жертва”, в которой количество уравнений системы (2) увеличивается вдвое. В работе [11] ионизационные колебания концентраций n_i , n_a впервые были названы “бривинг”-модами (breathing mode). Основная проблема при использовании модели Лотка-Вольтерра для анализа ионизационных колебаний плазмы в СПД сводится к указанию математически корректного вывода феноменологических уравнений (2) из законов сохранения (1). До сих пор никем не была предложена математически корректная редукция (1) \Rightarrow (2). В работе [12] редукция (1) \Rightarrow (2) получалась осреднением уравнений (1) по отрезку $[0, L]$ в каждый момент времени, однако при этом использовались неочевидные допущения: $\langle n_i n_a \rangle = \langle n_i \rangle \langle n_a \rangle$, $\langle n_a \rangle = n_a(t, 0)$, $\langle n_i \rangle = n_i(t, L)$, $n_a(t, L) \equiv 0$, $n_i(t, 0) \equiv 0$. Математически корректный вывод системы (2) из системы (1) может быть дан для случая линейных скоростей $v_a(z) = v_a^0 - \mu_1 z$, $v_i(z) = v_i^0 + \mu_2 z$, $\mu_1, \mu_2 > 0$. Тогда решения системы (1), однородные по пространству, вида $n_a(t, z) = n_a(t)$, $n_i(t, z) = n_i(t)$ подчиняются, очевидно, уравнениям Лотка-Вольтерра (2) для $\gamma_1 = \gamma_2 = \beta$. Однако значение однородных по пространству решений системы (1) невелико, поскольку они, как правило, не удовлетворяют физическим начальным и граничным данным.

Проведённое ниже исследование показывает, что существование ионизационных колебаний (бривинг-мод) в СПД обусловлено фундаментальными математическими свойствами системы (1) и скорее всего никак не связано с феноменологической моделью Лотка-Вольтерра. Это один из основных результатов работы.

Как показывают численные расчёты, в случае знакоопределённых скоростей $v_a(z)$, $v_i(z)$ решение начально-краевой задачи для системы (1) со стационарными граничными условиями при $t \rightarrow +\infty$ выходит на установление, стремясь, как и следовало ожидать, к стационарному состоянию, определяемому системой (1). Как следствие, в этом случае бривинг-моды отсутствуют. Стационарные решения системы (1) играют особую роль, поскольку они определяют установившиеся режимы работы СПД. В §1 проведено интегрирование в квадратурах стационарных уравнений (1). На примерах показано, что краевая задача для стационарной системы (1) в случае знакоопределённых скоростей $v_a(z)$, $v_i(z)$ всегда имеет, и притом единственное, решение. В случае знакопеременных скоростей ситуация кардинально меняется. Ограничиваясь физически важным случаем $v_a(z) > 0$, $z \in [0, L]$ (чаще всего считается $v_a(z) \equiv v_a > 0$), установлено, что краевая задача для стационарной системы (1) имеет счётное число решений, если $v_i(z)$ знакопеременная функция, имеющая единственный нуль $z_0 \in (0, L)$, при переходе через который знак $v_i(z)$ меняется с минуса на плюс и $v_i'(z_0) \neq 0$. Скорость $v_i(z)$ указанного вида особенно актуальна для анализа процессов в СПД. Экспериментально [13] показано, что в камере СПД всегда возникает двумерная прианодная зона, в которой продольная ионная скорость отрицательна, а вне этой зоны – положительна. Применительно к одномерной модели приходим к скорости $v_i(z)$ указанного выше типа. В частности, для таких скоростей $v_i(z)$, как показывают расчёты, могут существовать бривинг-моды. Более того, вероятно, неединственность решения краевой задачи для стационарной системы (1) (или отсутствие такого решения) это необходимое, но не достаточное условие существования бривинг-мод.

В §2 в случае $v_a = \text{const}$, $v_i = \text{const}$ система (1) решается аналитически. Полученные интегральные аналитические выражения для неизвестных n_a , n_i позволяют решить аналитически задачу Коши в полуплоскости $t \geq 0$ и простейшие краевые (в полуплоскости $z \geq 0$) и смешанные (в первом квадранте $t \geq 0$, $z \geq 0$) задачи для этой системы. Методы, развитые в этом параграфе, позволяют решать и другие начально-краевые задачи для системы (1) в случае постоянных скоростей v_a , v_i . Из выведенных в §2 формул для решения системы (1), в частности, следует отсутствие бривинг-мод в случае $v_a = \text{const}$, $v_i = \text{const}$.

В §3 для случая $v_a = \text{const} > 0$ и скоростей $v_i(z)$ знакопеременных, имеющих единственный нуль $z_0 \in (0, L)$ и меняющих знак с минуса на плюс при переходе через нуль, обсуждается причина возникновения ионизационных колебаний (бривинг-мод) при решении системы (1). Решение этой системы на отрезке $[0, L]$ распадается на её решение на отрезках $[0, z_0]$ и $[z_0, L]$. При решении системы (1) на отрезке $[0, L]$ граничное условие ставится только для n_a на

левом конце $z = 0$, для отрезка $[0, z_0]$ помимо граничного условия для n_a в точке $z = 0$ ставится граничное условие для n_i в точке $z = z_0$, а для отрезка $[z_0, L]$ ставятся граничные условия для n_i и n_a в точке $z = z_0$. Откуда взять граничные условия для n_i в точке $z = z_0$? Прямая $z = z_0$ является характеристикой системы (1), и значение $n_i(t) = n_i(t, z_0)$ определяется решением задачи Коши для уравнения

$$dn_i / dt = \beta n_a n_i - \alpha n_i, \quad \alpha = v'_i(z_0), \quad (3)$$

где значение $n_i(0)$ задано и определяется начальным условием для n_i , а $n_a(t) = n_a(t, z_0)$. Уравнение (3) является следствием уравнения для n_i из системы (1) и совпадает с условием разрешимости [14] на характеристике для квазилинейной системы уравнений в частных производных, которой является система (1). При этом смешанные задачи для системы (1) на отрезках $[0, z_0]$, $[z_0, L]$ относятся к задачам Гурса. Бривинг-моды возникают, когда решение указанной выше задачи Коши для уравнения (3) периодическое. Это решение служит граничным условием на характеристике $z = z_0$ для смешанных задач на отрезках $[0, z_0]$, $[z_0, L]$. Это уравнение совпадает, очевидно, со вторым уравнением модели Лотка-Вольтерра (2), однако первое уравнение для n_a не имеет места. Как показывают расчёты, $n_a(t)$ на характеристике $z = z_0$ удовлетворяет уравнению

$$dn_a / dt = -\beta n_a n_i + \gamma(t) n_a, \quad (4)$$

где $\gamma(t)$ – периодическая (вообще говоря, знакопеременная) функция, определяемая видом функции $v_i(z)$. Таким образом, на характеристике $z = z_0$ функции $n_a(t)$, $n_i(t)$ удовлетворяют не уравнениям Лотка-Вольтерра, а более сложной системе ОДУ (3), (4). Заметим, что уравнение (3) заведомо не имеет периодических решений при $\alpha \leq 0$, поскольку тогда $n_i(t)$ со временем монотонно растёт. Подробно эти вопросы разобраны в §3, в частности, обсуждается, как вычислить функцию $n_a(t)$, необходимую для решения уравнения (3) на характеристике $z = z_0$.

Недостаток модели ионизации (1) в том, что скорость ионов v_i стационарная и задаётся, а не ищется из уравнения движения ионов. Поэтому справедливость выводов, которые делаются на основе анализа решений системы (1) (в том числе о наличии ионизационных колебаний), в значительной степени зависит от того, насколько правильно выбрана скорость v_i . Например, скорость ионов, определяемая из уравнения движения ионов, вообще говоря, зависит от времени, $v_i = v_i(t, z)$, что не учитывается в системе (1). Поэтому в §4 существование ионизационных колебаний устанавливается на базе численного

исследования посредством метода макрочастиц значительно более точной модели ионизации, состоящей из кинетического уравнения для ионов,двигающихся в заданном постоянном и однородном электромагнитном поле в СПД, и уравнения переноса атомов ксенона с учётом ионизации. При этом индукционные электромагнитные поля, порождаемые плазменными токами в СПД, и рассеяние электронов и ионов на боковых стенках камеры считаются пренебрежимо малыми.

§1. Стационарные решения уравнений ионизации

Ниже ограничимся исключительно важным случаем $v_a(z) > 0$. Обычно принимается ещё более жёсткое ограничение $v_a = \text{const} > 0$.

В случае $\partial / \partial t = 0$ система уравнений ионизации принимает вид:

$$d(n_a v_a) / dt = -\beta n_i n_a, \quad d(n_i v_i) / dz = \beta n_i n_a, \quad z \geq 0. \quad (5)$$

Складывая почленно уравнения (5), приходим к первому интегралу системы (5):

$$n_a v_a + n_i v_i \equiv C = \text{const}. \quad (6)$$

Из (6) следует $n_a v_a = C - u$, $u \stackrel{\text{def}}{=} n_i v_i$. Подставляя эти выражения во второе уравнение (5), получим для нахождения $u(z)$ ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными

$$\frac{du}{dz} = \frac{(C - u)u\beta}{v_i(z)v_a(z)}. \quad (7)$$

Откуда:

$$\int \frac{du}{(C - u)u} = \int \frac{\beta dz}{v_i(z)v_a(z)} \stackrel{C \neq 0}{\Rightarrow} \frac{1}{C} \ln \left| \frac{u}{C - u} \right| = \int \frac{\beta dz}{v_i(z)v_a(z)}. \quad (8)$$

Если $C = 0$, то

$$u = \left(\int \frac{\beta dz}{v_i(z)v_a(z)} \right)^{-1}. \quad (9)$$

Уравнение (7) имеет также два особых решения $u \equiv C$, $u \equiv 0$. Первое не имеет физического смысла, второе даёт $n_i \equiv 0$, $n_a = C / v_a(z)$ и соответствует случаю, когда ионизация отсутствует. Анализ формул (8) и (9) зависит от вида функции $v_i(z)$, а точнее, от количества и расположения нулей $v_i(z)$, которые входят в знаменатель подынтегрального выражения в (8) и (9). Ниже считается, что $v_i(z)$ имеет конечное число нулей на $[0, L]$, тогда правая часть (8) или (9)

вычисляется на каждом промежутке знакопостоянства $v_i(z)$ с точностью до константы. В итоге возникает столько произвольных констант, сколько имеется промежутков, где $v_i(z)$ знакопостоянная. Эти константы с учётом константы C (для формулы (8)) подбираются так, чтобы стационарные решения системы (5) были непрерывно дифференцируемыми и удовлетворяли заданным граничным условиям. Рассмотрим конкретные примеры.

Допустим на $[0, L]$ скорости $v_a(z)$, $v_i(z)$ знакопостоянные. Тогда из (8) следует

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{C D \exp F(z)}{1 + D \exp F(z)}, & n_i(z) &= \frac{C D \exp F(z)}{v_i(z)(1 + D \exp F(z))}, \\ n_a(z) &= \frac{C}{v_a(z)(1 + D \exp F(z))}, & F(z) &= C \beta \int_0^z \frac{dz}{v_i(z)v_a(z)}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $C \neq 0$, D – произвольные константы. Из $n_a(z) \geq 0$ и $v_a(z) > 0$ следует $C(1 + D \exp F(z)) > 0$, и значит знак D совпадает со знаком $v_i(z)$. Константы C и D в формуле (10) ищутся из граничных условий для n_a , n_i . Если $v_i(z) > 0$, то на левой границе $z = 0$ задаются $n_a(0) = n_{a0} > 0$, $n_i(z) = n_{i0} > 0$. Если $v_i(z) < 0$, то на левой границе задаётся $n_a(0) = n_{a0} > 0$, а на правой границе $z = L$ задаётся $n_i(L) = n_{iL} > 0$.

Если $v_i(z) > 0$ на $[0, L]$, то из (6) следует $C > 0$ и для неособого решения $D > 0$. Из (6) следует $C = n_{a0}v_a(0) + n_{i0}v_i(0)$, тогда из (10) выводим $D = C / (n_{a0}v_a(0)) - 1 = (n_{i0} / n_{a0}) \cdot (v_i(0) / v_a(0))$. Итак, константы C и D в (10) однозначно определяются по граничным условиям, а краевая задача для системы (5) имеет, и притом единственное, решение.

Если $v_i(z) < 0$ на $[0, L]$, то исследование разрешимости краевой задачи для системы (5) более громоздкое. Краевые условия, согласно (10), дают:

$$n_{a0}v_a(0) = \frac{C}{1 + D}, \quad n_{iL}v_i(L) = \frac{C D \exp[-C \beta F_0(L)]}{1 + D \exp[-C \beta F_0(L)]},$$

где $F_0(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^z \frac{dz}{v_a(z)|v_i(z)|} > 0$. Обозначая $k_i = n_{iL}|v_i(L)| > 0$, $k_a = n_{a0}v_a(0) > 0$ и исключая $D = C / k_a - 1$, получим для нахождения константы C трансцендентное уравнение:

$$f(C) \stackrel{\text{def}}{=} \exp[-C \beta F_0(L)] = k_a k_i (k_a - C)^{-1} (k_i + C)^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} g(C). \quad (11)$$

Уравнение (11) всегда имеет решение $C = 0$. Другие решения, отличные от $C = 0$, могут существовать только при $-k_i < C < k_a$. На этом интервале функция

$g(C)$, легко проверить, имеет единственный absmin в точке $C_0 = (k_a - k_i) / 2$ и $g(-k_i + 0) = g(k_a - 0) = +\infty$. Поэтому из геометрических соображений легко следует, что при $g'(0) \neq f'(0) \Leftrightarrow k_i^{-1} - k_a^{-1} \neq \beta F_0(L)$ уравнение (11) имеет на $(-k_i, k_a)$ ещё одно решение C , отличное от нуля. Для этого решения и константы $D = C / k_a - 1$ краевая задача для системы (5) имеет, и притом единственное, решение, задаваемое формулами (10). Если $g'(0) = f'(0)$, то прямое вычисление показывает, что $g''(0) > f''(0)$, и из геометрических соображений следует, что уравнение (11) имеет на $(-k_i, k_a)$ только нулевое решение. В этом случае стационарное решение системы (5) ищется по формуле (9), которая даёт

$$n_i = -[D - \beta F_0(z)]^{-1} [v_i(z)]^{-1}, \quad n_a = -n_i v_i / v_a = -[D - \beta F_0(z)]^{-1} [v_a(z)]^{-1}.$$

Граничные условия при $z = 0$ для n_a и $z = L$ для n_i дают два уравнения для нахождения одной константы D :

$$k_i = -[D - \beta F_0(L)]^{-1}, \quad k_a = -D^{-1},$$

которые в силу условия $g'(0) = f'(0) \Leftrightarrow k_i^{-1} - k_a^{-1} = \beta F_0(L)$ совместны и имеют единственное решение $D = -k_a^{-1}$. В частности, D отрицательно, и в формулах для n_i , n_a не приходится делить на нуль. Итак, при $v_i(z) < 0$ краевая задача для системы (5) тоже имеет, и притом единственное, решение.

Приведём несколько конкретных примеров вычисления стационарных решений для различных знакопостоянных функций $v_i(z)$, $v_a(z)$.

1. $v_a = \text{const} \neq 0$, $v_i = \text{const} \neq 0$. Тогда формулы (10) дают

$$n_i(z) = \frac{CD \exp(\lambda z)}{v_i(1 + D \exp(\lambda z))}, \quad n_a(z) = \frac{C}{v_a(1 + D \exp(\lambda z))}, \quad \lambda = \frac{C\beta}{v_i v_a}.$$

2. $v_a(z) = v_{a0} + \gamma z$, $v_i(z) = v_{i0} + \alpha z$ – положительные функции. При $\Delta = \alpha v_{a0} - \gamma v_{i0} \neq 0$ формулы (10) дают:

$$n_i(z) = \frac{CD \varphi(z)^\zeta}{v_i(z)(1 + D \varphi(z)^\zeta)}, \quad n_a(z) = \frac{C}{v_a(z)(1 + D \varphi(z)^\zeta)}, \quad \varphi(z) = \frac{v_{i0} + \alpha z}{v_{a0} + \gamma z}, \quad \zeta = \frac{C\beta}{\Delta},$$

где константы C и D однозначно ищутся из граничных условий:

$$C = n_{a0} v_{a0} + n_{i0} v_{i0}, \quad D = (n_{i0} / n_{a0}) (v_{a0} / v_{i0})^{\zeta-1}.$$

При $\Delta = 0$ скорости $v_a(z)$, $v_i(z)$ пропорциональны, $v_a(z) = k v_i(z)$, $k > 0$, и интеграл (8) берётся в квадратурах:

$$\int \frac{\beta dz}{v_i(z)v_a(z)} = -\frac{\beta}{k\alpha} \cdot \frac{1}{v_{i0} + \alpha z} + \text{const},$$

откуда формула (10) даёт

$$n_i(z) = \frac{C D \exp \psi(z)}{(v_{i0} + \alpha z)(1 + D \exp \psi(z))}, \quad n_a(z) = \frac{C}{k(v_{i0} + \alpha z)(1 + D \exp \psi(z))},$$

$$\psi(z) = -\frac{C\beta}{k\alpha} \cdot \frac{1}{v_{i0} + \alpha z},$$

где константы C и D однозначно находятся из граничных условий

$$C = v_{i0}(kn_{a0} + n_{i0}), \quad D = \frac{n_{i0}}{kn_{a0}} \exp\left(\frac{\beta C}{k\alpha v_{i0}}\right).$$

3. $v_a = \text{const} \neq 0$, $v_i(z) = 1 + a \cos \omega z$, $|a| < 1$. Интеграция даёт

$$\int \frac{dz}{v_i(z)} = \frac{2}{\omega \sqrt{1-a^2}} \arctg \left[\left(\text{tg} \frac{\omega z}{2} \right) \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \right] + \text{const}. \quad (12)$$

Правая часть (12) задана на интервалах длины $2\pi/\omega$: $\left(\frac{2\pi}{\omega}k - \frac{\pi}{\omega}, \frac{2\pi}{\omega}k + \frac{\pi}{\omega} \right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Выберем на k -м интервале константу интегрирования R_k так, чтобы на всей оси z получилась бы непрерывно дифференцируемая функция. Этот выбор очевиден: $R_0 = R$ – произвольная константа, а $R_k = R + 2k\beta\pi / (\omega v_a(1-a^2)^{1/2})$. Правую часть (12) с указанным согласованным выбором констант интегрирования обозначим $U(z) + R$. Тогда формула (10) даёт стационарное решение

$$n_i(z) = \frac{D C \exp U(z)}{(1 + a \cos \omega z)(1 + D \exp U(z))}, \quad n_a(z) = \frac{C}{v_a} \frac{1}{1 + D \exp U(z)},$$

где константы C и D однозначно определяются из граничных условий:

$$C = v_a n_{a0} + (1+a)n_{i0}, \quad D = \frac{(1+a)n_{i0}}{v_a n_{a0}}.$$

В частности, $n_a(z)$ – монотонно убывающая функция, а $n_i(z)$ – периодическая функция $(1 + a \cos \omega z)^{-1}$, промодулированная по амплитуде монотонно возрастающей по z функцией $D C \exp U(z) / (1 + D \exp U(z))$, сходящейся при $z \rightarrow +\infty$ к значению C .

