



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

А.А. Злотник, Т.А. Ломоносов

О L^2 -диссипативности
линеаризованной
разностной схемы на
разнесенных сетках с
квазигидродинамической
регуляризацией для 1D
баротропных уравнений
движения газа

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Злотник А.А., Ломоносов Т.А. О L^2 -диссипативности линеаризованной разностной схемы на разнесенных сетках с квазигидродинамической регуляризацией для 1D баротропных уравнений движения газа // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. № 72. 27 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2021-72>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-72>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук

А.А. Злотник, Т.А. Ломоносов

О L^2 -диссипативности линеаризованной
разностной схемы на разнесенных сетках
с квазигидродинамической регуляризацией
для 1D баротропных уравнений движения газа

Москва — 2021

Злотник А.А., Ломоносов Т.А.

О L^2 -диссипативности линеаризованной разностной схемы на разнесенных сетках с квазигидродинамической регуляризацией для 1D баротропных уравнений движения газа

Изучается явная двухслойная схема на разнесенных сетках с квазигидродинамической регуляризацией для 1D баротропных систем уравнений движения газа. Выводятся необходимые условия и близкие к ним достаточные условия L^2 -диссипативности решений задачи Коши для ее линеаризации на постоянном решении при произвольном фоновом числе Маха M . Применяется спектральный подход и анализируются матричные неравенства, содержащие символы симметричных матриц конвективных и регуляризующих слагаемых. Рассматриваются случаи с использованием как только искусственной, так и только физической вязкости. Даётся сравнение со спектральным условием устойчивости фон Неймана при $M = 0$.

Ключевые слова: диссипативность, линеаризованная схема, разнесённые сетки, регуляризация, 1D баротропные уравнения газовой динамики

Alexander Anatolievich Zlotnik, Timofey Aleksandovich Lomonosov

On L^2 -dissipativity of a linearized difference scheme on staggered meshes with a quasi-hydrodynamic regularization for 1D barotropic gas dynamics equations

We study an explicit two-level finite difference scheme on staggered meshes, with a quasi-hydrodynamic regularization, for 1D barotropic gas dynamics equations. We derive necessary conditions and sufficient conditions close to each other for L^2 -dissipativity of solutions to the Cauchy problem for its linearization on a constant solution, for any background Mach number M . We apply the spectral approach and analyze matrix inequalities containing symbols of symmetric matrices of convective and regularizing terms. We consider the cases where either the artificial viscosity coefficient or the physical viscosity one is used. A comparison with the spectral von Neumann condition is also given for $M = 0$.

Keywords: dissipativity, linearized scheme, staggered meshes, regularization, 1D barotropic gas dynamics equations

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект 19-01-00169.

Оглавление

1 Введение.....	2
2 Регуляризованные уравнения и разностная схема на разнесенных сетках.....	3
3 Анализ L^2 -диссипативности линеаризованной схемы.....	5
4 Случай КГидД регуляризации уравнений Навье-Стокса без искусственного коэффициента вязкости	20
Список литературы.....	24

1. Введение. Численные методы решения задач газовой динамики относятся к основным в вычислительной математике. Им посвящена обширная литература, см., в частности, [1–4] и цитированную там литературу. Большой теоретический и прикладной интерес представляют условия устойчивости таких методов, в том числе явных по времени.

Среди этих численных методов существует класс методов, основанных на предварительной регуляризации уравнений газовой динамики. К ним относятся явные методы с симметричной аппроксимацией по пространству, основанные на так называемых квазигазодинамической и квазигидродинамической (КГидД) регуляризациях, которые были успешно использованы для решения широкого круга прикладных задач, см., в частности, [5–8]. В том числе такие методы применялись для разнообразных задач в баротропной постановке, см., например, [9–12]. При этом всегда использовались схемы на неразнесенных сетках, где основные искомые функции определены на одной и той же сетке по пространству. Анализ условий L^2 -диссипативности таких схем в линеаризованной баротропной постановке был недавно выполнен в [13–15]. Существуют и другие подходы к регуляризации уравнений газовой динамики [16–18], но они пока не были столь широко апробированы на практике.

В то же время схемы на разнесенных сетках хорошо известны в вычислительной гидродинамике [19], и спектральный анализ устойчивости, включая условие фон Неймана, для подобных схем был дан в том числе в [20–22]. Недавно в [23] впервые была построена и успешно апробирована явная схема на разнесенных сетках с КГидД регуляризацией для 3D уравнений Навье-Стокса-Кана-Хилларда. В [24] выведен в том числе критерий (необходимое и достаточное условие) L^2 -диссипативности такой схемы, линеаризованной на постоянном решении в случае 1D баротропных уравнений Эйлера и Навье-Стокса сжимаемого газа при нулевом фоновом числе Маха $M = 0$. Этот результат применим на практике только при малых числах Маха.

В данной работе также изучается L^2 -диссипативность линеаризованной на постоянном решении схемы на разнесенных сетках из [23] для указанных 1D систем уравнений, но в существенно более сложном случае любого M . Используется спектральный метод, см., например, [3, 25], но анализируются не собственные числа несамосопряженной матрицы-символа соответствующего оператора перехода со слоя на слой, а матричные неравенства, содержащие символы симметричных матриц конвективных и регуляризующих слагаемых. Критерий L^2 -диссипативности выглядит слишком громоздко, и основное внимание уделяется выводу более простых близких друг к другу необходимых условий и достаточных условий (отличающихся не более чем в 4 и ровно в 2 раза). При этом как вывод результатов, так и их формулировки оказываются более сложными, чем в случае схем на неразнесенных сетках [13, 14]. Выполненный анализ дает указание на выбор параметров схемы, позволяющий брать максимальный шаг по времени. Для случая уравнений Навье-Стокса (без использования искусственной вязкости) впервые указаны формулы для выбора шага по времени при $M \neq 0$. Существенно, что техника анализа применима и в случае регуляризаций другого типа, в качестве примера см. [26].

Естественность анализа именно свойства L^2 -диссипативности схемы связана с тем, что оно соответствует важному с точки зрения качества КГидД регуляризации свойству, известному в линеаризованной дифференциальной постановке [27], и его выполнение обеспечивает не только устойчивость в L^2 -норме, но и лучшее качество численного решения. Спектральное условие устойчивости фон Неймана служит для этого свойства лишь необходимым условием и само по себе не гарантирует устойчивости в какой-либо норме. Показывается, что оно заметно грубее критерия L^2 -диссипативности уже в случае $M = 0$.

2. Регуляризованные уравнения и разностная схема на разнесенных сетках. КГидД 1D баротропная система уравнений движения вязкого сжимаемого газа без учета внешних сил состоит из следующих уравнений баланса массы и импульса

$$\partial_t \rho + \partial_x j = 0, \quad \partial_t(\rho u) + \partial_x(ju) + \partial_x p(\rho) = \partial_x \Pi, \quad (1)$$

где $\rho > 0$ и u — искомые плотность и скорость газа, зависящие от (x, t) , где $x \in \mathbb{R}$ и $t \geq 0$, а $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_x = \partial/\partial x$. Также $p(\rho)$ — давление, $p(\rho) \in C^2(0, +\infty)$, $p'(\rho) > 0$.

Регуляризованный поток массы j , регуляризующая скорость \widehat{w} и вязкое напряжение Π задаются формулами

$$j = \rho(u - \widehat{w}), \quad \widehat{w} = \tau[u\partial_x u + \frac{1}{\rho}\partial_x p(\rho)], \quad \Pi = \mu\partial_x u + \Pi^\tau, \quad \Pi^\tau = \rho u \widehat{w}. \quad (2)$$

Здесь $\mu\partial_x u$ и Π^τ — вязкие типа Навье-Стокса и регуляризующее напряжения, $\tau = \tau(\rho, u) > 0$ — параметр регуляризации, $\mu = \mu_{ph} + \mu_{art}$, μ_{ph} и $\mu_{art} = \tau\alpha_s\rho p'(\rho)$ — соответственно коэффициенты полной, физической (суммарной динамической и объемной) и искусственной вязкости, которые могут зависеть от ρ и u . Кроме того, $\alpha_s \geq 0$ — число Шмидта; его можно использовать и как параметр численного метода. Пусть $\nu = \frac{\mu}{\rho} = \nu_{ph} + \tau\alpha_s p'(\rho)$ и $\nu_{ph} = \frac{\mu_{ph}}{\rho}$ — соответствующие коэффициенты кинематической вязкости.

Введем сетку ω_h с узлами $x_k = kh$ и сдвинутую сетку ω_h^* с узлами $x_{k-1/2} = (k - 1/2)h$, $k \in \mathbb{Z}$, с шагом $h > 0$, а также сетку $\bar{\omega}^{\Delta t}$ с узлами $t_m = m\Delta t$, $m \geq 0$ и шагом $\Delta t > 0$.

Введем операторы на функциях v , w , y , заданных на сетках ω_h , ω_h^* , $\bar{\omega}^{\Delta t}$ соответственно:

$$\begin{aligned} sv_{k-1/2} &= \frac{v_{k-1} + v_k}{2}, \quad \delta v_{k-1/2} = \frac{v_k - v_{k-1}}{h}, \quad \overset{\circ}{\delta} v_k = \frac{v_{k+1} - v_{k-1}}{2h}, \\ s^* w_k &= \frac{w_{k-1/2} + w_{k+1/2}}{2}, \quad \delta^* w_k = \frac{w_{k+1/2} - w_{k-1/2}}{h}, \quad \overset{\circ}{\delta}^* w_{k-1/2} = \frac{w_{k+1/2} - w_{k-3/2}}{2h}, \\ \delta_t y &= \frac{y^+ - y}{\Delta t}, \quad y^{+,m} = y^{m+1}, \end{aligned}$$

где $v_k = v(x_k)$, $w_{k-1/2} = w(x_{k-1/2})$, $y^m = y(t_m)$. Отметим, что $\overset{\circ}{\delta} = \delta^* s = s^* \delta$ и $\overset{\circ}{\delta}^* = \delta s^* = s \delta^*$.

Введем известную первообразную функцию — энталпию и ее разделенную разность

$$\begin{aligned} P_1(\rho) &:= \int_{r_0}^{\rho} \frac{p'(r)}{r} dr; \\ P_1(r_1; r_2) &:= \frac{P_1(r_2) - P_1(r_1)}{r_2 - r_1} > 0, \quad r_1 \neq r_2, \quad P_1(r; r) = P'_1(r) = \frac{p'(r)}{r}, \end{aligned}$$

где $r_i > 0$, $i = 0, 1, 2$ и $r > 0$; см. их подробное обсуждение в [28]. В [23] была построена явная двухслойная по времени 3D разностная схема с КГидД регуляризацией на разнесенных сетках, принимающая в 1D постановке (1), (2) вид

$$\delta_t \rho + \delta j = 0 \text{ на } \omega_h^*, \quad \delta_t[(s^* \rho)u] + \delta^*[(sj)su] + (s^* \rho)\delta^* P_1(\rho) = \delta^* \Pi \text{ на } \omega_h, \quad (3)$$

$$j = (s^* \rho)(u - \widehat{w}), \quad \widehat{w} = \tau[u s^* \delta u + \delta^* P_1(\rho)] \text{ на } \omega_h, \quad (4)$$

$$\Pi = \mu \delta u + \Pi^\tau, \quad \Pi^\tau = s[u(s^* \rho)\widehat{w}] \text{ на } \omega_h^* \quad (5)$$

на $\bar{\omega}^{\Delta t}$. Здесь ρ и u заданы по пространству на разнесенных сетках ω_h^* и ω_h соответственно. Отметим, что нестандартная аппроксимация типа $\partial_x p(\rho) \approx$

$(s^*\rho)\delta^*P_1(\rho)$ была предложена в [28, с. 62] для неразнесенных сеток. В выписанной схеме пространственная дискретизация неконсервативна по импульсу, зато диссипативна по полной энергии.

