



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • [Электронная библиотека](#)

[Препринты ИПМ](#) • [Препринт № 57 за 2021 г.](#)



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**[А.Д. Брюно, А.Б. Батхин](#)**

**Линии уровня многочлена на  
ПЛОСКОСТИ**

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Брюно А.Д., Батхин А.Б. Линии уровня многочлена на плоскости // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. № 57. 24 с.  
<https://doi.org/10.20948/prepr-2021-57>  
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-57>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М. В. КЕЛДЫША  
Российской академии наук**

**А. Д. Брюно, А. Б. Батхин**

**Линии уровня многочлена на плоскости**

**Москва — 2021**

УДК 517.5+004.421.6

**Александр Дмитриевич Брюно, Александр Борисович Батхин**

Линии уровня многочлена на плоскости. Препринты института прикладной математики им. М. В. Келдыша, Москва, 2021.

Предлагается метод вычисления расположения всех типов линий уровня вещественного многочлена на вещественной плоскости. Для этого надо вычислить его критические точки и критические кривые, а затем — критические значения многочлена (их конечное число). По ним вычисляются все критические линии уровня и по одному представителю некритических линий уровня, соответствующих интервалам значений между соседними критическими. Предлагается схема вычислений линий уровня, основанная на алгоритмах полиномиальной компьютерной алгебры: базисах Грёбнера, примарной декомпозиции идеала. Указано программное обеспечение для реализации этих вычислений. Разобраны нетривиальные примеры.

**Ключевые слова:** многочлен, критическая точка, критическая кривая, линия уровня, базис Грёбнера.

**Alexander Dmitrievich Bruno, Alexander Borisovich Batkhin**

Level lines of a polynomial in the plane.

We propose a method for computing the position of all types of level lines of a real polynomial in the real plane. To do this, it is necessary to compute its critical points and critical curves, and then to compute critical values of the polynomial (there are finite number of them). Now finite number of critical levels and one representative of noncritical level corresponding to a value between two neighboring critical ones enough to compute. We propose a scheme for computing level lines based on polynomial computer algebra algorithms: Gröbner bases, primary ideal decomposition. Software for these computations are pointed out. Nontrivial examples are considered.

**Key words:** polynomial, critical point, critical curve, level line, Gröbner bases.

©А.Д.Брюно, А.Б.Батхин, 2021.

©Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша, 2021

## 1. Введение

Пусть  $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . Рассмотрим вещественный многочлен  $f(X)$ . При постоянной  $c \in \mathbb{R}$  кривая на плоскости  $\mathbb{R}^2$

$$f(X) = c \quad (1.1)$$

является *линией уровня* многочлена  $f(X)$ .

Наша задача — описать все линии уровня многочлена  $f(X)$  на вещественной плоскости  $X \in \mathbb{R}^2$ . Пусть  $C_* = \inf f(X)$  и  $C^* = \sup f(X)$  по  $X \in \mathbb{R}^2$ . Основным результатом:

**Теорема.** *Имеется конечное множество критических значений  $c$ :*

$$C_* < c_1^* < c_2^* < \dots < c_m^* < C^*, \quad (1.2)$$

которым соответствуют критические линии уровня

$$f(X) = c_j^*, \quad j = 1, \dots, m, \quad (1.3)$$

а для значений  $c$  из каждого из  $m + 1$  интервала

$$I_0 = (C_*, c_1^*), \quad I_j = (c_j^*, c_{j+1}^*), \quad j = 1, \dots, m-1, \quad I_m = (c_m^*, C^*) \quad (1.4)$$

линии уровня топологически эквивалентны. Если  $C_* = c_1^*$  или  $C^* = c_m^*$ , то интервалы  $I_0$  или  $I_m$  отсутствуют.

Поэтому для выявления расположения всех типов линий уровня многочлена  $f(X)$  надо найти все критические значения  $c_j^*$ , изобразить  $m$  критических линий уровня (1.3) и по одной линии уровня для произвольного значения  $c$  из  $m + 1$  интервала (1.4). Способ вычисления этих линий уровня описан в [1] и отчасти в [2, гл. I, § 2] с помощью степенной геометрии. Более традиционный подход см. в [3, гл. I] или [4]. Локальное строение линий уровня многочлена рассматривалось в [2, гл. I, § 3]. Здесь некоторые результаты из [2, гл. I, § 3] дополнены.

## 2. Критические точки и критические кривые

Точка  $X = X^0$  называется *простой* для многочлена  $f(X)$ , если в ней отлична от нуля хотя бы одна из частных производных  $\partial f / \partial x_1, \partial f / \partial x_2$ .

**Определение 1.** Точка  $X = X^0$  для многочлена  $f(X)$  называется *критической* порядка  $k$ , если в точке  $X = X^0$  равны нулю все частные производные от  $f(X)$  до порядка  $k$ , т. е. все

$$\frac{\partial^l f}{\partial x_1^i \partial x_2^j}(X^0) = 0, \quad 1 \leq i + j = l \leq k,$$

и отлична от нуля хотя бы одна частная производная порядка  $k + 1$ .

**Определение 2.** *Кривая*

$$g(X) = 0 \tag{2.1}$$

называется *критической* для многочлена  $f(X)$ , если

- 1) она лежит на какой-то линии уровня (1.1) и
- 2) на ней  $\partial f / \partial x_1 \equiv 0$ , или  $\partial f / \partial x_2 \equiv 0$ .

Значения постоянной  $c = f(X)$  в критических точках  $X = X^0$  и на критических кривых (2.1) назовём *критическими* и обозначим  $c_j^*$  согласно (1.2).