Замечание. Из равенств $\varphi(z) = (v_{i0} / v_{a0})(1 + z \cdot \Delta \cdot v_{i0}^{-1}(v_{a0} + \alpha z)^{-1})$, $\zeta = C\beta\Delta^{-1}$ следует, что при $(\alpha, \gamma) \rightarrow (0, 0)$, $\Delta \neq 0$ функции $n_i(z)$, $n_a(z)$ из примера 2 равномерно на $[0, L]$ сходятся к функциям $n_i(z)$, $n_a(z)$ из примера 1 в случае $v_a > 0$, $v_i > 0$ для констант $C = n_{a0}v_a + n_{i0}v_i$, $D = n_{i0}v_i / (n_{a0}v_a)$. То же верно и при $(\alpha, \gamma) \rightarrow (0, 0)$ с ограничением $\Delta = 0$.

Численное решение начально-краевой задачи для системы (1) со стационарными краевыми условиями в случае знакопостоянных $v_a(z)$, $v_i(z)$ показывает, что её решение при $t \rightarrow +\infty$ сходится к стационарному решению системы (1), в частности, осцилляции концентраций n_i , n_a (бривинг-моды) отсутствуют. Для численного решения перепишем систему (1) в безразмерном виде, взяв за характерные масштабы длины $L_0 = 1$ см, скорости $v_0 = 1.5 \cdot 10^5$ см/с, времени $t_0 = L_0 / v_0 = 0.66 \cdot 10^{-5}$ с, концентрации $n_0 = 10^{12}$ см⁻³, $\beta = 10^{-8}$ см³/с. Тогда система (1) относительно безразмерных значений всех величин переписывается в виде:

$$\partial n_a / \partial t + \partial(n_a v_a) / \partial z = -k_I n_a n_i, \quad \partial n_i / \partial t + \partial(n_i v_i) / \partial z = k_I n_a n_i, \quad (13)$$

где k_I – безразмерное значение коэффициента ионизации. Рассмотрим начально-краевую задачу для системы (13) на отрезке $[0, L]$. Ограничимся физически важным случаем $v_a(z) \equiv \text{const} = v_a > 0$. Зададим начальные распределения $n_a^0(z) = n_a(0, z)$, $n_i^0(z) = n_i(0, z)$, $0 \leq z \leq L$ и стационарные граничные значения $n_{a0} = n_a(t, 0)$, $t \geq 0$ для n_a на левой границе, $n_{i0} = n_i(t, 0)$, $t \geq 0$ для n_i на левой границе, если $v_i(z) > 0$, либо $n_{iL} = n_i(t, L)$, $t \geq 0$ для n_i на правой границе, если $v_i(z) < 0$. Предполагается, что выполнены условия совместности начальных и граничных условий: $n_{a0} = n_a^0(0)$ и $n_{i0} = n_i^0(0)$, если $v_i(z) > 0$, $n_{iL} = n_i^0(L)$, если $v_i(z) < 0$. Для численного решения системы (13) с указанными начально-краевыми условиями выберем равномерную сетку $z_k = kh$, $0 \leq k \leq N$, $h = L / N$ на отрезке $[0, L]$ ($N > 1$ – натуральное) и рассмотрим простейшую разностную схему “уголок”, связывающую значения сеточных функций $n_{a,k}$, $n_{i,k}$, $0 \leq k \leq N$ на нижнем (верхний индекс “0”) и верхнем (верхний индекс “1”) временных слоях:

$$\begin{aligned} \frac{n_{a,k}^1 - n_{a,k}^0}{\tau} + v_a \frac{n_{a,k}^0 - n_{a,k-1}^0}{h} + k_I n_{a,k}^1 n_{i,k}^0 &= 0, \quad 0 < k \leq N, \quad n_{a,0}^1 = n_{a0}, \\ \frac{n_{i,k}^1 - n_{i,k}^0}{\tau} + \frac{v_{i,k} + |v_{i,k}|}{2} \frac{n_{i,k}^0 - n_{i,k-1}^0}{h} + \frac{v_{i,k} - |v_{i,k}|}{2} \frac{n_{i,k+1}^0 - n_{i,k}^0}{h} + \\ + n_{i,k}^1 \left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial z} \right)_k + \left| \left(\frac{\partial v_i}{\partial z} \right)_k \right| \right] \cdot \frac{1}{2} + n_{i,k}^0 \left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial z} \right)_k - \left| \left(\frac{\partial v_i}{\partial z} \right)_k \right| \right] \cdot \frac{1}{2} - k_I n_{a,k}^0 n_{i,k}^0 &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где $v_{i,k} = v_i(z_k)$, $\left(\frac{\partial v_i}{\partial z}\right)_k = \frac{\partial v_i}{\partial z}(z_k)$ и счёт по второму уравнению в (14) ведётся для $0 \leq k < N$, если $v_i(z) < 0$ (при этом $n_{i,N}^1 = n_{iL}$), и для $0 < k \leq N$, если $v_i(z) > 0$ (при $n_{i,0}^1 = n_{i0}$). Согласно (14), переход с нижнего на верхний временной слой на шаге τ , $\{n_{a,k}^0, n_{i,k}^0\}_{0 \leq k \leq N} \rightarrow \{n_{a,k}^1, n_{i,k}^1\}_{0 \leq k \leq N}$ происходит по явным формулам. Шаг τ выбирается из условия устойчивости Куранта

$$\tau \leq h / \max\{v_a, \max_{0 \leq k \leq N} |v_{i,k}|\}.$$

На рис. 2 приведены результаты расчёта, демонстрирующие процесс установления концентраций n_i , n_a при $t \rightarrow +\infty$, для типичного варианта с линейной положительной скоростью $v_i(z) = 1 + \alpha z$: $L = 3$, $n_{a0} = 1$, $n_{i0} = 0.1$, $v_a = 0.1$, $\alpha = 1$, $n_a^0(z) = n_{a0} / (1 + 100z)$, $n_i^0(z) \equiv 0.1$ по сетке с шагом $h = 0.01$.

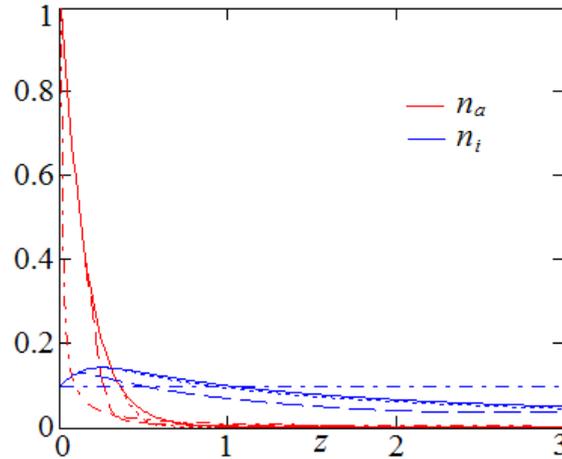


Рис.2. Процесс установления концентраций n_a , n_i в различные моменты времени $t_1 < t_2 < t_3$. Начальное условие t_1 – точка-тире, t_2 – тире, t_3 – точка, установившиеся решения – сплошные линии.

Рассмотрим теперь случай знакопеременных ионных скоростей $v_i(z)$ на типичном примере $v_i(z) = \alpha(z - z_0)$, $z_0 \in (0, L)$, $\alpha > 0$. Тогда $v_i(z_0) = 0$, $\alpha = v_i'(z_0) > 0$ и $v_i(z)$ меняет знак с минуса на плюс при прохождении переменной z через значение z_0 . Будем искать только такие стационарные решения, для которых $n_i(z)$ не обращается тождественно в нуль ни на каком интервале, лежащем в $[0, L]$ (если это не так, то $n_i(z) \equiv 0$ на некотором интервале $[0, L]$ и значит на этом интервале процесс ионизации прекратился, что противоречит экспериментальным данным по СПД). Из первого интеграла (6), вычисленного в точке z_0 , следует, что $C \geq 0$. Случай $C = 0$ приводит к физически абсурдным решениям (см. ниже). Поэтому считаем $C > 0$. Тогда

стационарное решение вычисляется по формулам (8), применённым отдельно к полуинтервалам $[0, z_0)$ и $(z_0, L]$, и имеет вид:

$$n_i(z) = \frac{CD_{\pm}|z - z_0|^{\zeta}}{\alpha(z - z_0)(1 + D_{\pm}|z - z_0|^{\zeta})}, \quad n_a(z) = \frac{C/v_a}{1 + D_{\pm}|z - z_0|^{\zeta}}, \quad \zeta = \frac{C\beta}{\alpha v_a}, \quad (15)$$

где константа D_+ действует в полуинтервале $(z_0, L]$, а константа D_- – в полуинтервале $[0, z_0)$. Граничное условие ставится только для n_a на левой границе $z = 0$: $n_a = n_{a0} > 0$. Поскольку $v_i(0) < 0 < v_i(L)$, то для n_i граничные условия на концах $z = 0$ и $z = L$ не нужны. Таким образом, для нахождения стационарного решения (15), удовлетворяющего заданному граничному условию, необходимо по одной константе n_{a0} найти три константы C , D_+ , D_- . Рассмотрим сначала частный случай. Допустим, $n_i(z_0) \neq 0$. Из уравнения неразрывности для n_i в точке z_0 имеем:

$$\alpha n_i(z_0) = \beta n_i(z_0) n_a(z_0) \underset{n_i(z_0) \neq 0}{\Rightarrow} n_a(z_0) = \alpha / \beta.$$

Подставляя найденное значение $n_a(z_0)$ во второе уравнение (15) в точке z_0 , получим $\alpha / \beta = C / v_a$, откуда получаем значение константы $C = \alpha v_a / \beta$ и равенство $\zeta = 1$. Теперь из первого уравнения (15) вытекают равенства:

$$z < z_0 : n_i(z) = -\frac{CD_-}{\alpha} \frac{1}{1 + D_-|z - z_0|}, \quad z > z_0 : n_i(z) = \frac{CD_+}{\alpha} \frac{1}{1 + D_+|z - z_0|}.$$

Отсюда и из непрерывности $n_i(z)$ в точке z_0 и условия $C > 0$ следует $-D_- = D_+ \stackrel{\text{def}}{=} D$, и тогда обе формулы для n_i и n_a объединяются в одну уже без знака модуля:

$$n_i(z) = \frac{CD}{\alpha(1 + D(z - z_0))}, \quad n_a(z) = \frac{C/v_a}{1 + D(z - z_0)}, \quad z \in [0, L]. \quad (16)$$

Из второго равенства (16) в точке $z = 0$ находим значение константы $D = (1 - C / (n_{a0} v_a)) / z_0$ по уже вычисленной константе C . Из интеграла (16) следует $C \leq n_{a0} v_a$, и значит $D \geq 0$. Но если $D = 0$, то $n_i(z) \equiv 0$ в $[0, L]$, что невозможно. Значит, $D > 0$. Итак, в предположении $n_i(z_0) \neq 0$, мы нашли стационарное решение системы (5), удовлетворяющее граничному условию и вычисляемому по формулам (10) для $C = \alpha v_a / \beta$, $D = (1 - C / (n_{a0} v_a)) / z_0$.

В общем случае проведём следующее рассуждение. Пусть $n_i(z)$ бесконечно дифференцируема в окрестности z_0 и не все производные n_i в точке z_0 обращаются в нуль. Пусть $k \geq 0$ – наименьшее целое, для которого

$n_i^{(k)}(z_0) \neq 0$ (выше рассматривался случай $k=0$). Поскольку $n_i \geq 0$ всюду в $[0, L]$, то с помощью формулы Тейлора (см. ниже) нетрудно показать, что k – чётное. Пусть $k = 2\ell$, $\ell \geq 0$. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано имеем:

$$n_i(z) = \frac{n_i^{(2\ell)}(z_0)}{(2\ell)!} (z - z_0)^{2\ell} + r(z), \quad n_a(z) = n_a(z_0) + n'_a(z_0)(z - z_0) + R(z), \quad (17)$$

$$r(x) = o((z - z_0)^{2\ell}), \quad R = o(z - z_0), \quad z \rightarrow z_0.$$

Проинтегрируем стационарное уравнение неразрывности для n_i по отрезку $[z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon]$ для достаточно малого $\varepsilon > 0$:

$$\int_{z_0 - \varepsilon}^{z_0 + \varepsilon} \frac{\partial n_i v_i}{\partial z} dz = \beta \int_{z_0 - \varepsilon}^{z_0 + \varepsilon} n_i n_a dz.$$

Выражение слева равно:

$$\begin{aligned} \int_{z_0 - \varepsilon}^{z_0 + \varepsilon} \frac{\partial n_i v_i}{\partial z} dz &= (n_i v_i) \Big|_{z_0 - \varepsilon}^{z_0 + \varepsilon} = n_i(z_0 + \varepsilon) v_i(z_0 + \varepsilon) - n_i(z_0 - \varepsilon) v_i(z_0 - \varepsilon) = \\ &= \alpha \varepsilon [n_i(z_0 + \varepsilon) - n_i(z_0 - \varepsilon)] = \alpha \varepsilon \left[2 \frac{n_i^{(2\ell)}(z_0)}{(2\ell)!} \varepsilon^{2\ell} + r(z_0 + \varepsilon) + r(z_0 - \varepsilon) \right] = \\ &= 2\alpha \frac{n_i^{(2\ell)}(z_0)}{(2\ell)!} \varepsilon^{2\ell+1} + \Delta(\varepsilon), \quad \Delta(\varepsilon) = \alpha \varepsilon [r(z_0 + \varepsilon) + r(z_0 - \varepsilon)], \end{aligned}$$

где из (17) следует $\Delta(\varepsilon) = o(\varepsilon^{2\ell+1})$, $\varepsilon \rightarrow 0$.

Выражение справа равно

$$\begin{aligned} \beta \int_{z_0 - \varepsilon}^{z_0 + \varepsilon} n_i n_a dz &= \beta \int_{z_0 - \varepsilon}^{z_0 + \varepsilon} \left[\frac{n_i^{(2\ell)}(z_0)}{(2\ell)!} (z - z_0)^{2\ell} + r(z) \right] [n_a(z_0) + n'_a(z_0)(z - z_0) + R(z)] dz = \\ &= \beta n_a(z_0) \frac{n_i^{(2\ell)}(z_0)}{(2\ell)!} \int_{z_0 - \varepsilon}^{z_0 + \varepsilon} (z - z_0)^{2\ell} dz + B(\varepsilon) = 2\beta n_a(z_0) \frac{n_i^{(2\ell)}(z_0)}{(2\ell + 1)!} \varepsilon^{2\ell+1} + B(\varepsilon), \end{aligned}$$

где из явного вида для $B(\varepsilon)$ и (17) легко следует $B(\varepsilon) = o(\varepsilon^{2\ell+1})$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Приравняв выведенные выражения для правой и левой частей интегрального тождества, деля полученное равенство на $\varepsilon^{2\ell+1}$ и устремляя ε к нулю, имеем

$$2\alpha \frac{n_i^{(2\ell)}(z_0)}{(2\ell)!} = 2\beta n_a(z_0) \frac{n_i^{(2\ell)}(z_0)}{(2\ell + 1)!} \Rightarrow n_a(z_0) = \frac{\alpha}{\beta} (2\ell + 1).$$

Подставляя найденное решение $n_a(z_0)$ во второе уравнение (15) в точке z_0 , получим $(\alpha/\beta)(2\ell+1) = C/v_a$, откуда получаем значение константы $C = \alpha v_a(2\ell+1)/\beta$ и равенство $\zeta = (2\ell+1)$. Поэтому первое уравнение (15) даёт:

$$z < z_0 : n_i(z) = -\frac{CD_-}{\alpha} \frac{(z-z_0)^{2\ell}}{1+D_-|z-z_0|^{2\ell+1}}, \quad z > z_0 : n_i(z) = \frac{CD_+}{\alpha} \frac{(z-z_0)^{2\ell}}{1+D_+|z-z_0|^{2\ell+1}}. \quad (18)$$

Из формулы Тейлора следует, что существует конечный предел:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{n_i(z)}{(z-z_0)^{2\ell}} = \frac{n_i^{(2\ell)}(z_0)}{(2\ell)!}.$$

Поэтому из (18) следует, что $-D_- = D_+ \stackrel{\text{def}}{=} D$, т.к. $C \neq 0$, и тогда обе формулы (18) и обе формулы (15) для n_a объединяются в одну уже без знака модуля

$$n_i(z) = \frac{CD(z-z_0)^{2\ell}}{\alpha(1+D(z-z_0)^{2\ell+1})}, \quad n_a(z) = \frac{C/v_a}{1+D(z-z_0)^{2\ell+1}}, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots, z \in [0, L], \quad (19)$$

$$C = \alpha v_a(2\ell+1)/\beta, \quad D = (1 - C/(n_{a0}v_a))/z_0^{2\ell+1}.$$

Теперь ищется константа D из второго равенства (19), $D = (1 - C/(n_{a0}v_a))/z_0^{2\ell+1}$. Из интеграла (6) следует $C \leq n_{a0}v_a$, поэтому $D \geq 0$. Но при $D = 0$ из (19) следует $n_i(z) \equiv 0$, $z \in [0, L]$, что невозможно. Значит, $D > 0$.

Итак, установлено, что краевая задача для стационарной системы (1) в случае $v_a = \text{const} > 0$, $v_i(z) = \alpha(z-z_0)$, $\alpha > 0$, $z_0 \in (0, L)$ имеет на отрезке $[0, L]$ счётное число решений, задаваемых формулой (19). Если $n_i(z)$ аналитична в окрестности z_0 , то, очевидно, других решений указанная краевая задача не имеет, и в этом случае формула (19) даёт общий вид решений краевой задачи для стационарной системы (1). Наконец, в случае $C = 0$ стационарное решение системы (1) задаётся формулой (9) применительно к каждому полуинтервалу $[0, z_0)$, $(z_0, L]$:

$$n_i(z) = \frac{v_a/\beta}{(z-z_0) \ln D_{\pm}|z-z_0|}, \quad n_a(z) = \frac{\alpha/\beta}{\ln D_{\pm}|z-z_0|},$$

где D_{\pm} – положительные константы, причём константа D_- действует для $z < z_0$, а D_+ – для $z > z_0$. Полученное решение физически абсурдно, поскольку $\lim_{z \rightarrow z_0+0} n_i(z) = -\infty$, $\lim_{z \rightarrow z_0-0} n_i(z) = +\infty$, в частности, нарушается неотрицательность концентрации $n_i(z)$ и интегрируемость функции $n_i(z)$ на $[0, L]$ (в точке $z = z_0$ интеграл от $n_i(z)$ расходится).

Предложенный способ построения решений краевых задач пригоден для любой функции $v_i(z)$, имеющей единственный нуль z_0 на $[0, L]$, причём $0 < z_0 < L$ и $v_i'(z_0) > 0$. Приведём два примера.