3. Анализ L^2 -диссипативности линеаризованной схемы. Выписанную схему линеаризуем на постоянном решении $\rho_* = \text{const} > 0$ и $u_* = \text{const}$. Для этого запишем ее решение в виде $\rho = \rho_* + \rho_*\tilde{\rho}$, $u = u_* + c_*\tilde{u}$, подставим в уравнения схемы, отбросим слагаемые второго порядка малости по отношению к обезразмеренным возмущениям $\tilde{\rho}$, \tilde{u} и получим линеаризованную схему

$$\delta_t\tilde{\rho} + u_*\dot{\tilde{\rho}} + c_*\delta\tilde{u} - \tau_*c_*^2\delta\delta^*\tilde{\rho} - \tau_*u_*c_*\delta\dot{\tilde{u}} = 0, \quad (6)$$

$$\delta_t\tilde{u} + c_*\delta^*\tilde{\rho} + u_*\dot{\tilde{u}} - \tau_*c_*^2u_*\delta^*\dot{\tilde{\rho}} - \tau_*u_*^2\dot{\tilde{\rho}} - \nu_*\delta^*\delta\tilde{u} = 0, \quad (7)$$

где $\tau_* = \tau_*(\rho_*, u_*)$, $c_* = \sqrt{p'(\rho_*)}$, $\nu_* = \nu_{ph*} + \tau_*\alpha_s c_*^2$ и ν_{ph*} — фоновые параметры регуляризации, скорость звука и кинематические вязкости. Ниже тильды над возмущениями $\tilde{\rho}$, \tilde{u} отбросим для упрощения обозначений.

Пусть $H(\omega)$ — гильбертово пространство комплекснозначных функций, определенных и суммируемых с квадратом на сетке ω . Введем скалярные произведения в $H(\omega_h)$ и $H(\omega_h^*)$:

$$(v, \tilde{v})_h = h \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k \tilde{v}_k^*, \quad (w, \tilde{w})_{h*} = h \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_{k-1/2} \tilde{w}_{k-1/2}^*,$$

где * означает комплексное сопряжение. Введем также гильбертово пространство пар функций $(\rho, u) \in \mathbf{H} := H(\omega_h^*) \times H(\omega_h)$ с обычными скалярным произведением и нормой

$$((\rho, u), (\tilde{\rho}, \tilde{u}))_{\mathbf{H}} = (\rho, \tilde{\rho})_{h*} + (u, \tilde{u})_h, \quad \|(\rho, u)\|_{\mathbf{H}} = \sqrt{(\rho, \rho)_{h*} + (u, u)_h}.$$

Перепишем схему (6), (7) в рекуррентном виде:

$$\rho^+ = \rho - \Delta t c_* (M \dot{\tilde{\rho}} + \delta u) + \Delta t \tau_* c_*^2 (\delta^* \rho + M \dot{\tilde{u}}), \quad (8)$$

$$u^+ = u - \Delta t c_* (\delta^* \rho + M \dot{\tilde{u}}) + \Delta t \tau_* c_*^2 (M \delta^* \dot{\tilde{\rho}} + M^2 \ddot{\tilde{u}} + \tilde{\nu}_* \delta^* \delta u), \quad (9)$$

где $M := \frac{u_*}{c_*}$ (при этом $|M|$ — фоновое число Маха) и $\tilde{\nu}_* = \frac{\nu_*}{\tau_* c_*^2} = \frac{\nu_{ph*}}{\tau_* c_*^2} + \alpha_s$ — безразмерные величины.

Поставим вопрос об условиях выполнения для решения схемы (8), (9) оценки

$$\sup_{m \geq 0} \|(\rho^m, u^m)\|_{\mathbf{H}} \leq \|(\rho^0, u^0)\|_{\mathbf{H}} \quad \forall (\rho^0, u^0) \in \mathbf{H}. \quad (10)$$

Изучать их достаточно естественно, поскольку соответствующая оценка верна для решения задачи Коши для линеаризованной системы уравнений (1) [27]. Более того, напомним, что оценка (10) означает, что $\sup_{m \geq 0} \|\mathbf{G}^m\|_{\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}} \leq 1$,

где $\mathbf{G} = \mathbf{I} - \Delta t c_* \mathbf{B} + \Delta t \tau_* c_*^2 \mathbf{A}$ — оператор перехода со слоя на слой с действующими в \mathbf{H} единичным оператором \mathbf{I} и операторами конвективных и вязких слагаемых \mathbf{B} и \mathbf{A} , такими, что

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\rho, u) &= (M \delta^* \rho + \delta u, \delta^* \rho + M \delta u), \\ \mathbf{A}(\rho, u) &= (\delta \delta^* \rho + M \delta \delta u, M \delta^* \delta^* \rho + M^2 \delta^2 u + \tilde{\nu}_* \delta^* \delta u).\end{aligned}$$

Эквивалентно, $\|\mathbf{G}\|_{\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}} \leq 1$. Поэтому, в свою очередь, оценка (10) эквивалентна важному свойству L^2 -диссипативности схемы

$$\|(\rho^m, u^m)\|_{\mathbf{H}} \leq \|(\rho^{m-1}, u^{m-1})\|_{\mathbf{H}} \leq \dots \leq \|(\rho^0, u^0)\|_{\mathbf{H}} \quad \forall (\rho^0, u^0) \in \mathbf{H}, \quad m \geq 1.$$

Пусть Δt и τ_* задаются стандартными формулами [6, 7]

$$\Delta t = \frac{\beta h}{c_*}, \quad \tau_* = \frac{\alpha h}{c_*} \tag{11}$$

с параметрами $\beta > 0$ и $\alpha > 0$. В данном разделе выводятся необходимые условия и достаточные условия на β в зависимости от α для выполнения оценки (10) в случае $\mu_{ph} = 0$.

Для этого в соответствии со спектральным подходом (см., например, [3, 25]) подставим в уравнения (8), (9) частное решение вида

$$\rho_{k-1/2}^m(\xi) = e^{i(k-1/2)\xi} w_\rho^m(\xi), \quad u_k^m(\xi) = e^{ik\xi} w_u^m(\xi), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad m \geq 0,$$

где \mathbf{i} — мнимая единица и $\xi \in [0, 2\pi]$ — параметр. Функция $e^{ik\xi}$ является собственной для операторов δ и $-\delta^*\delta$, а $e^{i(k-1/2)\xi}$ — для операторов δ^* и $-\delta\delta^*$, и они отвечают соответственно одним и тем же собственным значениям $\frac{\mathbf{i}}{h} \sin \xi = \mathbf{i} \frac{2}{h} s_\xi c_\xi$ и $\frac{4}{h^2} s_\xi^2$, где $s_\xi = \sin \frac{\xi}{2}$ и $c_\xi = \cos \frac{\xi}{2}$. Кроме того, имеем

$$\delta e^{ik\xi} = \mathbf{i} \frac{2}{h} s_\xi e^{i(k-1/2)\xi}, \quad \delta^* e^{i(k-1/2)\xi} = \mathbf{i} \frac{2}{h} s_\xi e^{ik\xi}.$$

Используя эти формулы и (11), получим рекуррентные формулы

$$\begin{aligned}w_\rho^+ &= w_\rho - \beta [2\mathbf{i} s_\xi (M c_\xi w_\rho + w_u) + 4\alpha s_\xi^2 (w_\rho + M c_\xi w_u)], \\ w_u^+ &= w_u - \beta \{2\mathbf{i} s_\xi (w_\rho + M c_\xi w_u) + 4\alpha s_\xi^2 [M c_\xi w_\rho + (M^2 c_\xi^2 + \tilde{\nu}_*) w_u]\}.\end{aligned}$$

Введем вектор-столбец $\mathbf{w} = (w_\rho, w_u)^T$ и при $\mu_{ph} = 0$ перейдем к матричной форме записи

$$\mathbf{w}^+ = \mathbf{w} - \beta \left[2\mathbf{i}s_\xi \begin{pmatrix} Mc_\xi & 1 \\ 1 & Mc_\xi \end{pmatrix} + 4\alpha s_\xi^2 \begin{pmatrix} 1 & Mc_\xi \\ Mc_\xi & M^2 c_\xi^2 + \alpha_s \end{pmatrix} \right] \mathbf{w}.$$

Ее удобно переписать в компактном виде

$$\mathbf{w}^+ = G(q)\mathbf{w}$$

с использованием 2×2 матриц

$$G(q) = I - \beta F(q), \quad F(q) = 2\mathbf{i}\sqrt{\sigma}B(q) + 4\alpha\sigma A(q), \quad (12)$$

$$B(q) = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{q} & 1 \\ 1 & \pm\sqrt{q} \end{pmatrix}, \quad A(q) = \begin{pmatrix} 1 & \pm\sqrt{q} \\ \pm\sqrt{q} & q + \alpha_s \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где $G(q)$ — символ оператора \mathbf{G} , $B(q)$ и $A(q)$ пропорциональны символам операторов \mathbf{B} и \mathbf{A} , I — единичная матрица 2-го порядка, $q = q(\xi) = M^2 \cos^2 \frac{\xi}{2}$, $\sigma = \sin^2 \frac{\xi}{2}$, причем $\sigma = 1 - \frac{q}{M^2}$ при $M \neq 0$, а $\pm = (\operatorname{sgn} M) \operatorname{sgn} \cos \frac{\xi}{2}$.

Теорема 1. Пусть $\mu_{ph} = 0$ и $M \neq 0$. Для L^2 -диссипативности схемы (6), (7) необходимо и достаточно выполнение матричного неравенства

$$\frac{1}{\beta} A(q) \geq Q(q) := 2\alpha\sigma A^2(q) + \frac{1}{2\alpha} B^2(q) + \mathbf{i}\sqrt{\sigma}[A(q), B(q)] \quad (14)$$

для всех $0 \leq q \leq M^2$, где $Q(q)$ — эрмитова матрица, $Q(q) \geq 0$ при $0 \leq q \leq M^2$ и $[A, B] = AB - BA$.

При $M = 0$ (т.е. $u_* = 0$) результат сохраняет силу с заменой множества $0 \leq q \leq M^2$ на $0 \leq \sigma \leq 1$.

Доказательство. Согласно [24, Лемма 1] свойство диссипативности (10) эквивалентно спектральной оценке

$$\max_{0 \leq q \leq M^2} \lambda_{\max}(G^*(q)G(q)) \leq 1, \quad (15)$$

где $\lambda_{\max}(C)$ — максимальное собственное значение эрмитовой матрицы C .

Подобно [14, Теорема 1], эта оценка эквивалентна матричному неравенству $G^*G \leq I$, т.е. неравенству $\beta F^*F \leq F + F^*$, при всех $0 \leq q \leq M^2$. Для $F = F_R + \mathbf{i}F_I$ с эрмитовыми матрицами $F_R = 4\alpha\sigma A(q)$ и $F_I = 2\sqrt{\sigma}B(q)$ оно принимает вид

$$\beta(F_R^2 + F_I^2 + \mathbf{i}[F_R, F_I]) \leq 2F_R \quad \forall 0 \leq q \leq M^2$$

и после сокращения на $8\alpha\sigma$ при $\sigma \neq 0$ (т.е. $q \neq M^2$), переходит в (14) с $Q = (8\alpha\sigma)^{-1}F^*F \geq 0$. По непрерывности (14) выполняется и при $q = M^2$.