### 3. Локальный анализ линий уровня

В дальнейшем вблизи точки  $X = X^0$  будем рассматривать аналитические обратимые замены координат

$$y_i = x_i^0 + \varphi_i(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0), \quad i = 1, 2, \tag{3.1}$$

где  $\varphi_i$  — аналитические функции от  $X - X^0$ .

**Лемма 1** ([2, гл. I, § 3]). *Если точка  $X^0$  простая и в ней  $\partial f / \partial x_2 \neq 0$ , то существует замена (3.1), приводящая уравнение (1.1) к виду*

$$f(X) = y_2 = c. \tag{3.2}$$

Она следует из теоремы о неявной функции.

Линии уровня (3.2) — это прямые, параллельные оси  $y_1$ .

Рассмотрим решения уравнения (1.1) вблизи критической точки  $X^0 = 0$  порядка 1. Тогда

$$f(X) = f_0 + ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + \dots$$

Дискриминант  $\Delta$  выписанной квадратичной формы есть  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

**Лемма 2** ([2, гл. I, § 3]). *Если в критической точке первого порядка  $X^0 = 0$  дискриминант  $\Delta \neq 0$ , то существует замена (3.1), приводящая уравнение (1.1) к виду*

$$f(X) = f_0 + \sigma y_1^2 + y_2^2 = c, \tag{3.3}$$

где  $\sigma = 1$  (если  $\Delta < 0$ ) или  $\sigma = -1$  (если  $\Delta > 0$ ).

Это двумерный вариант известной леммы Морса [5, гл. I, § 2].

**Лемма 3.** *Если в критической точке первого порядка  $X^0 = 0$  дискриминант  $\Delta = 0$ , то существует замена (3.1), приводящая уравнение (1.1) к виду*

$$f(X) = f_0 + y_2^2 + \tau y_1^n = c, \tag{3.4}$$

где целое  $n > 2$  и число  $\tau \in \{-1, 0, +1\}$ .

*Доказательство.* Сначала невырожденным линейным преобразованием  $X = ZB$  приводим квадратичную часть к  $z_2^2$ . Разложение многочлена  $f(X)$  в ряд по  $Z$  имеет вид

$$f = f_0 + z_2^2 + \sum_{q_1+q_2 \geq 3} f_Q Z^Q = \tilde{f}(Z).$$

Согласно теореме о неявной функции уравнение

$$\frac{\partial \tilde{f}(Z)}{\partial z_2} = 2z_2 + \dots = 0$$

имеет аналитическое решение

$$z_2 = \varphi(z_1).$$

Теперь сделаем замену

$$z_1 = w_1, \quad z_2 = w_2 + \varphi(w_1).$$

Тогда  $\tilde{f}(Z) = \tilde{\tilde{f}}$  и  $\partial \tilde{\tilde{f}} / \partial w_2 \equiv 0$  при  $w_2 = 0$ . Следовательно,

$$\tilde{\tilde{f}} = \varphi_0(w_1) + w_2^2 \left( 1 + h^{(2)}(W) \right),$$

где  $\varphi_0(w_1) = \sum_{k \geq 3} \alpha_k w_1^k$  и  $h^{(2)}(W)$  — степенной ряд от  $W$  без свободного члена.

При этом возможны два случая:

1.  $\varphi_0 \not\equiv 0$ ,
2.  $\varphi_0 \equiv 0$ .

В первом случае пусть  $n$  — это младшая степень  $w_1$  в ряду  $\varphi_0(w_1) = a_n w_1^n + \dots$ . Тогда после замены

$$y_1 = \sqrt[n]{\frac{\varphi_0(w_1)}{\text{sign } a_n}}, \quad y_2 = w_2 \sqrt{1 + h^{(2)}(W)}$$

получаем формулу (3.4) с  $\tau = \pm 1 = \text{sign } a_n$ .

Во втором случае формулу (3.4) с  $\tau = 0$  получаем после замены

$$y_1 = w_1, \quad y_2 = w_2 \sqrt{1 + h^{(2)}(W)}.$$

Доказательство окончено. □

Выражения (3.3) и (3.4) — это *нормальные формы* многочлена  $f(X)$  вблизи его критической точки первого порядка  $X^0 = 0$ .

Пусть теперь критическая точка  $X^0 = 0$  имеет порядок  $k > 1$ . Согласно [1, раздел 5] соответствующая ей линия уровня либо не имеет ветвей, входящих в критическую точку  $X^0 = 0$ , либо имеет несколько таких ветвей.

В первом случае критическая линия уровня состоит из этой точки  $X^0 = 0$ , а остальные линии уровня являются замкнутыми кривыми вокруг неё и соответствуют одному знаку разности  $c - f(X^0)$ .

Во втором случае критическая линия уровня состоит из конечного числа ветвей разных кратностей, входящих в критическую точку  $X^0 = 0$ . Они разбивают окрестность этой критической точки на криволинейные секторы. Остальные линии уровня заполняют эти секторы, оставаясь на некотором расстоянии от критической точки  $X^0 = 0$ . При этом в соседних секторах они соответствуют разным знакам разности  $c - f(X^0)$ , если разделяющая их ветвь имеет нечётную кратность, и одному знаку этой разности, если разделяющая их ветвь имеет чётную кратность.