1. Пусть $v_i(z) = a(z + z_1)(z - z_0)$, $z_1 > 0$, $0 < z_0 < L$, $a > 0$. Тогда $\alpha = v_i'(z_0) = a(z_0 + z_1) > 0$ и

$$\int \frac{dz}{v_i(z)} = \frac{1}{\alpha} \ln \left| \frac{z - z_0}{z + z_1} \right| + \text{const.}$$

Из первого интеграла (6) следует $C \geq 0$, но при $C = 0$, нетрудно проверить, получается физически абсурдное решение, поэтому считаем $C > 0$. Тогда формулы (8), применённые к полуинтервалам $[0, z_0)$, $(z_0, L]$, дают

$$n_i(z) = \frac{CD_{\pm}}{v_i(z)} \left| \frac{z - z_0}{z + z_1} \right|^{\zeta} \left[1 + D_{\pm} \left| \frac{z - z_0}{z + z_1} \right|^{\zeta} \right]^{-1}, \quad n_a(z) = \frac{C}{v_a} \left[1 + D_{\pm} \left| \frac{z - z_0}{z + z_1} \right|^{\zeta} \right]^{-1}, \quad \zeta = \frac{C\beta}{\alpha v_a},$$

где константа D_- действует для $z < z_0$, а константа D_+ — для $z > z_0$. Опять возникает проблема нахождения трёх констант C , D_+ , D_- по единственному граничному условию $n_a(0) = n_{a0} > 0$ для функции n_a на левом конце $z = 0$. Действуя по схеме, предложенной выше, получим $\zeta = 2\ell + 1$, $\ell = 0, 1, 2, \dots$ и счётное число решений краевой задачи:

$$n_i(z) = \frac{CD(z - z_0)^{2\ell}}{a(z + z_1)[(z + z_1)^{2\ell+1} + D(z - z_0)^{2\ell+1}]}, \quad n_a(z) = \frac{C}{v_a} \frac{(z + z_1)^{2\ell}}{(z + z_1)^{2\ell+1} + D(z - z_0)^{2\ell+1}},$$

$$C = (2\ell + 1) \frac{\alpha v_a}{\beta}, \quad D = \left(1 - \frac{C}{n_{a0} v_a} \right) \left(\frac{z_1}{z_0} \right)^{2\ell+1}, \quad D_+ = D, \quad D_- = -D,$$

$$\ell = 0, 1, 2, \dots, \quad z \in [0, L].$$

При этом $D > 0$. Если $n_i(z)$ аналитична в окрестности z_0 , то указанные функции дают общее решение краевой задачи.

2. Пусть $v_i(z) = -\cos(\pi z / L)$, $z_0 = L/2$ — единственный нуль на $[0, L]$, $v_i'(z_0) = \pi / L = \alpha > 0$. Имеем:

$$\int \frac{dz}{v_i(z)} = \frac{1}{\alpha} \ln \left| \frac{1 - \text{tg}(\alpha z / 2)}{1 + \text{tg}(\alpha z / 2)} \right| + \text{const.}$$

Из первого интеграла (6) следует $C \geq 0$, но при $C = 0$, нетрудно проверить, получается физически абсурдное решение, поэтому считаем $C > 0$. Тогда формулы (8), применённые к полуинтервалам $[0, z_0)$, $(z_0, L]$, дают

$$n_i(z) = -\frac{CD_{\pm}}{\cos \alpha z} \frac{F(z)^{\zeta}}{1 + D_{\pm} F(z)^{\zeta}}, \quad n_a(z) = \frac{C}{v_a} \frac{1}{1 + D_{\pm} F(z)^{\zeta}},$$

$$\zeta = \frac{C\beta}{\alpha v_a}, \quad F(z) = \left| \frac{1 - \operatorname{tg}(\alpha z / 2)}{1 + \operatorname{tg}(\alpha z / 2)} \right|,$$

где константа D_- действует для $z < z_0$, а D_+ – для $z > z_0$. Опять возникает проблема нахождения трёх констант C , D_+ , D_- по единственному граничному условию $n_a(0) = n_{a0} > 0$ для функции n_a на левом конце $z = 0$. Действуя по схеме, предложенной выше, получим $\zeta = 2\ell + 1$, $\ell = 0, 1, 2, \dots$ и счётное число решений краевой задачи:

$$n_i(z) = \frac{CD(\operatorname{tg}(\alpha z / 2) - 1)^{2\ell} (1 + \operatorname{tg}^2(\alpha z / 2))}{(1 + \operatorname{tg}(\alpha z / 2))[(1 + \operatorname{tg}(\alpha z / 2))^{2\ell+1} + D(\operatorname{tg}(\alpha z / 2) - 1)^{2\ell+1}]},$$

$$n_a(z) = \frac{C}{v_a} \frac{(\operatorname{tg}(\alpha z / 2) + 1)^{2\ell+1}}{(\operatorname{tg}(\alpha z / 2) + 1)^{2\ell+1} + D_{\pm}(\operatorname{tg}(\alpha z / 2) - 1)^{2\ell+1}},$$

$$C = \frac{\alpha v_a}{\beta} (2\ell + 1), \quad D = 1 - \frac{C}{n_{a0} v_a}, \quad D_+ = D, \quad D_- = -D, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots, \quad z \in [0, L].$$

При этом $D > 0$. Если $n_i(z)$ аналитична в окрестности z_0 , то указанные функции дают общее решение краевой задачи.

Интегральное тождество, из которого выводились выше значения констант C , D_{\pm} , имеет простой смысл – это баланс количества ионов, возникающих на отрезке $[z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon]$ вследствие ионизации и за счёт переноса ионов со скоростью v_i через границы отрезка. Основная идея подсчёта констант заключалась в том, чтобы найти асимптотики обоих количеств при $\varepsilon \rightarrow 0$ (\equiv главные члены разложений по ε обеих частей интегрального тождества) и приравнять их. Этот приём позволяет получать и другие неочевидные результаты. Например, если $v_i(z)$ обращается в нуль в некоторой точке $z_0 \in (0, L)$, в окрестности которой n_i аналитична и для которой $\alpha = v_i'(z) < 0$, то стационарная система (5) не имеет решений. Действительно, для такого решения, повторяя рассуждения выше, получим равенство $n_a(z_0) = \alpha(2\ell + 1) / \beta$ для некоторого целого $\ell \geq 0$, из которого вытекает неравенство $n_a(z_0) < 0$, что физически абсурдно. Физически отсутствие стационарных решений в этом случае легко объяснимо. Для существования стационарного решения необходимо, чтобы в любом достаточно малом отрезке $[z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon]$ количество ионов, порождаемых ионизацией атомов, в этом отрезке совпало бы с количеством ионов, покидающих этот отрезок через его границы вследствие их переноса со скоростью v_i . Но при $\alpha < 0$ ионы не только не покидают отрезок через его границы, а наоборот, поступают в отрезок $[z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon]$ и

накапливаются там (ибо $v_i(z_0 + \varepsilon) < 0 < v_i(z_0 - \varepsilon)$ для достаточно малых ε). В итоге суммарное количество ионов в отрезке $[z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon]$ всё время увеличивается и стационарным быть не может, в частности, отсутствует и стационарное решение. Это подтверждает и вычисления. Например, решение начально-краевой задачи для $v_a = \text{const} > 0$, $v_i(z) = -\cos(3\pi z/L)$ приводит к катастрофическому росту значения функции $n_i(z_0)$ в точке $z_0 = L/2$, являющейся нулём $v_i(z)$ и для которой $v'_i(z_0) < 0$. Другой пример даёт функция $v_i(z)$, которая на отрезке $[0, L]$ имеет единственный нуль $z_0 \in (0, L)$ и выполнено условие $v'_i(z_0) = 0$. Тогда система (5) решений не имеет. Действительно, повторяя рассуждения выше применительно к интегральному тождеству, получим $n_a(z_0) = 0$, и значит константа C в первом интеграле (6) равна нулю. С другой стороны, функция $n_a(z)$ монотонно невозрастающая на $[0, L]$ и неотрицательная, поэтому $n_a(z) \equiv 0$, $z \in [z_0, L]$, но тогда из интеграла (6) с учётом $C = 0$ и знакоопределённости $v_i(z)$ на $(z_0, L]$ следует, что и $n_i(z) \equiv 0$, $z \in [z_0, L]$, что физически абсурдно. Добавим, если вычислить n_i на $[0, z_0)$ посредством формулы (9), то нетрудно убедиться в разрывности функции n_i в точке z_0 и логарифмической расходимости интеграла от $n_i(z)$ по отрезку $[0, L]$, что противоречит физическому смыслу концентрации ионов.

Принципиально важно, что для знакопеременной функции $v_i(z)$, имеющей на отрезке $[0, L]$ единственный нуль $z_0 \in (0, L)$, для которого $\alpha = v'_i(z_0) > 0$, могут возникать при определённом соотношении β и α ионизационные колебания (бривинг-моды). Рассмотрим типичный пример расчёта бривинг-мод по дивергентной разностной схеме “разности против потока” [17] на равномерной сетке на отрезке $[0, L]$:

$$\begin{aligned} \frac{n_{a,k}^1 - n_{a,k}^0}{\tau} + v_a \frac{n_{a,k}^0 - n_{a,k-1}^0}{h} + k_I n_{a,k}^1 n_{i,k}^0 &= 0, \quad 0 < k \leq N, n_{a,0}^1 = n_{a,0}^0, \\ \frac{n_{i,k}^1 - n_{i,k}^0}{\tau} + \frac{1}{h} \left[\frac{v_{i,k+1/2} - |v_{i,k+1/2}|}{2} n_{i,k+1}^0 + \left(\frac{v_{i,k+1/2} + |v_{i,k+1/2}|}{2} - \frac{v_{i,k-1/2} - |v_{i,k-1/2}|}{2} \right) n_{i,k}^0 - \right. \\ \left. - \frac{v_{i,k-1/2} + |v_{i,k-1/2}|}{2} n_{i,k-1}^0 \right] - k_I n_{i,k}^0 n_{a,k}^0 &= 0, \end{aligned} \quad (20)$$

где $v_{i,k+1/2} = v_i((k+1/2)h)$, $-1 \leq k \leq N$. Заметим, что при $k=0$ значение $n_{i,-1}^0$, а при $k=N$ значение $n_{i,N+1}^0$ умножается на нуль и в силу этого не используется. Условия устойчивости для схемы имеют вид:

$$\tau \leq h/v_a, \quad \tau \leq h \left[\max_{-1 \leq k \leq N} |v_{i,k+1/2}| \right]^{-1}, \quad \tau \leq \left[\max_{0 \leq k \leq N} |v_{i,k+1/2} - v_{i,k-1/2}| \right]^{-1}.$$

При соблюдении условий устойчивости нетрудно получить оценки

$$\max |n_{i,k}^1| \leq \max |n_{i,k}^0| \left\{ 1 + \frac{\tau}{h} \max |v_{i,k+1/2} - v_{i,k-1/2}| + \tau k_l \max |n_{a,k}^0| \right\},$$

$$\max |n_{a,k}^1| \leq \max |n_{a,k}^0|,$$

где \max берётся по $0 \leq k \leq N$. Эти оценки гарантируют вычислительную устойчивость схемы (20) на конечном временном отрезке $[0, T]$.

Рассмотрим результаты расчёта по схеме (20), представленные на Рис. 3, для $v_i(z) = \alpha(z - z_0)$ и безразмерных значений $L=3$, $z_0=1$, $\alpha=1$, $k_l=5$, $v_a=0.1$ с начальными и граничными значениями $n_{a0}=1$, $n_a^0(z) = n_{a0} / (1 + 50z)$, $n_a^0(z) = 0.1$. Рис. 3 демонстрирует возникновение периодических колебаний концентраций n_a , n_i (бривинг-мод) с размерной частотой ~ 20 кГц. Эти колебания возникают не при всех $k_l > 0$, $\alpha > 0$. Очевидно, на плоскости $k_l > 0$, $\alpha > 0$ существует некоторая неизвестная нам область, для (k_l, α) из которой возникают бривинг-моды. Для (k_l, α) , не попавших в указанную область, счёт по схеме (20) приводит к установлению решения. Вероятно, появление бривинг-мод связано с неединственностью решения краевой задачи для системы (5), установленной выше. Решение начально-краевой задачи для системы (1) может при $t \rightarrow +\infty$ сходиться к одному из счётного числа стационарных состояний, задаваемых формулами (19), но может, как показывают расчёты, при $t \rightarrow +\infty$ выходить на периодический режим (Рис. 3), не притягиваясь ни к одному из стационарных состояний. Логически возможен также хаотический характер решения начально-краевой задачи для системы (1) при $t \rightarrow +\infty$, но в расчётах он зафиксирован не был. Математическая причина возникновения бривинг-мод будет разъяснена в §3.

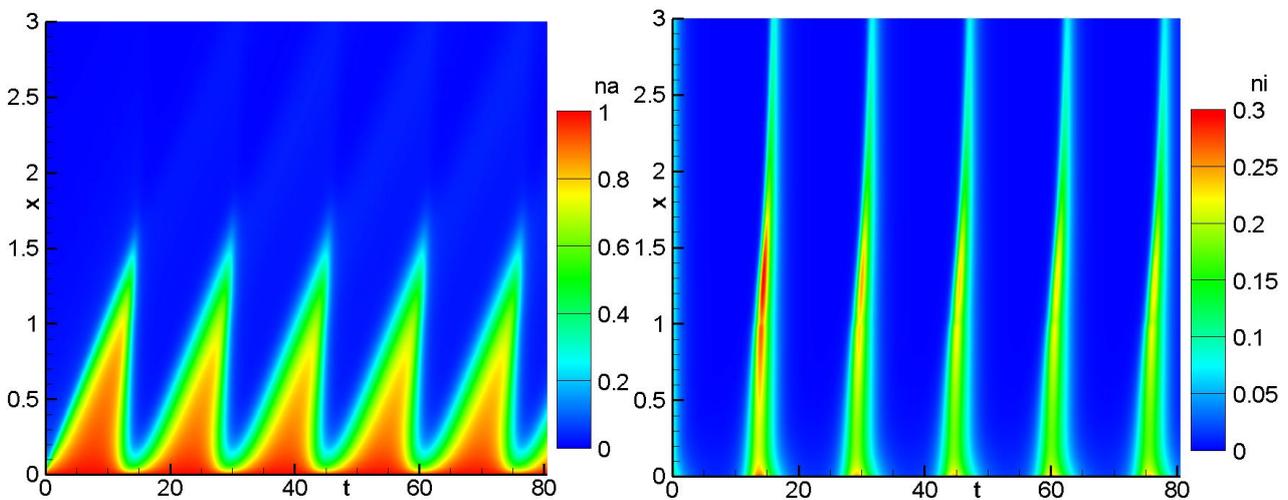


Рис.3. Эволюция концентраций ионов (n_i) и атомов (n_a) в пространстве и времени.

§2. Решение уравнений ионизации в случае постоянных скоростей

Решим систему (1) в случае $v_a = \text{const}$, $v_i = \text{const}$. В безразмерном виде она является частным случаем системы (13):

$$\partial n_a / \partial t + v_a \partial n_a / \partial z = -k_I n_a n_i, \quad \partial n_i / \partial t + v_i \partial n_i / \partial z = k_I n_a n_i. \quad (21)$$

Рассмотрим основной случай $v_a \neq v_i$. Проведём замену независимых переменных:

$$(t, z) \leftrightarrow (\alpha, \beta): \quad (t, z) = \alpha(1, v_a) + \beta(1, v_i),$$

или в координатном виде:

$$\begin{aligned} t &= \alpha + \beta, \quad z = \alpha v_a + \beta v_i, \\ \alpha &= (tv_i - z)(v_i - v_a)^{-1}, \quad \beta = (z - tv_a)(v_i - v_a)^{-1}, \quad (\alpha, \beta) = \varphi(t, z). \end{aligned} \quad (22)$$

Отсюда для дифференциальных операторов получим соотношения

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{v_i}{v_i - v_a} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{v_a}{v_i - v_a} \frac{\partial}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = -\frac{1}{v_i - v_a} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{1}{v_i - v_a} \frac{\partial}{\partial \beta}.$$

Подставляя эти выражения в систему (21), сведём её к эквивалентному виду:

$$\partial n_a / \partial \alpha = -k_I n_a n_i, \quad \partial n_i / \partial \beta = k_I n_a n_i. \quad (23)$$

Итак, задача нахождения непрерывно дифференцируемых решений системы (21) в области D переменных (t, z) равносильна задаче нахождения непрерывно дифференцируемых решений системы (23) в области $\varphi(D)$ переменных (α, β) . Отображение φ линейное, невырожденное, с определителем $\det \varphi = 1 / (v_i - v_a) \neq 0$. В частности, φ прямые переводит в прямые, многоугольники – в многоугольники, выпуклые множества – в выпуклые множества и т.д. Построим элементарную теорию решений системы (23) в прямоугольнике $\Pi = [\alpha_0, \alpha_1] \times [\beta_0, \beta_1]$, $\alpha_0 < \alpha_1$, $\beta_0 < \beta_1$.

Теорема 1. 1) Пусть $A(\alpha)$, $B(\beta)$ – дважды непрерывно дифференцируемые функции на отрезках $[\alpha_0, \alpha_1]$, $[\beta_0, \beta_1]$ соответственно, причём $A(\alpha) \neq B(\beta)$ для любых $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$, $\beta \in [\beta_0, \beta_1]$. Тогда функции

$$n_a(\alpha, \beta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{B'(\beta)}{k_I(A(\alpha) - B(\beta))}, \quad n_i(\alpha, \beta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{A'(\alpha)}{k_I(A(\alpha) - B(\beta))} \quad (24)$$

составляют непрерывно дифференцируемое решение системы (23) в прямоугольнике Π .

2) Если непрерывно дифференцируемые решения n_a, n_i системы (23) таковы, что множество нулей каждой из этих функций в Π имеет пустую внутренность и $\bar{A}(\alpha), \bar{B}(\beta)$ ещё один комплект функций на $[\alpha_0, \alpha_1], [\beta_0, \beta_1]$ соответственно, удовлетворяющий условиям части 1) теоремы и восстанавливающий по формулам (24) те же самые функции n_a, n_i в Π , то найдутся константы $R \neq 0, C$, для которых:

$$\bar{A}(\alpha) = RA(\alpha) + C, \quad \alpha \in [\alpha_0, \alpha_1], \quad \bar{B}(\beta) = RB(\beta) + C, \quad \beta \in [\beta_0, \beta_1]. \quad (25)$$

Обратно, если $\bar{A}(\alpha), \bar{B}(\beta)$ вычисляются по $A(\alpha), B(\beta)$ посредством формул (25) для некоторых констант $R \neq 0, C$, то они удовлетворяют условиям части 1) и по формулам (24) восстанавливают те же функции n_a, n_i , что и для $A(\alpha), B(\beta)$.

