



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 9 за 2021 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**П.А. Бахвалов**

Анализ и улучшение  
точности  
объёмно-центрированной  
схемы с квазиодномерной  
реконструкцией переменных

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Бахвалов П.А. Анализ и улучшение точности объёмно-центрированной схемы с квазиодномерной реконструкцией переменных // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. № 9. 32 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2021-9>  
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-9>

**О р д е н а Л е н и н а**  
**ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**  
**имени М.В.КЕЛДЫША**  
**Российской академии наук**

**П. А. Бахвалов**

**Анализ и улучшение точности  
объёмно-центрированной схемы  
с квазиодномерной реконструкцией переменных**

**Москва — 2021**

## П. А. Бахвалов

Анализ и улучшение точности объёмно-центрированной схемы с квазиодномерной реконструкцией переменных

Рассматривается объёмно-центрированная конечно-объёмная схема с квазиодномерной реконструкцией переменных. На примере уравнения переноса с постоянным коэффициентом доказываем, что на треугольных трансляционно-инвариантных сетках эта схема имеет второй порядок аппроксимации, однако в случае, если точное решение не зависит от времени, воспроизводит его с третьим порядком точности. Предлагается модификация рассматриваемой схемы, на трансляционно-инвариантных сетках обладающая третьим порядком и для нестационарных решений. Проводится анализ точности этой схемы на неструктурированных сетках.

**Ключевые слова:** неструктурированная сетка, метод конечных объёмов, схема MUSCL

### Pavel Alexeevich Bakhvalov

Accuracy analysis and improvement for the cell-centered scheme with the quasi-one-dimensional reconstruction

We study the cell-centered finite-volume scheme with the quasi-one-dimensional reconstruction. For the model transport equation with a constant velocity, we prove that on translationally-invariant (TI) triangular meshes it possesses the second order of the truncation error and, if the solution is steady, the third order of the solution error. We offer the modification possessing the third order of the solution error on TI-meshes for unsteady solutions also and verify its accuracy on unstructured meshes.

**Key words:** unstructured mesh, finite-volume method, cell-centered scheme, multislope MUSCL method

## Содержание

1	Введение . . . . .	3
2	Схема . . . . .	4
3	Точность схемы BBR3 на треугольной TI-сетке . . . . .	5
4	Модифицированная схема BBR3-U . . . . .	9
5	Трёхмерный случай . . . . .	13
6	Численная верификация . . . . .	18
7	Матричный вид схемы на треугольной TI-сетке . . . . .	26
8	Матричный вид схемы на тетраэдральной TI-сетке . . . . .	29
9	Заключение . . . . .	31
	Список литературы . . . . .	31

## 1. Введение

В настоящей работе рассматривается схема BBR3 – объёмно-центрированная конечно-объёмная схема с квазиодномерной реконструкцией переменных. В ней численный поток через сеточную грань находится из решения задачи Римана относительно двух “предраспадных” значений, определяемых реконструкцией вдоль прямых, проходящих через центр грани и центр одного из инцидентных элементов. Такая схема была построена в [1], этот же подход был предложен автором в [2] и развит в [3].

Рассматриваемая схема по построению является точной на линейной функции (если сеточные элементы выпуклые) и консервативной. На сетках из одинаковых (то есть совмещаемых трансляцией) выпуклых элементов она показывает третий порядок аппроксимации (модификацию, обладающую пятым порядком на таких сетках [2, 3], мы рассматривать не будем). На сетке из правильных треугольников она показывает второй порядок точности, в отличие от вершинно-центрированных схем с квазиодномерной реконструкцией [4, 5], обладающих на таких сетках третьим (или более высоким) порядком.

Однако в ходе детального изучения было обнаружено, что для стационарной задачи внешнего обтекания качество расчёта по схеме BBR3 (необходимые для таких расчётов модификации будут опубликованы позже) почти не зависит от того, используется ли на поверхности обтекаемого тела треугольная или четырёхугольная сетка. Это явилось основанием полагать, что схема BBR3 может обладать повышенной точностью, если точное решение является стационарным. В настоящей работе применительно к модельному уравнению переноса доказывается и численно проверяется, что в случае стационарного решения имеет место третий порядок точности.

Эффект повышенной точности для стационарных задач известен для метода коррекции потоков [6], что позволяет за счёт более сложной (разнесённой по пространству) аппроксимации производной по времени добиться третьего порядка точности на трансляционно-инвариантной сетке и близкого к третьему – на неструктурированной сетке [7–9]. Высокая точность на неструктурированной сетке была достигнута ценой отказа от консервативности. Поскольку, в отличие от метода коррекции потоков, рассматриваемая в настоящей работе схема не обладает вторым порядком аппроксимации на неструктурированной сетке, в том числе и на стационарных задачах, за счёт изменения аппроксимации производной аналогичного эффекта добиться невозможно. С другой стороны, в [10] был предложен способ добиться третьего порядка на трансляционно-инвариантной сетке при сохранении консервативности, но с худшей точностью на неструктурированной сетке. В настоящей работе этот подход применяется для построения консервативной схемы, обладающей третьим порядком точности на сетке из правильных треугольников для нестационарных задач.

## 2. Схема

Будем рассматривать гиперболическую систему уравнений

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F}(Q) = 0, \quad \mathbf{r} \in G \subset \mathbb{R}^d, \quad 0 < t < t_{\max}, \quad (1)$$

где  $d = 2$  или  $d = 3$ , с начальными данными  $Q_0(\mathbf{r})$ , предполагая решение гладким. В частности, будем рассматривать модельное уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \nabla u = 0, \quad \mathbf{r} \in G, \quad (2)$$

где  $\mathbf{a} = (a_x, a_y) \neq 0$  (при  $d = 2$ ) или  $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z) \neq 0$  (при  $d = 3$ ).

Пусть пространство покрыто неструктурированной сеткой. Введём следующие обозначения.  $E$  – множество сеточных элементов,  $V_j$  – форма ячейки  $j$ ,  $v_j$  – её объём,  $N_1(j)$  – множество ячеек, имеющих общую грань с ячейкой  $j$ ,  $\Gamma(j)$  – множество граничных граней ячейки  $j$ . Через  $\mathbf{r}_j$ ,  $j \in E$ , обозначим центр масс ячейки  $V_j$ . Через  $\mathbf{r}_{jk} = \mathbf{r}_{kj}$ ,  $j \in E$ ,  $k \in N_1(j)$ , – центр масс грани, разделяющей треугольники  $j$  и  $k$ , а через  $\mathbf{n}_{jk} = -\mathbf{n}_{kj}$  её ориентированную площадь, направленную внутрь ячейки  $V_k$ .

Запишем конечно-объёмную схему для (1) в общем виде. Для  $j \in E$  имеем

$$\frac{dQ_j}{dt} + \frac{1}{v_j} \left[ \sum_{k \in N_1(j)} F_{jk} + \sum_{\gamma \in \Gamma(j)} F_\gamma \right] = 0, \quad (3)$$

где через  $F_\gamma$  обозначен численный поток через граничную грань, определяемый в зависимости от типа граничного условия, а через  $F_{jk} = -F_{kj}$  обозначен численный поток между ячейками  $j$  и  $k$ . Он определяется из приближённого решения задачи о распаде разрыва:

$$F_{jk} = \frac{\mathcal{F}(Q_{kj}) + \mathcal{F}(Q_{jk})}{2} \cdot \mathbf{n}_{jk} - \frac{1}{2} |\mathbf{n}_{jk}| |A_{jk}| \frac{Q_{kj} - Q_{jk}}{2}. \quad (4)$$

Матрица  $|A_{jk}|$  определяется методом Рои (см. [11]) по значениям  $Q_j$  и  $Q_k$ . Для уравнения переноса (2) формула (4) вырождается в

$$F_{jk} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_{jk}) \times \begin{cases} Q_{jk}, & \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_{jk} \geq 0; \\ Q_{kj}, & \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_{jk} < 0. \end{cases}$$

Для определения предраспадного значения  $Q_{jk}$  проведём следующие построения. Пусть  $e_{jk}$  – прямая, проведённая через  $\mathbf{r}_j$  и  $\mathbf{r}_{jk}$ . Пусть  $\tilde{N}_1(j)$  – множество радиус-векторов центров ячеек, имеющих с ячейкой  $j$  хотя бы один общий

узел. На прямой  $e_{jk}$  отметим точки  $\mathbf{r}_{jk,-1}$  и  $\mathbf{r}_{jk,1}$ , лежащие вне отрезка  $[\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_{jk}]$  по разные стороны от него, так, чтобы каждая из них лежала на отрезке (3D – треугольнике), вершины которого лежат в  $\tilde{N}_1(j)$ . Значения  $U_{jk,\pm 1}$  определим линейной интерполяцией по таким отрезкам в точки  $\mathbf{r}_{jk,\pm 1}$ . Если точки  $\mathbf{r}_{jk,\pm 1}$  определяются неоднозначно, будем выбирать такой способ, чтобы расстояние от них до отрезка  $[\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_{jk}]$  было максимальным.

Предраспадное значение  $Q_{jk}$  определяется формулой

$$Q_{jk} = Q_j + |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{jk}| \left( \frac{1}{3} \frac{Q_j - Q_{jk,-1}}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{jk,-1}|} + \frac{2}{3} \frac{Q_{jk,1} - Q_j}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{jk,1}|} \right). \quad (5)$$

Значение  $Q_{kj}$  определяется аналогичным образом, при этом используется прямая, проходящая через  $\mathbf{r}_k$  и  $\mathbf{r}_{jk}$ . Отметим, что описанная выше интерполяция обычно применяется к физическим, а не консервативным переменным, но для целей настоящей работы это несущественно.

Полученная полудискретная система (3) всюду в настоящей работе будет интегрироваться 3-стадийным явным методом Рунге – Кутты при достаточно малом числе Куранта, чтобы ошибка интегрирования по времени была пренебрежимо малой по сравнению с ошибкой пространственной аппроксимации.

### 3. Точность схемы ВВРЗ на треугольной ТИ-сетке

В настоящем разделе будем рассматривать уравнение переноса (2) с постоянным коэффициентом и обозначать сеточную функцию через  $u_j \equiv Q_j$ . Будем называть сетку трансляционно-инвариантной (ТИ), если она переходит в себя при трансляции на вектор любого своего ребра. Треугольные ТИ-сетки (и только они) являются образами сетки из правильных треугольников, заполняющих всё пространство, при невырожденном линейном преобразовании.

Пусть  $G = \mathbb{R}^2$  покрыто треугольной ТИ-сеткой. Обозначим вектора рёбер треугольной сетки через  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  и  $\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1$ . Положим  $V = |\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2|$ , тогда площадь каждого сеточного элемента (треугольника) равна  $V/2$ .