#### 4. Глобальный анализ линий уровня

**Определение 3.** Пусть ребро  $\Gamma_j^{(1)}$  многоугольника Ньютона  $\Gamma(f)$  многочлена  $f(X)$  имеет внешнюю нормаль с одной или двумя положительными координатами и соответствует укороченному многочлену  $f_j^{(1)}(X)$ . Тогда пересечение корня  $X = Tt^\alpha$ ,  $T, \alpha = \text{const}, t \rightarrow \pm\infty$ , укороченного многочлена  $f_j^{(1)}(X)$  с бесконечностью  $x_i = \pm\infty$  назовём *бесконечной точкой пересечения*. Кратность корня — это *кратность* этой точки. Только в этих точках линии уровня достигают бесконечности.

У каждого многочлена имеется лишь конечное множество бесконечных точек пересечения, и все они с конечными кратностями. Можно исследовать характер линий уровня вблизи бесконечных точек пересечения в зависимости от их кратности. Здесь нет места для такого исследования. Вблизи однократной бесконечной точки пересечения они устроены просто (пример 1). Вблизи двукратной бесконечной точки пересечения они устроены сложнее, как показано в примере 2. Трёхкратная точка бесконечного пересечения разобрана в примере 3, а четырёхкратная имеется в примере 4.

**Лемма 4.** Для всех значений постоянной  $c$  из одного из  $m + 1$  интервалов (1.4) линии уровня (1.1) топологически эквивалентны.

Доказательство леммы основано на анализе линий уровня вблизи бесконечных точек пересечения, и здесь его не приводим. Оно будет опубликовано в отдельной статье.

Теорема, сформулированная во введении, следует из лемм 1–4 и описанных выше свойств линий уровня вблизи критической точки  $X^0 = 0$  порядка  $k > 1$ .

## 5. Вычисление критических значений, точек и кривых

В общем случае вычисление критических значений  $c_j^*$  и соответствующих им критических точек и кривых удобно проводить с использованием алгоритмов компьютерной алгебры, в первую очередь, с помощью базисов Грёбнера [6], [7, Гл. 2, 3].

Идеал, определяющий критические точки и кривые, состоит из следующих полиномов:

$$\mathcal{J} = \left\{ f(X) - c, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\}. \quad (5.1)$$

Согласно теореме 1 число критических значений  $c$  конечно. Тогда базис Грёбнера  $\mathcal{GBJ}$  идеала (5.1) для чистого лексикографического порядка  $x_1 \prec x_2 \prec c$  содержит полином  $h(c)$ , зависящий только от переменной  $c$ . Среди вещественных корней этого полинома следует искать критические значения  $c_j^*$ , для которых имеются вещественные критические линии уровня.

Как следует из раздела 2, аффинное многообразие, определяемое идеалом  $\mathcal{GBJ}$ , имеет размерность либо 0, либо 1. В первом случае критических кривых нет, ибо идеал  $\mathcal{GBJ}$  нульмерен. Во втором случае некоторым критическим значениям  $c_j^*$  соответствуют критические кривые. В обоих случаях, согласно теореме о примарном разложении [7, Гл. 4] или [8, Гл. 4], идеал  $\mathcal{GBJ}$  состоит из конечного числа примарных идеалов, каждый из которых задаёт либо критическую точку, либо критическую кривую. Определение размерности идеала легко выполняется с помощью вычисленного ранее базиса Грёбнера  $\mathcal{GBJ}$ .

В большинстве систем компьютерной алгебры имеются процедуры построения базисов Грёбнера для различных лексикографических порядков, а также некоторые дополнительные процедуры для проверки нульмерности идеала, вычисления его размерности и др. Подробнее рассмотрим как могут быть реализованы подобные вычисления в системе Maple. Можно воспользоваться пакетами Groebner и PolynomialIdeals, а также входящими в него процедурами: Basis — для вычисления базиса Грёбнера, HilbertDimension — для вычисления размерности идеала, IsZeroDimensional — для проверки нульмерности идеала, PrimaryDecomposition — для примарного разложения идеала, EquidimensionalDecomposition — для декомпозиции идеала на идеалы различных размерностей.

Предлагаем следующий порядок вычислений.

1. Составляется идеал  $\mathcal{J}$  и для него вычисляется базис Грёбнера  $\mathcal{GBJ}$  с чисто лексикографическим порядком  $x_1 \prec x_2 \prec c$  с использованием процедуры Basis пакета Groebner.
2. Базис  $\mathcal{GBJ}$  позволяет найти все критические значения  $c_j^*$  с помощью полинома  $h(c)$  в виде алгебраических чисел. Такой полином автоматически определяется для указанного выше лексикографического порядка, либо с

помощью процедуры `UnivariatePolynomial`.

3. Среди критических значений  $c_j^*$  нужно отобрать те, которым соответствуют вещественные критические точки и критические кривые. Это можно сделать, например, выполнив примарную декомпозицию базиса  $\mathcal{GBJ}$ , а затем определить нули полученных идеалов в поле  $\mathbb{R}$ .
4. Перед примарной декомпозицией идеала  $\mathcal{GBJ}$  можно вычислить его размерность с помощью процедуры `HilbertDimension`. Если она не равна нулю, то вначале с использованием процедуры `EquidimensionalDecomposition` вычисляется последовательность идеалов с размерностями 0 и 1 соответственно, а затем уже выполняется их декомпозиция. Идеалы с размерностью 0 дадут критические точки, а с размерностью 1 — критические кривые (а также вещественные критические точки).
5. Теперь для каждого примарного идеала следует найти его множество вещественных нулей. Если критическое значение  $c_j^*$  принадлежит  $\mathbb{Q}$ , то все вычисления выполняются точно. Если же оно есть алгебраическое число, то можно поступить так, как описано в [9, п. 5.6], т. е. проводить все вычисления по модулю идеала, определяющего критическое значение и критическую точку.
6. Теперь характер каждой критической точки определяется с использованием дискриминанта  $\Delta$  квадратичной формы разложения функции  $f(X)$  вблизи неё согласно леммам 2 и 3.