3) В условиях части 1) теоремы функции n_a, n_i , вычисляемые по формулам (24), удовлетворяют всюду в Π неравенствам $n_a \geq 0, n_i \geq 0$ тогда и только тогда, когда либо $A(\alpha), B(\beta)$ монотонно не убывают на $[\alpha_0, \alpha_1], [\beta_0, \beta_1]$, соответственно, и $\inf_{\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]} A(\alpha) > \sup_{\beta \in [\beta_0, \beta_1]} B(\beta)$ ($\equiv A(\alpha_0) > B(\beta_1)$), либо $A(\alpha),$

$B(\beta)$ монотонно не возрастают соответственно на $[\alpha_0, \alpha_1], [\beta_0, \beta_1]$ и $\sup_{\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]} A(\alpha) < \inf_{\beta \in [\beta_0, \beta_1]} B(\beta)$ ($\equiv A(\alpha_0) < B(\beta_1)$).

Доказательство. Поскольку $A(\alpha) \neq B(\beta)$ для любых $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1], \beta \in [\beta_0, \beta_1]$, то правые части равенств (24) определены корректно в Π и, очевидно, являются непрерывно дифференцируемыми в прямоугольнике Π функциями. По правилам дифференцирования

$$\frac{\partial n_a}{\partial \alpha} = -\frac{B'(\beta)A'(\alpha)}{k_I(A(\alpha) - B(\beta))^2}, \quad \frac{\partial n_i}{\partial \beta} = \frac{A'(\alpha)B'(\beta)}{k_I(A(\alpha) - B(\beta))^2}.$$

Отсюда и из (24) следует тождественная справедливость равенств (23), ч.т.д.

2) Пусть $\bar{A}(\alpha), \bar{B}(\beta)$ – ещё один комплект функций, удовлетворяющий части 1) теоремы. Тогда всюду в Π выполнены тождества:

$$\begin{aligned} B'(\beta)k_I^{-1}(A(\alpha) - B(\beta))^{-1} &= n_a(\alpha, \beta) = \bar{B}'(\beta)k_I^{-1}(\bar{A}(\alpha) - \bar{B}(\beta))^{-1}, \\ A'(\alpha)k_I^{-1}(A(\alpha) - B(\beta))^{-1} &= n_i(\alpha, \beta) = \bar{A}'(\alpha)k_I^{-1}(\bar{A}(\alpha) - \bar{B}(\beta))^{-1} \end{aligned} \quad (26)$$

Обозначим

$$R(\alpha, \beta) \stackrel{\text{def}}{=} (\bar{A}(\alpha) - \bar{B}(\beta))(A(\alpha) - B(\beta))^{-1}.$$

Тогда функция R непрерывна и отлична от нуля всюду в Π и $\bar{B}'(\beta) = B'(\beta)R(\alpha, \beta), \bar{A}'(\alpha) = A'(\alpha)R(\alpha, \beta)$ для всех $(\alpha, \beta) \in \Pi$. Отсюда следует,

что множества нулей функций $\bar{B}'(\beta)$ и $B'(\beta)$ совпадают и, по условию, имеют пустую внутренность. Аналогично множества нулей функции $\bar{A}'(\alpha)$ и $A'(\alpha)$ совпадают и имеют пустую внутренность. Кроме того, указанные множества замкнуты и нигде не плотны в соответствующих отрезках $[\beta_0, \beta_1]$ и $[\alpha_1, \alpha_1]$. Пусть $U \subseteq [\beta_0, \beta_1]$, $V \subseteq [\alpha_0, \alpha_1]$ – дополнения указанных множеств, тогда $\bar{U} = [\beta_0, \beta_1]$, $\bar{V} = [\alpha_0, \alpha_1]$ и для любой точки $(\alpha, \beta) \in V \times U$ имеем

$$\bar{B}'(\beta) / B'(\beta) = R(\alpha, \beta) = \bar{A}'(\alpha) / A'(\alpha) \Rightarrow R(\alpha, \beta) \equiv R = \text{const на } V \times U.$$

Поскольку R – непрерывная функция и $\overline{V \times U} = \bar{V} \times \bar{U} = \Pi$, то $R(\alpha, \beta) \equiv R$ всюду в Π . Но тогда $(\bar{B}(\beta) - RB(\beta))' = 0$, $(\bar{A}(\alpha) - RA(\alpha))' = 0$, и значит найдутся константы C и D , для которых $\bar{B}(\beta) - RB(\beta) \equiv C$, $\bar{A}(\alpha) - RA(\alpha) \equiv D$ всюду на отрезках $[\beta_0, \beta_1]$, $[\alpha_1, \alpha_1]$ соответственно. Подставляя равенства $\bar{B} = RB + C$, $\bar{A} = RA + D$ в соотношения (26) и учитывая $R \neq 0$, получим:

$$B'(\beta)(D - C) / R = B'(\beta), \quad A'(\alpha)(D - C) / R = A'(\alpha).$$

Поскольку, по условию, $A'(\alpha)$ и $B'(\beta)$ не равны тождественно нулю, то $D - C = 0$, что доказывает прямое утверждение. Обратное утверждение очевидно.

3) Пусть $n_a \geq 0$, $n_i \geq 0$ в Π и выполнении условия части 1) теоремы, в частности, имеют место равенства (24). Из непрерывности ненулевой функции двух переменных $A(\alpha) - B(\beta)$ в Π и связности Π следует, что либо $A(\alpha) - B(\beta) > 0$ всюду в Π , либо $A(\alpha) - B(\beta) < 0$ всюду в Π . Поэтому из равенств (24) вытекает, что либо $A(\alpha) - B(\beta) > 0$ всюду в Π и $A'(\alpha) \geq 0$, $B'(\beta) \geq 0$ всюду на $[\alpha_0, \alpha_1]$, $[\beta_0, \beta_1]$, соответственно, либо $A(\alpha) - B(\beta) < 0$ всюду в Π и $A'(\alpha) \leq 0$, $B'(\beta) \leq 0$ всюду на $[\alpha_0, \alpha_1]$, $[\beta_0, \beta_1]$, соответственно. В первом случае $A(\alpha)$, $B(\beta)$ монотонно не убывают в своих областях определения и $\inf A(\alpha) > \sup B(\beta)$. Во втором случае $A(\alpha)$, $B(\beta)$ монотонно не возрастают в своих областях определения и $\sup A(\alpha) < \inf B(\beta)$, где \inf и \sup по α берутся на $[\alpha_0, \alpha_1]$, а \inf и \sup по β берутся на $[\beta_0, \beta_1]$. Остальные утверждения очевидны. #

Если $A(\alpha)$, $B(\beta)$ удовлетворяют условиям части 1) **Теоремы 1**, то n_a , n_i , вычисляемые по формулам (24), непрерывно дифференцируемы в Π и существуют непрерывные в Π смешанные производные $\partial^2 n_a / (\partial \alpha \partial \beta)$, $\partial^2 n_a / (\partial \beta \partial \alpha)$ и $\partial^2 n_i / (\partial \alpha \partial \beta)$, $\partial^2 n_i / (\partial \beta \partial \alpha)$. Это обстоятельство позволяет сформулировать обратное утверждение.

Теорема 2. Пусть $n_a > 0$, $n_i > 0$ – непрерывно дифференцируемое решение (23) в прямоугольнике Π , для которого существуют обе непрерывные в Π

смешанные частные производные $\partial^2 n_a / (\partial \alpha \partial \beta)$, $\partial^2 n_a / (\partial \beta \partial \alpha)$ и $\partial^2 n_i / (\partial \alpha \partial \beta)$, $\partial^2 n_i / (\partial \beta \partial \alpha)$. Тогда найдутся дважды непрерывно дифференцируемые функции $A(\alpha)$, $B(\beta)$, определённые на сторонах прямоугольника, соответственно, $[\alpha_0, \alpha_1]$ и $[\beta_0, \beta_1]$, для которых $A(\alpha) \neq B(\beta)$ при всех $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$, $\beta \in [\beta_0, \beta_1]$ и всюду в Π выполнены равенства (24).

Замечание. Таким образом, для класса положительных непрерывно дифференцируемых решений системы (23), для которых в Π существуют обе непрерывные смешанные частные производные, формулы (24) задают общий вид решений этого класса.

Доказательство Теоремы 2. Пусть $X = \ln n_a$, $Y = \ln n_i$. Очевидно, $X(\alpha, \beta)$, $Y(\alpha, \beta)$ непрерывно дифференцируемые в Π и существуют в Π обе непрерывные смешанные частные производные $\partial^2 X / (\partial \alpha \partial \beta)$, $\partial^2 X / (\partial \beta \partial \alpha)$ и $\partial^2 Y / (\partial \alpha \partial \beta)$, $\partial^2 Y / (\partial \beta \partial \alpha)$. Относительно неизвестных X , Y система (23) переписывается в виде

$$\partial X / \partial \alpha = -k_1 e^Y, \quad \partial Y / \partial \beta = k_1 e^X, \quad (\alpha, \beta) \in \Pi.$$

Отсюда следуют равенства

$$\frac{\partial^2 X}{\partial \beta \partial \alpha} = -k_1 \frac{\partial e^Y}{\partial \beta} = -k_1 e^Y \frac{\partial Y}{\partial \beta} = -k_1^2 e^{X+Y}, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial \alpha \partial \beta} = k_1 \frac{\partial e^X}{\partial \alpha} = k_1 e^X \frac{\partial X}{\partial \alpha} = -k_1^2 e^{X+Y}.$$

По теореме Шварца, $\partial^2 Y / (\partial \alpha \partial \beta) = \partial^2 Y / (\partial \beta \partial \alpha)$, поэтому из проведённых вычислений следует тождество $\partial^2 (X - Y) / (\partial \beta \partial \alpha) \equiv 0$ всюду в Π . Отсюда элементарным интегрированием получается $\partial (X - Y) / \partial \alpha = a_0(\alpha)$ – непрерывная на $[\alpha_0, \alpha_1]$ функция, и значит $X - Y = \int a_0(\alpha) d\alpha + b(\beta)$. Функция $a(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \int a_0(\alpha) d\alpha$, очевидно, непрерывно дифференцируема, и тогда из равенства $X - Y = a(\alpha) + b(\beta)$ следует непрерывная дифференцируемость $b(\beta)$ на $[\beta_0, \beta_1]$. Итак, $X - Y = a(\alpha) + b(\beta) \Rightarrow n_a / n_i = e^{a(\alpha)} e^{b(\beta)} = C(\alpha) D(\beta)$, где $C(\alpha)$, $D(\beta)$ – положительные непрерывно дифференцируемые функции соответственно на $[\alpha_0, \alpha_1]$ и $[\beta_0, \beta_1]$.

Подставим выражение $n_a = n_i C(\alpha) D(\beta)$ в первое уравнение системы (23)

$$\partial(n_i C(\alpha)) / \partial \alpha D(\beta) = -k_1 n_i^2 C(\alpha) D(\beta) \Leftrightarrow n_i^{-2} \partial n_i / \partial \alpha + C'(\alpha) C^{-1}(\alpha) n_i^{-1} = -k_1.$$

Пусть $Z = 1 / n_i$, тогда относительно Z получается линейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\partial Z / \partial \alpha - C'(\alpha) C^{-1}(\alpha) Z = k_1. \quad (27)$$

Решим уравнение (27) при каждом фиксированном $\beta \in [\beta_0, \beta_1]$ на отрезке $[\alpha_0, \alpha_1]$ методом вариации произвольной постоянной. Однородное уравнение имеет решение

$$Z_{\text{одн}} = \Gamma(\beta)C(\alpha).$$

Варьируя по α произвольную постоянную $\Gamma(\beta)$, получим

$$(\partial\Gamma / \partial\alpha)C(\alpha) = k_1 \Rightarrow \Gamma(\alpha, \beta) = k_1 \int C^{-1}(\alpha)d\alpha + k_1 K(\beta),$$

а решение уравнения (27) имеет вид $Z = \Gamma(\alpha, \beta)C(\alpha) = k_1(A(\alpha) - B(\beta))C(\alpha)$, где $A(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \int d\alpha / C(\alpha)$, $B(\beta) \stackrel{\text{def}}{=} -K(\beta)$. Из равенства $Z = \Gamma(\alpha, \beta)C(\alpha)$ вытекает положительность и непрерывная дифференцируемость $\Gamma(\alpha, \beta)$ в Π . Из равенства $\Gamma(\alpha, \beta) = k_1(A(\alpha) - B(\beta))$ и двукратной непрерывной дифференцируемости $A(\alpha)$ следует непрерывная дифференцируемость функции $B(\beta)$. Из положительности $\Gamma(\alpha, \beta)$ всюду в Π вытекает $A(\alpha) \neq B(\beta)$ для любых $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$, $[\beta_0, \beta_1]$. Наконец, из равенства $A'(\alpha) = 1/C(\alpha)$ следует тождество

$$n_i = Z^{-1} = \Gamma^{-1}(\alpha, \beta)C^{-1}(\alpha) = A'(\alpha)k_1^{-1}(A(\alpha) - B(\beta))^{-1}, \quad (28)$$

совпадающее со вторым равенством (24). Чтобы получить первое равенство (24) и установить двукратную непрерывную дифференцируемость функции $B(\beta)$ на $[\beta_0, \beta_1]$, подставим соотношение (28) во второе уравнение системы (23):

$$\frac{A'(\alpha)B'(\beta)}{k_1(A(\alpha) - B(\beta))^2} = k_1 \frac{(A'(\alpha))^2}{k_1^2(A(\alpha) - B(\beta))^2} C(\alpha)D(\beta),$$

где было использовано равенство $n_a = n_i C(\alpha)D(\beta)$. Учитывая тождества $A'(\alpha)C(\alpha) = 1$ и $A'(\alpha) > 0$, получим $B'(\beta) = D(\beta)$. Значит, $B(\beta)$ дважды непрерывно дифференцируема по β . Кроме того, с учётом (28), имеем:

$$n_a = n_i C(\alpha)D(\beta) = \frac{A'(\alpha)C(\alpha)D(\beta)}{k_1(A(\alpha) - B(\beta))} = \frac{B'(\beta)}{k_1(A(\alpha) - B(\beta))},$$

что совпадает с первым равенством (24). Итак, мы указали функции $A(\alpha)$, $B(\beta)$, удовлетворяющие условиям **Теоремы 1.1**, для которых выполнены равенства (24). Теорема доказана. #

Из **Теоремы 1.2** следует, что в формулах (24) всегда можно считать $A(\alpha)$, $B(\beta)$ монотонно неубывающими функциями на $[\alpha_0, \alpha_1]$, $[\beta_0, \beta_1]$ соответственно. Кроме того, стороны прямоугольника Π могут быть

интервалами или полуинтервалами, в том числе полубесконечными или бесконечными. Соответствующие изменения формулировки **Теоремы 1.3** очевидны.

Из **Теорем 1, 2** следует, что в $\varphi^{-1}(\Pi)$ решение системы (21) задаётся формулами:

$$n_a(t, z) = \frac{B' \left(\frac{z - tv_a}{v_i - v_a} \right)}{k_I \left[A \left(\frac{tv_i - z}{v_i - v_a} \right) - B \left(\frac{z - tv_a}{v_i - v_a} \right) \right]}, \quad n_i(t, z) = \frac{A' \left(\frac{z - tv_a}{v_i - v_a} \right)}{k_I \left[A \left(\frac{tv_i - z}{v_i - v_a} \right) - B \left(\frac{z - tv_a}{v_i - v_a} \right) \right]}, \quad (29)$$

где $A(\alpha)$, $B(\beta)$ – произвольные функции, удовлетворяющие условию **Теоремы 1.1**.

Формулы (29) справедливы для $v_i \neq v_a$. При $v_i = v_a$ они теряют смысл. Для $v_i = v_a = v$ общее решение системы (21) получается напрямую, без введения новых координат α , β , интегрированием уравнений этой системы вдоль характеристик. Характеристики системы (21) имеют вид $z(t) = vt + \text{const}$ и различаются значениями const . Пусть $n_a(t) = n_a(t, z(t))$, $n_i(t) = n_i(t, z(t))$ – значения неизвестных функций n_a , n_i вдоль фиксированной характеристики. Тогда из (21) следует, что функции $n_a(t)$, $n_i(t)$ удовлетворяют системе ОДУ

$$dn_a / dt = -k_I n_a n_i, \quad dn_i / dt = k_I n_a n_i. \quad (30)$$

Складывая почленно эти уравнения, получим первый интеграл системы (30):

$$d(n_a + n_i) / dt \equiv 0 \Rightarrow n_a + n_i \equiv C = \text{const}.$$

Поскольку $n_a \geq 0$, $n_i \geq 0$, то $C \geq 0$. При $C = 0$ имеем $n_a(t) \equiv 0$, $n_i(t) \equiv 0$ – тривиальное решение системы (30), не имеющее смысла. Поэтому ниже считаем $C > 0$. Тогда $n_a = C - n_i$, и для нахождения n_i имеем ОДУ

$$dn_i / dt = k_I n_i (C - n_i). \quad (31)$$

Интегрируя, получим:

$$\int \frac{dn_i}{n_i(C - n_i)} = k_I t + \text{const} \Rightarrow \frac{1}{C} \ln \left| \frac{n_i}{C - n_i} \right| = k_I t + \text{const}.$$

Поскольку $n_i \geq 0$, $n_a = C - n_i \geq 0$, то $0 \leq n_i \leq C$, и в последнем равенстве знак модуля можно убрать. В результате получим:

$$n_i = \frac{CD \exp(Ck_I t)}{1 + D \exp(Ck_I t)}, \quad n_a = C - n_i = \frac{C}{1 + D \exp(Ck_I t)}, \quad D \geq 0, C > 0. \quad (32)$$

В случае $D = 0$ получим одно из двух особых решений (31): $n_i \equiv 0$. Другое особое решение $n_i \equiv C$. Формулы (32) задают общее решение системы (30) на произвольной характеристике. Константы C и D определяются значениями n_a , n_i в произвольной точке на рассматриваемой характеристике. В частности, при решении начально-краевых задач для системы (21) значения C и D определяются начальными и граничными условиями (см. ниже).

Применим формулы (29), (32) для решения начально-краевых задач для системы (21), которые представляют основной практический интерес. Ограничимся следующими простейшими задачами.

(I) **Начальная задача (задача Коши):** в полуплоскости $z \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ найти непрерывно дифференцируемое решение системы (21), для которого выполнены начальные условия $n_a(0, z) = n_a^0(z)$, $n_i(0, z) = n_i^0(z)$, $z \in \mathbb{R}$, где $n_a^0(z)$, $n_i^0(z)$ – заданные неотрицательные непрерывно дифференцируемые функции на прямой.

(II) **Краевая задача:** для $v_a, v_i \geq 0$ в полуплоскости $z \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$ найти непрерывно дифференцируемое решение системы (21), для которого выполнены краевые условия $n_a(t, 0) = n_{a0}(t)$, $n_i(t, 0) = n_{i0}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, где $n_{a0}(t)$, $n_{i0}(t)$ – заданные неотрицательные непрерывно дифференцируемые функции на прямой.