В случае $M = 0$ имеем $q = 0$, и за параметр следует взять $0 \leq \sigma \leq 1$. \square

Укажем для дальнейшего, что верны формулы

$$A^2 = \begin{pmatrix} q+1 & \pm\sqrt{q}(q+\alpha_s+1) \\ \pm\sqrt{q}(q+\alpha_s+1) & q+(q+\alpha_s)^2 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} q+1 & \pm 2\sqrt{q} \\ \pm 2\sqrt{q} & q+1 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

$$\mathbf{i}[A, B] = \mathbf{i}(q+\alpha_s-1) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

По свойствам спектральной нормы матриц имеем

$$\lambda_{\max}(G^*(q)G(q)) = \max_{\mathbf{w} \in \mathbb{C}^2, \mathbf{w} \neq 0} \frac{\|G(q)\mathbf{w}\|_{\mathbb{C}^2}^2}{\|\mathbf{w}\|_{\mathbb{C}^2}^2} = \|G(q)\|_2^2.$$

Поскольку $|\lambda(G)| \leq \|G\|_2$ для собственных значений $\lambda(G)$ любой матрицы G , то *спектральное условие устойчивости фон Неймана*

$$|\lambda(G(q))| \leq 1 \quad \forall \lambda(G(q)), \quad 0 \leq q \leq M^2 \quad (18)$$

следует из спектральной оценки (15) и поэтому служит лишь необходимым условием L^2 -диссипативности. При этом оно не гарантирует устойчивость схемы в какой-либо норме.

Хотя условия типа (18) широко используются в литературе (см. в том числе для разнесенных сеток [20, 22]), убедимся, что здесь оно оказывается слишком грубым в сравнении с (15) даже в относительно простом частном случае $M = 0$.

Теорема 2. *Пусть $\mu_{ph} = 0$ и $M = 0$. Спектральное условие устойчивости фон Неймана (18) для схемы (6), (7) выполнено, если и только если*

$$\beta \leq \beta_{vN} := \begin{cases} \frac{(\alpha_s+1)\alpha}{4\alpha_s\alpha^2+1} & \text{при } |\alpha_s - 1|\alpha \leq 1 \\ \frac{(\alpha_s+1)\alpha - \sqrt{(\alpha_s-1)^2\alpha^2-1}}{4\alpha_s\alpha^2+1} = \\ = \frac{1}{(\alpha_s+1)\alpha + \sqrt{(\alpha_s-1)^2\alpha^2-1}}, & \text{иначе} \end{cases}. \quad (19)$$

Доказательство. В условиях теоремы $q = 0$ и согласно формулам (12), (13) матрицу G можно записать в виде

$$G = \begin{pmatrix} 1 - \omega_1 & \mathbf{i}\omega_2 \\ \mathbf{i}\omega_2 & 1 - \alpha_s\omega_1 \end{pmatrix}, \quad \omega_1 := 4\alpha\sigma\beta, \quad \omega_2 := 2\sqrt{\sigma}\beta.$$

Аналогичная матрица изучалась в [13, Теорема 1], где показано, что при $\alpha_s\omega_1^2 + \omega_2^2 > 0$ условие (18) для нее сводится к выполнению двух неравенств

$$\alpha_s\omega_1^2 + \omega_2^2 - (\alpha_s + 1)\omega_1 \leq 0, \quad \alpha_s\omega_1^2 + \omega_2^2 - 2(\alpha_s + 1)\omega_1 + 4 \geq 0.$$

Если же $\alpha_s\omega_1^2 + \omega_2^2 = 0$, то $\omega_2 = 0$, $\sigma = 0$, $\omega_1 = 0$ и тогда $G = I$, а последние неравенства выполнены. Таким образом, должны выполняться неравенства

$$4\beta\sigma[(4\alpha_s\alpha^2\sigma + 1)\beta - (\alpha_s + 1)\alpha] \leq 0 \quad \forall 0 \leq \sigma \leq 1, \quad (20)$$

$$r_2(\sigma) := 4\alpha_s\alpha^2\beta^2\sigma^2 - \beta[2(\alpha_s + 1)\alpha - \beta]\sigma + 1 \geq 0 \quad \forall 0 \leq \sigma \leq 1. \quad (21)$$

Неравенство (20) приводит к условию

$$\beta \leq \frac{(\alpha_s + 1)\alpha}{4\alpha_s\alpha^2 + 1}. \quad (22)$$

В случае $\alpha_s > 0$ в неравенстве (21) вершина квадратного трехчлена $r_2(\sigma)$ такова

$$\sigma_v = \frac{2(\alpha_s + 1)\alpha - \beta}{8\alpha_s\alpha^2\beta}.$$

Свойство $\sigma_v > 1$ эквивалентно неравенству $\beta < \frac{(\alpha_s + 1)\alpha}{4\alpha_s\alpha^2 + 1}$, выполненному в силу (22). Поэтому $r_2(\sigma)$ убывает на $[0, 1]$, и неравенство (21) сводится к неравенству

$$r_2(1) = (4\alpha_s\alpha^2 + 1)\beta^2 - 2(\alpha_s + 1)\alpha\beta + 1 \geq 0. \quad (23)$$

В случае $\alpha_s = 0$ неравенство (21) упрощается до $\beta(2\alpha - \beta)\sigma \leq 1$ для всех $0 \leq \sigma \leq 1$, а поскольку здесь $\beta \leq \alpha$ в силу (22), то и до неравенства $\beta(2\alpha - \beta) \leq 1$, совпадающего с (23) при $\alpha_s = 0$.

Детерминант квадратного трехчлена относительно β в левой части неравенства (23) равен $4[(\alpha_s - 1)^2\alpha^2 - 1]$, а его вершина совпадает с правой частью (22). Поэтому с учетом условия (22) неравенство (23) означает, что

$$\beta \leq \frac{(\alpha_s + 1)\alpha - \sqrt{(\alpha_s - 1)^2\alpha^2 - 1}}{4\alpha_s\alpha^2 + 1} \quad \text{при } |\alpha_s - 1|\alpha > 1.$$

В сочетании с (22) это приводит к условию (19). \square

Проанализировав максимумы каждой из функций в (19), можно показать, что $\beta_{vN} \leq 1$.

При $M = 0$ в [24] был дан критерий L^2 -диссипативности схемы (6), (7), имеющий вид

$$\beta \leq \beta_{cr} := \frac{2 \min\{\alpha_s, 1\}\alpha}{4\alpha_s\alpha^2 + 1}. \quad (24)$$

Учитывая, что $(\alpha_s + 1) - |\alpha_s - 1| = 2 \min\{\alpha_s, 1\}$, легко видеть, что $\beta_{cr} < \beta_{vN}$ при всех $\alpha_s \geq 0$, $\alpha_s \neq 1$ либо $\beta_{cr} = \beta_{vN}$ при $\alpha_s = 1$ (для всех $\alpha > 0$); см. также рис. 1. В том числе при $\alpha_s = 0$ имеем $\beta_{cr} = 0$ и L^2 -диссипативность отсутствует, тогда как $\beta_{vN} = \alpha - \sqrt{\max\{\alpha^2 - 1, 0\}} > 0$. В случае схем с регуляризациями на неразнесенных сетках различие между условиями, соответствующими (19) и (24), было установлено в [13]. Однако здесь в случае схемы на разнесенных сетках оно более существенно, а поведение β_{vN} заметно сложнее.

Указанное совпадение при $\alpha_s = 1$ неслучайно и связано с тем, что в этом частном случае матрица $G = G(q)$ обладает свойством $G^*G = GG^*$, т.е. является нормальной, поэтому она унитарно подобна диагональной матрице, и максимальный из $|\lambda(G)|$ равен $\|G\|_2$. Свойство $G^*G = GG^*$ эквивалентно свойству $F^*F = FF^*$ и далее $[A, B] = AB - BA = 0$ (при $\sigma \neq 0$), см. (17).

Пусть $|A|$ — детерминант матрицы A , а $z = z_R + iz_I$ — стандартная запись числа $z \in \mathbb{C}$. Ниже для применения теоремы 1 существен следующий алгебраический критерий.

Лемма 1. *Рассмотрим произвольные вещественную симметричную и комплексную эрмитову матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a \\ a & a_2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q_1 & q \\ q^* & q_2 \end{pmatrix}$$

с любым $q \in \mathbb{C}$. Пусть также $A > 0$, $Q \geq 0$. Неравенство $\zeta A \geq Q$ с параметром $\zeta \geq 0$ выполнено, если и только если

$$\zeta \geq \frac{b + \sqrt{b^2 - 4|A||Q|}}{2|A|}, \quad (25)$$

где $b := a_1q_2 + a_2q_1 - 2aq_R$. В этом неравенстве $b^2 \geq 4|A||Q|$, а $b > 0$ при $Q \neq 0$.

Доказательство. По критериям Сильвестра положительной определенности и неотрицательной определенности матриц имеем

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad |A| > 0, \quad q_1 \geq 0, \quad q_2 \geq 0, \quad |Q| = q_1q_2 - |q|^2 \geq 0.$$

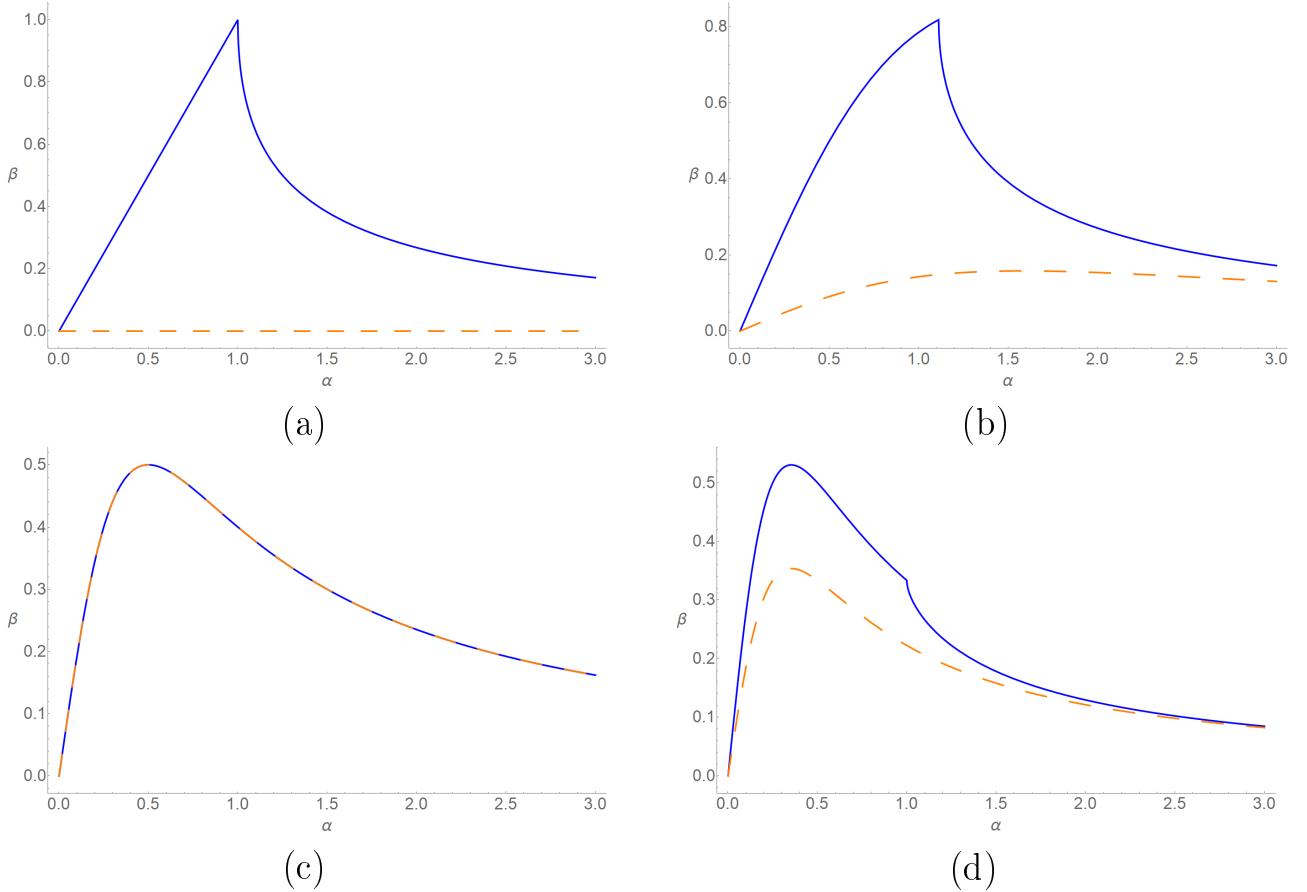


Рис. 1: Графики β_{vN} (сплошная) и β_{cr} (пунктирная) в зависимости от α при:
 (a) $\alpha_s = 0$; (b) $\alpha_s = 1/10$; (c) $\alpha_s = 1$; (d) $\alpha_s = 2$

При $Q = 0$ неравенство (25) просто означает, что $\zeta \geq 0$. Пусть ниже $Q \neq 0$, тогда $q_1 > 0$ либо $q_2 > 0$.