Рассмотрим две смежные ячейки этой сетки, которые обозначим через  $L$  и  $R$ . Пусть  $\mathbf{e} = 3(\mathbf{r}_R - \mathbf{r}_L)$ . Обозначим через  $\hat{L}$  ячейку, являющуюся трансляцией ячейки  $R$  на вектор  $-\mathbf{e}$  и через  $\hat{R}$  ячейку, являющуюся трансляцией ячейки  $L$  на вектор  $\mathbf{e}$ . Тогда предраспадные значения на грани  $LR$  будут определяться формулами

$$\begin{aligned} u_{LR} &= -\frac{1}{12}u_{\hat{L}} + \frac{3}{4}u_L + \frac{1}{3}u_R, \\ u_{RL} &= -\frac{1}{12}u_{\hat{R}} + \frac{3}{4}u_R + \frac{1}{3}u_L. \end{aligned} \quad (6)$$

**3.1. Точность на квадратичных полиномах.** Схема VBR3 является точной на линейной функции на произвольной треугольной сетке, на которой используются ей геометрические построения определены. Поэтому она точна, в частности, и на рассматриваемой сетке. Исследуем точность на квадратичной функции в смысле точечных значений в центрах ячеек. Пусть функция  $u(\mathbf{r})$  является квадратичным многочленом от координат, обращающимся в ноль вместе со своим градиентом в точке  $\mathbf{r}_L$ . Тогда его ограничение на прямую, проходящую через  $\mathbf{r}_L$  и  $\mathbf{r}_R$ , имеет вид  $c(\mathbf{r} - \mathbf{r}_L)^2$ , поэтому

$$u_{\hat{L}} = 4u_R, \quad u_{\hat{R}} = 9u_R.$$

Подставляя это в (6), получаем  $u_{LR} = u_{RL} = 0$ . Таким образом, потоки через все грани ячейки  $L$  независимо от выбора предраспадного значения для их определения будут нулевыми. Значит, градиент от квадратичной функции в ячейке  $L$  будет аппроксимирован нулём, что и означает точность на квадратичной функции.

**3.2. Аппроксимация на кубических полиномах.** Введём биортогональный базис  $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2$ , определяемый равенствами

$$\tilde{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \tilde{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 1, \quad \tilde{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \tilde{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = 0. \quad (7)$$

Если обозначить через  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  векторы, равные по модулю длинам рёбер (т. е.  $|\mathbf{n}_1| = |\mathbf{e}_2|$  и  $|\mathbf{n}_2| = |\mathbf{e}_1|$ ) и ортогональные им, то получим  $\mathbf{n}_1 = V\tilde{\mathbf{e}}_1$ ,  $\mathbf{n}_2 = V\tilde{\mathbf{e}}_2$ .

Исследуем аппроксимационную ошибку на кубической функции в смысле точечных значений в центрах ячеек. Будем вычислять полусумму аппроксимационных ошибок в двух треугольниках, смежных по ребру с вектором  $\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1$ ; смысл этой величины будет объяснён позже. Центр масс параллелограмма, являющегося объединением этих треугольников, обозначим через  $\mathbf{r}_c$ .

Рассмотрим вначале одно сеточное ребро, параллельное  $\mathbf{e}_2$ . Вектор трансляции  $\mathbf{e}$ , определённый в предыдущем пункте, равен  $2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ . Следовательно, предраспадные значения, определённые (6), на кубических функциях  $u(\mathbf{r})$  можно представить в виде

$$u_{LR} = u(\mathbf{r}_{LR}) - \frac{1}{72} ((2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) \cdot \nabla)^2 u(\mathbf{r}_{LR}) + C ((2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) \cdot \nabla)^3 u(\mathbf{r}_{LR}), \quad (8)$$

где  $\mathbf{r}_{LR}$  есть середина ребра. Выражение для  $u_{RL}$  отличается знаком перед последним слагаемым. Для сеточного ребра, параллельного  $\mathbf{e}_1$ , имеем аналогичный результат, только вектор трансляции равен  $2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1$ .

Разностная аппроксимация оператора  $(\mathbf{a} \cdot \nabla)u$  на сеточном элементе определяется как сумма потоков через рёбра этих элементов. Потоки через внутреннее ребро блока при этом сокращаются, и остаются потоки через две пары

противолежащих рёбер параллелограмма. Рассмотрим разность потоков через пару противоположных рёбер, параллельных  $\mathbf{e}_2$ . Поскольку в оба ребра из одной пары характеристика приходит с одной и той же стороны, последнее слагаемое в (8) сокращается, и разность потоков равна

$$d_1 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_1) \left[ (\mathbf{e}_1 \cdot \nabla) u(\mathbf{r}_c) + \frac{1}{24} (\mathbf{e}_1 \cdot \nabla)^3 u(\mathbf{r}_c) - \frac{1}{72} (\mathbf{e}_1 \cdot \nabla) ((2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) \cdot \nabla)^2 u(\mathbf{r}_c) \right].$$

Удобно преобразовать это выражение к виду

$$d_1 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_1) (\mathbf{e}_1 \cdot \nabla) \left[ u(\mathbf{r}_c) - \frac{1}{72} [(\mathbf{e}_1 \cdot \nabla)^2 - 4(\mathbf{e}_1 \cdot \nabla)(\mathbf{e}_2 \cdot \nabla) + (\mathbf{e}_2 \cdot \nabla)^2] u(\mathbf{r}_c) \right].$$

Аналогично, разность потоков через вторую пару рёбер равна

$$d_2 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_2) (\mathbf{e}_2 \cdot \nabla) \left[ u(\mathbf{r}_c) - \frac{1}{72} [(\mathbf{e}_1 \cdot \nabla)^2 - 4(\mathbf{e}_1 \cdot \nabla)(\mathbf{e}_2 \cdot \nabla) + (\mathbf{e}_2 \cdot \nabla)^2] u(\mathbf{r}_c) \right].$$

Полусумма аппроксимаций оператора  $(\mathbf{a} \cdot \nabla)u$  по схеме VBR3 в двух треугольниках равна  $L_\Sigma = (d_1 + d_2)/V$ . Поскольку  $\mathbf{n}_1/V$  и  $\mathbf{n}_2/V$  образуют биортонормальный базис к (7), имеем

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_1) (\mathbf{e}_1 \cdot \nabla) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_2) (\mathbf{e}_2 \cdot \nabla) = (\mathbf{a} \cdot \nabla).$$

Таким образом,

$$L_\Sigma = (\mathbf{a} \cdot \nabla) u(\mathbf{r}_c) - \frac{1}{72} [(\mathbf{e}_1 \cdot \nabla)^2 + (\mathbf{e}_2 \cdot \nabla)^2 - 4(\mathbf{e}_1 \cdot \nabla)(\mathbf{e}_2 \cdot \nabla)] (\mathbf{a} \cdot \nabla) u(\mathbf{r}_c). \quad (9)$$

Аппроксимируемая величина есть

$$\begin{aligned} E_\Sigma &= \frac{1}{2} [(\mathbf{a} \cdot \nabla) u(\mathbf{r}_L) + (\mathbf{a} \cdot \nabla) u(\mathbf{r}_R)] = \\ &= (\mathbf{a} \cdot \nabla) u(\mathbf{r}_c) + \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2}{6} \cdot \nabla \right)^2 (\mathbf{a} \cdot \nabla) u(\mathbf{r}_c). \end{aligned}$$

Вычитая, получаем аппроксимационную ошибку

$$\epsilon_\Sigma = L_\Sigma - E_\Sigma = -\frac{1}{36} [(\mathbf{e}_1 \cdot \nabla)^2 + (\mathbf{e}_2 \cdot \nabla)^2 - (\mathbf{e}_1 \cdot \nabla)(\mathbf{e}_2 \cdot \nabla)] (\mathbf{a} \cdot \nabla) u(\mathbf{r}_c) \quad (10)$$

или, что то же самое,

$$\epsilon_\Sigma = -\frac{1}{72} [(\mathbf{e}_1 \cdot \nabla)^2 + (\mathbf{e}_2 \cdot \nabla)^2 + ((\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) \cdot \nabla)^2] (\mathbf{a} \cdot \nabla) u(\mathbf{r}_c). \quad (11)$$

Напомним, что  $e_1$ ,  $e_2$  и  $e_2 - e_1$  суть векторы рёбер сетки. Для сетки из правильных треугольников выражение в квадратных скобках с точностью до множителя совпадает с лапласианом (у сетки из правильных треугольников есть три равнозначных направления рёбер, а у однородного дифференциального оператора 2-го порядка может быть не более двух выделенных направлений, следовательно, он осесимметричный).

**3.3. Матричная форма схемы.** Параллелограммы, полученные объединением треугольников, смежных по ребру с вектором  $e_2 - e_1$ , образуют равномерную структурированную сетку, поэтому будем нумеровать их индексами  $i, j$ . Значения сеточной функции в треугольниках, входящих в этот параллелограмм, обозначим через  $u_{m,n}^L$  и  $u_{m,n}^R$ . Положим  $u_{i,j} = (u_{i,j}^L, u_{i,j}^R)^T$ . Тогда схему BBR3 можно записать в матричном виде

$$\sum_{\xi, \eta \in \mathbb{Z}} Z_{\xi, \eta} \frac{du_{m+\xi, n+\eta}}{dt} + \sum_{\xi, \eta \in \mathbb{Z}} L_{\xi, \eta} u_{m+\xi, n+\eta} = 0. \quad (12)$$

Обе суммы содержат только конечное число ненулевых слагаемых. В нашем случае  $Z_{\xi, \eta} = I$  при  $\xi = \eta = 0$  и  $Z_{\xi, \eta} = 0$  при  $\xi^2 + \eta^2 \neq 0$ ; мы привели общий вид (12) для дальнейшего использования в разделе 4. Матрицы  $L_{\xi, \eta}$  зависят от вектора  $\mathbf{a}$ . В нашем случае эта зависимость непрерывная и кусочно-линейная; изломы соответствуют направлениям, сонаправленным с сеточными рёбрами, поскольку при этом меняется выбор предраспадного значения для вычисления потока. Коэффициенты  $L_{\xi, \eta}$  приведены в разделе 7.1, но для настоящего изложения они не требуются.

Введём матрицы

$$Z(0) = \sum_{\xi, \eta \in \mathbb{Z}} Z_{\xi, \eta}, \quad L(0) = \sum_{\xi, \eta \in \mathbb{Z}} L_{\xi, \eta}$$

и  $A(0) = (Z(0))^{-1}L(0)$  ( $Z(0)$  предполагается невырожденной). Про матрицу  $L(0)$  известно следующее. В силу точности на константе вектор  $(1, 1)^T$  лежит в её ядре. В силу консервативности сумма строк этой матрицы равна нулю. Таким образом,

$$L(0) = f(\mathbf{a}) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

где  $f$  – некоторая функция. Покажем, что она отлична от нуля для любого  $\mathbf{a}$ . Действительно, рассмотрим элемент первой строки первого столбца матрицы  $L(0)$ , обозначим его через  $(L(0))_{11}$ . Рассмотрим ячейку с индексами  $0, 0, L$ .

Пусть  $j$  – её индекс в общей нумерации. Тогда  $(L(0))_{11}$  равен разностной аппроксимации оператора  $(\mathbf{a} \cdot \nabla)u$  в ячейке  $j$ , применённой к полю  $u_{m,n}^L = 1$ ,  $u_{m,n}^R = 0$ . Таким образом,

$$(L(0))_{11} = \frac{1}{v_j} \sum_{k \in N_1(j)} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_{jk}) \times \begin{cases} u_{jk}, & \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_{jk} \geq 0; \\ u_{kj}, & \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_{jk} < 0. \end{cases}$$

Предраспадные значения определяются формулой (6), поэтому на рассматриваемом поле  $u_{jk} = 3/4$ ,  $u_{kj} = 1/4$ . Пользуясь тем, что  $\sum_k \mathbf{n}_{jk} = 0$ , получаем

$$(L(0))_{11} = \frac{1}{2v_j} \sum_{k \in N_1(j) : \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_{jk} > 0} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_{jk}).$$

Очевидно, что в сумме есть хотя бы одно слагаемое, и столь же очевидно, что это слагаемое положительное. Следовательно,  $L(0) \neq 0$ , а значит,  $A(0) \neq 0$ . Таким образом, доказано, что  $f(\mathbf{a}) \neq 0$  для любого  $\mathbf{a} \neq 0$ .