(III) **Начально-краевая (смешанная) задача:** для $v_a, v_i \geq 0$ в первом квадранте $z \geq 0$, $t \geq 0$ найти непрерывно дифференцируемое решение системы (21), для которого выполнены начальные условия $n_a(0, z) = n_a^0(z)$, $n_i(0, z) = n_i^0(z)$, $z \geq 0$ и краевые условия $n_a(t, 0) = n_{a0}(t)$, $n_i(t, 0) = n_{i0}(t)$, $t \geq 0$, где $n_a^0(z)$, $n_i^0(z)$, $z \geq 0$, $n_{a0}(t)$, $n_{i0}(t)$, $t \geq 0$ – заданные непрерывно дифференцируемые функции на полупрямых $z \geq 0$ и $t \geq 0$, подчиняющиеся условиям согласованности:

$$\begin{aligned} n_{a0}(0) &= n_a^0(0), \quad n_{i0}(0) = n_i^0(0), \quad n_{a0}'(0) + v_a(n_a^0)'(0) + k_I n_{a0}(0)n_{i0}(0) = 0, \\ n_{i0}'(0) + v_i(n_i^0)'(0) - k_I n_{a0}(0)n_{i0}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Более сложные начально-краевые задачи в этой работе не рассматриваются.

Сначала исследуем случай $v_i = v_a = v$.

Задача Коши (I). Решим её методом характеристик. Пусть (z, t) лежит в полуплоскости $t \geq 0$, $z \in \mathbb{R}$. Через точку (z, t) проходит единственная характеристика $(vs + \text{const}, s)$ для значения $\text{const} = z - vt$, и таким образом эта единственная характеристика имеет вид $(z + v(s - t), s)$. На этой характеристике решение системы (21) задаётся формулами (32), в которых t надо заменить на s . С другой стороны, эта характеристика пересекает ось z при $s = 0$ в единственной точке $z - vt$, где известны значения $n_a^0(z - vt)$ и $n_i^0(z - vt)$.

Поэтому в формулах (32) с s вместо t константы C и D ищутся из условий $n_a(0) = n_a^0(z - vt)$, $n_i(0) = n_i^0(z - vt)$, откуда получаем

$$C = n_a^0(z - vt) + n_i^0(z - vt), \quad D = n_i^0(z - vt) / n_a^0(z - vt),$$

$$n_i(z, t) = \frac{C(y)D(y)\exp(C(y)k_1 t)}{1 + D(y)\exp(C(y)k_1 t)}, \quad n_a(z, t) = \frac{C(y)}{1 + D(y)\exp(C(y)k_1 t)}, \quad y = z - vt.$$

Нетрудно прямой подстановкой в (23) убедиться, что полученные формулы задают решение задачи Коши в классе непрерывно дифференцируемых функций.

Краевая задача (II). Единственная характеристика, проходящая через точку (z, t) полуплоскости $z \geq 0$, пересекает ось t в точке $s = t - z/v$, являющейся решением уравнения $z + v(s - t) = 0$, где известны значения n_a и n_i . Поэтому при вычислении констант C и D из формулы (32) с s вместо t надо в этих формулах положить $s = t - z/v$ и вычислять правые части (32) по формулам $n_i = n_{i0}(t - z/v)$, $n_a = n_{a0}(t - z/v)$. В итоге получим:

$$C = n_{a0}(t - z/v) + n_{i0}(t - z/v), \quad D = \frac{n_{i0}(t - z/v)}{n_{a0}(t - z/v)} \exp[-Ck_1(t - z/v)],$$

$$n_i(z, t) = \frac{C(y)D(y)\exp(C(y)k_1 t)}{1 + D(y)\exp(C(y)k_1 t)}, \quad n_a(z, t) = \frac{C(y)}{1 + D(y)\exp(C(y)k_1 t)}, \quad y = t - z/v.$$

Нетрудно прямой подстановкой в (23) проверить, что полученные формулы задают решение краевой задачи (II) в классе непрерывно дифференцируемых функций.

Смешанная задача (III). Пусть $z \geq 0$, $t \geq 0$. Единственная характеристика, проходящая через точку (z, t) при $z < tv$, пересекает полуось $t \geq 0$ в точке $s = t - z/v$, где n_a , n_i известны и задаются краевыми условиями, но не пересекают полуось $z \geq 0$. При $z > tv$ эта характеристика пересекает полуось $z \geq 0$ в точке $z - vt$, где n_a , n_i известны и задаются начальными условиями, но не пересекают полуось $t \geq 0$. При $z = tv$ указанная характеристика пересекает обе полуоси $z \geq 0$ и $t \geq 0$ в нулевых точках, где начальные и краевые условия совпадают. Поэтому константы $C = C(y)$, $D = D(y)$ и функции $n_i(z, t)$, $n_a(z, t)$ ищутся по формулам:

$$C(y) = \begin{cases} n_a^0(z - vt) + n_i^0(z - vt), & z \geq tv, \\ n_{a0}(t - zv^{-1}) + n_{i0}(t - zv^{-1}), & z \leq tv, \end{cases} \quad D(y) = \begin{cases} \frac{n_i^0(z - vt)}{n_a^0(z - vt)}, & z \geq tv, \\ \frac{n_{i0}(t - zv^{-1})}{n_{a0}(t - zv^{-1})} e^{-Ck_1(t - z/v)}, & z \leq tv, \end{cases}$$

$$n_i(z,t) = \frac{C(y)D(y)\exp(C(y)k_it)}{1 + D(y)\exp(C(y)k_it)}, \quad n_a(z,t) = \frac{C(y)}{1 + D(y)\exp(C(y)k_it)},$$

$$y = \begin{cases} z - vt, z \geq tv, \\ t - zv^{-1}, z \leq tv. \end{cases}$$

Условия согласованности в нуле гарантируют, что функции $C(z,t)$, $D(z,t)$ будут непрерывны и непрерывно дифференцируемы в первом квадранте.

В случае $v=0$ краевая и смешанная задачи теряют смысл, ионизация в различных точках пространства происходит независимо и определяется только временем. Формулы для n_a и n_i получаются из приведённых выше формул решения задачи Коши (I), если там положить $v=0$. Если $v \leq 0$, то краевая задача ставится в полуплоскости $z \leq 0$, $t \in \mathbb{R}$, а смешанная задача – во втором квадранте $z \leq 0$, $t \geq 0$.

Рассмотрим задачу Коши (I) в случае $v_a \neq v_i$. В переменных (α, β) задача состоит в поиске непрерывно дифференцируемого решения системы (23) в полуплоскости $P = \{\alpha + \beta \geq 0\}$, которое на границе этой полуплоскости $\alpha + \beta = 0$ имеет заданные значения $\alpha + \beta = 0 \Rightarrow n_a(\alpha, \beta) = n_a(-\beta, \beta) = n_a^0(\alpha v_a + \beta v_i) = n_a^0(\beta(v_i - v_a))$, $n_i(\alpha, \beta) = n_i(-\beta, \beta) = n_i^0(\alpha v_a + \beta v_i) = n_i^0(\beta(v_i - v_a))$. Выше был изложен способ решения системы (23) в произвольном прямоугольнике Π . Построим решение системы (23) в бесконечном прямоугольнике $\Pi_\infty = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \supseteq P$, которое на прямой $\alpha + \beta = 0$ совпадает с заданными функциями, $n_a|_{\alpha+\beta=0} = n_a^0(\beta(v_i - v_a))$, $n_i|_{\alpha+\beta=0} = n_i^0(\beta(v_i - v_a))$. Если такое решение существует, то его сужение на P даёт, очевидно, искомое решение задачи Коши в переменных (α, β) . Согласно **Теореме 1**, решение системы (23) в прямоугольнике Π_∞ определяется двумя дважды непрерывно дифференцируемыми функциями $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и вычисляется по этим функциям посредством формул (24). При этом, согласно **Теореме 1**, $A(\alpha)$, $B(\beta)$ должны удовлетворять двум условиям: 1) области значений функций $A(\alpha)$, $B(\beta)$ не пересекаются, $A(\mathbb{R}) \cap B(\mathbb{R}) = \emptyset$, и тогда учитывая связность прямой \mathbb{R} , либо $A(\mathbb{R}) < B(\mathbb{R})$, либо $B(\mathbb{R}) < A(\mathbb{R})$, 2) если $A(\mathbb{R}) < B(\mathbb{R})$, то $A(\alpha)$, $B(\beta)$ – монотонно невозрастающие на \mathbb{R} функции, если $B(\mathbb{R}) < A(\mathbb{R})$, то $A(\alpha)$, $B(\beta)$ – монотонно неубывающие на \mathbb{R} функции.

Функции $A(\alpha)$, $B(\beta)$ ищутся по известным значениям n_a и n_i на прямой $\alpha + \beta = 0$ (т.е. из начальных условий). Из тождеств (24) получим:

$$\begin{aligned} n_a^0(\beta(v_i - v_a)) &= n_a(-\beta, \beta) = B'(\beta)k_i^{-1}(A(-\beta) - B(\beta))^{-1}, \\ n_i^0(\beta(v_i - v_a)) &= n_i(-\beta, \beta) = A'(-\beta)k_i^{-1}(A(-\beta) - B(\beta))^{-1}, \quad \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{33}$$

Обозначим $n_a(\beta) = k_I n_a^0(\beta(v_i - v_a))$, $n_i(\beta) = k_I n_i^0(\beta(v_i - v_a))$, $A_0(\beta) = A(-\beta)$. Тогда n_a , n_i неотрицательные функции, а условия (33) дают линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами для нахождения функций $A_0(\beta)$, $B(\beta)$ на прямой \mathbb{R} :

$$B' = n_a(\beta)(A_0 - B), \quad A_0' = -n_i(\beta)(A_0 - B). \quad (34)$$

Поскольку $n_a(\beta)$, $n_i(\beta)$ непрерывно дифференцируемы по β , то любое решение системы (34) дважды непрерывно дифференцируемо всюду на прямой. Кроме того, для любых $C, D \in \mathbb{R}$ существует, и притом единственное, решение системы (34), для которого $A_0(0) = C$, $B(0) = D$. Если $C = D$, то из теоремы единственности для системы (34) следует, что решение с такими начальными условиями константное – $A_0(\beta) \equiv C$, $B(\beta) \equiv D$. Поэтому ниже считается $C \neq D$. Из теоремы единственности решения задачи Коши для системы (34) следует, что решение (34) с начальным условием $A_0(0) = C$, $B(0) = D$ имеет вид:

$$\begin{aligned} B(\beta) &= D + (C - D) \int_0^\beta n_a(\beta) \exp(-N(\beta)) d\beta, \\ A_0(\beta) &= C + (D - C) \int_0^\beta n_i(\beta) \exp(-N(\beta)) d\beta, \quad N(\beta) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\beta (n_a(\beta) + n_i(\beta)) d\beta. \end{aligned} \quad (35)$$

Действительно, обозначим правые части равенств (35) через $\bar{B}(\beta)$ и $\bar{A}_0(\beta)$. Очевидно, $\bar{B}(0) = D = B(0)$, $\bar{A}_0(0) = C = A_0(0)$. Кроме того, $\bar{B}(\beta)$, $\bar{A}_0(\beta)$ – решение системы (34). Проверим, например, справедливость первого уравнения (34). Левая часть равна $\bar{B}'(\beta) = (C - D)n_a \exp(-N)$, а правая имеет вид

$$\begin{aligned} n_a(\bar{A}_0 - \bar{B}) &= n_a \left[C - D + (D - C) \int_0^\beta n_i e^{-N} d\beta - (C - D) \int_0^\beta n_a e^{-N} d\beta \right] = n_a(C - D) \cdot \\ &\cdot \left[1 - \int_0^\beta n_i e^{-N} d\beta - \int_0^\beta n_a e^{-N} d\beta \right] = n_a(C - D) \left[1 - \int_0^\beta (n_i + n_a) e^{-N} d\beta \right] = n_a(C - D) \cdot \\ &\cdot \left[1 - \int_0^\beta N' e^{-N} d\beta \right] = n_a(C - D) \left[1 + e^{-N} \Big|_0^\beta \right] = n_a(C - D) [1 + e^{-N} - 1] = n_a(C - D) e^{-N}. \end{aligned}$$

Тем самым справедливость первого уравнения системы (34) установлена. Аналогично доказывается второе равенство (34). Итак, $\bar{A}_0(\beta)$, $\bar{B}(\beta)$ – решение (34), удовлетворяющее начальным условиям $\bar{A}_0(0) = C$, $\bar{B}(0) = D$. Осталось воспользоваться теоремой единственности.

Из равенств (35) вытекает справедливость условия 1). Пусть $D > C$, тогда $A_0(\alpha) < B(\beta)$ (что равносильно $A(\alpha) < B(\beta)$) для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. В самом деле, это неравенство с учётом тождеств (35) равносильно такому:

$$\int_0^{\alpha} n_i \exp(-N) d\alpha + \int_0^{\beta} n_a \exp(-N) d\beta < 1. \quad (36)$$

Пусть $\gamma > 0$ – любая верхняя граница чисел α, β . Учитывая неотрицательность функций n_i, n_a , левая часть (36), очевидно, не превосходит

$$\int_0^{\gamma} n_i e^{-N} d\beta + \int_0^{\gamma} n_a e^{-N} d\beta = \int_0^{\gamma} (n_i + n_a) e^{-N} d\beta = \int_0^{\gamma} N' e^{-N} d\beta = -e^{-N} \Big|_0^{\gamma} = 1 - e^{-N(\gamma)} < 1,$$

что и доказывает (36). Если $C > D$, то $B(\beta) < A_0(\alpha)$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Последнее неравенство, легко проверить с учётом тождеств (35), тоже равносильно соотношению (36). Тем самым справедливость условия 1) установлена. Если $A(\mathbb{R}) < B(\mathbb{R})$, то правая часть первого равенства (34) неположительна, а второго равенства – неотрицательна. Поэтому $B(\beta)$ монотонно не возрастает, $A_0(\beta)$ монотонно не убывает на \mathbb{R} и значит функция $A(\beta) = A_0(-\beta)$ тоже монотонно не возрастает на \mathbb{R} . Аналогично устанавливается, что при $B(\mathbb{R}) < A(\mathbb{R})$ функции $B(\beta)$ и $A(\beta)$ монотонно не убывают на \mathbb{R} . Тем самым доказана справедливость условия 2).

Итак, согласно **Теореме 1**, формулы (24) с учётом (35) дают решение задачи Коши в переменных $(\alpha, \beta) \in P$:

$$n_a(\alpha, \beta) = \frac{n_a(\beta) e^{-N(\beta)}}{k_I \left[1 - \int_0^{-\alpha} n_i e^{-N} d\alpha - \int_0^{\beta} n_a e^{-N} d\beta \right]}, \quad n_i(\alpha, \beta) = \frac{n_i(\alpha) e^{-N(\alpha)}}{k_I \left[1 - \int_0^{-\alpha} n_i e^{-N} d\alpha - \int_0^{\beta} n_a e^{-N} d\beta \right]}.$$

В переменных (z, t) получаем следующие формулы

$$\begin{aligned} n_a(z, t) &= \frac{n_a^0(z - v_a t) e^{-N(z - v_a t)}}{1 - \frac{k_I}{v_i - v_a} \left\{ \int_0^{z - v_i t} n_i^0(p) e^{-N(p)} dp + \int_0^{z - v_a t} n_a^0(p) e^{-N(p)} dp \right\}}, \\ n_i(z, t) &= \frac{n_i^0(z - v_i t) e^{-N(z - v_i t)}}{1 - \frac{k_I}{v_i - v_a} \left\{ \int_0^{z - v_i t} n_i^0(p) e^{-N(p)} dp + \int_0^{z - v_a t} n_a^0(p) e^{-N(p)} dp \right\}}, \\ N(p) &= \frac{k_I}{v_i - v_a} \int_0^p [n_a^0(q) + n_i^0(q)] dq, \quad z \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (37)$$

где $n_i^0(p) \geq 0$, $n_a^0(p) \geq 0$ – заданные произвольно непрерывно дифференцируемые функции и знаменатель в формулах (37) заведомо положителен. Итак, формулы (37) дают аналитическое решение системы (21) при $t \geq 0$, удовлетворяющее начальному условию $n_a(z, 0) = n_a^0(z)$, $n_i(z, 0) = n_i^0(z)$, $z \in \mathbb{R}$.

Итоговые формулы для решения задачи Коши (37) и в координатах (α, β) не зависят от констант C и D , $C \neq D$, определявших функции $A_0(\beta)$, $B(\beta)$. Это не случайно. Если $\bar{A}_0(\beta)$, $\bar{B}(\beta)$ – другие решения системы (34) с начальными условиями $\bar{A}_0(0) = \bar{C}$, $\bar{B}(0) = \bar{D}$, $\bar{C} \neq \bar{D}$, то однозначно определяются константы $R \neq 0$, S , для которых $\bar{C} = RC + S$, $\bar{D} = RD + S$. Рассмотрим функции $RA_0(y) + S$, $RB(y) + S$. Они удовлетворяют системе (34) и начальному условию \bar{C} , \bar{D} , поэтому, по теореме единственности решения задачи Коши для линейной системы (34), $\bar{A}_0(\beta) \equiv RA_0(\beta) + S$, $\bar{B}(\beta) \equiv RB(\beta) + S$, в частности, $\bar{A}(\alpha) = \bar{A}_0(-\alpha) \equiv RA(\alpha) + S$. Но для таких комплектов $\bar{A}(\alpha)$, $\bar{B}(\beta)$ и $A(\alpha)$, $B(\beta)$ формулы (24) дают одни и те же значения n_a , n_i .