По второму из упомянутых критериев неравенство $\zeta A - Q \geq 0$ эквивалентно системе неравенств

$$\zeta a_1 - q_1 \geq 0, \quad \zeta a_2 - q_2 \geq 0, \quad |\zeta A - Q| \geq 0.$$

Использовав введенное выше b , их можно переписать в виде

$$\zeta \geqslant \frac{q_1}{a_1}, \quad \zeta \geqslant \frac{q_2}{a_2}, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} p_2(\zeta) &:= |\zeta A - Q| = (\zeta a_1 - q_1)(\zeta a_2 - q_2) - (\zeta a - q)(\zeta a - q^*) = \\ &= |A|\zeta^2 - b\zeta + |Q| \geq 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Вычислим величину

$$\begin{aligned} p_2\left(\frac{q_1}{a_1}\right) &= (a_1 a_2 - a^2)\left(\frac{q_1}{a_1}\right)^2 - (a_1 q_2 + a_2 q_1 - 2a q_R) \frac{q_1}{a_1} + q_1 q_2 - |q|^2 = \\ &= -q_1^2 \left[\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{|q|}{q_1}\right)^2 - 2\frac{a}{a_1} \frac{q_R}{q_1} \right] = -q_1^2 \left[\left(\frac{a}{a_1} - \frac{q_R}{q_1}\right)^2 + \left(\frac{q_1}{q_2}\right)^2 \right] \leq 0 \end{aligned} \quad (28)$$

при $q_1 > 0$. Аналогично проверяется формула

$$p_2\left(\frac{q_2}{a_2}\right) = -q_2^2 \left[\left(\frac{a}{a_2} - \frac{q_R}{q_2}\right)^2 + \left(\frac{q_1}{q_2}\right)^2 \right] \leq 0 \quad (29)$$

при $q_2 > 0$. Отсюда следует, что квадратный трехчлен $p_2(\zeta)$ имеет корень $\zeta_1 > 0$ и поэтому его детерминант $b^2 - 4|A||Q| \geq 0$. Более того, второй корень ζ_2 тоже положителен при $|Q| > 0$ либо равен 0 при $|Q| = 0$ (т.к. $|A|\zeta_1\zeta_2 = |Q|$). Тем самым $b = |A|(\zeta_1 + \zeta_2) > 0$.

Теперь квадратное неравенство (27) в сочетании с (26) приводит к условию (25), где справа стоит больший из корней ζ_1, ζ_2 . \square

Замечание 1. Как правило, $\Delta := b^2 - 4|A||Q| > 0$ при $Q \neq 0$, за исключением специального случая. А именно, $\Delta = 0$ при $Q \neq 0$ означает, что $\zeta_1 = \zeta_2$. Тогда при $q_1 = 0$ либо $q_2 = 0$ имеем $\Delta = b^2 > 0$, откуда $q_1 > 0$ и $q_2 > 0$. Тогда в силу (28) имеем $p_2\left(\frac{q_1}{a_1}\right) = 0$ и поэтому $\frac{a}{a_1} = \frac{q_R}{q_1}$ и $q_1 = 0$. Аналогично в силу (29) имеем $\frac{a}{a_2} = \frac{q_R}{q_2}$, и далее $q_R\left(\frac{a_1}{q_1} - \frac{a_2}{q_2}\right) = 0$. Если $q_R \neq 0$, то $\frac{a_1}{q_1} - \frac{a_2}{q_2} = 0$. Если $q_R = 0$, то $a = 0$ и $\Delta = (a_1 q_2 + a_2 q_1)^2 - 4a_1 a_2 q_1 q_2 = (a_1 q_2 - a_2 q_1)^2$, и при $\Delta = 0$ опять $\frac{a_1}{q_1} - \frac{a_2}{q_2} = 0$. Эквивалентно, $\frac{a_2}{a_1} = \frac{q_2}{q_1} = \theta > 0$. Таким образом, приходим к матрицам

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a \\ a & \theta a_1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q_1 & q \\ q & \theta q_1 \end{pmatrix}, \quad a = \frac{a_1}{q_1} q, \quad q_1 > 0, \quad q \in \mathbb{R}$$

(здесь $A > 0$ и $Q \geq 0$ при $a_1 > 0, \theta > 0, |q| < \sqrt{\theta}q_1$). Для таких матриц имеем

$$\Delta = (2\theta a_1 q_1 - 2aq)^2 - 4(\theta a_1^2 - a^2)(\theta q_1^2 - q^2) = 4\theta(aq_1 - a_1 q)^2 = 0.$$

Следствие 1. В условиях леммы 1 для выполнения неравенства $\zeta A \geq Q$ $\zeta \geq 0$ необходимо, чтобы $\zeta \geq \frac{b}{2|A|}$, и достаточно, чтобы $\zeta \geq \frac{b}{|A|}$. В эти условия не входит $|Q|$.

Доказательство. В силу свойств $b^2 - 4|A||Q| \geq 0, |Q| \geq 0$ и $b \geq 0$ результат следует из оценок $b \leq b + \sqrt{b^2 - 4|A||Q|} \leq 2b$. \square

Следующий результат является основным в данной работе.

Теорема 3. Пусть $\mu_{ph} = 0$, $\alpha_s > 0$ и $M \neq 0$. Для L^2 -диссипативности схемы (6), (7) необходимо выполнение неравенства

$$\frac{1}{\beta} \geq \frac{1}{\beta_{nec}} := \max \left\{ \bar{b}_1 \alpha, \frac{\bar{b}_2}{4\alpha_s \alpha} \right\} \quad (30)$$

и достаточно выполнение неравенства

$$\frac{1}{\beta} \geq \frac{1}{\beta_{suf}} := 2\bar{b}_1 \alpha + \frac{\bar{b}_2}{2\alpha_s \alpha}, \quad (31)$$

$\varepsilon \partial e$

$$\bar{b}_1 = \bar{b}_1(\alpha_s, M^2) := \begin{cases} \alpha_s + 1 & npu M^2 \leq \alpha_s + 1 \\ \frac{1}{4M^2}(M^2 + \alpha_s + 1)^2 & npu M^2 \geq \alpha_s + 1 \end{cases}, \quad (32)$$

$$\bar{b}_2 = \bar{b}_2(\alpha_s, M^2) := \begin{cases} \alpha_s + 1 & npu \alpha_s \leq 2, M^2 \leq 2 - \alpha_s \\ (M^2 - 1)^2 + \alpha_s(M^2 + 1), & иначе \end{cases}. \quad (33)$$

Доказательство. В силу теоремы 1 и леммы 1 в применении к матрицам $A(q)$ и $Q(q)$, введенным в (13) и (14), для L^2 -диссипативности схемы (6), (7) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{1}{\beta} \geq \frac{1}{2\alpha_s} \max_{0 \leq q \leq M^2} (b + \sqrt{b^2 - 4\alpha_s |Q(q)|}), \quad (34)$$

где $b = a_{11}q_{22} + a_{22}q_{11} - 2a_{12}q_{12}$ и учтено, что $|A(q)| = \alpha_s$.

Из формул (13) и (16) следует, что

$$\begin{aligned} b &= 2\alpha\sigma[q + (q + \alpha_s)^2] + \frac{1}{2\alpha}(q + 1) + (q + \alpha_s)\left[2\alpha\sigma(q + 1) + \frac{1}{2\alpha}(q + 1)\right] - \\ &- 2\sqrt{q}\left[2\alpha\sigma\sqrt{q}(q + \alpha_s + 1) + \frac{1}{2\alpha}2\sqrt{q}\right] = 2\alpha\left\{\sigma[q + (q + \alpha_s)^2 + (q + \alpha_s)(q + 1) - \right. \\ &\left.- 2q(q + \alpha_s + 1)]\right\} + \frac{1}{2\alpha}[(q + 1)(q + \alpha_s + 1) - 4q] = 2\alpha\alpha_s b_1(q) + \frac{1}{2\alpha}b_2(q), \end{aligned}$$

с квадратными трехчленами относительно q (зависящими также от α_s и M)

$$b_1(q) = \sigma(q + \alpha_s + 1) = \left(1 - \frac{q}{M^2}\right)(q + \alpha_s + 1), \quad b_2(q) = (q - 1)^2 + \alpha_s(q + 1).$$

По следствию 1 необходимым условием выполнения критерия (34) служат неравенства

$$\frac{1}{\beta} \geqslant \frac{1}{2\alpha_s} \max_{0 \leqslant q \leqslant M^2} b \geqslant \max \left\{ \alpha \bar{b}_1, \frac{1}{4\alpha_s \alpha} \bar{b}_2 \right\} \text{ с } \bar{b}_k := \max_{0 \leqslant q \leqslant M^2} b_k(q), \quad k = 1, 2.$$

Корнями квадратного трехчлена $b_1(q)$ являются $q = -\alpha_s - 1$ и $q = M^2$. Он является вогнутой функцией по q и $b_1(0) = \alpha_s + 1$. Его вершиной является $q_{1v} = \frac{M^2}{2} \left(1 - \frac{\alpha_s + 1}{M^2}\right)$ и

$$b_1(q_{1v}) = \left[1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha_s + 1}{M^2}\right)\right] \left(\frac{M^2}{2} - \frac{\alpha_s + 1}{2} + \alpha_s + 1\right) = \frac{1}{4M^2} (M^2 + \alpha_s + 1)^2.$$

Поскольку $q_{1v} \geqslant 0$ при $M^2 \geqslant \alpha_s + 1$, то верна формула (32).

Имеем $b_2(q) = q^2 + (\alpha_s - 2)q + (\alpha_s + 1)$. Его вершиной служит $q_{2v} = 1 - \frac{\alpha_s}{2}$. В случае $\alpha_s \geqslant 2$ данный $b_2(q)$ возрастает по $q \geqslant 0$ и поэтому $\bar{b}_2 = b_2(M^2) = (M^2 - 1)^2 + \alpha_s(M^2 + 1)$. В случае $\alpha_s < 2$ имеем $q_{2v} > 0$ и тем самым $\bar{b}_2 = b_2(0) = \alpha_s + 1$ при $M^2 \leqslant 2q_{2v}$ либо $\bar{b}_2 = b_2(M^2)$ при $M^2 \geqslant 2q_{2v}$. В итоге это приводит к формуле (33).