Для схемы, устойчивой в  $L_2$ , порядок точности превосходит порядок аппроксимации на единицу, если старшие члены аппроксимационной ошибки (т. е. ошибка на полиномах порядка  $P_A + 1$ , где  $P_A$  – порядок аппроксимации) лежат в образе  $A(0)$ , и совпадает с порядком аппроксимации иначе [12]. Образ матрицы  $A(0)$  есть  $c(1, -1)^T$ . Следовательно, условие принадлежности ошибки образу  $A(0)$  есть не что иное, как условие суммарной аппроксимации, которое проверялось в предыдущем пункте. Таким образом, доказано следующее: *на ПИ-сетке схема BBR3 обладает вторым порядком аппроксимации; если точное решение является стационарным, то на ПИ-сетке она обладает третьим порядком точности.*

## 4. Модифицированная схема BBR3-U

**4.1. Схема BBR3-U на ПИ-сетке.** Продолжим рассмотрение уравнения переноса (2). Представление (11) для суммарной ошибки показывает, что она выражается через производную по времени от решения. Эту ошибку можно устранить, используя разнесённую по пространству аппроксимацию временной производной. Для этого рассмотрим вместо (3) схему

$$\frac{dQ_j}{dt} + \alpha \sum_{k \in N_1(j)} \left( \frac{dQ_k}{dt} - \frac{dQ_j}{dt} \right) + \frac{1}{v_j} \sum_{k \in N_1(j)} F_{jk} = 0, \quad (13)$$

причём потоки  $F_{jk}$  будем определять таким же образом, как и в схеме BBR3. Мы не пишем член, связанный с граничными потоками, поскольку ПИ-сетка по определению бесконечна. Параметр  $\alpha$  выберем ниже.

На квадратичной функции эта схема точна, т. к. производная по времени является линейной функцией и линейная интерполяция по соседним ячейкам для неё точна. Сумма аппроксимационных ошибок на кубических функциях в ячейках  $L$  и  $R$  для такой схемы есть

$$e_{\Sigma} = L_{\Sigma} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \left( (1 - 3\alpha)(u(\mathbf{r}_L) + u(\mathbf{r}_R)) + \alpha \sum_{j \in N_1(L)} u(\mathbf{r}_j) + \alpha \sum_{j \in N_1(R)} u(\mathbf{r}_j) \right),$$

где  $L_{\Sigma}$  определено (9). Одна пара ячеек, входящих в суммы, – это ячейки  $L$  и  $R$  с радиус-векторами  $\mathbf{r}_c \pm (\mathbf{e}_1/6 + \mathbf{e}_2/6)$ ; другие пары имеют радиус-векторы  $\mathbf{r}_c \pm (5\mathbf{e}_1/6 - \mathbf{e}_2/6)$  и  $\mathbf{r}_c \pm (5\mathbf{e}_2/6 - \mathbf{e}_1/6)$ . Отсюда получаем

$$e_{\Sigma} = L_{\Sigma} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)u(\mathbf{r}_c) - \frac{1}{2} \left[ (1 - 2\alpha) \left( \frac{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2}{6} \cdot \nabla \right)^2 + \right. \\ \left. + \alpha \left( \frac{5\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2}{6} \cdot \nabla \right)^2 + \alpha \left( \frac{5\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1}{6} \cdot \nabla \right)^2 \right] (\mathbf{a} \cdot \nabla)u(\mathbf{r}_c).$$

Раскрывая квадраты, получаем

$$e_{\Sigma} = L_{\Sigma} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)u(\mathbf{r}_c) - \frac{1}{72} \left[ (1 + 24\alpha)(\mathbf{e}_1 \cdot \nabla)^2 + (1 + 24\alpha)(\mathbf{e}_2 \cdot \nabla)^2 + \right. \\ \left. + (2 - 24\alpha)(\mathbf{e}_1 \cdot \nabla)(\mathbf{e}_2 \cdot \nabla) \right] (\mathbf{a} \cdot \nabla)u(\mathbf{r}_c) = \\ = -\frac{2 + 24\alpha}{72} \left[ (\mathbf{e}_1 \cdot \nabla)^2 + (\mathbf{e}_2 \cdot \nabla)^2 - (\mathbf{e}_1 \cdot \nabla)(\mathbf{e}_2 \cdot \nabla) \right] (\mathbf{a} \cdot \nabla)u(\mathbf{r}_c).$$

Видно, что при  $\alpha = -1/12$  суммарная ошибка на кубической функции обращается в ноль, то есть вектор, составленный из аппроксимационной ошибки на кубической функции в ячейках  $L$  и  $R$ , лежит в образе матрицы  $A(0)$ . Следовательно, схема (13) приобретает третий порядок точности на нестационарных задачах. Отметим, что ошибка аппроксимации, вычисленная на одном треугольнике, остаётся ненулевой.

Введём оператор  $M$  с коэффициентами

$$m_{jk} = \begin{cases} -\frac{1}{12}, & j \in N_1(k); \\ \frac{1}{12} \sum_{k \in N_1(j)} 1, & j = k; \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

Тогда схему (13) можно представить в виде

$$\sum_{k \in N_1(j)} (\delta_{jk} + m_{jk}) \frac{dQ_k}{dt} + \frac{1}{v_j} \sum_{k \in N_1(j)} F_{jk} = 0, \quad (14)$$

где  $\delta_{jk}$  – символ Кронекера, или, что то же самое,

$$\left( (I + M) \frac{dQ}{dt} \right)_j + \frac{1}{v_j} \sum_{k \in N_1(j)} F_{jk} = 0, \quad (15)$$

где  $I$  – тождественный оператор. Также будем рассматривать схему

$$\frac{dQ_j}{dt} + \sum_{k \in N_1(j)} (\delta_{jk} - m_{jk}) \left( \frac{1}{v_k} \sum_{l \in N_1(k)} F_{kl} \right) = 0. \quad (16)$$

Выражение (16) получается из (15) использованием приближённого равенства  $(I + M)^{-1}u \approx (I - M)u$ , не приводящим к потере точности, поскольку на гладких решениях старший член погрешности этого равенства пропорционален  $M^2u = O(h^4)$ .

**4.2. Схема BBR3-U на неструктурированной сетке.** Обобщим предложенную модификацию на неструктурированную сетку. Поскольку на неструктурированной сетке схема BBR, в отличие от метода коррекции потоков, не является точной на квадратичной функции, требование точности на квадратичной функции применительно к модифицированной схеме нереализуемо. Поэтому будем следовать подходу, предложенному в [10], а именно, будем требовать, чтобы модифицированная схема удовлетворяла следующим условиям:

- консервативность;
- точность на линейной функции;
- вырождение в схему (15) или (16) на П-сетке.

Вначале применим этот подход к схеме (15). Пусть  $e$  – сеточная функция, тождественно равная единице, а  $V$  – диагональный оператор с элементами  $v_j$ . Схема (15) является консервативной, если  $e^T V M = 0$ . Она является точной на линейной функции, если  $M e = 0$ . Таким образом, для матрицы  $V M$  столбцовая и строчная суммы элементов должны равняться нулю. Поэтому удобно выбрать матрицу  $V M$  симметричной с элементами, например,

$$(V M)_{jk} = -\frac{1}{12} \frac{v_j + v_k}{2}, \quad k \in N_1(j); \quad (V M)_{jj} = \frac{1}{12} \sum_{k \in N_1(j)} \frac{v_j + v_k}{2}.$$

Вместо  $(v_j + v_k)/2$  можно использовать и другие способы вычисления среднего.

Предлагаемая модификация предназначена только для треугольной сетки, а на равномерной сетке из прямоугольников приводит к падению порядка точности с третьего до второго. Также она может быть несовместима с граничными условиями. Поэтому она должна применяться, формально говоря, только

для некоторой части расчётной области. Обозначим множество рёбер, где модификация должна применяться, через  $E_I$ . Чтобы сохранить на границе этого множества консервативность и точность на линейной функции, положим

$$(VM)_{jk} = -\frac{1}{12} \frac{v_j + v_k}{2}, \quad k \in N_1(j), \quad jk \in E_I,$$

а диагональные элементы будем вычислять из условия нулевой суммы в строках и столбцах. Тогда матрица  $M$  имеет элементы

$$m_{jk} = \begin{cases} -\frac{1}{12} \frac{v_j + v_k}{2v_j}, & k \in N_1(j), \quad jk \in E_I \\ \frac{1}{12} \sum_{n \in N_1(j):jn \in E_I} \frac{v_j + v_n}{2v_j}, & k = j \\ 0, & otherwise \end{cases} \quad (17)$$

Аналогично для обобщения схемы (16) на неструктурированную сетку в ней нужно определить  $m_{jk}$  равенством (17). Легко проверить (или см. [10]), что такая схема будет удовлетворять заявленным требованиям. Ниже под схемой BBR3-U будем понимать схему (16), (17).

**4.3. Дополнительные замечания.** При использовании явной схемы интегрирования по времени удобно использовать схему (16), (17), поскольку уравнение (16) разрешено относительно производных по времени. При использовании неявной схемы может быть полезной схема (15), (17). Однако она требует дополнительной проверки при решении уравнений Навье – Стокса, поскольку аппроксимация диффузионных членов оказывается искажена наличием матрицы  $I + M$  перед временной производной.

Для решения задач с разрывными решениями формула (5) для определения предраспадных значений заменяется на формулу с ограничителем наклонов:

$$Q_{jk} = Q_j + \frac{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{jk}|}{2} S_{jk} \phi \left( S_{jk}^{-1} \frac{Q_j - Q_{jk,-1}}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{jk,-1}|}, S_{jk}^{-1} \frac{Q_{jk,1} - Q_j}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{jk,1}|} \right), \quad (18)$$

где  $S_{jk}$  – матрица собственных векторов якобиана  $d\mathcal{F}(Q) \cdot \mathbf{n}_{jk}/dQ$ , а  $\phi$  – некоторый ограничитель, например минмод:

$$\phi(a, b) = \max\{|a|, |b|\} \frac{\text{sign}(a) + \text{sign}(b)}{2}.$$

При использовании ограничителей точность на квадратичных функциях теряется, и вместе с ней теряется и смысл в предложенной модификации схемы.

Если ограничитель применяется только в части расчётной области, где диагностируется разрыв, то соответствующие ячейки можно исключить из множества  $E_I$ . Точность такой схемы будет определяться, главным образом, выбором ограничителя и настройкой сенсора для диагностики разрыва. Изучение этих вопросов выходит за пределы настоящей работы.

## 5. Трёхмерный случай

**5.1. Призматические сетки.** Будем называть сетку *полуструктурированной*, если некоторая её деформация может быть получена протяжкой двумерной неструктурированной сетки, заданной на некоторой плоскости, по нормали к этой плоскости. Если двумерная сетка состояла из треугольников и/или четырёхугольников, то полуструктурированная сетка будет состоять из треугольных призм и/или гексаэдров. Полуструктурированные фрагменты расчётных сеток часто встречаются в задачах высокорейнольдсового обтекания около поверхности обтекаемых тел.