Рассмотрим краевую задачу (II) в случае $v_i \neq v_a$. Анализ этого случая проходит по той же схеме, что и решение задачи Коши выше. Выделим основные моменты. В переменных (α, β) ищем непрерывно дифференцируемое решение системы (23) в полуплоскости $P_0 = \{\alpha v_a + \beta v_i \geq 0\}$, для которого функции n_a , n_i на границе полуплоскости P_0 , $\partial P_0 = \{\alpha v_a + \beta v_i = 0\}$ принимают заданные значения $n_a(\alpha, \beta) = n_{a0}(\alpha + \beta)$, $n_i(\alpha, \beta) = n_{i0}(\alpha + \beta)$, $\alpha v_a + \beta v_i = 0$. Построим такое непрерывно дифференцируемое решение системы (23) в бесконечном прямоугольнике $\Pi_\infty = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \supseteq P_0$, которое на границе полуплоскости P_0 , т.е. на прямой $\alpha v_a + \beta v_i = 0$, совпадает с заданными функциями $n_{a0}(\alpha + \beta)$, $n_{i0}(\alpha + \beta)$. Тогда, очевидно, сужение этого решения на P_0 будет искомым решением краевой задачи в координатах (α, β) . Согласно **Теореме 1**, искомое решение определяется двумя непрерывно дифференцируемыми функциями $A(\alpha)$, $B(\beta)$ и вычисляется по этим функциям посредством формул (24). При этом функции $A(\alpha)$, $B(\beta)$ должны удовлетворять условиям 1) и 2), сформулированным выше. Функции $A(\alpha)$, $B(\beta)$ ищутся по известным значениям n_a , n_i на границе P_0 . На этой границе $\beta = -\alpha v_a / v_i$ и значит, согласно (24), имеем

$$\begin{aligned} n_{a0}(\alpha(v_i - v_a) / v_i) &= B'(-\alpha v_a / v_i) k_I^{-1} [A(\alpha) - B(-\alpha v_a / v_i)]^{-1}, \\ n_{i0}(\alpha(v_i - v_a) / v_i) &= A'(\alpha) k_I^{-1} [A(\alpha) - B(-\alpha v_a / v_i)]^{-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (38)$$

Обозначим $n_a(\alpha) = k_I(v_a/v_i)n_{a0}(\alpha(v_i - v_a)/v_i)$, $n_i(\alpha) = k_I n_{i0}(\alpha(v_i - v_a)/v_i)$, $B_0(\alpha) = B(-\alpha v_a/v_i)$. Тогда краевое условие (38) даёт линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений на прямой с переменными коэффициентами для нахождения функций $A(\alpha)$, $B_0(\alpha)$:

$$B_0' = -n_a(\alpha)(A - B_0), \quad A' = n_i(\alpha)(A - B_0). \quad (39)$$

Поскольку $n_a(\alpha)$, $n_i(\alpha)$ непрерывно дифференцируемы, то любое решение системы (39) дважды непрерывно дифференцируемо и определено на всей прямой. Рассмотрим решение задачи Коши для системы (39) с начальными условиями $A(0) = C \neq B_0(0) = D$. Несложно проверить, что это решение вычисляется по формулам (см. выше):

$$B_0(\alpha) = D + (D - C) \int_0^\alpha n_a e^N d\alpha, \quad A(\alpha) = C + (C - D) \int_0^\alpha n_i e^N d\alpha, \quad (40)$$

$$N(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\alpha (n_a + n_i) d\alpha.$$

Из формул (40) выводится (см. выше) справедливость условий 1) и 2) для функций $A(\alpha)$, $B(\beta) = B_0(-\beta v_i/v_a)$. Условие (36) при этом заменяется на следующее

$$1 + \int_0^\alpha n_i e^N d\alpha + \int_0^\beta n_a e^N d\beta > 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (41)$$

И если $C > D$, то $A(\alpha) > B(\beta)$, а при $C < D$ имеем $A(\alpha) < B(\beta)$ для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

По формулам (24) с учётом выражений (40) получим решение краевой задачи в координатах $(\alpha, \beta) \in P_0$:

$$n_a(\alpha, \beta) = \frac{v_i}{v_a} \frac{n_a(-\beta v_i/v_a) \exp N(-\beta v_i/v_a)}{k_I \left[1 + \int_0^\alpha n_i e^N d\alpha + \int_0^{-\beta v_i/v_a} n_a e^N d\beta \right]},$$

$$n_i(\alpha, \beta) = \frac{n_i(\alpha) \exp N(\alpha)}{k_I \left[1 + \int_0^\alpha n_i e^N d\alpha + \int_0^{-\beta v_i/v_a} n_a e^N d\beta \right]}.$$

Подставляя в эти формулы $\alpha = (tv_i - z)/(v_i - v_a)$, $\beta = (z - tv_a)/(v_i - v_a)$, получим после несложных преобразований решение краевой задачи в переменных (z, t) :

$$\begin{aligned}
n_a(z,t) &= \frac{n_{a0}(t-z/v_a)\exp N(t-z/v_a)}{1 + \frac{k_I}{v_i - v_a} \left\{ \int_0^{t-z/v_i} v_i n_{i0}(p)e^{N(p)} dp + \int_0^{t-z/v_a} v_a n_{a0}(p)e^{N(p)} dp \right\}}, \\
n_i(z,t) &= \frac{n_{i0}(t-z/v_i)\exp N(t-z/v_i)}{1 + \frac{k_I}{v_i - v_a} \left\{ \int_0^{t-z/v_i} v_i n_{i0}(p)e^{N(p)} dp + \int_0^{t-z/v_a} v_a n_{a0}(p)e^{N(p)} dp \right\}}, \\
N(p) &= \frac{k_I}{v_i - v_a} \int_0^p [v_a n_{a0}(q) + v_i n_{i0}(q)] dq,
\end{aligned} \tag{42}$$

где $n_{a0}(p) \geq 0$, $n_{i0}(p) \geq 0$ – произвольные непрерывно дифференцируемые функции и знаменатель в (42), согласно неравенству (41), заведомо положителен. Итак, формулы (42) дают аналитическое решение системы (21) в полуплоскости $z \geq 0$, удовлетворяющее краевому условию $n_a(0,t) = n_{a0}(t)$, $n_i(0,t) = n_{i0}(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим смешанную задачу (III) в случае $v_a > 0$, $v_i > 0$, $v_a \neq v_i$. В координатах (α, β) её решение сводится к поиску в тупом угле $\Lambda = \{(\alpha, \beta) : \alpha + \beta \geq 0, \alpha v_a + \beta v_i \geq 0\}$ непрерывно дифференцируемых функций $n_a(\alpha, \beta)$, $n_i(\alpha, \beta)$, удовлетворяющих системе (23) и имеющих заданные значения на границе угла $\partial\Lambda$. Последнее множество состоит из двух лучей, которые обозначим Λ_t и Λ_z : $\partial\Lambda = \Lambda_t \cup \Lambda_z$, $\Lambda_t \cap \Lambda_z = \{(0,0)\}$, $\Lambda_t = \varphi\{(t,0) : t \geq 0\}$, $\Lambda_z = \varphi\{(0,z) : z \geq 0\}$. В зависимости от v_i , v_a угол Λ и лучи Λ_t , Λ_z изображены на рис. 4.

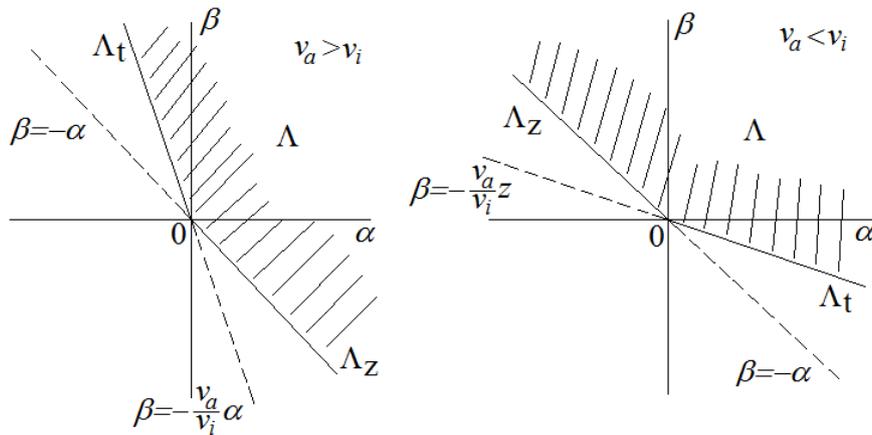


Рис. 4. $\Lambda = \varphi\{t \geq 0, z \geq 0\}$.

Значения искомого решения на лучах Λ_t , Λ_z определяется равенствами $n_a(\alpha, \beta) = n_{a0}(\alpha + \beta)$, $n_i(\alpha, \beta) = n_{i0}(\alpha + \beta)$, $(\alpha, \beta) \in \Lambda_t$, $\alpha v_a + \beta v_i = 0$, $\alpha + \beta \geq 0$;

$n_a(\alpha, \beta) = n_a^0(\alpha v_a + \beta v_i)$, $n_i(\alpha, \beta) = n_i^0(\alpha v_a + \beta v_i)$, $(\alpha, \beta) \in \Lambda_z$, $\alpha + \beta = 0$, $\alpha v_a + \beta v_i \geq 0$. Проведём построение искомого решения для случая $v_i > v_a$. Для нахождения искомого решения в угле Λ построим непрерывно дифференцируемое решение системы (23) в бесконечном прямоугольнике $\Pi_\infty = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \supseteq \Lambda$, которое на лучах Λ_t и Λ_z совпадает с указанными выше значениями. Тогда сужение построенного решения в прямоугольнике Π_∞ на угле Λ даст решение смешанной задачи. Решение системы (23) в Π_∞ , согласно **Теореме 1**, определяется двумя дважды непрерывно дифференцируемыми в \mathbb{R} функциями $A(\alpha)$, $B(\beta)$ и вычисляется по этим функциям посредством формул (24). Покажем, что функции $A(\alpha)$, $B(\beta)$ однозначно определяются значениями искомого решения на лучах Λ_t и Λ_z . Имеем:

$$\begin{aligned} & \Lambda_t : \\ & (\beta = -\alpha v_a / v_i) \\ & n_{a0} \left(\alpha \frac{v_i - v_a}{v_i} \right) = n_a(\alpha, \beta) \stackrel{(24)}{=} \frac{B'(\beta)}{k_I(A(\alpha) - B(\beta))} = \frac{B'(-\alpha v_a / v_i)}{k_I(A(\alpha) - B(-\alpha v_a / v_i))}, \alpha \geq 0, \\ & n_{i0} \left(\alpha \frac{v_i - v_a}{v_i} \right) = n_i(\alpha, \beta) \stackrel{(24)}{=} \frac{A'(\alpha)}{k_I(A(\alpha) - B(\beta))} = \frac{A'(\alpha)}{k_I(A(\alpha) - B(-\alpha v_a / v_i))}, \alpha \geq 0, \quad (43) \\ & \Lambda_z : \\ & (\beta = -\alpha) \\ & n_{a0}(\beta(v_i - v_a)) = n_a(\alpha, \beta) \stackrel{(24)}{=} \frac{B'(\beta)}{k_I(A(\alpha) - B(\beta))} = \frac{B'(\beta)}{k_I(A(-\beta) - B(\beta))}, \beta \geq 0, \\ & n_{i0}(\beta(v_i - v_a)) = n_i(\alpha, \beta) \stackrel{(24)}{=} \frac{A'(\alpha)}{k_I(A(\alpha) - B(\beta))} = \frac{A'(-\beta)}{k_I(A(-\beta) - B(\beta))}, \beta \geq 0. \end{aligned}$$

Введём в рассмотрение функции $B_0(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} B(-\alpha v_a / v_i)$, $A_0(\beta) \stackrel{\text{def}}{=} A(-\beta)$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$. Тогда на полупрямой $\alpha \geq 0$ функции $B_0(\alpha)$, $A(\alpha)$, согласно (43), удовлетворяют линейной системе ОДУ с переменными коэффициентами:

$$\begin{aligned} B_0' &= -\bar{n}_{a0}(\alpha)(A - B_0), \quad A' = \bar{n}_{i0}(\alpha)(A - B_0), \quad \alpha \geq 0, \\ \bar{n}_{a0}(\alpha) &\stackrel{\text{def}}{=} k_I \frac{v_a}{v_i} n_{a0} \left(\alpha \frac{v_i - v_a}{v_i} \right), \quad \bar{n}_{i0}(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} k_I n_{i0} \left(\alpha \frac{v_i - v_a}{v_i} \right), \quad (44) \end{aligned}$$

а на полупрямой $\beta \geq 0$ функции $B(\beta)$, $A_0(\beta)$, согласно (43), удовлетворяют линейной системе ОДУ с переменными коэффициентами:

$$\begin{aligned} B' &= \bar{n}_a^0(\beta)(A_0 - B), \quad A_0' = -\bar{n}_i^0(\beta)(A_0 - B), \quad \beta \geq 0, \\ \bar{n}_a^0(\beta) &\stackrel{\text{def}}{=} k_I n_a^0(\beta(v_i - v_a)), \quad \bar{n}_i^0(\beta) \stackrel{\text{def}}{=} k_I n_i^0(\beta(v_i - v_a)). \quad (45) \end{aligned}$$

Решая системы (44), (45), находим функции $B_0(\alpha)$, $A(\alpha)$, $\alpha \geq 0$ и $B(\beta)$, $A_0(\beta)$, $\beta \geq 0$, после чего доопределяем A и B в областях отрицательных значений аргументов равенствами:

$$B(\beta) = B_0(\beta) \stackrel{\text{def}}{=} B_0(-\beta v_i / v_a), \quad \beta \geq 0, \quad A(\alpha) = A_0(-\alpha), \quad \alpha \leq 0. \quad (46)$$

Полученные функции A и B на прямой являются искомыми, если выбрать решения систем (44) и (45) с одинаковыми начальными условиями $A(0) = C$, $B_0(0) = D$ и $A_0(0) = C$, $B(0) = D$, где $C \neq D$. Тогда функции $A(\alpha)$, $B(\beta)$ будут непрерывны на \mathbb{R} , а из (46) следует их непрерывная дифференцируемость в нуле:

$$A'(0+) = k_I n_{i0}(0)(A(0) - B_0(0)) = k_I n_{i0}(0)(C - D),$$

$$A'(0-) = -A'_0(0) = k_I n_i^0(0)(A_0(0) - B(0)) = k_I n_i^0(0)(C - D),$$

$$B'(0+) = k_I n_a^0(0)(A_0(0) - B(0)) = k_I n_a^0(0)(C - D),$$

$$B'(0-) = -(v_i / v_a) B'_0(0) = k_I n_{a0}(0)(A(0) - B_0(0)) = k_I n_{a0}(0)(C - D).$$

Из этих вычислений и условий согласованности $n_{i0}(0) = n_i^0(0)$, $n_{a0}(0) = n_a^0(0)$ следует $A'(0+) = A'(0-)$, $B'(0+) = B'(0-)$, поэтому A и B непрерывно дифференцируемы в нуле и, значит, на \mathbb{R} . Покажем, что при выполнении условий согласованности

$$n'_{a0}(0) + v_a (n'_a)^0(0) + k_I n_{a0}(0) n_{i0}(0) = 0, \quad n'_{i0}(0) + v_i (n'_i)^0(0) - k_I n_{a0}(0) n_{i0}(0) = 0, \quad (47)$$

вторые производные в нуле для A и B слева и справа совпадают, $A''(0+) = A''(0-)$, $B''(0+) = B''(0-)$. Тогда из (44), (45) следует двукратная непрерывная дифференцируемость A и B на \mathbb{R} . Например, покажем $A''(0+) = A''(0-)$. $B''(0+) = B''(0-)$ проверяется аналогично. Имеем:

$$\begin{aligned} A''(0+) &= \bar{n}'_{i0}(0)(A(0) - B_0(0)) + \bar{n}_{i0}(0)(A'(0) - B'_0(0)) = \\ &= n'_{i0}(0) k_I ((v_i - v_a) / v_i)(C - D) + n_{i0}(0) k_I (n_{i0} k_I (C - D) + n_{a0}(0) k_I (v_a / v_i)(C - D)) = \\ &= k_I (C - D) \{ n'_{i0}(0) (v_i - v_a) / v_i + k_I n_{i0}(0) (n_{i0}(0) + n_{a0}(0) v_a / v_i) \}, \\ A''(0-) &= A''_0(0) = -(\bar{n}_i^0)'(0)(A_0(0) - B(0)) - \bar{n}_i^0(0)(A'_0(0) - B'(0)) = \\ &= -(n_i^0)'(0) (v_i - v_a) k_I (C - D) - n_i^0(0) k_I (-n_i^0(0) k_I (C - D) - n_a^0(0) k_I (C - D)) = \\ &= k_I (C - D) \{ -(n_i^0)'(0) (v_i - v_a) + k_I n_i^0(0) (n_i^0(0) + n_a^0(0)) \}. \end{aligned}$$

Учитывая условие согласованности $n_{i0}(0) = n_i^0(0)$, $n_{a0}(0) = n_a^0(0)$ и второе равенство (47), заключаем $A''(0+) = A''(0-)$.

Чтобы проверить условия 1) и 2) и преобразовать к удобному для анализа виду формулы (24), воспользуемся явными выражениями решений задач Коши для систем (45), (44). Несложно проверить (см. аналогичное рассуждение выше), что для этих решений справедливы тождества:

$$(44): \quad B(\beta) = D + (C - D) \int_0^\beta \bar{n}_a^0 e^{-N} d\beta, \quad A_0(\beta) = C + (D - C) \int_0^\beta \bar{n}_i^0 e^{-N} d\beta, \quad \beta \geq 0,$$

$$(45): \quad B_0(\alpha) = D + (D - C) \int_0^\alpha \bar{n}_{a0} e^M d\alpha, \quad A(\alpha) = C + (C - D) \int_0^\alpha \bar{n}_{i0} e^M d\alpha, \quad \alpha \geq 0,$$

$$N(\beta) = \int_0^\beta (\bar{n}_a^0 + \bar{n}_a^0) d\beta, \quad M(\alpha) = \int_0^\alpha (\bar{n}_{a0} + \bar{n}_{i0}) d\alpha.$$

Значит, согласно (46), функции $A(\alpha)$ и $B(\beta)$ вычисляются по формулам:

$$A(\alpha) = \begin{cases} C + (D - C) \int_0^{-\alpha} \bar{n}_i^0 e^{-N} d\alpha, & \alpha \leq 0, \\ C + (C - D) \int_0^\alpha \bar{n}_{i0} e^M d\alpha, & \alpha \geq 0, \end{cases} \quad (48)$$

$$B(\beta) = \begin{cases} D + (D - C) \int_0^{-\beta v_i/v_a} \bar{n}_{a0} e^M d\beta, & \beta \leq 0, \\ D + (C - D) \int_0^\beta \bar{n}_a^0 e^{-N} d\beta, & \beta \geq 0. \end{cases}$$

Пусть $D > C$, тогда выполнено неравенство $A(\alpha) < B(\beta)$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Действительно, указанное неравенство, с учётом выражений (48), сводится к следующему эквивалентному виду в каждом из 4 логически возможных случаев:

$$\begin{aligned} \alpha \leq 0, \beta \geq 0: & \quad \int_0^{-\alpha} \bar{n}_i^0 e^{-N} d\alpha + \int_0^\beta \bar{n}_a^0 e^{-N} d\beta < 1, \\ \alpha \leq 0, \beta \leq 0: & \quad \int_0^{-\alpha} \bar{n}_i^0 e^{-N} d\alpha - \int_0^{-\beta v_i/v_a} \bar{n}_{a0} e^M d\beta < 1, \\ \alpha \geq 0, \beta \geq 0: & \quad -\int_0^\alpha \bar{n}_{i0} e^M d\alpha + \int_0^\beta \bar{n}_a^0 e^{-N} d\beta < 1, \\ \alpha \geq 0, \beta \leq 0: & \quad -\int_0^\alpha \bar{n}_{i0} e^M d\alpha - \int_0^{-\beta v_i/v_a} \bar{n}_{a0} e^M d\beta < 1. \end{aligned} \quad (49)$$

Справедливость неравенств (49) в случаях $\alpha \leq 0$, $\beta \geq 0$ (см. (36)) и $\alpha \geq 0$, $\beta \leq 0$ (см. (41)) была установлена выше. В случае $\alpha \leq 0$, $\beta \leq 0$, учитывая неотрицательность всех подынтегральных функций, имеем цепочку оценок:

$$\begin{aligned} \int_0^{-\alpha} \bar{n}_i^0 e^{-N} d\alpha - \int_0^{-\beta v_i/v_a} \bar{n}_{a0} e^{-N} d\beta &\leq \int_0^{-\alpha} \bar{n}_i^0 e^{-N} d\alpha \leq \int_0^{-\alpha} (\bar{n}_i^0 + \bar{n}_a^0) e^{-N} d\alpha = \int_0^{-\alpha} N' e^{-N} d\alpha = \\ &= -e^{-N} \Big|_0^{-\alpha} < 1. \end{aligned}$$

Аналогично в случае $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ имеем оценки:

$$\begin{aligned} -\int_0^{\alpha} \bar{n}_{i0} e^{-N} d\alpha + \int_0^{\beta} \bar{n}_a^0 e^{-N} d\beta &\leq \int_0^{\beta} \bar{n}_a^0 e^{-N} d\beta \leq \int_0^{\beta} (\bar{n}_a^0 + \bar{n}_i^0) e^{-N} d\beta = \int_0^{\beta} N' e^{-N} d\beta = \\ &= -e^{-N} \Big|_0^{\beta} < 1. \end{aligned}$$

Итак, соотношения (49) установлены и значит установлена справедливость неравенства $A(\alpha) < B(\beta)$ для всех α, β . Если $D < C$, то точно так же проверяется неравенство $B(\beta) < A(\alpha)$ для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Далее, если $A(\alpha) < B(\beta)$ для всех α, β , то из второго уравнения (44) и равенств (46) следует, что $A'(\alpha) \leq 0$ для $\alpha \geq 0$, а из второго уравнения (45) и равенств (46) следует $A'_0(\beta) \geq 0$ для $\beta \geq 0$, но тогда из (46) вытекает неравенство $A'(\alpha) \leq 0$ для $\alpha \leq 0$. Итак, при всех $\alpha \in \mathbb{R}$ имеем $A'(\alpha) \leq 0$. Аналогично устанавливается, что $B'(\beta) \leq 0$ для всех $\beta \in \mathbb{R}$. Если $A(\alpha) > B(\beta)$ для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то точно так же проверяется, что $A'(\alpha) \geq 0$, $B'(\beta) \geq 0$ для всех α, β . Тем самым условие 2) установлено.