Достаточное условие (31) выполнения критерия (34) вытекает из следствия 1 и оценки $\frac{1}{\alpha_s} \max_{0 \leqslant q \leqslant M^2} b \leqslant 2\bar{b}_1\alpha + \frac{\bar{b}_2}{2\alpha_s \alpha}$. \square

Замечание 2. При $M = 0$ имеем $q = 0$ и $b_1 = \sigma(\alpha_s + 1)$ и $b_2 = \alpha_s + 1$. В этом случае следует брать максимум по $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, и теорема сохраняет силу, более того, необходимое условие можно усилить до

$$\frac{1}{\beta} \geqslant \bar{b}_1\alpha + \frac{\bar{b}_2}{4\alpha_s \alpha} = (\alpha_s + 1) \left(\alpha + \frac{1}{4\alpha_s \alpha}\right).$$

Функции β_{nec} и β_{suf} непрерывны в октанте $\alpha > 0$, $\alpha_s \geqslant 0$, $M^2 \geqslant 0$, не возрастают по M^2 (т.к. по определению \bar{b}_1 и \bar{b}_2 не убывают по M^2) и стремятся к 0 при $\alpha \rightarrow +0$ и $\alpha \rightarrow +\infty$. Существенно, что в силу указанного невозрастания выполнение условий (30) или (31) при некотором $M = M_0 > 0$ влечет их выполнение при всех $0 \leqslant |M| \leqslant M_0$ (при фиксированных α и α_s). Обратим внимание на то, что $\frac{1}{4}\beta_{nec} \leqslant \beta_{suf} \leqslant \frac{1}{2}\beta_{nec}$.

На рис. 2 даны типичные графики β_{nec} и β_{suf} в зависимости от α и $|M|$ при трех характерных значениях α_s .

В доказательстве теоремы 3 можно было найти $\max_{0 \leqslant q \leqslant M^2} b$ и тем самым несколько уточнить результат, сблизив необходимое и достаточное условия подобно [14]. Однако соответствующее выражение зависит от α более сложным образом, и формулировка результата оказывается более громоздкой.

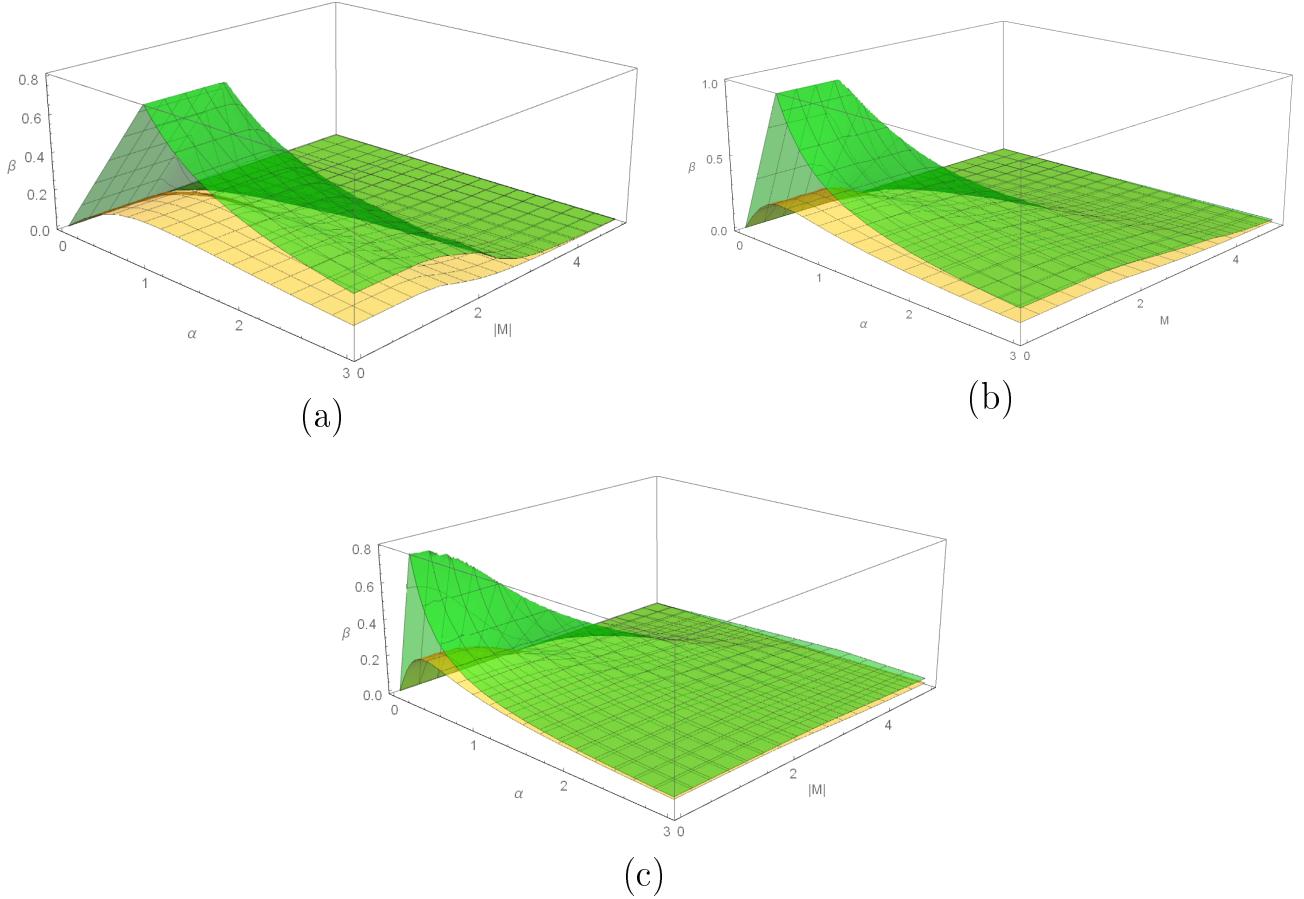


Рис. 2: Графики β_{nec} (верхний) и β_{suf} (нижний) в зависимости от α и $|M|$ при: (а) $\alpha_s = \frac{1}{4}$; (б) $\alpha_s = 1$; (с) $\alpha_s = 4$

Теорема 4. Пусть $\mu_{ph} = 0$, $\alpha_s > 0$ и $M \neq 0$. Для L^2 -диссипативности схемы (6), (7) необходимо, чтобы $\beta \leq \beta_{nec}^{(0)}$, и достаточно, чтобы $\beta \leq \beta_{suf}^{(0)} := \frac{1}{2}\beta_{nec}^{(0)}$, где

$$\beta_{nec}^{(0)} := \begin{cases} (\alpha_s + 1)\left(\alpha + \frac{1}{4\alpha_s\alpha}\right) & \in D_I \\ \frac{(M^2 - 1)^2 + \alpha_s(M^2 + 1)}{4\alpha_s\alpha} & \in D_{II} \\ (\alpha_s + 1)\left(\alpha + \frac{1}{4\alpha_s\alpha}\right) + \\ + \frac{1}{16\alpha_s\alpha(\kappa\alpha^2 - 1)}[(M^2 - \alpha_s - 1)\kappa\alpha^2 + \alpha_s - 2]^2 & \in D_{III} \end{cases} \quad (35)$$

с $\kappa := \frac{4\alpha_s}{M^2}$. Множества D_I - D_{III} включают точки с положительными координатами $(\alpha^2, \alpha_s, M^2)$. В D_I это: (1) $\kappa\alpha^2 < 1$, $(M^2 - \alpha_s - 1)\kappa\alpha^2 + \alpha_s - 2 < 0$ и $(\alpha_s + 1)\kappa\alpha^2 \geq M^2 + \alpha_s - 2$; (2) $\kappa\alpha^2 = 1$ и $M^2 \leq 3$; (3) $\kappa\alpha^2 > 1$ и $(M^2 - \alpha_s - 1)\kappa\alpha^2 + \alpha_s - 2 \leq 0$.

В D_{II} это: (1) $\kappa\alpha^2 < 1$ и $(M^2 - \alpha_s - 1)\kappa\alpha^2 + \alpha_s - 2 \geq 0$; (2) $\kappa\alpha^2 < 1$,

$(M^2 - \alpha_s - 1)\kappa\alpha^2 + \alpha_s - 2 < 0$ и $(\alpha_s + 1)\kappa\alpha^2 \leq M^2 + \alpha_s - 2$; (3) $\kappa\alpha^2 = 1$ и $M^2 \geq 3$;

(4) $\kappa\alpha^2 > 1$, $(M^2 - \alpha_s - 1)\kappa\alpha^2 + \alpha_s - 2 > 0$ и $(M^2 + \alpha_s + 1)\kappa\alpha^2 \leq 2M^2 + \alpha_s - 2$.

В D_{III} это $\kappa\alpha^2 > 1$, $(M^2 - \alpha_s - 1)\kappa\alpha^2 + \alpha_s - 2 > 0$ и $(M^2 + \alpha_s + 1)\kappa\alpha^2 \geq 2M^2 + \alpha_s - 2$.

Доказательство. Вернемся к началу доказательства теоремы 3. Справедливы формулы

$$s_2(q) := \frac{1}{2\alpha_s}b = a_0q^2 + a_1q + a_2, \quad a_0 = \frac{1}{4\alpha_s\alpha}(1 - \kappa\alpha^2),$$

$$a_1 = \frac{1}{4\alpha_s\alpha}[(M^2 - \alpha_s - 1)\kappa\alpha^2 + \alpha_s - 2], \quad a_2 = (\alpha_s + 1)\left(\alpha + \frac{1}{4\alpha_s\alpha}\right).$$

Обозначим через q_* (любую) точку максимума $s_2(q)$ на $[0, M^2]$. При $\kappa\alpha^2 \neq 1$ $s_2(q)$ — квадратный трехчлен с вершиной $q_v = -\frac{a_1}{2a}$.

В случае $\kappa\alpha^2 < 1$ имеем $a_0 > 0$, и при $a_1 \geq 0$ получаем, что $q_v \leq 0$ и $s_2(q)$ возрастает при $q \geq 0$ и поэтому $q_* = M^2$. При $a_1 < 0$ имеем $q_v > 0$ и поэтому $q_* = 0$ для $M^2 \leq 2q_v$ (эквивалентно, $(\alpha_s + 1)\kappa\alpha^2 \geq M^2 + \alpha_s - 2$) либо $q_* = M^2$ для $M^2 \geq 2q_v$.

В случае $\kappa\alpha^2 = 1$ имеем $a_0 = 0$, $s_2(q)$ — аффинная функция, поэтому $q_* = 0$ при $a_1 \leq 0$ (эквивалентно, $M^2 \leq 3$) либо $q_* = M^2$ для $M^2 \geq 3$.

В случае $\kappa\alpha^2 > 1$ имеем $a_0 < 0$, и при $a_1 \leq 0$ получаем, что $s_2(q)$ убывает при $q \geq 0$ и поэтому $q_* = 0$. При $a_1 > 0$ имеем $q_v > 0$ и поэтому $q_* = M^2$ для $M^2 \leq q_v$ (эквивалентно, $(M^2 + \alpha_s + 1)\kappa\alpha^2 \leq 2M^2 + \alpha_s - 2$) либо $q_* = q_v$ для $M^2 \geq q_v$.

При этом верны формулы

$$s_2(0) = a_2, \quad s_2(M^2) = \frac{(M^2 - 1)^2 + \alpha_s(M^2 + 1)}{4\alpha_s\alpha}, \quad s_2(q_v) = a_2 - \frac{a_1^2}{4a_0}.$$

Переупорядочив результаты согласно этим значениям, завершим доказательство. \square

Функция $\beta_{nec}^{(0)}$ непрерывна в октанте $\alpha > 0$, $\alpha_s > 0$, $M^2 > 0$, не возрастает по M^2 и, как нетрудно проверить, стремится к 0 при $\alpha \rightarrow +0$ и $\alpha \rightarrow +\infty$. Кроме того, она не зависит от M на D_I и возрастает по α на D_{II} . На рис. 3 представлены графики $\beta_{nec}^{(0)}$ в зависимости от α и $|M|$ при трех характерных значениях α_s . На всех трех графиках имеются участки, относящиеся ко всем множествам D_I - D_{III} , и они помечены разной штриховкой.