Выполненные вычисления позволяют перейти к построению эскизов линий уровня.

## 6. Построение эскизов линий уровня

Для построения эскиза линии уровня можно воспользоваться какой-либо системой компьютерной алгебры, имеющей программы построения изолиний (изоповерхностей) для двумерных или трёхмерных скалярных полей. Эти программы используют различные вычислительные алгоритмы, основанные на применении конечных элементов, которые триангулируют (покрывают) некоторую часть плоскости (обычно используются треугольные или квадратные конечные элементы) [10]. Затем вычисляют значения функции (1.1) в вершинах сетки и они интерполируются на весь конечный элемент. Такие алгоритмы хорошо справляются с ситуацией, когда у линии уровня нет особенностей. Наличие особенностей заставляет существенно уменьшать шаг разбиения и, соответственно, увеличивать объём вычислений. В примерах раздела 7 все рисунки линий уровня построены с использованием процедуры `contour` пакета `matplotlib` [11] для языка программирования Python.

В ряде случаев удаётся улучшить качество эскиза линии уровня, если для определённого значения  $c$  уравнение (1.1) может быть разложено на множители,

а нули этих множителей (или часть их) задают алгебраическую кривую рода 0. В этом случае можно вычислить рациональную параметризацию такой кривой [12], а по ней построить эскиз с любой точностью. С такой задачей неплохо справляется пакет `algcurves` системы Maple. Этот пакет, в частности, позволяет исследовать плоские алгебраические кривые. С его помощью можно изобразить эскиз кривой  $f(x_1, x_2) = 0$  путём численного интегрирования соответствующего дифференциального уравнения  $\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dx_1} = 0$  для некоторого набора начальных условий, определяемых точками, в которых хотя бы одна из частных производных функции  $f(x_1, x_2)$  равна нулю. Использование данного пакета для исследования набора кривых с разными порядками особенностей показало, что в случае особенностей высоких порядков качество эскиза получается не слишком высоким.

## 7. Примеры

**Пример 1.** Рассмотрим многочлен

$$f_1(X) = x_1^3 - 3x_1x_2 + x_2^3. \quad (7.1)$$

Уравнение  $f_1(X) = 0$  определяет алгебраическую кривую, которую называют «Декартов лист». Многоугольник Ньютона  $\Gamma(f)$  показан на рис. 1.

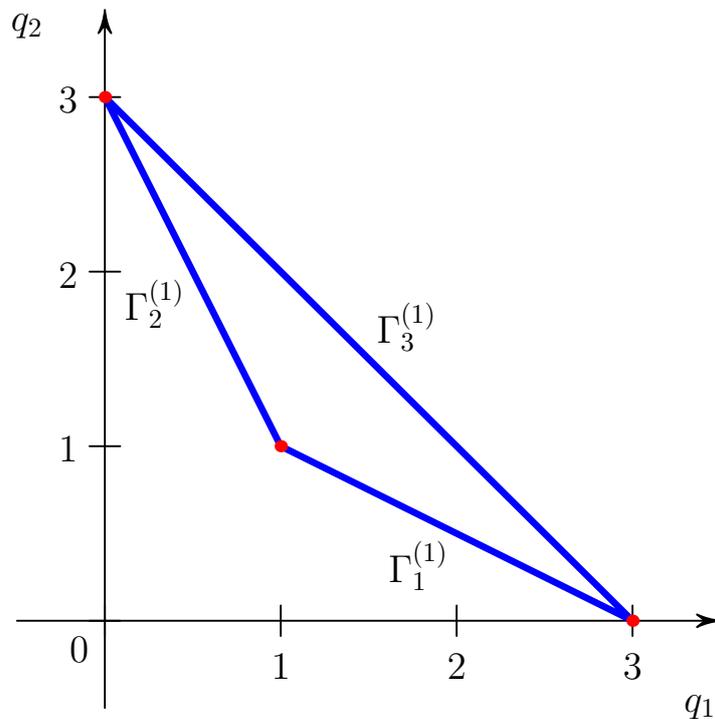


Рис. 1. Многоугольник Ньютона многочлена (7.1).

Он содержит три ребра, но только ребро  $\Gamma_3^{(1)}$  имеет внешнюю нормаль  $N_3 = (1,1)$  с положительной координатой. Соответствующий укороченный многочлен

$$\hat{f}_3^{(1)}(X) \equiv x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)$$

имеет однократный корень

$$X = (1, -1)t. \quad (7.2)$$

Согласно схеме вычислений раздела 5 вычисляем базис Грёбнера  $\mathcal{GBJ}$  идеала (5.1) и определяем его многочлен  $h(c) = c(c + 1)$ . Идеал имеет нулевую размерность, его примарная декомпозиция даёт три идеала:

$$\mathcal{GBJ}_1 = \{c, x_1, x_2\}, \quad (7.3)$$

$$\mathcal{GBJ}_2 = \{c + 1, x_1 - 1, x_2 - 1\}, \quad (7.4)$$

$$\mathcal{GBJ}_3 = \{c + 1, x_1^2 + x_1 + 1, x_1 + x_2 + 1\}. \quad (7.5)$$

Идеал (7.4) даёт критическую точку  $X_1 = (1,1)$  с критическим значением  $c_1^* = -1$  и дискриминантом  $\Delta_1 = -27 < 0$  (изолированная точка), идеал (7.3) — критическую точку  $X_2 = 0$  с критическим значением  $c_2^* = 0$  и дискриминантом  $\Delta_2 = 9 > 0$  (в ней пересекаются две ветви). Идеал (7.5) не имеет вещественных нулей. Линии уровня показаны на рис. 2.