Предложенная модификация схемы напрямую переносится на полуструктурированные сетки, состоящие из треугольных призм. Для этого  $E_I$  определяется как множество граней, на которых нужно применять модификацию; в него включаются только четырёхугольные грани.

Следует, однако, отметить, что для анизотропных сеток криволинейных поверхностей сам алгоритм определения предраспадных значений, описанный в разделе 2, требует модификации; этому вопросу будет посвящена отдельная работа.

**5.2. VBR3 на тетраэдральных TI-сетках.** Будем рассматривать уравнение переноса (2) с постоянной скоростью  $a$  и начальными данными  $u(0, \mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ .

Рассмотрим определение потока между двумя ячейками, которые обозначим через  $j$  и  $k$ . В отличие от двумерного случая, точки  $\mathbf{r}_j$ ,  $\mathbf{r}_k$  и  $\mathbf{r}_{jk}$  не лежат на одной прямой. Точка  $\mathbf{r}_{jk,-1}$  совпадает с центром некоторой ячейки, но она не является образом  $\mathbf{r}_j$  под действием пространственной трансляции на вектор какого-либо ребра сетки. Точка  $\mathbf{r}_{jk,1}$  является серединой отрезка с концами  $\mathbf{r}_k$  и  $\mathbf{r}_l$ , где  $l \in E$  – некоторая другая ячейка. Всё это делает запись схемы VBR3 на тетраэдральной сетке достаточно громоздкой.

Как и в двумерном случае, при линейном преобразовании сетки точки  $\mathbf{r}_{jk,1}$  и  $\mathbf{r}_{jk,-1}$  преобразуются этим же линейным преобразованием. Следовательно, выражения для предраспадных значений  $Q_{jk}$  и  $Q_{kj}$  через значения сеточных функций в ячейках при линейном преобразовании сетки не меняются. Поэтому, если вместе с сеткой преобразовать начальные данные и скорость переноса  $a$ ,

то не изменится и вся схема целиком. Таким образом, для исследования точности схемы на ПИ-сетках достаточно рассмотреть одну ПИ-сетку. Чтобы исследовать сходимость по сетке в привычных обозначениях, мы будем рассматривать последовательность измельчающихся сеток, хотя использование более мелкой сетке эквивалентно увеличению периода решения.

Построим тетраэдральную ПИ-сетку следующим образом: возьмём равномерную кубическую сетку с ребрами длиной  $h$ , лежащими вдоль координатных осей, и разобьём каждый куб на 6 тетраэдров с общим ребром, имеющим вектор  $(h, h, h)$ . Чтобы выписать схему на такой сетке, нужно для каждой грани  $jk$  определить знак  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_{jk})$ , что задаст выбор предраспадного значения для определения потока. Мы ограничимся случаем  $a_x \geq a_y \geq a_z \geq 0$ ; остальные случаи могут быть рассмотрены аналогично (на некоторые из них результаты переносятся из соображений симметрии). Будем считать блоком сетки шесть тетраэдров, полученных разбиением одного куба. Пронумеруем их внутри блока в таком порядке, чтобы при  $h = 1$  их центры имели координаты (с точностью до пространственной трансляции всего блока)

$$\begin{pmatrix} 3/4 \\ 2/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/4 \\ 3/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/4 \\ 2/4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/4 \\ 2/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/4 \\ 1/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \\ 2/4 \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты  $A_{\xi, \eta, \zeta}$  этой схемы для рассматриваемого случая в матричной форме

$$\frac{du_{m,n,p}}{dt} + \sum_{\xi, \eta, \zeta \in \mathbb{Z}} A_{\xi, \eta, \zeta} u_{m+\xi, n+\eta, p+\zeta} = 0 \quad (19)$$

приведены в приложении.

Докажем для рассматриваемого случая ( $a_x \geq a_y \geq a_z \geq 0$ ) следующие утверждения.

1. Схема BBR3 обладает вторым порядком точности;
2. Схема BBR3 не является точной на квадратичных полиномах ни для какого способа определения точности (в смысле точечных значений либо интегральных средних по ячейке и т. д.), если этот способ не зависит от вектора  $\mathbf{a}$ ;
3. Схема BBR3 не обладает вторым порядком точности и третьим порядком в длительном счёте даже для стационарных точных решений.

Вначале выпишем матрицу

$$A(0) \equiv L(0) = \sum_{\xi, \eta, \zeta \in \mathbb{Z}} L_{\xi, \eta, \zeta}.$$

При использовании обозначений  $x \equiv a_x$ ,  $y \equiv a_y$ ,  $z \equiv a_z$  (чтобы матрица уместилась на странице) матрица  $6L(0)$  будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 13x & -15x + 15y + z & 2x + y - z & -3x & x - y + 15z & 2x - 15y + 15z \\ 2x - 2y + z & 13x & -15x + 2y + 15z & 2x - 2y - 15z & -3x & x + 2y - z \\ -15x + y - z & 2x + 2y - 2z & 13x + 13y - 13z & x - 15y + 15z & 2x + 2y - 2z & -3x - 3y + 3z \\ -3x & 2x - 2y + 2z & x + 2y - 2z & 13x & 2x - 2y + 2z & -15x + 2y - 2z \\ x - y + 2z & -3x & 2x - 15y - 2z & -15x + 15y + 2z & 13x & 2x + y - 2z \\ 2x + 2y - 2z & x - 15y - z & -3x - 3y + 3z & 2x + 2y - 2z & -15x + y + 15z & 13x + 13y - 13z \end{pmatrix}.$$

Вектор  $(1,1,1,1,1,1)^T$  лежит в  $Ker(A(0))^T$ , поэтому  $RangA(0) \leq 5$ . Главный минор размера 5 этой матрицы равен

$$\frac{1024}{243} a_x(a_y + 6a_x - a_z) (a_y(a_x - a_y)^2 + (a_x - a_z)(5a_x a_y + a_z)^2).$$

С учётом ограничений  $a_x \geq a_y \geq a_z \geq 0$  и  $|\mathbf{a}| \neq 0$  получаем, что  $RangA(0) < 5$  тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий  $a_y = a_z = 0$  (случай А) или  $a_x = a_y = a_z$  (случай Б). Эти условия соответствуют тому, что скорость переноса направлена вдоль одного из сеточных рёбер.

В случае, если  $RangA(0) = 5$ , условие, чтобы старший член аппроксимационной ошибки лежал в образе  $A(0)$ , равносильно тому, чтобы сумма аппроксимационных ошибок по шести тетраэдрам, входящим в один сеточный блок, на квадратичных полиномах равнялась нулю. Покажем, что это условие выполняется. Действительно, предраспадное значение на сеточной грани равно интегральному среднему по ней с добавлением некоторого члена, пропорционального вторым производным. После взятия разности потоков через противоположные грани эта добавка сокращается, и остаётся интеграл по границе от  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})u$ , равный интегралу от  $(\mathbf{a} \cdot \nabla)u$  по параллелепипеду. Поскольку  $(\mathbf{a} \cdot \nabla)u$  уже является линейной функцией, интегральное среднее от неё совпадает с точечным значением в центре параллелепипеда. Также оно совпадает со средним арифметическим значений этой линейной функции в центрах тетраэдров, входящих в этот блок (эти тетраэдры можно разбить на пары, симметричные относительно общего ребра).

Случаи, когда  $RangA(0) < 5$ , требуют отдельного рассмотрения. Непосредственным вычислением можно показать, что в обоих случаях (А и Б) собственные значения матрицы  $A(0)$  равны 0 и  $13/4 \pm i\sqrt{87}/4$ , причём каждое из них имеет кратность 2. К условию ортогональности  $(1,1,1,1,1,1)^T$  добавляется условие ортогональности  $(1,1,1,0,0,0)^T$  (в случае А) или  $(1,0,1,0,1,0)^T$  (в случае Б). То есть нулевой была сумма аппроксимационных ошибок по трём тетраэдрам. В каждом из случаев это условие равносильно ортогональности  $(1,1,1,1,1,1)^T$  из соображений симметрии. Таким образом, доказано, что схема ВВРЗ на трёхмерных ПИ-сетках обладает вторым порядком точности для линейного уравнения переноса с постоянным коэффициентом.

Второй порядок точности гарантирует наличие такого отображения функции в пространство сеточных функций, в смысле которого схема обладает вторым порядком аппроксимации. Для разности между этим отображением и отображением, основанным на точечных значениях в центрах ячеек, можно взять дифференциальное приближение. При  $RangA(0) = 5$  старший коэффициент этого дифференциального приближения определяется однозначно с точностью до добавления одного и того же слагаемого во всех ячейках исходя из решения

системы уравнений с матрицей  $A(0)$ , в правой части которой стоит старший член аппроксимационной ошибки. Непосредственным вычислением получается, что искомый коэффициент является дробно-рациональным выражением от  $a_x$ ,  $a_y$  и  $a_z$ . Это доказывает, что не существует отображения, не зависящего от направления скорости переноса, в смысле которого схема BBR3 обладает вторым порядком аппроксимации на тетраэдральной ПИ-сетке.

Теперь покажем, что схема BBR3 не обладает повышенным порядком точности в длительном счёте. Рассмотрим, например, случай  $a_x = 2$ ,  $a_y = 1$ ,  $a_z = 0$  и точное решение  $u(t, \mathbf{r}) = \exp(2\pi(x - 2y))$ . В нашем случае  $\text{Rang}A(0) = 5$ . Рассмотрим матрицу

$$L(\phi) = \sum_{\xi, \eta, \zeta \in \mathbb{Z}} L_{\xi, \eta, \zeta} \exp(i(\xi\phi_x + \eta\phi_y + \zeta\phi_z)).$$

Нас интересует случай  $\phi_x = \psi$ ,  $\phi_y = -2\psi$ ,  $\phi_z = 0$ . Поскольку детерминант этой матрицы равен произведению её собственных значений, а все собственные значения, кроме одного, не обращаются в ноль при  $\psi = 0$ , порядок малости детерминанта при  $\psi = 0$  совпадает с порядком малости этого собственного значения. Непосредственным вычислением получаем, что

$$\det L(\phi) = -\frac{6656}{81}i\psi^3 + O(\psi^4).$$

Третий порядок малости собственного значения означает второй порядок точности в длительном счёте.