На рис. 4 даны графики $\beta_{nec}^{(0)}$ в зависимости от α и α_s при двух характерных значениях $|M| = 1$ и 2 . В силу указанного свойства невозрастания

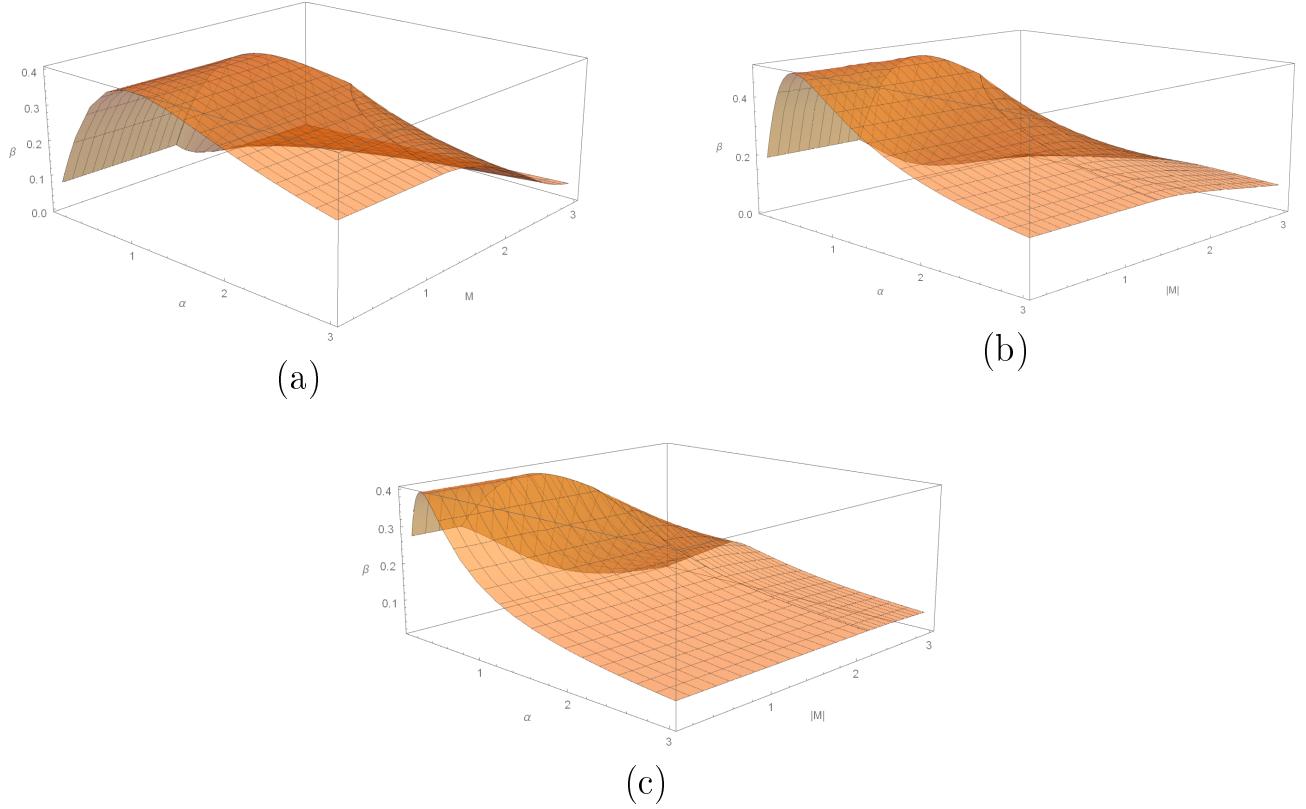


Рис. 3: Графики $\beta_{nec}^{(0)}$ в зависимости от α и $|M|$ при: (а) $\alpha_s = 1/4$, (б) $\alpha_s = 1$ и (в) $\alpha_s = 4$

выполнение условий теоремы с $\beta_{nec}^{(0)}$ при некотором $M = M_0 > 0$ влечет их выполнение при всех $0 \leq |M| \leq M_0$ (при фиксированных α и α_s), тем самым график 4 (а) представляет интерес для всей дозвуковой области $|M| \leq 1$, а график 4 (б) — также и для транс- и сверхзвуковых областей $|M| \leq 2$. На них фигурируют участки, относящиеся только ко множествам D_I и D_{II} .

Вернемся к теореме 3. Оптимальное значение α , при котором достигаются максимальные значения β_{nec} и β_{suf} (это происходит одновременно) и тем самым допустим максимальный шаг по времени, определяется из простого уравнения $\bar{b}_1\alpha = \frac{\bar{b}_2}{4\alpha_s\alpha}$. Эти значения α , β_{nec} и β_{suf} даются формулами

$$\alpha_{opt} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\bar{b}_2}{\alpha_s \bar{b}_1}}, \quad \bar{\beta}_{nec} = 4\bar{\beta}_{suf} = 2\sqrt{\frac{\alpha_s}{\bar{b}_1 \bar{b}_2}}.$$

Конкретизируем их. Неравенства на α_s и M^2 , входящие в выражения для \bar{b}_1 и \bar{b}_2 , порождают разбиение квадранта параметров (α_s, M^2) на четыре подобласти, см. рис. 5. В области Ω_I имеем $M^2 \leq \min\{\alpha_s + 1, 2 - \alpha_s\}$ (здесь

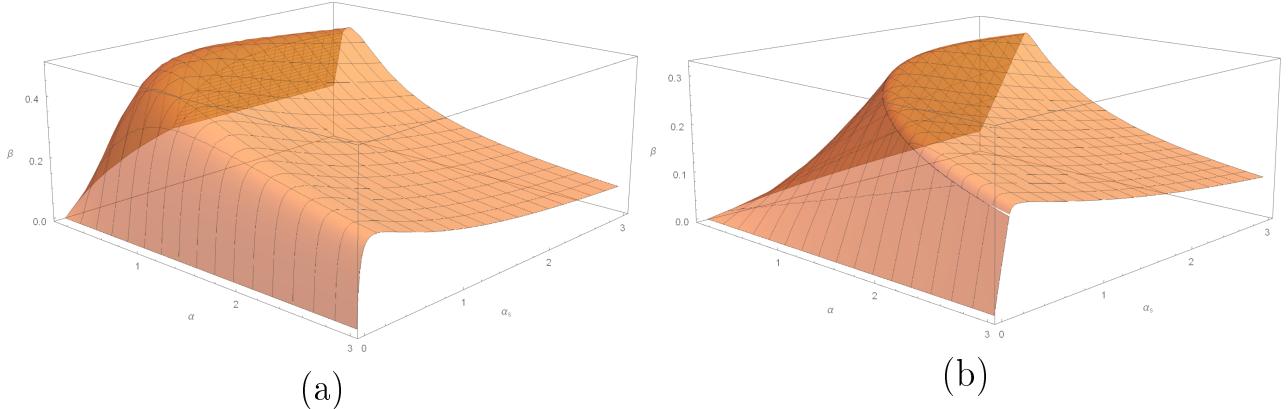


Рис. 4: Графики $\beta_{nec}^{(0)}$ в зависимости от α и α_s при: (а) $|M| = 1$ и (б) $|M| = 2$

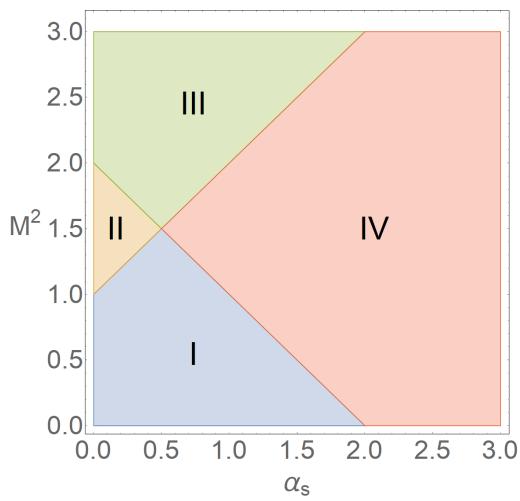


Рис. 5: Подобласти разбиения квадранта параметров (α_s, M^2) , $\alpha_s > 0$ в теореме 3

$0 < \alpha_s \leq 2$) и необходимое условие (30) принимает вид

$$\frac{1}{\beta} \geqslant \frac{1}{\beta_{nec}} = (\alpha_s + 1) \max \left\{ \alpha, \frac{1}{4\alpha_s \alpha} \right\}. \quad (36)$$

Только в ней оптимальные значения α и β_{nec} задаются формулами, не зависящими от M

$$\alpha_{opt} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha_s}}, \quad \bar{\beta}_{nec} = \frac{2\sqrt{\alpha_s}}{\alpha_s + 1}. \quad (37)$$

Максимум $\bar{\beta}_{nec}$ достигается при $\alpha_s = 1$ и равен 1.

Как нетрудно убедиться, сечения D_I любой плоскостью $\alpha^2 = \text{const} > 0$ содержат Ω_I . Поэтому теорема 4 позволяет в (36) и (37) улучшить $\frac{1}{\beta_{nec}}$ и $\bar{\beta}_{nec}$ до соответственно $(\alpha_s + 1)(\alpha + \frac{1}{4\alpha_s\alpha}) = \frac{1}{2\beta_{suf}}$ и $\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\alpha_s + 1}$.

В Ω_{II} имеем $\alpha_s + 1 \leq M^2 \leq 2 - \alpha_s$ (здесь $0 < \alpha_s \leq 0.5$), и необходимое условие можно записать в виде

$$\frac{1}{\beta} \geq \max \left\{ \frac{1}{4} \left(|M| + \frac{\alpha_s + 1}{|M|} \right)^2 \alpha, \frac{\alpha_s + 1}{4\alpha_s \alpha} \right\}.$$

Оптимальные значения α и β_{nec} задаются формулами

$$\alpha_{opt} = \sqrt{\frac{\alpha_s + 1}{\alpha_s}} \frac{|M|}{M^2 + \alpha_s + 1}, \quad \bar{\beta}_{nec} = \sqrt{\frac{\alpha_s}{\alpha_s + 1}} \frac{4|M|}{M^2 + \alpha_s + 1}.$$

В Ω_{III} имеем $\max\{\alpha_s + 1, 2 - \alpha_s\} \leq M^2$, и необходимое условие принимает вид

$$\frac{1}{\beta} \geq \max \left\{ \frac{1}{4} \left(|M| + \frac{\alpha_s + 1}{|M|} \right)^2 \alpha, \frac{(M^2 - 1)^2 + \alpha_s(M^2 + 1)}{4\alpha_s \alpha} \right\}.$$

Оптимальные значения α и β_{nec} задаются формулами

$$\begin{aligned} \alpha_{opt} &= \sqrt{\frac{(M^2 - 1)^2 + \alpha_s(M^2 + 1)}{\alpha_s}} \frac{|M|}{M^2 + \alpha_s + 1} \sim \frac{|M|}{\sqrt{\alpha_s}}, \\ \bar{\beta}_{nec} &= \frac{4\sqrt{\alpha_s}|M|}{(M^2 + \alpha_s + 1)\sqrt{(M^2 - 1)^2 + \alpha_s(M^2 + 1)}} \leq \frac{4\sqrt{\alpha_s}}{|M||M^2 - 1|} = O\left(\frac{1}{|M|^3}\right), \end{aligned}$$

где асимптотическое поведение указано при $|M| \rightarrow \infty$ и фиксированном α_s . Отметим линейный рост α_{opt} и быстрое убывание $\bar{\beta}_{nec}$ с ростом $|M|$.