При  $x_1 \rightarrow \pm\infty$  линии уровня стремятся к  $x_2 \rightarrow \mp\infty$ , накапливаясь у прямой (7.2) или у линии уровня с  $c_2^* = 0$ .

Заметим, что для  $c \notin \{-1, 0\}$  кривая  $f_1(X) - c = 0$  имеет род 1, т.е. является эллиптической кривой, уравнение которой может быть приведено к нормальной форме Вейерштрасса

$$y_2^2 = 4y_1^2 + \frac{27}{2} \left(4c - \frac{1}{2}\right) y_1 + \frac{27}{8} (1 + 20c - 8c^2) \quad (7.6)$$

с помощью преобразования

$$x_{1,2} = \frac{-12y_1 \pm 4y_2 + 36c + 9}{24y_1 + 54}.$$

Параметризация нормальной формы (7.6) задаётся с помощью функции Вейерштрасса  $\wp(z, g_2, g_3)$

$$y_1 = \wp(z, g_2, g_3), \quad y_2 = \wp'(z, g_2, g_3),$$

инварианты  $g_2, g_3$  которой суть коэффициенты, взятые со знаком минус, правой части уравнения (7.6) при степенях 1 и 0 переменной  $y_1$  соответственно. Эта

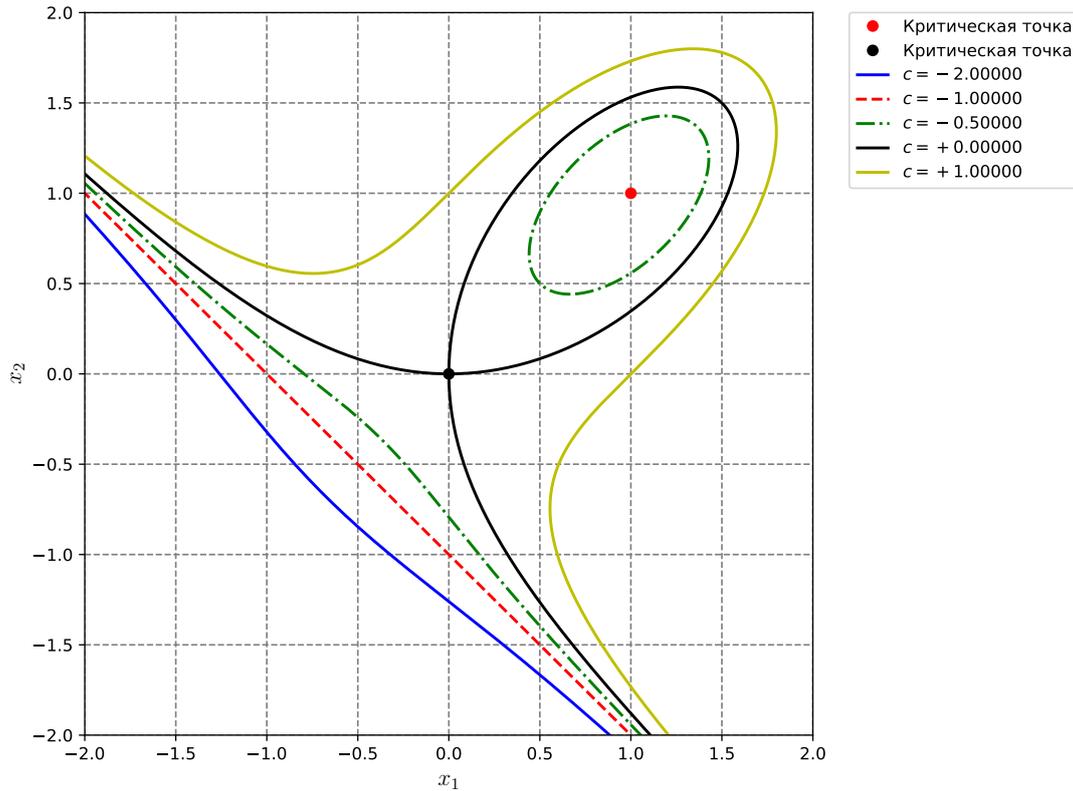


Рис. 2. Линии уровня многочлена (7.1).

параметризация может быть использована для визуализации линий уровня, однако требует подготовительной работы — вычисления периодов и определения множества вещественности функции  $\wp(z, g_2, g_3)$ . Авторы не считают возможным уделить здесь достаточно внимания этим вопросам и рекомендуют обратиться к соответствующим источникам, например, к книге [13].

Критические значения  $c_1^* = -1$  и  $c_2^* = 0$  как раз соответствуют ситуации, когда кривая  $f_1(X) - c = 0$  имеет род 0 и допускает рациональную параметризацию. При  $c = c_1^*$  уравнение линии уровня факторизуется на линейный и квадратичный множители:

$$f_1 + 1 = (x_1 + x_2 + 1) (x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - x_1 - x_2 + 1),$$

нуль последнего есть критическая точка  $X_1 = (1, 1)$ . При  $c = c_2^*$  имеем рациональную параметризацию Декартового листа

$$x_1 = \frac{3t}{1+t^3}, \quad x_2 = \frac{3t^2}{1+t^3}.$$

□

**Пример 2.** Рассмотрим многочлен

$$f_2 = x_2^2 + (x_1x_2 - 1)^2. \tag{7.7}$$

Его многоугольник Ньютона показан на рис. 3.