**5.3. BBR3-U для тетраэдральных ПИ-сеток.** Рассмотрим вначале тетраэдральную ПИ-сетку и запишем схему (13). Отметим, что для любой ячейки среднее арифметическое радиус-векторов центров масс ячеек, соседних с ней по грани, совпадает с центром масс самой ячейки (проверяется явно), поэтому на квадратичной функции модифицированная схема (13) даёт ту же аппроксимационную ошибку, что и исходная схема (3). Схема (13) в матричной форме принимает вид

$$\sum_{\xi, \eta, \zeta \in \mathbb{Z}} Z_{\xi, \eta, \zeta} \frac{du_{m+\xi, n+\eta, p+\zeta}}{dt} + \sum_{\xi, \eta, \zeta \in \mathbb{Z}} L_{\xi, \eta, \zeta} u_{m+\xi, n+\eta, p+\zeta} = 0. \quad (20)$$

Введём матрицы

$$Z(\phi) = \sum_{\xi, \eta, \zeta \in \mathbb{Z}} M_{\xi, \eta, \zeta} \exp(i(\xi\phi_x + \eta\phi_y + \zeta\phi_z))$$

и  $A(\phi) = i(\mathbf{a} \cdot \phi)I - Z^{-1}(\phi)L(\phi)$ . Будем рассматривать такие скорости переноса, что  $\text{Rang}A(0) = 5$ . Тогда схема будет иметь третий порядок точности в длительном счёте на волнах с волновым вектором, направленным вдоль  $\mathbf{k}$ , если одно из собственных значений матрицы  $A(\mathbf{k}\psi)$  будет иметь порядок  $O(|\psi|^4)$ . Если  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = 0$ , то выполнение этого условия никак не зависит от матрицы  $Z$ , а следовательно, для рассматриваемой схемы невыполнимо (см. предыдущий пункт). Однако для почти всех  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{k}$  подбором коэффициента  $\alpha$  в (13) его можно обеспечить; находимое из этого условия значение  $\alpha$  стремится к  $-\infty$  при  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{k} \rightarrow 0$ . Определяя численную схему, мы вынуждены зафиксировать значение  $\alpha$ . Неясно, какое значение  $\alpha$  считать оптимальным; мы выберем значение  $\alpha = \alpha_T = -1/18$ , полученное при взятых наугад значениях  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{k}$ .

**5.4. BBR3-U для трёхмерных неструктурированных сеток.** По аналогии с двумерным случаем, определим схему BBR3-U равенствами (14) или (16), где

$$m_{jk} = \begin{cases} -\alpha_{jk} \frac{v_j + v_k}{2v_j}, & k \in N_1(j), \quad jk \in E_I \\ \sum_{n \in N_1(j): jn \in E_I} \alpha_{jn} \frac{v_j + v_n}{2v_j}, & k = j \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

и  $u_{jk} = \delta_{jk} - m_{jk}$ . Коэффициенты  $\alpha_{jk}$  определены следующим образом:  $\alpha_{jk} = -1/12$ , если  $v_j$  и  $v_k$  – четырёхугольные призмы и грань  $jk$  четырёхугольная;  $\alpha_{jk} = \alpha_T$  (настроечный параметр), если  $v_j$  и  $v_k$  – тетраэдры; в остальных случаях  $\alpha_{jk} = 0$ .

## 6. Численная верификация

**6.1. Акустическая задача – 2D.** Рассмотрим задачу о распространении волны в свободном пространстве в рамках линеаризованных уравнений Эйлера. Начальные данные зададим в виде решётки импульсов в форме гауссиана:

$$\rho'(0, \mathbf{r}) = p'(0, \mathbf{r}) = A \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \exp\left(-\ln 2 \frac{|\mathbf{r} - mL\mathbf{i} - nL\mathbf{j}|^2}{b^2}\right),$$

где  $A = 1/2$ ,  $b = 6$ ,  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{j}$  – единичные орты,  $L = 25$ . Решётка импульсов введена для того, чтобы можно было задать периодические условия с периодом  $L$  по каждой из осей.

Будем проводить расчёты по пяти схемам:

- BBR3;
- BBR3-U (т. е. разработанной в настоящей работе модификации);
- схеме с реконструкцией функции квадратичным полиномом (которую обозначим через FV2);
- вершинно-центрированной схеме EBR3;
- вершинно-центрированной схеме EBR5.

Для схемы FV2 начальные данные (а равно и точное решение на конечный момент времени, с которым проводится сравнение) задаются в виде интегрального среднего по сеточному элементу, вычисленному по квадратурной формуле, точной на квадратичных полиномах. Для схем EBR3 и EBR5 сеточные функции определены в узлах в смысле точечных значений в сеточных узлах.

Расчёты будем проводить на четырёх семействах сеток:

- равномерных декартовых сетках из квадратов;
- равномерных сетках из прямоугольных треугольников;
- треугольных сетках, построенных генератором Gambit;
- треугольных сетках, построенных генератором Gmsh [13].

Для каждого расчёта выводился максимум по ячейкам сетки модуля ошибки по пульсации плотности на момент времени  $t_{\max} = 40$ . Результаты сведены на рис. 1, рис. 2, рис. 3 и рис. 4 соответственно для четырёх последовательностей сеток.

На сетке из квадратов (см. рис. 1) схема BBR3U в точности совпадает со схемой BBR3 и отличается от схемы EBR3 только сдвигом на половину сеточного шага, поэтому все они показывают одинаковую точность. Конечно-объёмная схема с реконструкцией квадратичным полиномом также обладает третьим порядком; коэффициент при  $h^3$  зависит от способа построения квадратичного полинома. Схема EBR5, обладая пятым порядком точности на линейных задачах на декартовых сетках, ожидаемо показывает более высокую точность.

На сетке из прямоугольных треугольников (см. рис. 2) точность схемы BBR3 падает до второго порядка, тогда как схемы BBR3U, EBR3 и FV2 имеют третий порядок. Ошибка решения, полученного по схемам BBR3U и FV2, незначительно меньше чем у EBR3, поскольку на одной и той же треугольной сетке объёмно-центрированные схемы имеют вдвое больше степеней свободы. Схема EBR5 сохраняет свой пятый порядок.

Треугольные сетки, построенные генератором Gambit, содержат большие фрагменты с треугольниками, близкими к правильным. Поэтому схемы BBR3U, EBR3, EBR5, обладающие третьим порядком на П-сетках, показывают большую точность, чем схема BBR3 (см. рис. 3). Схема с полиномиальной реконструкцией, будучи точной на полиномах второго порядка на произвольной сет-

ке, на достаточно подробных сетках даёт более точный результат.

На треугольных сетках, построенных генератором Gmsh (см. рис. 4), различие между результатами по схемам BBR3 и BBR3-U сокращается, а схема с полиномиальной реконструкцией даёт существенно более точный результат. Также можно заметить, что схема BBR3-U, несмотря на почти вдвое большее число степеней свободы, даёт менее точный результат, чем вершинно-центрированная схема EBR3. Вероятно, это может означать, что существует более удачное, чем (17), обобщение схемы BBR3-U на неструктурированную сетку, но в настоящий момент оно автору не известно.

**6.2. Обтекание цилиндра – 2D.** Рассмотрим обтекание круга радиуса 0.5 в рамках уравнения Навье – Стокса при числе Маха 0.2 и числе Рейнольдса 200. На поверхности цилиндра задаётся граничное условие прилипания  $\mathbf{u} = 0$  и адиабатической стенки  $\partial T / \partial n = 0$ . Для аппроксимации диффузионных членов в уравнениях Навье – Стокса используется стандартный подход (см., например, [14], §8.6.2).

Будем решать эту задачу на трёх сетках, сгущающихся к цилиндру и в следе за ним с коэффициентом разгрубления 1.1. Для грубой сетки характерная длина ребер равна 0.02 на цилиндре и 0.24 в следе; на средней сетке они равны 0.01 и 0.12, а на подобной сетке – 0.005 и 0.06. Грубая сетка в области интереса изображена на рис. 5.

Приведём зависимость  $\omega_z = \partial v / \partial x - \partial u / \partial y$  от времени в ячейке, центр которой наиболее близок к точке  $x = 6, y = 0$ . Эта точка лежит в следе за цилиндром. Поскольку процесс выхода на режим стационарных колебаний является неустойчивым, все результаты расчёта различаются между собой по сдвигу по времени, и при обработке результатов все результаты были сдвинуты по времени.

Результаты по схемам BBR3, BBR3U, EBR3, EBR5 и FV2 (максимумы на графиках упорядочены слева направо) приведены на рис. 6. Точками, штрихами и сплошной линией обозначены результаты, соответственно, на грубой, средней и подробной сетках. Результаты показывают, что все схемы дают достаточно близкий результат, причём результат по схеме BBR3U незначительно хуже, чем по схеме BBR3. Причина этого эффекта неясна.

**6.3. Стационарное решение уравнения переноса – 3D.** Проведём последовательность расчётов, чтобы убедиться в отсутствии третьего порядка точности

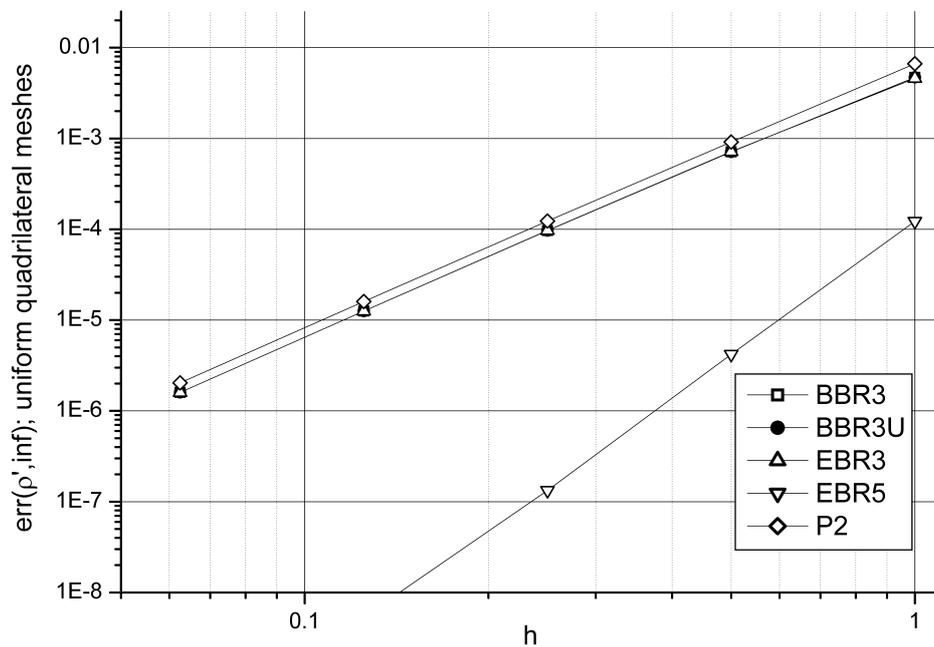


Рис. 1. Результаты расчётов двумерной акустической задачи на равномерных четырёхугольных сетках

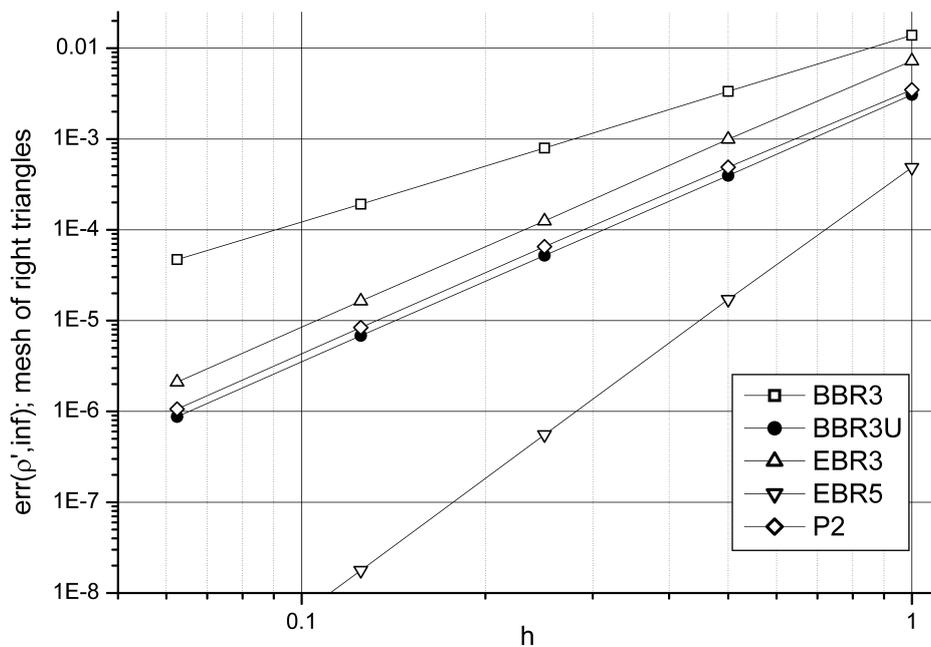


Рис. 2. Результаты расчётов двумерной акустической задачи на сетках из прямоугольных треугольников