В Ω_{IV} имеем $2 - \alpha_s \leq M^2 \leq \alpha_s + 1$ (здесь $\alpha_s \geq 0.5$), и необходимое условие таково:

$$\frac{1}{\beta} \geq \max \left\{ (\alpha_s + 1)\alpha, \frac{(M^2 - 1)^2 + \alpha_s(M^2 + 1)}{4\alpha_s \alpha} \right\}.$$

Оптимальные значения α и β_{nec} задаются формулами

$$\alpha_{opt} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(M^2 - 1)^2 + \alpha_s(M^2 + 1)}{\alpha_s(\alpha_s + 1)}}, \quad (38)$$

$$\bar{\beta}_{nec} = 2 \frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{(\alpha_s + 1)[(M^2 - 1)^2 + \alpha_s(M^2 + 1)]}} = \frac{1}{(\alpha_s + 1)\alpha_{opt}}. \quad (39)$$

На рис. 6 представлены графики α_{opt} и $\bar{\beta}_{nec}$ в зависимости от $\alpha_s, M^2 \in (0, 3]$. На них разной штриховкой помечены участки, относящиеся к различным областям Ω_I - Ω_{IV} .

При $M = 0$ формулы (38), (39) переходят в (37). Для сравнения отметим, что согласно критерию (24) значение α_{opt} такое же, как в (37), а оптимальное значение $\bar{\beta}_{cr}$ таково:

$$\bar{\beta}_{suf} = \frac{\sqrt{\alpha_s}}{2(\alpha_s + 1)} \leqslant \bar{\beta}_{cr} = \frac{\min\{\alpha_s, 1\}}{2\sqrt{\alpha_s}} \leqslant \bar{\beta}_{nec} = \frac{2\sqrt{\alpha_s}}{\alpha_s + 1}.$$

При этом асимптотическое поведение $\bar{\beta}_{cr}$ и $\bar{\beta}_{suf}$ (но не $\bar{\beta}_{nec}$) при $\alpha_s \rightarrow +0$ и $+\infty$ одинаковое. Графики трех величин из последних неравенств даны на рис. 7.

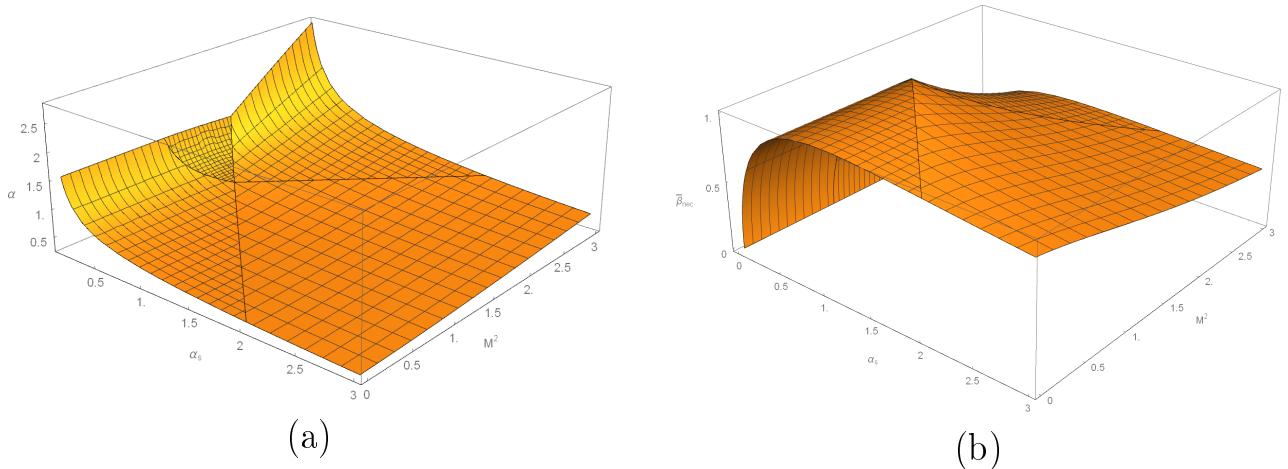


Рис. 6: Графики: (а) α_{opt} и (б) $\bar{\beta}_{nec}$ в зависимости от α_s и M^2

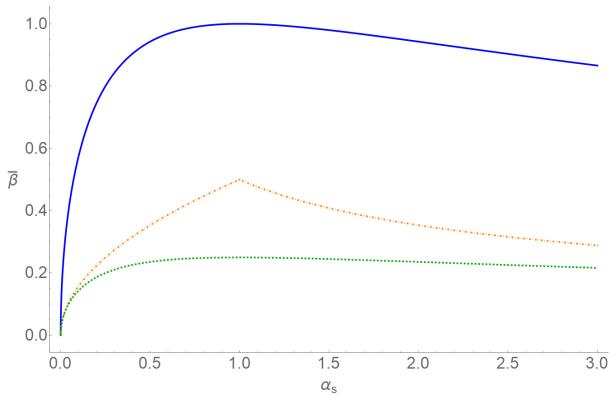


Рис. 7: Графики $\bar{\beta}_{nec}$ (сплошная), $\bar{\beta}_{cr}$ (штрих-пунктир) и $\bar{\beta}_{suf}$ (пунктир) в зависимости от α_s при $M = 0$

4. Случай КГидД регуляризации уравнений Навье-Стокса без искусственного коэффициента вязкости. Рассмотрим теперь бегло другой важный на практике случай, когда $\mu_{art} = 0$ (т.е. $\alpha_s = 0$), а $\mu_{ph} > 0$, ис-

пользованный в том числе в [10, 12, 23]. Он существенно отличается от предыдущего, поскольку теперь используется регуляризация баротропных уравнений Навье-Стокса, а не Эйлера, и уравнение импульса относительно u имеет уже параболический тип вместо гиперболического 1-го порядка. Вместе с тем благодаря тому, что выше рассматривались любые значения $\alpha_s > 0$, его можно свести к уже рассмотренному посредством замен

$$\alpha_s = \frac{d}{\tau_*}, \quad d := \frac{\nu_{ph*}}{c_*^2}, \quad \alpha = \frac{c_* \tau_*}{h},$$

где параметр d имеет размерность времени. Следуя [24], теперь формулы (11) не используются и работа идет непосредственно с τ_* и Δt ; это связано и с тем, что выбор τ здесь априори не очевиден, и более того, его желательно выяснить в ходе анализа устойчивости. Ниже для краткости опускаем индекс $*$ у ν_{ph*} и τ_* .

Указанные замены в теореме 3 приводят к следующему результату.

Теорема 5. Пусть $\mu_{art} = 0$ и $d > 0$. Для L^2 -диссипативности схемы (6), (7) необходимо выполнение неравенства

$$\Delta t \leq \Delta t_{nec} := \min \left\{ \frac{h^2}{c_*^2 \bar{b}_1 \tau}, \frac{4d}{\bar{b}_2} \right\} \quad (40)$$

и достаточно выполнение неравенства

$$\Delta t \leq \Delta t_{suf} \leq \frac{2h^2}{4c_*^2 \bar{b}_1 \tau + d^{-1} \bar{b}_2 h^2}, \quad (41)$$

тогда

$$\begin{aligned} \bar{b}_1 &= \bar{b}_1 \left(\frac{d}{\tau}, M^2 \right) = \begin{cases} 1 + \frac{d}{\tau} & \text{при } M^2 \leq 1 + \frac{d}{\tau} \\ \frac{1}{4} \left[|M| + \left(\frac{d}{\tau} + 1 \right) \frac{1}{|M|} \right]^2 & \text{при } M^2 \geq 1 + \frac{d}{\tau} \end{cases}, \\ \bar{b}_2 &= \bar{b}_2 \left(\frac{d}{\tau}, M^2 \right) = \begin{cases} 1 + \frac{d}{\tau} & \text{при } \frac{d}{\tau} \leq 2, M^2 \leq 2 - \frac{d}{\tau} \\ (M^2 - 1)^2 + \frac{d}{\tau} (M^2 + 1), & \text{иначе} \end{cases}. \end{aligned}$$

Переформулировка теоремы 4 выполняется аналогично; для краткости ее опускаем.

Введем безразмерный параметр $\theta_h = \frac{c_* h}{\nu_{ph}}$. В области Ω_I , где $M^2 \leq \min \left\{ \frac{d}{\tau} + 1, 2 - \frac{d}{\tau} \right\}$ (здесь $0 < \frac{d}{\tau} \leq 2$, а $M^2 \leq \frac{3}{2}$), необходимое условие (40) с учетом теоремы 4, как указано в предыдущем разделе, можно уточнить как

$$\Delta t \leq \Delta t_{nec}^{(0)} := \frac{4h^2}{4c_*^2(d + \tau) + (d^{-1} + \tau^{-1})h^2}, \quad (42)$$

а достаточное условие (41) принимает вид $\Delta t \leq \Delta t_{suf} = \frac{1}{2} \Delta t_{nec}^{(0)}$. Справедливы двусторонние оценки

$$\frac{1}{2} \min\{d, \tau\} \leq \frac{d\tau}{d + \tau} \leq \Delta t_{suf}^{(0)} \leq 2 \frac{d\tau}{d + \tau} \leq 2 \min\{d, \tau\} \quad \text{при } h^2 \geq 4c_*^2 d\tau, \quad (43)$$

$$\frac{h^2}{4c_*^2(d + \tau)} \leq \Delta t_{suf}^{(0)} \leq \frac{h^2}{2c_*^2(d + \tau)} \quad \text{при } h^2 \leq 4c_*^2 d\tau. \quad (44)$$

Соответствующее оптимальное значение параметра τ , при котором как необходимое, так и достаточное условия на Δt наиболее широкие, таково:

$$\tau_{opt} = \begin{cases} \frac{d}{M^2 - 1} & \text{при } \frac{2}{\theta_h} \leq M^2 - 1, |M| > 1 \\ \frac{h}{2c_*} = \frac{1}{2} d\theta_h & \text{при } \max\{M^2 - 1, 0\} \leq \frac{2}{\theta_h} \leq 2 - M^2 \\ \frac{d}{2 - M^2} & \text{при } \frac{2}{\theta_h} \geq 2 - M^2. \end{cases} \quad (45)$$

Обратим внимание на то, что τ_{opt} в двух из трех указанных случаев *не зависит от h* , что принципиально отличается от предыдущей формулы (11) для τ ; подобное относится и к оценкам (43), а также имеет место ниже и в случае областей Ω_{II} - Ω_{IV} . В третьем случае τ_{opt} совпадает с (11) при $\alpha = \frac{1}{2}$ и не зависит от M . Расчеты в [23] были выполнены с параметрами, попадающими в последний случай и в основном с таким τ_{opt} , при малых числах Маха. Для них $\Delta t_{nec}^{(0)} \approx 4d$ в формуле (42), что достаточно хорошо согласуется с Δt , найденным экспериментально в [23]. Однако подчеркнем, что до сих пор никаких формул типа (42) для выбора Δt для схем на разнесенных или неразнесенных сетках с регуляризацией при $\mu_{art} = 0$ в литературе предложено не было (исключая [24] при $M = 0$).

Отметим, что при $\frac{2}{\theta_h} \leq M^2 - 1$ и $|M| \rightarrow 1 + 0$ имеем $\tau_{opt} \rightarrow +\infty$; это является признаком того, что данная регуляризация при таких параметрах едва ли удовлетворительна. Подобное наблюдается при $|M| \rightarrow 1$ или $|M| \rightarrow \sqrt{2}$ и в аналогичных формулах ниже.