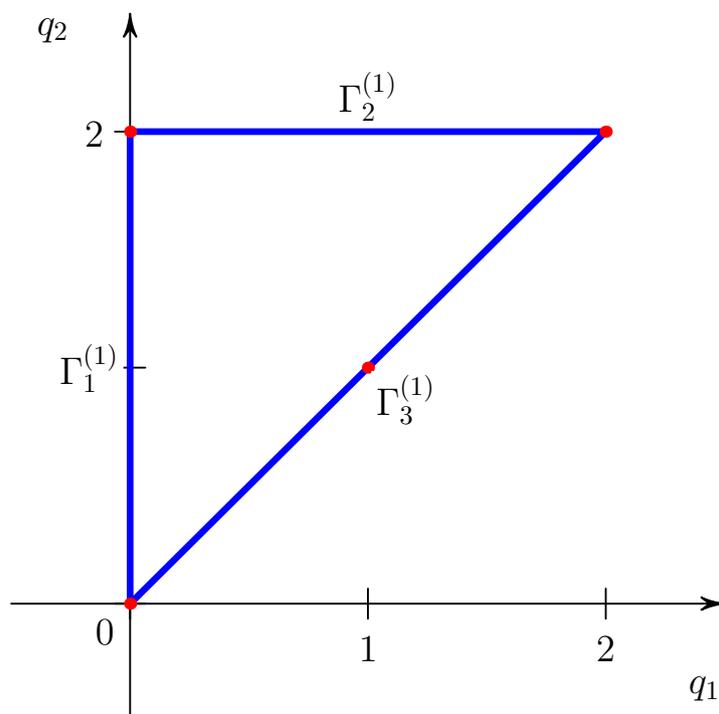


Рис. 3. Многоугольник Ньютона многочлена (7.7).

Он состоит из трёх рёбер, но только двум из них соответствуют внешние нормали с положительной координатой — это рёбра  $\Gamma_2^{(1)}$  и  $\Gamma_3^{(1)}$ . Рёбру  $\Gamma_2^{(1)}$  соответствует укороченный многочлен

$$\hat{f}_2^{(1)} \equiv x_2^2 + x_1^2 x_2^2 = x_2^2 (1 + x_1^2).$$

Он не имеет вещественного корня, уходящего в бесконечность.

Рёбру  $\Gamma_3^{(1)}$  соответствует укороченный многочлен

$$\hat{f}_3^{(1)} \equiv (x_1 x_2 - 1)^2,$$

имеющий двукратный корень

$$x_2 = \frac{1}{x_1},$$

уходящий в точки  $x_1 = \pm\infty$ ,  $x_2 = 0$ . Линии уровня многочлена (7.7) показаны на рис. 4.

Базис Грёбнера  $\mathcal{GBJ}$  идеала (5.1) для многочлена (7.7) имеет вид  $\{c - 1, x_1, x_2\}$ , и, следовательно, здесь имеется одна критическая точка  $x_1 = x_2 = 0$  с критическим значением  $c_1^* = 1$ . Линия уровня  $f_2(X) = 1$  состоит из прямой  $x_2 = 0$  и рациональной кривой  $x_2 = 2x_1 / (x_1^2 + 1)$ , её пересекающей. Справа

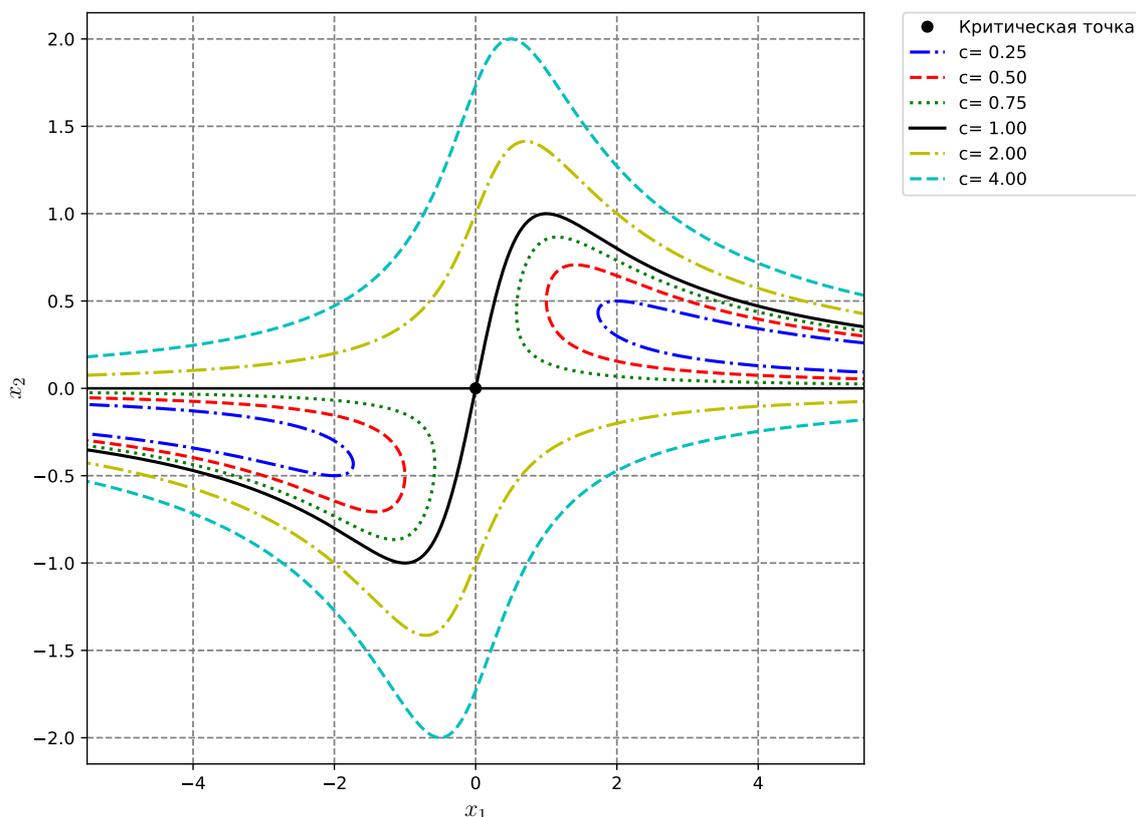


Рис. 4. Линии уровня многочлена (7.7).