Наконец, преобразуем формулы (24), задающие решение системы (23) в прямоугольнике $\Pi_* \supseteq \Lambda$, в каждом из 4 квадрантов плоскости (α, β) . При этом ограничимся только квадрантами I, II, IV, квадрант III, где $\alpha \leq 0$, $\beta \leq 0$, исключим из рассмотрения, поскольку тупой угол Λ , согласно рис. 4, лежит в объединении квадрантов I, II, IV, а с квадрантом III пересекается только по нулевой точке. Для удобства введём в рассмотрение функции

$$N_*(p) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{k_I}{v_i - v_a} \int_0^p (n_a^0(q) + n_i^0(q)) dq, \quad M_*(p) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{k_I}{v_i - v_a} \int_0^p (v_a n_{a0}(q) + v_i n_{i0}(q)) dq. \quad (50)$$

Тогда $N(\beta) = N_*(\beta(v_i - v_a))$, $M(\alpha) = M_*(\alpha(v_i - v_a) / v_i)$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Имеем для $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$:

$$n_a(\alpha, \beta) \stackrel{(24)}{=} \frac{B'(\beta)}{k_I [A(\alpha) - B(\beta)]} \stackrel{(48)}{=}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(C-D)\bar{n}_a^0(\beta)e^{-N(\beta)}}{k_I \left[(C-D) + (C-D) \int_0^\alpha \bar{n}_{i0}(\alpha) e^{M(\alpha)} d\alpha - (C-D) \int_0^\beta \bar{n}_a^0(\beta) e^{-N(\beta)} d\beta \right]} = \\
&= \frac{n_a^0(\beta(v_i - v_a)) \exp(-N_*(\beta(v_i - v_a)))}{1 + k_I \int_0^\alpha n_{i0}(\alpha(v_i - v_a) / v_i) e^{M_*(\alpha(v_i - v_a) / v_i)} d\alpha - k_I \int_0^\beta n_a^0(\beta(v_i - v_a)) e^{(-N_*(\beta(v_i - v_a)))} d\beta} = \\
&= \frac{n_a^0(\beta(v_i - v_a)) \exp(-N_*(\beta(v_i - v_a)))}{1 + \frac{k_I}{v_i - v_a} \left\{ \int_0^{\alpha(v_i - v_a) / v_i} v_i n_{i0}(p) \exp M_*(p) dp - \int_0^{\beta(v_i - v_a)} n_a^0(p) \exp(-N_*(p)) dp \right\}}.
\end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
n_i(\alpha, \beta) &= \frac{A'(\beta)}{(24) k_I [A(\alpha) - B(\beta)] (48)} = \\
&= \frac{(C-D)\bar{n}_{i0}(\alpha) e^{M(\alpha)}}{k_I \left[(C-D) + (C-D) \int_0^\alpha \bar{n}_{i0}(\alpha) \exp M(\alpha) d\alpha - (C-D) \int_0^\beta \bar{n}_a^0(\beta) \exp(-N(\beta)) d\beta \right]} = \\
&= \frac{n_{i0}(\alpha(v_i - v_a) / v_i) \exp M_*(\alpha(v_i - v_a) / v_i)}{1 + \frac{k_I}{v_i - v_a} \left\{ \int_0^{\alpha(v_i - v_a) / v_i} v_i n_{i0}(p) \exp M_*(p) dp - \int_0^{\beta(v_i - v_a)} n_a^0(p) \exp(-N_*(p)) dp \right\}}.
\end{aligned}$$

Для двух других квадрантов аналогичные подсчёты с использованием формул (24), (48) дают:

$$\alpha \geq 0, \beta \leq 0:$$

$$n_a(\alpha, \beta) =$$

$$= \frac{n_{i0}(-\beta(v_i - v_a) / v_i) \exp M_*(-\beta(v_i - v_a) / v_a)}{1 + \frac{k_I}{v_i - v_a} \left\{ \int_0^{\alpha(v_i - v_a) / v_i} v_i n_{i0}(p) \exp M_*(p) dp + \int_0^{-\beta(v_i - v_a) / v_a} v_a n_{a0}(p) \exp M_*(p) dp \right\}},$$

$$n_i(\alpha, \beta) =$$

$$= \frac{n_{i0}(\alpha(v_i - v_a) / v_i) \exp M_*(\alpha(v_i - v_a) / v_i)}{1 + \frac{k_I}{v_i - v_a} \left\{ \int_0^{\alpha(v_i - v_a) / v_i} v_i n_{i0}(p) \exp M_*(p) dp + \int_0^{-\beta(v_i - v_a) / v_a} v_a n_{a0}(p) \exp M_*(p) dp \right\}},$$

$$\alpha \leq 0, \beta \geq 0:$$

$$n_a(\alpha, \beta) = \frac{n_a^0(\beta(v_i - v_a)) \exp[-N_*(\beta(v_i - v_a))]}{1 - \frac{k_I}{v_i - v_a} \left\{ \int_0^{-\alpha(v_i - v_a)} n_i^0(p) \exp(-N_*(p)) dp + \int_0^{\beta(v_i - v_a)} n_a^0(p) \exp(-N_*(p)) dp \right\}},$$

$$n_i(\alpha, \beta) = \frac{n_i^0(-\alpha(v_i - v_a)) \exp[-N_*(-\alpha(v_i - v_a))]}{1 - \frac{k_I}{v_i - v_a} \left\{ \int_0^{-\alpha(v_i - v_a)} n_i^0(p) \exp(-N_*(p)) dp + \int_0^{\beta(v_i - v_a)} n_a^0(p) \exp(-N_*(p)) dp \right\}}.$$

Осталось перейти в полученных формулах от координат (α, β) к координатам (z, t) , учитывая преобразование (22). При этом $\beta(v_i - v_a) = z - v_a t$, $-\alpha(v_i - v_a) = z - v_i t$, $\alpha(v_i - v_a) / v_i = t - z / v_i$, $-\beta(v_i - v_a) / v_a = t - z / v_a$. В итоге первый квадрант плоскости (z, t) , где ищется решение смешанной задачи для системы (21), прямыми $z = v_a t$, $z = v_i t$ делится на три области, изображённые на рис. 5, в каждой из которых решение задаётся одной из формул (51)–(53) ниже

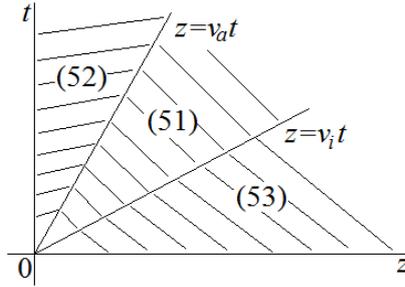


Рис. 5.

$$n_a(z, t) = \frac{n_a^0(z - v_a t) \exp[-N_*(z - v_a t)]}{1 + \frac{k_I}{v_i - v_a} \left\{ \int_0^{t-z/v_i} v_i n_{i0}(p) \exp M_*(p) dp - \int_0^{z-v_a t} n_a^0(p) \exp(-N_*(p)) dp \right\}}, \quad (51)$$

$$n_i(z, t) = \frac{n_{i0}(t - z / v_i) \exp M_*(t - z / v_i)}{1 + \frac{k_I}{v_i - v_a} \left\{ \int_0^{t-z/v_i} v_i n_{i0}(p) \exp M_*(p) dp - \int_0^{z-v_a t} n_a^0(p) \exp(-N_*(p)) dp \right\}};$$

$$n_a(z, t) = \frac{n_{a0}(t - z / v_a) \exp M_*(t - z / v_a)}{1 + \frac{k_I}{v_i - v_a} \left\{ \int_0^{t-z/v_i} v_i n_{i0}(p) \exp M_*(p) dp + \int_0^{t-z/v_a} v_a n_{a0}(p) \exp M_*(p) dp \right\}}, \quad (52)$$

$$n_i(z, t) = \frac{n_{i0}(t - z / v_i) \exp M_*(t - z / v_i)}{1 + \frac{k_I}{v_i - v_a} \left\{ \int_0^{t-z/v_i} v_i n_{i0}(p) \exp M_*(p) dp + \int_0^{t-z/v_a} v_a n_{a0}(p) \exp M_*(p) dp \right\}};$$

$$\begin{aligned}
n_a(z,t) &= \frac{n_a^0(z - v_a t) \exp[-N_*(z - v_a t)]}{1 - \frac{k_I}{v_i - v_a} \left\{ \int_0^{z - v_i t} n_i^0(p) \exp[-N_*(p)] dp + \int_0^{z - v_a t} n_a^0(p) \exp[-N_*(p)] dp \right\}}, \\
n_i(z,t) &= \frac{n_i^0(z - v_i t) \exp[-N_*(z - v_i t)]}{1 - \frac{k_I}{v_i - v_a} \left\{ \int_0^{z - v_i t} n_i^0(p) \exp[-N_*(p)] dp + \int_0^{z - v_a t} n_a^0(p) \exp[-N_*(p)] dp \right\}}.
\end{aligned} \tag{53}$$

Формулы (51) и (52) на луче $z = v_a t$, $t \geq 0$ и формулы (51) и (53) на луче $z = v_i t$, $t \geq 0$, очевидно, совпадают. При $z = 0$ формула (52) даёт краевые условия $n_{a0}(t)$, $n_{i0}(t)$, $t \geq 0$, а при $t = 0$ формула (53) даёт начальные условия $n_a^0(z)$, $n_i^0(z)$, $z \geq 0$. Итак, формулы (51)–(53), с учётом выражений (50), полностью определяют решение смешанной задачи для системы (21) по известным граничным $n_{a0}(t)$, $n_{i0}(t)$, $t \geq 0$ и начальным $n_a^0(z)$, $n_i^0(z)$, $z \geq 0$ условиям.

§3. Ионизационные колебания (бривинг-моды)

В §1 было установлено, что для знакоопределённых на отрезке $[0, L]$ скоростей $v_a(z)$, $v_i(z)$ система уравнений ионизации (1) имеет единственное стационарное решение, удовлетворяющее заданным (стационарным) граничным условиям. При этом граничные условия для n_a , n_i в зависимости от знака соответствующей скорости ставятся либо на левом конце $z = 0$, либо на правом $z = L$. Например, если $v_i(z) > 0$ на $[0, L]$, то на левом конце $z = 0$ считается заданной величина $n_i(0, t)$ в каждый момент времени $t \geq 0$, а если $v_i(z) < 0$, то считается заданной величина $n_i(L, t)$, $t \geq 0$, и аналогично для n_a . Численно было установлено также, что в случае знакоопределённых скоростей v_a , v_i при $t \rightarrow +\infty$ решение начально-краевой задачи для системы (1) со стационарными краевыми условиями устанавливается, т.е. при $t \rightarrow +\infty$ сходится в равномерной метрике на $[0, L]$ к единственному стационарному решению системы (1). В частности, в этом случае ионизационные колебания (бривинг-моды) отсутствуют.

При исследовании процесса ионизации в СПД обычно считается $v_a(z) \equiv v_a = \text{const} > 0$. Таким образом, ограничиваясь этим практически важным случаем, можно утверждать, что необходимым (но, вероятно, не достаточным) условием существования ионизационных колебаний является знакопеременность скорости $v_i(z)$ на отрезке $[0, L]$. Этот вывод согласуется с экспериментальными данными по СПД, согласно которым [13] ионная скорость v_i всегда отрицательна по направлению z в прианодной области и, следовательно, применительно к одномерному случаю $v_i(z)$ имеет

единственный нуль z_0 на $[0, L]$, причём $0 < z_0 < L$, $v_i'(z_0) > 0$ и значит $v_i(z)$ меняет знак с минуса на плюс, когда z , возрастая, проходит через точку z_0 . Типичными модельными примерами в одномерной задаче являются функции $v_i(z) = \alpha(z - z_0)$, $\alpha > 0$, $0 < z_0 < L$, $v_i(z) = a(z + z_1)(z - z_0)$, $a > 0$, $z_1 > 0$, $0 < z_0 < L$, $v_i(z) = -\cos(\pi z / L)$ (и тогда $z_0 = L / 2$).

Рассмотрим причину возникновения бривинг-мод в случае, когда ионная скорость $v_i(z)$ имеет указанный выше специальный вид. В этом случае граничные условия ставятся только для n_a на левой границе $z = 0$, для n_i они формально не нужны, поскольку $v_i(0) < 0 < v_i(L)$ и значит ионы через границы $z = 0$ и $z = L$ покидают область $[0, L]$. Однако при этом возникает “внутреннее” граничное условие для n_i на характеристике $z = z_0$ для уравнения переноса ионов (1), которое объясняет возникновение бривинг-мод. Остановимся на этом подробнее. Начально-краевая задача на отрезке $[0, L]$ для системы (1) распадается на две начально-краевые задачи на отрезках $[0, z_0]$ и $[z_0, L]$ соответственно, которые решаются последовательно. При этом краевое условие $n_i(t) = n_i(z_0, t)$ для функции n_i на характеристике $z = z_0$, являющейся границей для обеих смешанных задач, ищется из решения задачи Коши для ОДУ (ср. **Введение**)

$$dn_i / dt = \beta n_a n_i - \alpha n_i, \quad n_i(0) = n_i^0(z_0), \quad \alpha = v_i'(z_0), \quad (54)$$

где $n_i^0(z)$, $0 \leq z \leq L$, – заданное начальное условие для n_i на отрезке $[0, L]$. Уравнение (54) является тривиальным следствием второго уравнения системы (1) в точке z_0 с учётом равенства $v_i(z_0) = 0$. Неизвестная функция $n_a(t) = n_a(z_0, t)$, входящая в (54), находится следующим образом. Если фиксировано граничное условие $n_{a0}(t)$, $t \geq 0$ для n_a на левой границе $z = 0$, то функция $n_a(t)$ ищется в банаховом пространстве B непрерывно дифференцируемых и ограниченных вместе с производной функций на полупрямой $t \geq 0$, как неподвижная точка отображения $F : B_0 \rightarrow B_0$, где $B_0 \subseteq B$ – замкнутая гиперплоскость в B коразмерности 1, определяемая условием $B_0 = \{n(t) \in B : n(0) = n_a^0(z_0)\}$, а $n_a^0(z)$, $0 \leq z \leq L$ – заданное начальное условие для n_a . Отображение F определяется следующим образом. Если $n(t) \in B_0$, то, положив в (54) $n_a(t) = n(t)$ и решая задачу Коши (54) на полупрямой $t \geq 0$ относительно n_i , находим функцию $n_i(t)$, $t \geq 0$, которую принимаем за краевое условие для n_i на правом конце $z = z_0$ (вместе с краевым условием $n_{a0}(t)$ для n_a на левом конце $z = 0$) в смешанной задаче на отрезке $[0, z_0]$ для системы (1). Решив эту смешанную задачу, получим, в частности, на правом конце $z = z_0$ функцию $n_a(z_0, t)$, $t \geq 0$, которая, по определению, и является образом $n(t)$ при

отображении F . Итак, функция $n_a(t)$ в уравнении (54) – это неподвижная точка определённого выше отображения F . Решение $n_i(t)$ задачи Коши (54) для неподвижной точки $n_a(t)$ является правым краевым условием для n_i в смешанной задаче для системы (1) на отрезке $[0, z_0]$, а вместе с $n_a(t)$ даёт левые краевые условия для n_i, n_a в смешанной задаче для системы (1) на отрезке $[z_0, L]$. Отметим, что смешанные задачи на отрезках $[0, z_0], [z_0, L]$ относятся к задачам Гурса [14], а уравнение (54) совпадает с условием разрешимости [14] на характеристике для квазилинейной системы уравнений в частных производных, к которой относится и система (1). Аналитическое исследование существования и единственности неподвижной точки отображения F выходит за рамки настоящей работы. Численно существование неподвижной точки F одновременно с решением задачи Коши (54) устанавливается расчётом по разностной схеме (20). В частности, если k_0 – номер узла, где $z_{k_0} = z_0$, то разностная схема (20) для n_i в узле k_0 совпадает со схемой Эйлера решения задачи Коши (54) и даёт сеточную функцию n_{i,k_0} , удовлетворяющую указанному выше начальному условию, а сеточная функция n_{a,k_0} даёт сеточную аппроксимацию неподвижной точки F .

Как показали расчёты, *ионизационные колебания (бривинг-моды) имеют место только тогда, когда решение задачи Коши (54) при $t \rightarrow +\infty$ выходит на периодический режим. При этом $n_a(t) = n_a(z_0, t)$ на характеристике $z = z_0$ удовлетворяет уравнению*

$$dn_a / dt = -\beta n_a n_i + \gamma(t) n_a, \quad n_a(0) = n_a^0(z_0), \quad (55)$$

где $\gamma(t) = -\left(\frac{\partial n_a}{\partial z} \frac{v_a}{n_a} \right) \Big|_{z=z_0}$ – периодическая для больших t и определяется видом

скорости ионов $v_i(z)$. Из этой констатации вытекают важные и неочевидные выводы. Например, если ионная скорость $v_i(z)$ имеет хотя бы один нуль z_0 на интервале $(0, L)$, для которого $v_i'(z_0) \leq 0$, то ионизационные колебания (бривинг-моды) отсутствуют. Действительно, тогда $n_i(z_0, t) = n_i(t)$, вычисляемая по решению задачи Коши (54), будет монотонно возрастающей на полупрямой $t \geq 0$ функцией и, следовательно, при $t \rightarrow +\infty$ не может выйти на периодический режим. Скажем, для $v_i(z) = -\cos[(2N+1)\pi z / L]$, $N > 0$ – целое, бривинг-моды отсутствуют. Хотя приведённый пример, согласно [13], имеет, скорее, теоретическое значение, он указывает на нетривиальность полученного результата.