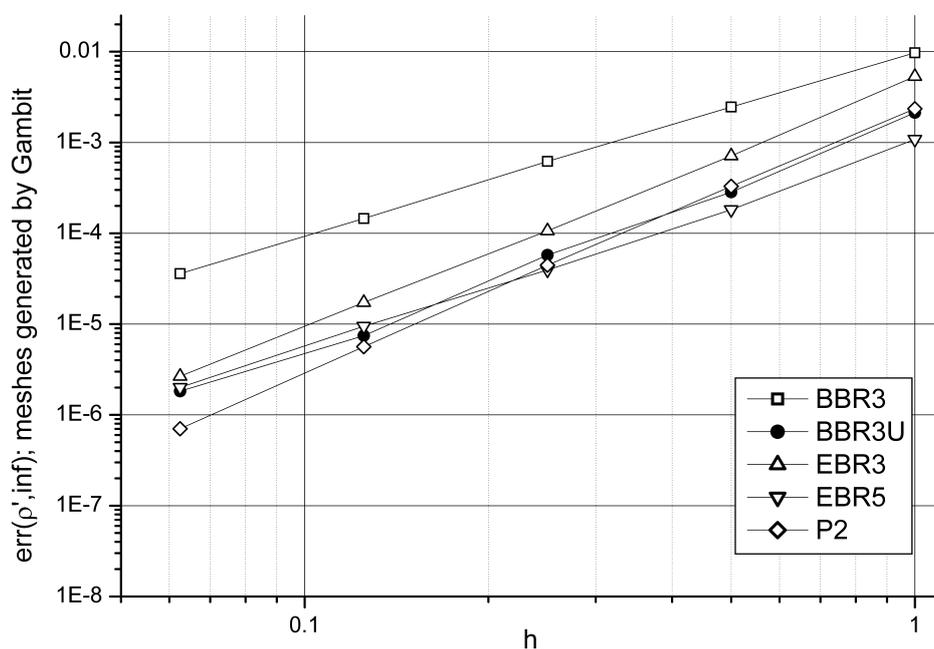


Рис. 3. Результаты расчётов двумерной акустической задачи на сетках, построенных генератором Gambit

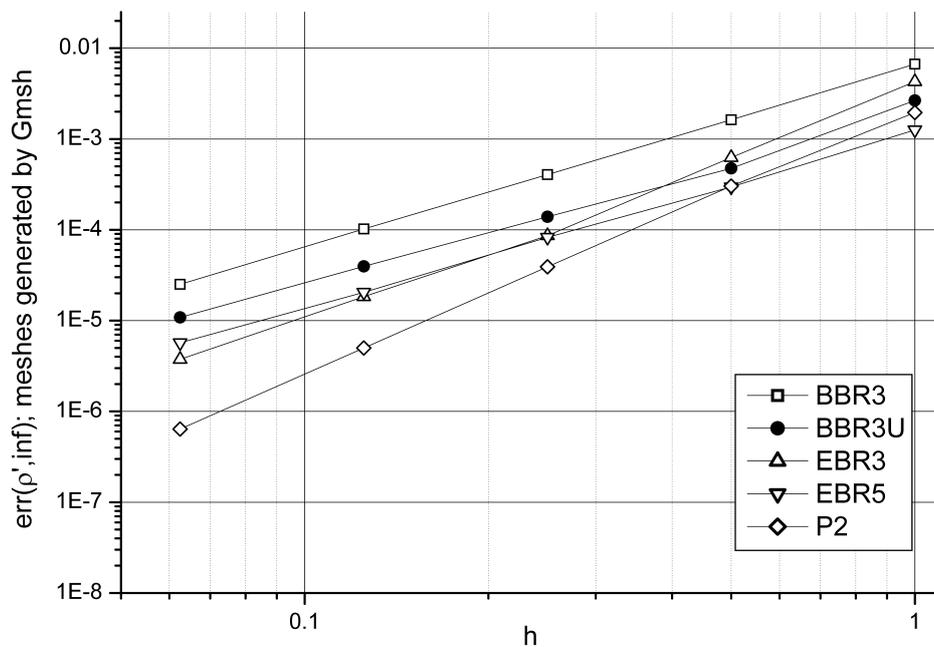


Рис. 4. Результаты расчётов двумерной акустической задачи на сетках, построенных Gmsh

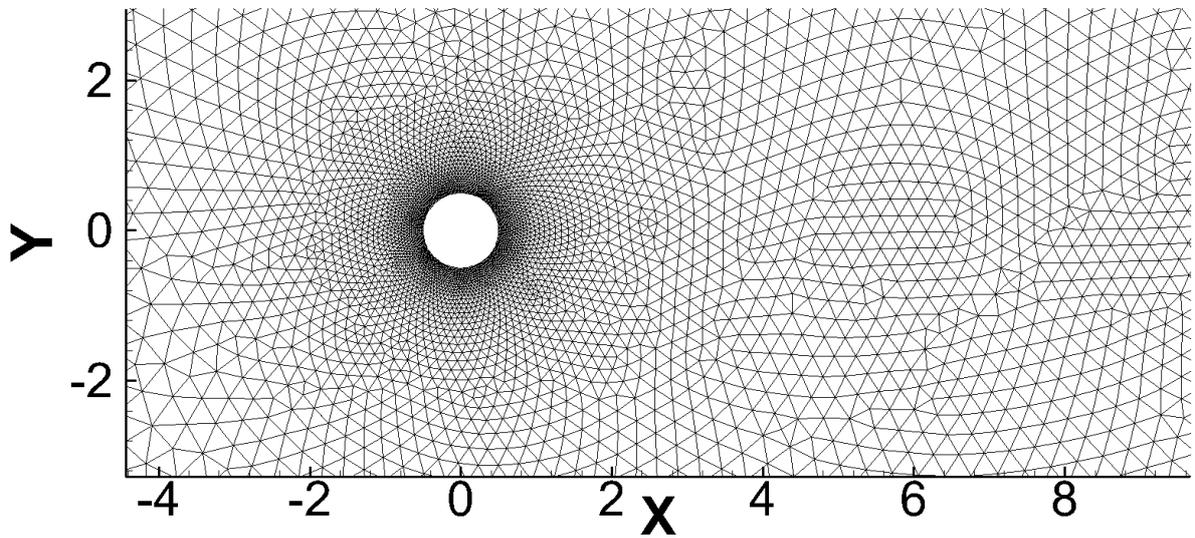


Рис. 5. Грубая сетка для задачи об обтекании цилиндра

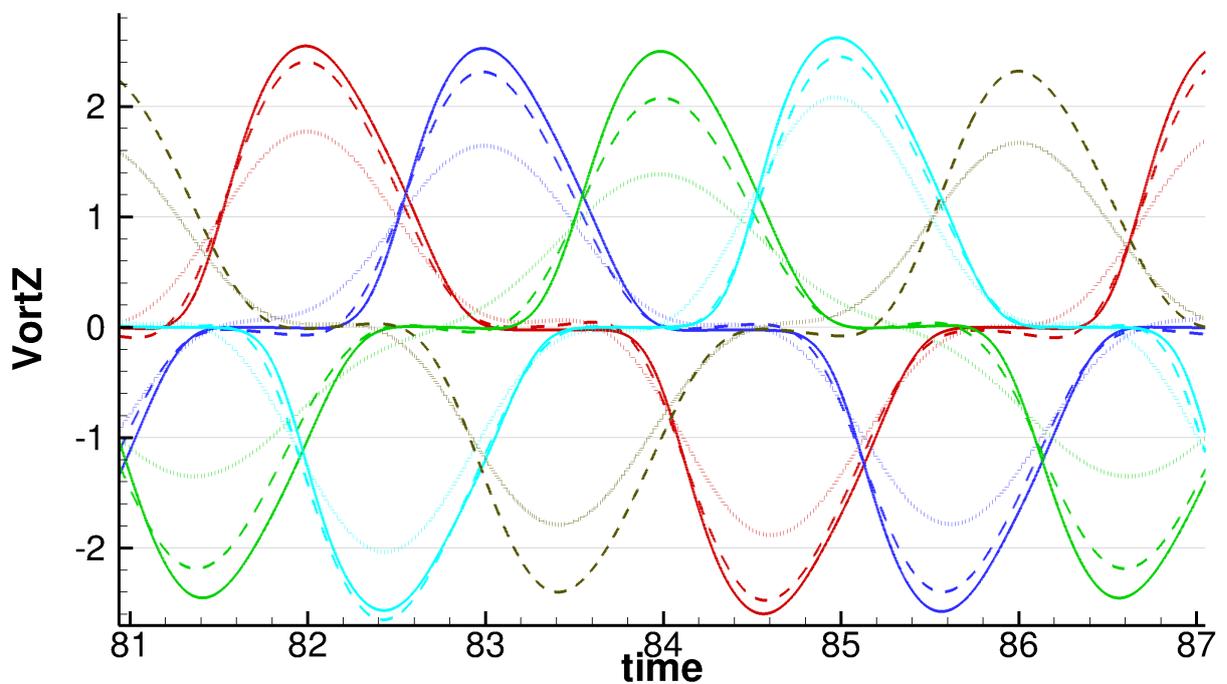


Рис. 6. Завихренность в точке (6,0). Максимумы слева направо: BBR3, BBR3U, EBR3, EBR5 и FV2. Точки, штрихи и сплошная линия – расчёты на грубой, средней и подробной сетках соответственно

Таблица 1. Результаты расчёта уравнения переноса на 3D ТI-сетке по схеме BBR3

$N = 1/h$	$e_\infty$	order	$e_2$	order
100	$1.034 \cdot 10^{-2}$		$7.269 \cdot 10^{-3}$	
200	$1.455 \cdot 10^{-3}$	2.83	$1.019 \cdot 10^{-3}$	2.83
400	$2.436 \cdot 10^{-4}$	2.58	$1.703 \cdot 10^{-4}$	2.58
800	$5.045 \cdot 10^{-5}$	2.27	$3.538 \cdot 10^{-5}$	2.27
1600	$1.184 \cdot 10^{-5}$	2.09	$8.336 \cdot 10^{-6}$	2.09

схемы BBR3 на уравнении переноса в случае стационарного точного решения.