между этой кривой и осью  $x_1$  находятся линии уровня с  $c \in (0,1)$ , но нет критической точки. При  $c \rightarrow 0$  эти линии расположены всё правее и как бы сложенны. Таково поведение линий уровня вблизи бесконечной точки пересечения  $x_1 = \infty, x_2 = 0$  кратности 2. Вблизи бесконечной точки пересечения  $x_1 = -\infty, x_2 = 0$  кратности 2 расположение линий уровня симметрично относительно начала координат.

Кстати, здесь  $C_* = \inf f(X) = 0$ , ибо на кривой  $x_2 = 1/x_1$  значения  $f(X) = x_2^2 = 1/x_1^2$ , они стремятся к нулю при  $x_1 \rightarrow +\infty$ . При этом  $C^* = +\infty$ , что видно при  $x_1 = 0$ .

Заметим, что поскольку многочлен  $f_2$  является суммой квадратов, то для любого  $c > 0, c \neq 1$ , легко построить рациональную параметризацию кривой  $f_2(X) - c = 0$ , используя известную рациональную параметризацию окружности. Для этой кривой она имеет вид

$$x_1 = \frac{2\sqrt{c}\tau + \tau^2 + 1}{\sqrt{c}(1 - \tau^2)}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{c}(1 - \tau^2)}{\tau^2 + 1}.$$

При  $\tau \in (-1,1)$  получаем линию уровня в верхней полуплоскости, при  $\tau \notin [-1,1]$  — в нижней. □

**Пример 3.** Рассмотрим вычисление линий уровня многочлена

$$\begin{aligned} f_1(X) &= x_1^5 + 2x_1^4x_2 + 4x_1^4 + x_1^3x_2^2 + x_1^3x_2 + 4x_1^3 + x_1^2x_2^3 - 6x_1^2x_2^2 - \\ &- 12x_1^2x_2 + 2x_1x_2^4 + x_1x_2^3 - 12x_1x_2^2 - 12x_1x_2 + x_2^5 + 4x_2^4 + 4x_2^3 = \\ &= (x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2)(x_1 + x_2 + 2)^2. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Здесь  $C_* = -\infty$ ,  $C^* = +\infty$ . Они достигаются при  $x_1 = 0$ .

Базис Грёбнера  $\mathcal{GBJ}$  идеала (5.1) здесь не приводим в силу его громоздкости, а многочлен  $h(c)$  вычисленного базиса имеет вид

$$h(c) = c(c + 1)(3125c^2 + 56736c + 54000). \quad (7.9)$$

Среди его корней отбираем те критические значения  $c_j^*$ , для которых соответствующие значения будут вещественными. Можно поочерёдно к ранее вычисленному идеалу  $\mathcal{GBJ}$  добавлять по одному множителю многочлена (7.9) и вычислять базис Грёбнера с лексикографическим порядком  $c \prec x_1 \prec x_2$ . Только для множителя  $c + 1$  получаем идеал  $\{3x_2^2 + 3x_2 + 1, x_1 + x_2 + 1, c + 1\}$ , который не имеет вещественных нулей. Таким образом, критическими значениями будут:

$$c^* \in \left\{ -\frac{28368}{3125} - \frac{3036\sqrt{69}}{3125}, -\frac{28368}{3125} + \frac{3036\sqrt{69}}{3125}, 0 \right\}.$$

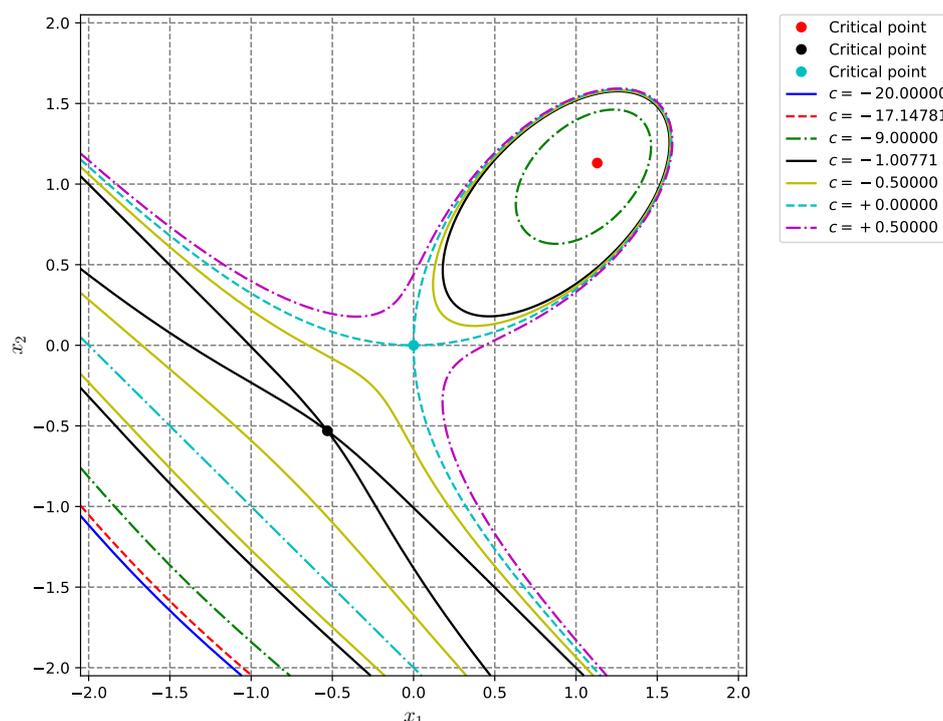


Рис. 5. Линии уровня многочлена (7.8) (крупный масштаб).