Функция $\gamma(t)$ находится численно, решением разностных уравнений (20): на нулевом слое $\gamma^0 = -(n_{a,k_0}^0 - n_{a,k_0-1}^0) / h \cdot v_a / n_{a,k_0}^0$, где $z_0 = z_{k_0}$.

Расчёты значений n_i , n_a на характеристике $z = z_0$ и функции $\gamma(t)$ для трёх типов скоростей ионов $v_i(z) = \alpha(z - z_0)$, $\alpha > 0$ (красная линия), $v_i = a(z + z_1)(z - z_0)$, $a > 0$ (зелёная линия), $v_i(z) = -\cos(\pi z / L)$ (синяя линия) приведены на рис. 6.

Если бы функция $\gamma(t)$ была положительной константой, то из (54), (55) вытекало бы, что на характеристике $z = z_0$ функции $n_i(t)$, $n_a(t)$ удовлетворяют уравнениям Лотка-Вольтерра, что, как показывают примеры, не имеет места. Поэтому существование бривинг-мод не удаётся связать с моделью Лотка-Вольтерра.

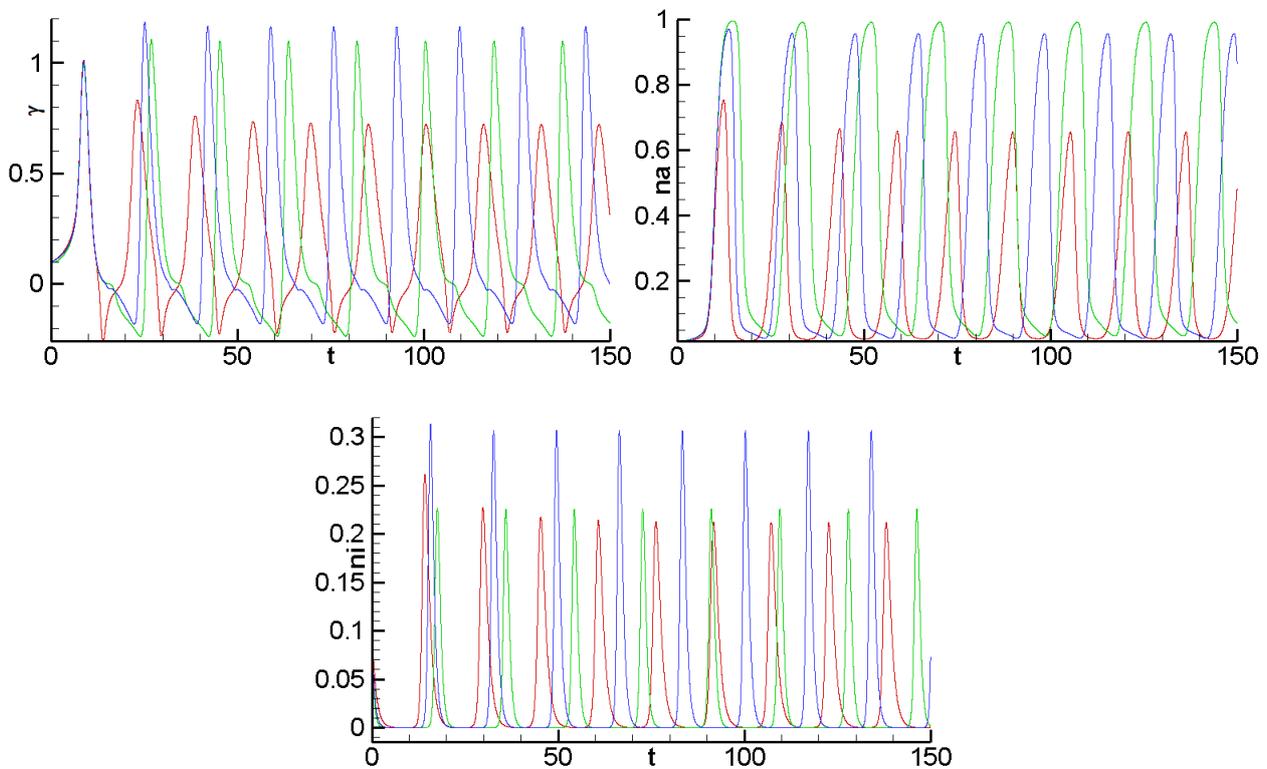


Рис. 6. $\alpha = 1$, $a = 1$, $z_0 = 1$, $z_1 = 0.5$, $L = 2$, $n_{a0} = 1$, $n_i^0 = 0.1$, $n_a^0 = (1 + 100z)^{-1}$

§4. Ионизационные колебания в общем случае

Недостаток ионизационной модели (1) в том, что скорости $v_a(z)$, $v_i(z)$ считаются известными и не зависящими от времени t . Применительно к СПД обычно считается $v_a(z) \equiv v_a = \text{const} > 0$, а v_i находится из уравнения движения ионов. Движение ионов определяется электромагнитным полем в камере СПД и их столкновениями с боковыми керамическими стенками камеры и поверхностью анода. Наличие в установке сильного почти радиального магнитного поля и продольного электрического поля и, как следствие, справедливость соотношения $r_{\Lambda i} \gg L$ ($r_{\Lambda i}$ – ларморовский радиус ионов)

предопределяют движение ионов преимущественно в продольном направлении, параллельно поверхностям боковых стенок. Поэтому столкновениями ионов и атомов Хе со стенками в первом приближении можно пренебречь. Электромагнитное поле в СПД складывается из индукционного и внешнего электромагнитного поля, порождаемого постоянными токами обмоток СПД и заданной разностью потенциалов между анодом и катодом. Пренебрегая индукционными полями, порождаемыми плазменными токами, в частности столкновениями ионов с электронами, приходим к следующей упрощённой кинетической модели движения ионов и атомов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial t} + \langle \mathbf{v}, \nabla_{\mathbf{x}} f_i \rangle + \langle \mathbf{F}, \nabla_{\mathbf{v}} f_i \rangle &= \beta n_i f_a, \quad \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = em_i^{-1} (\mathbf{E} + c^{-1} [\mathbf{v}, \mathbf{H}]), \\ \frac{\partial f_a}{\partial t} + \langle \mathbf{v}, \nabla_{\mathbf{x}} f_a \rangle &= -\beta n_i f_a, \quad n_i = \int_{\mathbb{R}^3} f_i d\mathbf{v}, \quad \beta = \text{const} > 0, \end{aligned} \quad (56)$$

где $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{x})$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{x})$ – известные стационарные электрическое и магнитное поля в СПД, e – заряд электрона, m_i – масса иона Хе, $f_i = f_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$, $f_a = f_a(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ – функции распределения ионов и атомов Хе по скоростям. Равенства (56) образуют систему интегро-дифференциальных уравнений относительно двух функций f_i , f_a и описывают процессы ионизации и ускорения ионов в СПД. После её решения ионная скорость вычисляется по формуле:

$$\mathbf{v}_i = n_i^{-1} \int_{\mathbb{R}^3} f_i \mathbf{v} d\mathbf{v}. \quad (57)$$

Система (56) в случае плоской симметрии $f_i = \delta(v_x) f_i(t, z, v_y, v_z)$, $f_a = \delta(v_x) \delta(v_z) \delta(v_z - v_a) n_a(t, z)$, где $f_i(t, z, v_y, v_z)$, $n_a(t, z)$ – неизвестные функции, подлежащие нахождению, сводится к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial t} + v_z \frac{\partial f_i}{\partial z} + \frac{e}{m_i} \left[E_y + \frac{H_x v_z}{c} \right] \frac{\partial f_i}{\partial v_y} + \frac{e}{m_i} \left(E_z - \frac{H_x v_y}{c} \right) \frac{\partial f_i}{\partial v_z} &= \beta n_i n_a \delta(v_y) \delta(v_z - v_a), \\ \frac{\partial n_a}{\partial t} + v_a \frac{\partial n_a}{\partial z} &= -\beta n_i n_a, \quad n_i = \int_{\mathbb{R}^2} f_i dv_y dv_z, \end{aligned} \quad (58)$$

где v_a – заданная скорость, с которой атомы Хе поступают в камеру СПД через левую границу со стороны анода. Интегрируя первое уравнение (58) по скоростному пространству $\mathbb{R}^2 = \{(v_y, v_z)\}$, получим уравнение непрерывности для ионов с v_i , вычисляемой по формуле (57):

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (v_{iz} n_i) = \beta n_i n_a, \quad n_i = n_i(t, z), \quad v_{iz} = \frac{1}{n_i} \int_{\mathbb{R}^2} f_i v_z dv_y dv_z.$$

В результате приходим к модели ионизации (1), в которой $v_i(t, z)$ зависит от t и определяется движением ионов. Если выпрямить коаксиальную камеру СПД посредством экспоненциального отображения, то ось r перейдет в ось x , ось φ – в ось y , и значит в (58) E_y – азимутальное электрическое поле, H_x – радиальное магнитное поле. Из уравнений Максвелла в случае плоской симметрии, $\partial/\partial y = \partial/\partial x = 0$, следует $E_y = \text{const}$, $E_z = \text{const}$, $H_x = \text{const}$. В физически важном случае $E_y = 0$ в безразмерном виде система (58) сводится к следующей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial t} + v_z \frac{\partial f_i}{\partial z} + \varepsilon H_x v_z \frac{\partial f_i}{\partial v_y} + \varepsilon [E_z - H_x v_y] \frac{\partial f_i}{\partial v_z} &= k_I n_i n_a \delta(v_y) \delta(v_z - v_a), \\ \frac{\partial n_a}{\partial t} + v_a \frac{\partial n_a}{\partial z} &= -k_I n_i n_a, \quad n_i = \int_{\mathbb{R}^2} f_i dv_y dv_z, \end{aligned} \quad (59)$$

где $\varepsilon = t_0 \omega_{ci}$, $\omega_{ci} = eH_0 / (cm_i)$, $f_0 = n_0 / v_0^2$, $H_0 = 200$ Гс – характерный масштаб напряжённости магнитного поля, f_0 – характерный масштаб значений f . Наконец, считается $E_0 = v_0 H_0 / c$ (см. формулы (13)). Система (59) решается методом макрочастиц [16] на отрезке $[0, L]$ с граничным условием зеркального отражения для ионов на левой границе $z = 0$. На правой границе $z = L$ ускоренные ионы свободно покидают отрезок $[0, L]$. Начальное условие обеспечивает спокойный старт движения макрочастиц и задаётся в размерном виде максвеллианом

$$f_i|_{t=0}(z, v_y, v_z) = \frac{n}{2\pi T / m_i} \exp\left[-\frac{v_y^2 + v_z^2}{2T / m_i}\right],$$

где $n(z)$, $T(z)$ – заданные функции (характерный масштаб температуры $T_0 = 12.1$ эв – температура ионизации Хе). Подробно численный метод изложен в [15].

На рис. 7 представлены результаты решения системы (59), демонстрирующие возникновение ионизационных колебаний при $t \rightarrow +\infty$, причём продольная скорость ионов v_z зависит от времени, периодична для больших t и меняет знак в определённые моменты времени. Заметим, что для других входных данных концентрации n_i , n_a , вычисляемые по (59), выходят на установление [15] и, таким образом, бривинг-моды отсутствуют, но при этом разрядный ток испытывает низкочастотные осцилляции вокруг некоторых средних значений. Это означает, что колебания разрядного тока необязательно обусловлены ионизационными колебаниями.

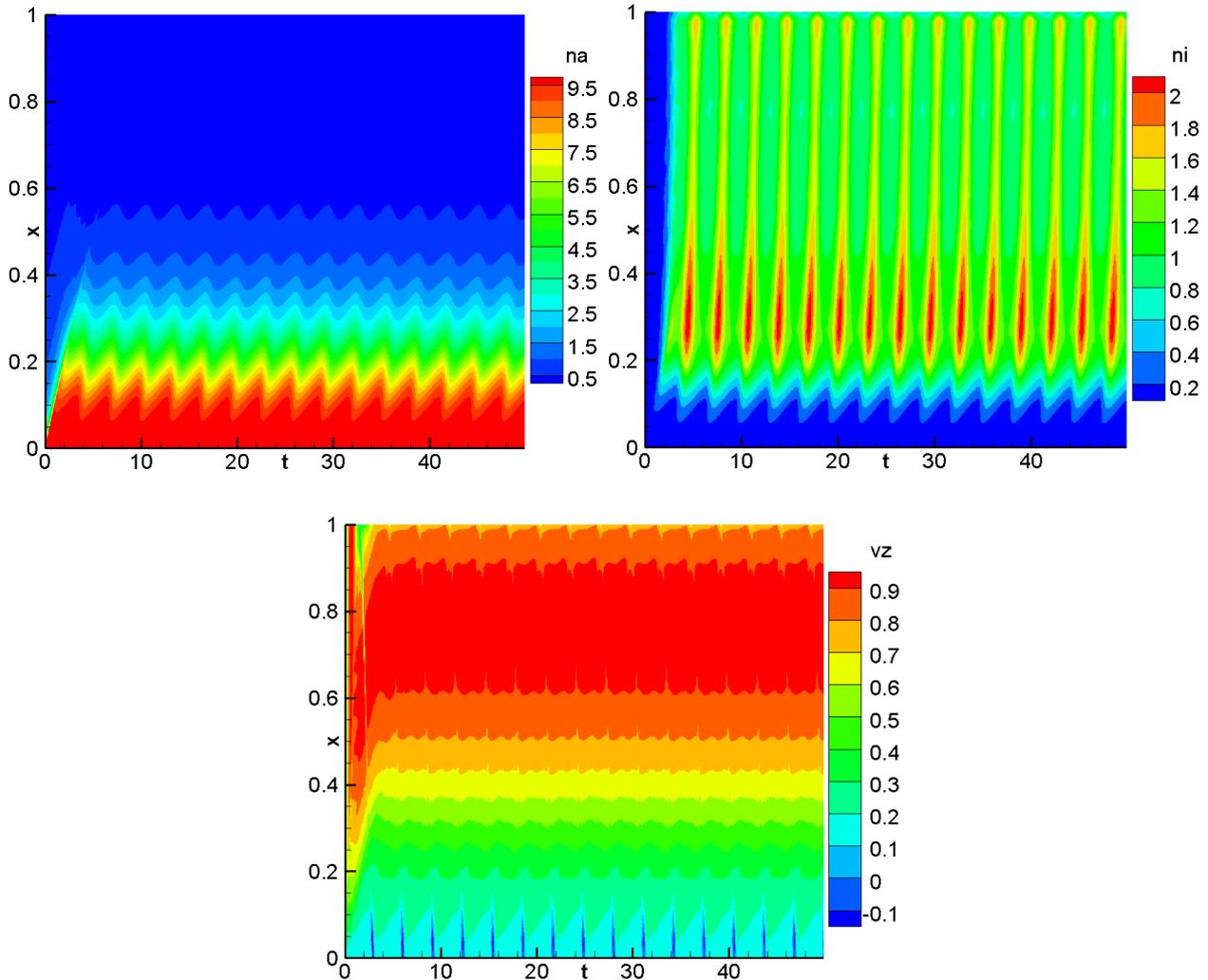


Рис. 7. $\varepsilon = 1$, $k_I = 0.56$, $E_z = 2$, $H_x = 2$, $n_i^0 = 0.1$, $n_a^0 = 10 / (1 + 100z)$, $v_a = 0.1$

Список литературы

1. Козубский К.Н., Мурашко В.М., Рылов В.П., Трифонов Ю.В., Ходенко В.П., Ким В.П., Попов Г.А., Обухов В.А. СПД работает в космосе // Физика плазмы. 2003. Т. 29. № 3. С. 277–792.
2. Kim V., Kozubsky K.N., Murashko V.M., Semenkin A.V. History of the Hall Thrusters Development in USSR // Paper IEPC-2007-142. 30th International Electric Propulsion Conference. September 17–20, 2007. Florence. Italy.
3. Ким В.П., Семенкин А.В., Хартов С.А. Конструктивные и физические особенности двигателей с замкнутым дрейфом электронов. – М.: Изд-во МАИ, 2016. – 160 с.
4. Mitrofanova O.A., Gnizdor R.Yu., Murashko V.M., Koryakin A.I., Nesterenko A.N. New Generation of SPT-100. 32nd International Electric Propulsion Conference, Wiesbaden, Germany. September 11–15, 2011, 7 p. IEPC-2011-041.
5. Lotka A.J. Elements of Physical Biology. Williams and Wilkins, Baltimore, 1925. Dover Publications, Inc., New York, 1956.

6. Volterra V. Lessons on the Mathematical Theory of Struggle for Life (Original: Leçons sur la théorie mathématique de la Lutte pour la vie). Gauthier-Villars, Paris. 1931. (Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование: Пер. с франц. 1976. 288 с.)
7. Baranov V.I., Nazarenko Y.S., Petrosov V.A., Vasin A.I., Yashnov Y.M. Theory of Oscillations and Conductivity for Hall Thrusters, 32nd Joint Propulsion Conference, AIAA 96-3192, 1996.
8. Fife J., Martínez-Sánchez M., and Szabo J. A numerical study of low-frequency discharge oscillations in Hall thrusters, 33rd Joint Propulsion Conference, AIAA 97-3052, 1997.
9. Barral S. and Ahedo E. On the Origin of Low Frequency Oscillations in Hall Thrusters. AIP Conf. Proc. **993**, 439–442 (2008).
10. Dale E. and Jorns B., Two-zone Hall thruster breathing mode mechanism, Part I: Theory, 36th International Electric Propulsion Conference, University of Vienna, Austria (2019).
11. Boeuf J. and Garrigues L. Low frequency oscillations in a stationary plasma thruster. Journal of Applied Physics, **84**, 3541–3554 (1998).
12. Chapurin O., Smolyakov A.I., Hagelaar G., Raitses Y. On the mechanism of ionization oscillations in Hall thrusters. Journal of Applied Physics, **129**, 233307 (2021).
13. Бишаев А.М., Ким В. Исследование локальных параметров плазмы в ускорителе с замкнутым дрейфом электронов и протяженной зоной ускорения // ЖТФ. 1978. Т. 48. № 9. С. 1853-1857.
14. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 688 с.
15. Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Гибридная модель стационарного плазменного двигателя // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2021. № 35. 48 с.
16. Березин Ю.А., Вшивков В.А. Метод частиц в динамике разреженной плазмы. – Новосибирск: Наука, 1980. – 95 с.
17. Роч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.

Оглавление

Введение	3
§1. Стационарные решения уравнений ионизации	8
§2. Решение уравнений ионизации в случае постоянных скоростей.....	21
§3. Ионизационные колебания (бривинг-моды)	41
§4. Ионизационные колебания в общем случае	44
Список литературы.....	47