Рассмотрим уравнение переноса (2) со скоростью  $\mathbf{a} = (1, -2, 0)$  на тетраэдральной трансляционно-инвариантной сетке, построенной NGD-разбиением равномерной сетки из кубов с длиной ребра  $h = 1/N$ , причём диагональ куба, общая для всех тетраэдров, на которые он разбивался, имеет вектор  $(h, h, h)$ . Будем рассматривать точное решение

$$u(\mathbf{r}, t) = \sin(2\pi(x - 2y)).$$

Для интегрирования по времени будем использовать метод Рунге – Кутты 3-го порядка. Число Куранта формально задавалось равным 0.25, что соответствовало шагу  $\tau = 0.07905694h$ . Решение сравнивалось с точным на момент времени  $t_{\max} = 20$ . Значения сеточной функции интерпретировались как точечные значения в центрах масс тетраэдров.

Ошибка численного решения относительно точного, взятая в нормах  $L_2$  и  $L_\infty$ , сведена в таблицу 1. Хотя на достаточно грубых сетках численный порядок точности ближе к трём, по мере измельчения сетки он стремится к двум, что соответствует теоретическим результатам, полученным при помощи спектрального анализа. Также результаты показывают, что для схемы не наблюдается эффект повышенной точности в длительном счёте, хорошо известный для разрывного метода Галёркина: на сетке с  $h = 1/1600$  при  $t > 1$  график ошибки в зависимости от времени почти неотличим от линейного роста со временем. В частности, на время  $t = 10$  ошибка в норме  $L_\infty$  равна  $e_\infty = 5.952 \cdot 10^{-6}$ , что составляет половину от ошибки на время  $t_{\max} = 20$ .

**6.4. Акустическая задача – 3D.** Рассмотрим также нестационарную акустическую задачу на неструктурированной тетраэдральной сетке. Будем рассматривать линеаризованные уравнения Эйлера на стационарном однородном фоновом поле  $\bar{\rho} = 1$ ,  $\bar{\mathbf{u}} = 0$ ,  $\bar{p} = 1/\gamma$  и зададим начальные данные в виде решётки

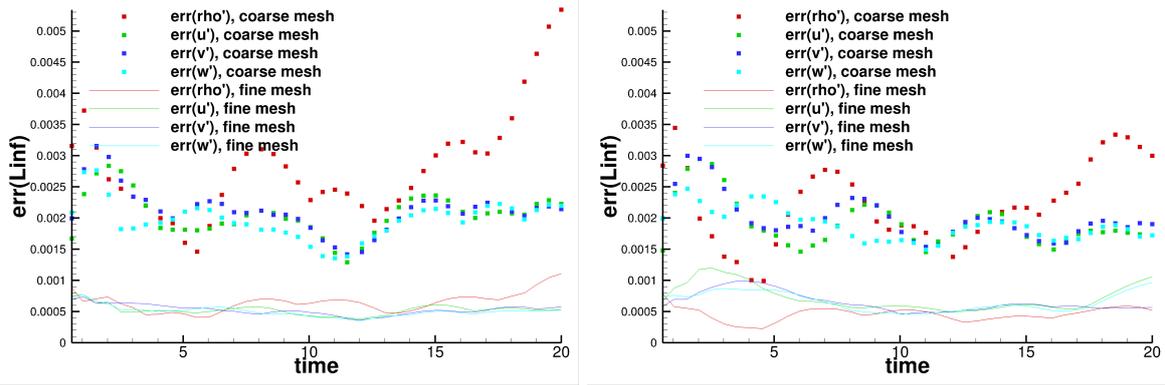


Рис. 7. Ошибка в трёхмерной акустической задаче в норме  $L_\infty$  по разным переменным. Слева: BBR3, справа: BBR3U

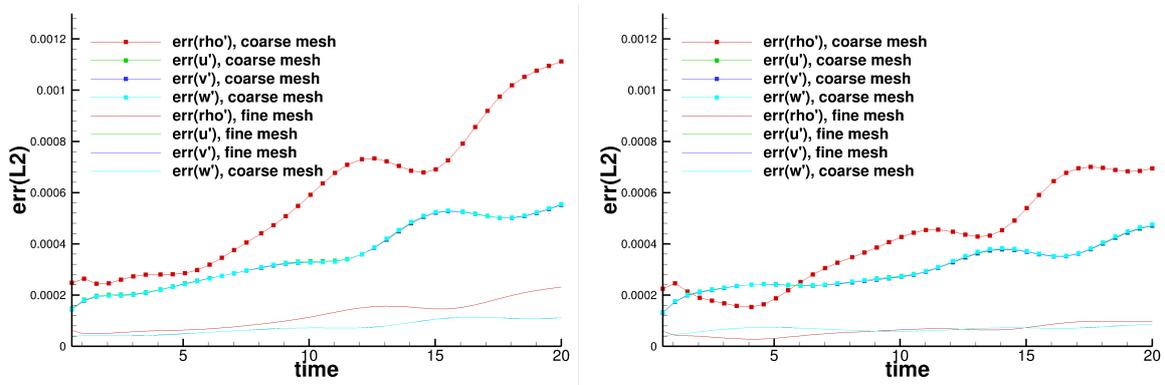


Рис. 8. Ошибка в трёхмерной акустической задаче в норме  $L_2$  по разным переменным. Слева: BBR3, справа: BBR3U

импульсов в форме гауссиана:

$$\rho'(0, \mathbf{r}) = p'(0, \mathbf{r}) = A \sum_{m,n,p \in \mathbb{Z}} \exp\left(-\ln 2 \frac{|\mathbf{r} - mL\mathbf{i} - nL\mathbf{j} - pL\mathbf{k}|^2}{b^2}\right),$$

где  $A = 1$ ,  $b = 6$ ,  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{k}$  – единичные орты,  $L = 25$ . Расчёты будем проводить по схемам BBR3 и BBR3-U при  $\alpha_T = -1/18$ . Зависимость ошибки от времени для всех переменных (пульсации плотности и трёх компонент пульсации скорости; пульсация давления в точности равна пульсации плотности) приведены на рис. 7 (в норме  $L_\infty$ ) и на рис. 8 (в норме  $L_2$ ) для грубой ( $h = 1$ ) и мелкой ( $h = 1/2$ ) сеток.

Численные расчёты показывают незначительное улучшение точности в интегральной норме и отсутствие улучшения (а иногда и ухудшение) в норме  $L_\infty$ . Таким образом, использование разработанной модификации для тетраэдральных сеток является нецелесообразным.

## 7. Матричный вид схемы на треугольной ПИ-сетке

**7.1. Схема.** Приведём запись схемы VBR3 на треугольных ПИ-сетках в матричной форме.

Рассмотрим схему VBR3 на сетке из прямоугольных треугольников. Будем считать, что рёбра сетки имеют векторы  $(1,0)$ ,  $(0,1)$  и  $(1,1)$ . В качестве сеточного блока выберем пару ячеек, разделённых диагональным ребром; блоки образуют равномерную декартову сетку, и для них будем использовать индексы  $i$  и  $j$ , определяемые стандартно. Степень свободы в левом верхнем треугольнике обозначим через  $L$ , в правом нижнем – через  $R$ .

Чтобы выбор предраспадного значения для определения потока через каждую грань был однозначно определён, ограничимся случаем  $0 \leq a_y \leq a_x$ .

Предраспадные значения на левой вертикальной границе, верхней горизонтальной границе и диагонали обозначим через  $f_{i,j,v}$ ,  $f_{i,j,h}$ ,  $f_{i,j,d}$  соответственно. Они определяются равенствами

$$\begin{aligned} f_{i,j,v} &= -\frac{1}{12}u_{i-2,j-1,L} + \frac{3}{4}u_{i-1,j,R} + \frac{1}{3}u_{i,j,L}, \\ f_{i,j,h} &= -\frac{1}{12}u_{i-1,j-1,R} + \frac{3}{4}u_{i,j,L} + \frac{1}{3}u_{i,j+1,R}, \\ f_{i,j,d} &= -\frac{1}{12}u_{i-1,j+1,R} + \frac{3}{4}u_{i,j,L} + \frac{1}{3}u_{i,j,R}. \end{aligned}$$

Схема записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{du_{i,j}^L}{dt} + \frac{1}{h/2} (a_x(f_{i,j,d} - f_{i,j,v}) + a_y(f_{i,j,h} - f_{i,j,d})) &= 0, \\ \frac{du_{i,j}^R}{dt} + \frac{1}{h/2} (a_x(f_{i+1,j,v} - f_{i,j,d}) + a_y(f_{i,j,d} - f_{i,j-1,h})) &= 0. \end{aligned}$$

Преобразуя к матричному виду, получаем

$$\frac{du_{i,j}}{dt} + \sum_{\xi,\eta} (a_x L_{\xi,\eta}^{(x)} + a_y L_{\xi,\eta}^{(y)}) u_{i+\xi,j+\eta} = 0,$$

где

$$\begin{aligned} L_{0,0}^{(x)} &= \begin{pmatrix} 3/2 - 2/3 & 2/3 \\ -3/2 & 3/2 - 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/6 & 2/3 \\ -3/2 & 5/6 \end{pmatrix}, \\ L_{0,0}^{(y)} &= \begin{pmatrix} 3/2 - 3/2 & -2/3 \\ 3/2 & 2/3 - 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2/3 \\ 3/2 & 0 \end{pmatrix}, \\ L_{0,1}^{(x)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_{0,1}^{(y)} = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_{0,-1}^{(x)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & L_{0,-1}^{(y)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3/2 & 0 \end{pmatrix}, \\
 L_{-1,-1}^{(x)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1/6 & 0 \end{pmatrix}, & L_{-1,-1}^{(y)} &= \begin{pmatrix} 0 & -1/6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 L_{-1,0}^{(x)} &= \begin{pmatrix} 0 & -3/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & L_{-1,0}^{(y)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 L_{-1,1}^{(x)} &= \begin{pmatrix} 0 & -1/6 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix}, & L_{-1,1}^{(y)} &= \begin{pmatrix} 0 & 1/6 \\ 0 & -1/6 \end{pmatrix}, \\
 L_{-2,-1}^{(x)} &= \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & L_{-2,-1}^{(y)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 L_{1,0}^{(x)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2/3 & 0 \end{pmatrix}, & L_{1,0}^{(y)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 L_{-1,-2}^{(x)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & L_{-1,-2}^{(y)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Вычислим теперь моменты разностного оператора.