Замечание 3. В теореме 5 необходимое условие (40) в Ω_I

$$\Delta t \leq \min \left\{ \frac{h^2}{c_*^2(d + \tau)}, 4 \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{d} \right)^{-1} \right\}$$

не очень существенно отличается от (42). Однако оно приводит к другой формуле для оптимального значения τ , которая представляется менее

адекватной:

$$\tilde{\tau}_{opt} = \begin{cases} \frac{d}{M^2-1} & npu \quad \frac{2}{\theta_h} \leqslant \sqrt{M^2 - 1}, \quad |M| > 1 \\ \frac{h^2}{4\nu_{ph}} = \frac{1}{4}d\theta_h^2 & npu \quad \sqrt{\max\{M^2 - 1, 0\}} \leqslant \frac{2}{\theta_h} \leqslant \sqrt{2 - M^2} \\ \frac{d}{2-M^2} & npu \quad \frac{2}{\theta_h} \geqslant \sqrt{2 - M^2} \end{cases}$$

Для сравнения отметим, что в Ω_I при $M = 0$ получаем

$$\tau_{opt} = \max \left\{ \frac{h}{2c_*}, \frac{d}{2} \right\}, \quad \tilde{\tau}_{opt} = \max \left\{ \frac{h^2}{4\nu_{ph}}, \frac{d}{2} \right\}, \quad \tau_{opt,cr} = d,$$

где значение $\tau_{opt,cr} = d$ получено на основе критерия (24) [24].

В области Ω_{II} , где $1 + \frac{d}{\tau} \leqslant M^2 \leqslant 2 - \frac{d}{\tau}$ (здесь $0 < \frac{d}{\tau} \leqslant \frac{1}{2}$, а $1 < M^2 < 2$), достаточное условие (41) таково:

$$\Delta t \leqslant \Delta t_{suf} = \frac{2h^2}{c_*^2 \left[|M| + \left(\frac{d}{\tau} + 1 \right) \frac{1}{|M|} \right]^2 \tau + \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{\tau} \right) h^2}$$

и приводит к следующему оптимальному значению τ :

$$\tau_{opt} = \begin{cases} \frac{d}{M^2+1} \sqrt{1 + M^2 \theta_h^2} & \text{при } \frac{M^2+1}{\sqrt{1+M^2\theta_h^2}} \leqslant \min\{M^2 - 1, 2 - M^2\} \\ \frac{d}{\min\{M^2-1, 2-M^2\}} & \text{иначе} \end{cases}.$$

В области Ω_{III} , где $\max\{\frac{d}{\tau} + 1, 2 - \frac{d}{\tau}\} \leqslant M^2$ (здесь $M^2 \geqslant \frac{3}{2}$), достаточное условие (41) имеет вид

$$\Delta t \leqslant \Delta t_{suf} = \frac{2h^2}{c_*^2 \left[|M| + \left(\frac{d}{\tau} + 1 \right) \frac{1}{|M|} \right]^2 \tau + \left[\frac{1}{d}(M^2 - 1)^2 + \frac{1}{\tau}(M^2 + 1) \right] h^2}$$

и приводит к следующему оптимальному значению τ :

$$\tau_{opt} = \begin{cases} \frac{d}{2-M^2} & \text{при } r(M, \theta_h) \leqslant 2 - M^2, \quad M^2 < 2 \\ \frac{d}{r(M, \theta_h)} & \text{при } \max\{2 - M^2, 0\} \leqslant r(M, \theta_h) \leqslant M^2 - 1, \\ \frac{d}{M^2-1} & \text{при } r(M, \theta_h) \geqslant M^2 - 1 \end{cases}$$

где $r(M, \theta_h) := (M^2 + 1) / \sqrt{1 + (M^2 + 1)M^2\theta_h^2}$.

В области Ω_{IV} , где $2 - \frac{d}{\tau} \leqslant M^2 \leqslant \frac{d}{\tau} + 1$ (здесь $\frac{d}{\tau} > \frac{1}{2}$), достаточное условие (41) таково:

$$\Delta t \leqslant \Delta t_{suf} = \frac{2h^2}{4c_*^2(d + \tau) + \left[\frac{1}{d}(M^2 - 1)^2 + \frac{1}{\tau}(M^2 + 1) \right] h^2}$$

и приводит к следующему оптимальному значению τ :

$$\tau_{opt} = \begin{cases} \frac{d}{\max\{2-M^2, M^2-1\}} & \text{при } \frac{2}{\theta_h} \leq \sqrt{M^2 + 1} \max\{2 - M^2, M^2 - 1\} \\ \sqrt{M^2 + 1} \frac{h}{2c_*} & \text{иначе} \end{cases}.$$

В случае $M^2 \leq 1 - \varepsilon$ с $0 < \varepsilon < 1$ справедливы аналогичные (43), (44) оценки

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \min\{d, \tau\} &\leq \Delta t_{suf}^{(0)} \leq \frac{2}{\varepsilon^2} \min\{d, \tau\} \quad \text{при } h^2 \geq 4c_*^2 d \tau, \\ \frac{h^2}{8c_*^2(d + \tau)} &\leq \Delta t_{suf}^{(0)} \leq \frac{h^2}{2\varepsilon^2 c_*^2(d + \tau)} \quad \text{при } h^2 \leq 4c_*^2 d \tau. \end{aligned}$$

При $M = 0$ в Ω_{IV} получаем $\tau_{opt} = \min\{\frac{h}{2c_*}, \frac{d}{2}\}$ и по-прежнему $\tau_{opt,cr} = d$.

Список литературы

1. Кулаковский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. 2-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8724-3_10
2. LeVeque R.J. Finite volume methods for hyperbolic problems. Cambridge, Cambridge University Press, 2004. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511791253>
3. Wesseling P. Principles of computational fluid dynamics. Berlin, Springer, 2009. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-05146-3>
4. Abgrall R., Shu C.-W., eds. Handbook of numerical methods for hyperbolic problems: basic and fundamental issues. Handbook of Numerical Analysis. V. 17. Amsterdam, North Holland, 2016. [https://doi.org/10.1016/s1570-8659\(16\)x0002-6](https://doi.org/10.1016/s1570-8659(16)x0002-6)
5. Четверушкин Б.Н. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: МАКС Пресс, 2004.
6. Елизарова Т.Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научный мир, 2007. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-00292-2>
7. Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. М.-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2009.
8. Елизарова Т.Г., Широков И.А. Регуляризованные уравнения и примеры их использования при моделировании газодинамических течений. М.: МАКС Пресс, 2017.

9. Булатов О.В., Елизарова Т.Г. Регуляризованные уравнения мелкой воды и эффективный метод численного моделирования течений в неглубоких водоемах // Ж. вычисл. матем. физ. 2011. Т. 51. № 1. С. 170–184. <https://doi.org/10.1134/s0965542516040047>
10. Balashov V., Zlotnik A., Savenkov E. Analysis of a regularized model for the isothermal two-component mixture with the diffuse interface // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2017. V. 32. № 6. P. 347–358. <https://doi.org/10.1515/rnam-2017-0033>
11. Елизарова Т.Г., Злотник А.А., Истомина М.А. Гидродинамические аспекты формирования спирально-вихревых структур во вращающихся газовых дисках // Астрон. журн. 2018. Т. 95. № 1. С. 11–21. <https://doi.org/10.1134/s1063772918010018>
12. Balashov V., Zlotnik A. An energy dissipative spatial discretization for the regularized compressible Navier-Stokes-Cahn-Hilliard system of equations // Math. Model. Anal. 2020. V. 25. № 1. P. 110–129. <https://doi.org/10.3846/mma.2020.10577>
13. Zlotnik A., Lomonosov T. On conditions for weak conservativeness of regularized explicit finite-difference schemes for 1D barotropic gas dynamics equations // In: Differential and Difference Equations with Applications. Springer Proc. in Math. and Stat. 2018. V. 230. P. 635–647. https://doi.org/10.1007/978-3-319-75647-9_49
14. Злотник А.А., Ломоносов Т.А. Условия L^2 -диссипативности линеаризованных явных разностных схем с регуляризацией для уравнений 1D баротропной газовой динамики // Ж. вычисл. матем. физ. 2019. Т. 59. № 3. С. 481–493. <https://doi.org/10.1134/s0965542519030151>
15. Злотник А.А., Ломоносов Т.А. О L^2 -диссипативности линеаризованной явной разностной схемы с КГД-регуляризацией для системы уравнений баротропной газовой динамики // Докл. РАН. Матем., информ., процессы упр. 2020. Т. 492. С. 31–37. <https://doi.org/10.1134/s1064562420030229>
16. Feireisl E., Vasseur A. New perspectives in fluid dynamics: mathematical analysis of a model proposed by Howard Brenner // In: New Directions in Mathematical Fluid Mechanics, Fursikov A.V., Galdi G.P., Pukhnachev V.V. (eds.) Basel, Birkhäuser, 2010. P. 153–179. <https://doi.org/10.1007/978-3-0346-0152-8>
17. Guermond J.-L., Popov B. Viscous regularization of the Euler equations and entropy principles // SIAM J. Appl. Math. 2014. V. 74. P. 284–305. <https://doi.org/10.1137/120903312>

18. *Svärd M.* A new Eulerian model for viscous and heat conducting compressible flows // Phys. A. 2018. V. 506. P. 350–375. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2018.03.097>
19. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.
20. *Van der Heul D.R., Vuik C., Wesseling P.* Stability analysis of segregated solution methods for compressible flow // Appl. Num. Math. 2001. V. 38. P. 257–274. [https://doi.org/10.1016/s0168-9274\(01\)00028-9](https://doi.org/10.1016/s0168-9274(01)00028-9)
21. *Bauer A.L., Loubere R., Wendroff B.* On stability of staggered schemes // SIAM J. Numer. Anal. 2008. V. 46. № 2. P. 996–1011. <https://doi.org/10.1137/060660151>
22. *Konangi S., Palakurthi N.K., Ghia U.* Von Neumann stability analysis of first-order accurate discretization schemes for one-dimensional (1D) and two-dimensional (2D) fluid flow equations // Comput. Math. Appl. 2018. V. 75. P. 643–665. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2017.09.040>
23. *Balashov V., Zlotnik A.* An energy dissipative semi-discrete finite-difference method on staggered meshes for the 3D compressible isothermal Navier-Stokes-Cahn-Hilliard equations // J. Comput. Dynamics. 2020. V. 7. № 2. P. 291–312. <https://doi.org/10.3934/jcd.2020012>
24. Злотник А.А., Ломоносов Т.А. L^2 -диссипативность разностных схем для регуляризованных 1D баротропных уравнений движения газа при малых числах Маха // Матем. моделир. 2021. Т. 33. № 5. С. 16–34. <https://doi.org/10.20948/mm-2021-05-02>
25. Годунов С.К., Рябенъкий В.С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977.
26. Lomonosov T. L^2 -dissipativity criteria for linearized explicit finite difference schemes for regularization of one-dimensional gas dynamics equations // J. Math. Sci. 2020. V. 244. № 4. P. 649–654. <https://doi.org/10.1007/s10958-019-04639-6>
27. Злотник А.А. О параболичности квазигидродинамической системы уравнений и устойчивости малых возмущений для нее // Матем. заметки. 2008. Т. 83. № 5. С. 667–682. <https://doi.org/10.1134/s0001434608050040>
28. Злотник А.А. Пространственная дискретизация одномерной баротропной квазигазодинамической системы уравнений и уравнение энергетического баланса // Матем. моделирование. 2012. Т. 24. № 10. С. 51–64.