$$\begin{aligned}
 L^{0,0} &= \sum_{\xi,\eta} (a_x L_{\xi,\eta}^{(x)} + a_y L_{\xi,\eta}^{(y)}) = a_x \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + a_y \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \\
 L^{1,0} &= \sum_{\xi,\eta} (a_x L_{\xi,\eta}^{(x)} + a_y L_{\xi,\eta}^{(y)}) \xi = a_x \begin{pmatrix} -1/3 & 5/3 \\ 5/6 & -1/6 \end{pmatrix} + a_y \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \\
 L^{0,1} &= \sum_{\xi,\eta} (a_x L_{\xi,\eta}^{(x)} + a_y L_{\xi,\eta}^{(y)}) \eta = a_x \begin{pmatrix} -1/6 & -1/6 \\ 1/6 & 1/6 \end{pmatrix} + a_y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}. \\
 L^{2,0} &= \sum_{\xi,\eta} (a_x L_{\xi,\eta}^{(x)} + a_y L_{\xi,\eta}^{(y)}) \frac{\xi^2}{2} = a_x \begin{pmatrix} 1/3 & -5/6 \\ 1/4 & 1/12 \end{pmatrix} + a_y \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \\
 L^{1,1} &= \sum_{\xi,\eta} (a_x L_{\xi,\eta}^{(x)} + a_y L_{\xi,\eta}^{(y)}) \xi \eta = a_x \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 \\ -1/6 & -1/6 \end{pmatrix} + a_y \begin{pmatrix} 0 & -1/3 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}. \\
 L^{0,2} &= \sum_{\xi,\eta} (a_x L_{\xi,\eta}^{(x)} + a_y L_{\xi,\eta}^{(y)}) \frac{\eta^2}{2} = a_x \begin{pmatrix} 1/12 & -1/12 \\ -1/12 & 1/12 \end{pmatrix} + a_y \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ -3/4 & 1/4 \end{pmatrix}. \\
 L^{3,0} &= \sum_{\xi,\eta} (a_x L_{\xi,\eta}^{(x)} + a_y L_{\xi,\eta}^{(y)}) \frac{\xi^3}{6} = a_x \begin{pmatrix} -2/9 & 5/18 \\ 5/36 & -1/36 \end{pmatrix} + a_y \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

$$L^{2,1} = \sum_{\xi,\eta} (a_x L_{\xi,\eta}^{(x)} + a_y L_{\xi,\eta}^{(y)}) \frac{\xi^2 \eta}{2} = a_x \begin{pmatrix} -1/9 & -1/36 \\ 1/36 & 1/36 \end{pmatrix} + a_y \begin{pmatrix} 0 & 1/18 \\ 0 & -1/12 \end{pmatrix}.$$

$$L^{1,2} = \sum_{\xi,\eta} (a_x L_{\xi,\eta}^{(x)} + a_y L_{\xi,\eta}^{(y)}) \frac{\xi \eta^2}{2} = a_x \begin{pmatrix} -1/18 & 1/36 \\ 1/36 & -1/36 \end{pmatrix} + a_y \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/12 \end{pmatrix}.$$

$$L^{0,3} = \sum_{\xi,\eta} (a_x L_{\xi,\eta}^{(x)} + a_y L_{\xi,\eta}^{(y)}) \frac{\eta^3}{6} = a_x \begin{pmatrix} -1/36 & -1/36 \\ 1/36 & 1/36 \end{pmatrix} + a_y \begin{pmatrix} 0 & 1/6 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}.$$

**7.2. Исследование на кубической функции.** Матрица  $A(0)$  имеет собственные значения  $0$  и  $2a_x$ . Поскольку по условию  $a_x \neq 0$ , мы имеем дело со случаем простого нулевого собственного значения.

Следующим шагом является исследование аппроксимационной ошибки на кубических полиномах. Для произвольного кубического полинома её анализ не может дать интересных результатов, поскольку многочисленные численные результаты показывают, что рассматриваемая схема обладает вторым порядком точности. Мы рассмотрим особый случай, когда точное решение является стационарным. Это условие равносильно тому, что решение зависит только от  $-a_x y + a_y x$ .

Рассмотрим функцию  $u = (-a_x y + a_y x)^3/6$ , при этом  $u' = -(\mathbf{a} \cdot \nabla)u = 0$ . Сеточный образ  $u$  при  $h = 1$  имеет вид

$$\begin{aligned} u_{\xi,\eta} &= \begin{pmatrix} (-a_x(\eta + 2/3) + a_y(\xi + 1/3))^3/6 \\ (-a_x(\eta + 1/3) + a_y(\xi + 2/3))^3/6 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_y^3 \xi^3 \\ a_y^2 a_x \xi^2 \eta \\ a_y a_x^2 \xi \eta^2 \\ a_x^3 \eta^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} a_y^2 \xi^2 \\ a_x a_y \xi \eta \\ a_x^2 \eta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2a_x/3 + a_y/3 \\ -a_x/3 + 2a_y/3 \end{pmatrix} + \\ &+ (a_y \xi - a_x \eta) \begin{pmatrix} (-2a_x/3 + a_y/3)^2/2 \\ (-a_x/3 + 2a_y/3)^2/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (-2a_x/3 + a_y/3)^3/6 \\ (-a_x/3 + 2a_y/3)^3/6 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

поэтому аппроксимационная ошибка есть

$$\begin{aligned} \epsilon &= \sum_{\xi,\eta} L_{\xi,\eta} u_{\xi,\eta} = (a_y^3 L^{3,0} - a_x^3 L^{0,3} - a_y^2 a_x L^{2,1} + a_x^2 a_y L^{1,2}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \\ &+ (a_y^2 L^{2,0} - a_x a_y L^{1,1} + a_x^2 L^{0,2}) \begin{pmatrix} -2a_x/3 + a_y/3 \\ -a_x/3 + 2a_y/3 \end{pmatrix} + \end{aligned}$$

$$+(a_y L^{1,0} - a_x L^{0,1}) \begin{pmatrix} (-2a_x/3 + a_y/3)^2/2 \\ (-a_x/3 + 2a_y/3)^2/2 \end{pmatrix} + L^{0,0} \begin{pmatrix} (-2a_x/3 + a_y/3)^3/6 \\ (-a_x/3 + 2a_y/3)^3/6 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя это выражение, получаем

$$\epsilon = -\frac{5}{162} a_x (2a_y - a_x)^3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что это выражение отлично от нуля за исключением вырожденного направления  $\mathbf{a} = c(2, 1)^T$ . Таким образом, даже для решений, не зависящих от времени, порядок аппроксимации всё равно равен двум. По условию  $a_x \neq 0$ . Поэтому  $\epsilon$  лежит в образе  $L^{0,0}$  и порядок точности схемы будет равен трём (аппроксимационная ошибка порядка  $h^2$  будет накапливаться только до времени  $O(h)$ ).

## 8. Матричный вид схемы на тетраэдральной ПИ-сетке

Будем рассматривать тетраэдральную ПИ-сетку, определённую в разделе 5.2, при условии  $a_x \geq a_y \geq a_z \geq 0$ . Она представляется в матричном виде

$$\frac{du_{i,j,k}}{dt} + \frac{1}{h} \sum_{\xi,\eta,\zeta} L_{\xi,\eta,\zeta} u_{i+\xi,j+\eta,k+\zeta} = 0,$$

где  $L_{\xi,\eta,\zeta}$  являются линейными (в пределах  $a_x \geq a_y \geq a_z \geq 0$ ) функциями  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$ . Приведём запись схемы ВВРЗ на тетраэдральной ПИ-сетке в матричной форме. Блоком являются шесть тетраэдров с общим ребром с вектором  $(h, h, h)$ , индексы блоков соответствуют их смещениям в декартовых координатах, а нумерация степеней свободы внутри блока соответствует введённой в разделе 5.2. Для более компактной записи будем использовать обозначения  $x \equiv a_x$ ,  $y \equiv a_y$ ,  $z \equiv a_z$ .

$$L_{-1,-1,-2} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_{-1,-2,-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_{-1,-2,-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_{-2,-1,-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$L_{-1,-1,-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y \\ -z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$L_{0,0,-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2y + 2z & -15z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -15z & -2x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2x - 2z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2y - 2z & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot L_{-1,1,-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x - y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x + y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$L_{0,-1,0} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2x - 2y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2x + 2y & -15y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -15y & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot L_{-1,0,0} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -15x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$L_{0,0,0} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 13x & 15(y-x) & 0 & 0 & 0 & 15(z-y) \\ 2(x-y) & 13x & 15(z-x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2x-2z & 13(x+y-z) & 15(z-y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(y-z) & 13x & 2(x-y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15(y-x) & 13x & 2(x-z) \\ 2(y-z) & 0 & 0 & 0 & 15(z-y) & 13(x+y-z) \end{pmatrix}.$$

$$L_{1,0,0} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2x & -2x + 2y - 2z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2x - 2y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2x - 2z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2x - 2y + 2z & 2x & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$L_{0,1,0} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2z & 2y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2y & -2x - 2y + 2z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2y - 2z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot L_{1,1,0} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2x \\ 0 & 0 & 2y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$L_{-1,-1,1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y-z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -y+z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x+z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x-z & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot L_{1,-1,1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & y-z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -y+z & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
 L_{0,0,1} &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2x & 2z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2z & -2y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & L_{1,0,1} &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2z & 0 & 0 \\ 2x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 L_{-1,1,1} &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x-z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x+z \\ -x+y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x-y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & L_{0,1,1} &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

## 9. Заключение

Была рассмотрена объёмно-центрированная конечно-объёмная схема с квазиодномерной реконструкцией переменных VBR3 на треугольных сетках на примере двумерного уравнения переноса с постоянным коэффициентом. Доказано, что на трансляционно-инвариантных сетках эта схема имеет второй порядок аппроксимации, однако в случае, если точное решение не зависит от времени, воспроизводит его с третьим порядком точности.

Этот результат позволил предложить модификацию VBR3-U, на трансляционно-инвариантных сетках обладающую третьим порядком и для нестационарных решений. Однако численные эксперименты показывают, что по мере ухудшения качества сетки точность схемы VBR3-U быстро снижается. Также полученные результаты не обобщаются на тетраэдральные сетки.

## Список литературы

1. Touze C., Murrone A., Guillard H. Multislope MUSCL method for general unstructured meshes // *Journal of Computational Physics*. 2015. P. 389–418.
2. Бахвалов П. А., Козубская Т. К. Экономичная формулировка схем с квазиодномерной реконструкцией переменных // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша*. 2013. № 89. С. 1–16.
3. Бахвалов П. А., Козубская Т. К. Схема с квазиодномерной реконструкцией переменных, определенных в центрах элементов трёхмерной неструктурированной сетки // *Матем. моделирование*. 2016. Т. 28. С. 79–95.
4. Abalakin I., Bakhvalov P., Kozubskaya T. Edge-based reconstruction schemes for unstructured tetrahedral meshes // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2016. Vol. 81. P. 331–356.

5. Bakhvalov P. A., Kozubskaya T. K. EBR-WENO scheme for solving gas dynamics problems with discontinuities on unstructured meshes // *Computers and Fluids*. 2017. Vol. 157. P. 312–324.
6. Katz Aaron, Sankaran Venkateswaran. An Efficient Correction Method to Obtain a Formally Third-Order Accurate Flow Solver for Node-Centered Unstructured Grids // *J. Sci. Comput.* 2012. T. 51, № 2. C. 375–393.
7. Nishikawa Hiroaki. First, Second, and Third Order Finite-volume Schemes for Advection-diffusion // *J. Comput. Phys.* 2014. T. 273. C. 287–309.
8. Pincock B., Katz A. High-Order Flux Correction for Viscous Flows on Arbitrary Unstructured Grids // *J. Sci. Comput.* New York, NY, USA, 2014. nov. T. 61, № 2. C. 454–476.
9. Work C. D., Katz A. J. Aspects of the Flux Correction Method for Solving the Navier-Stokes Equations on Unstructured Meshes // *AIAA paper No. 2015-0834*. 2015.
10. Bakhvalov P. A., Kozubskaya T. K. Modification of Flux Correction method for accuracy improvement on unsteady problems // *Journal of Computational Physics*. 2017. Vol. 338. P. 199–216.
11. Toro E. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction*. Springer, 2009. p. 748.
12. Бахвалов П. А., Сурначёв М. Д. Линейные схемы с несколькими степенями свободы для многомерного уравнения переноса // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша*. 2019. № 74. С. 1–44.
13. Geuzaine C., Remacle J.-F. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. 1997–2003. URL: <http://www.geuz.org/gmsh/>.
14. Ferziger J. H., Perić M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 2002. p. 423.