Значению  $c_1^* \approx -17.1478$  соответствует критическая точка  $X_1 : (x_1^{(1)} = x_2^{(1)} = (3 + \sqrt{69})/10)$ . В ней дискриминант  $\Delta \approx -14221.2 < 0$ , и она является изолированной.

Значению  $c_2^* \approx -1.0077$  соответствует критическая точка  $X_2 : (x_1^{(2)} = x_2^{(2)} = (3 - \sqrt{69})/10)$ . В ней дискриминант  $\Delta \approx 1.3415 > 0$ , и через неё проходят две ветви. Критическим значениям  $c_{1,2}^*$  соответствуют случаи леммы (2).

Значению  $c_3^* = 0$  соответствует критическая точка  $X_3 : (x_1^{(1)} = x_2^{(1)} = 0)$ . В ней дискриминант  $\Delta \approx 144 > 0$ , и через неё проходят две ветви.

Наконец, при  $c_3^* = 0$  имеется критическая прямая  $x_1 + x_2 + 2 = 0$ .

Заметим, что многочлен (7.8) раскладывается на два множителя:  $x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$  и  $(x_1 + x_2 + 2)^2$ . Нулям первого соответствует лист Декарта, нулям второго — пара совпадающих прямых. Используя это разложение многочлена  $f(X)$  на множители, можно легко вычислить все три указанные критические точки и критическую прямую  $x_1 + x_2 + 2 = 0$ . На ней тождественно аннулируются обе частные производные  $\partial f_1/\partial x_1$  и  $\partial f_1/\partial x_2$ .

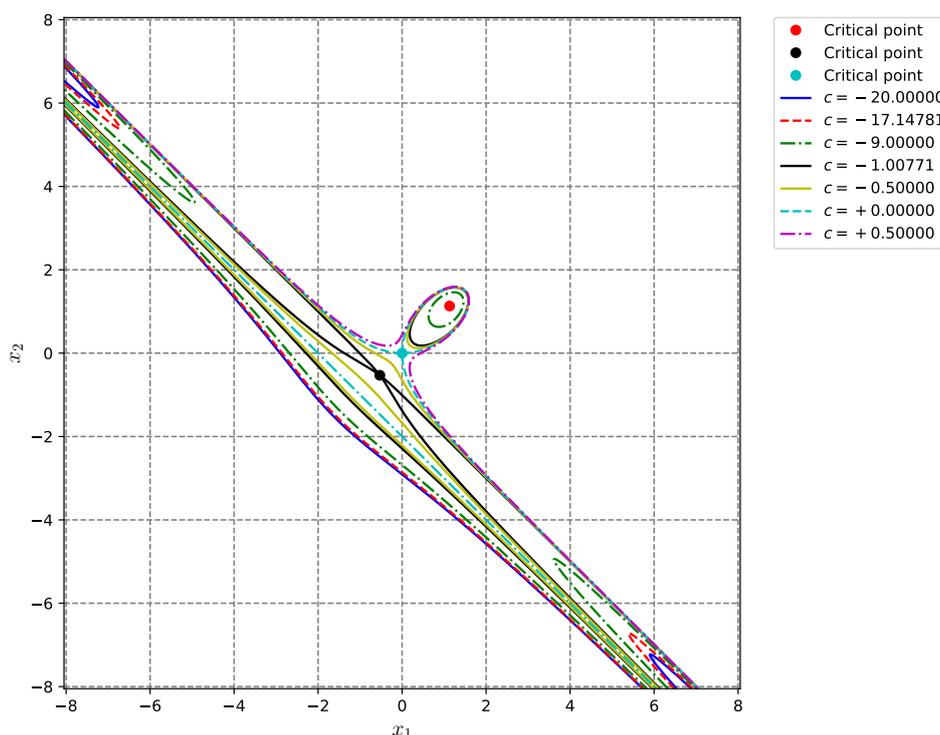


Рис. 6. Линии уровня многочлена (7.8).

Критические линии уровня для многочлена (7.8) показаны на рис. 5 и 6 в разных масштабах. Критические точки  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3 = 0$  и критическая прямая  $x_1 + x_2 + 2 = 0$  показаны полужирными.

Линия уровня для критического значения  $c_1^* \approx -17.14$  изображена пунктирной. На рис. 5 она состоит из точки  $X^{(1)}$  и кривой в левом нижнем углу. На рис. 6

она имеет ещё две ветви в левом верхнем и правом нижнем углах.

Линия уровня для критического значения  $c_2^* \approx -1$  показана штрих-пунктирной. Она имеет 3 компоненты: овал в первом квадранте, две пересекающиеся ветви выше критической линии и одну кривую ниже неё.

Линия уровня для критического значения  $c_3^* = 0$  показана сплошной. Она состоит из двух компонент: критической прямой и листа Декарта.

Четыре типа некритических линий уровня легко восстанавливаются, как лежащие целиком между соседними критическими.

Многоугольник Ньютона многочлена (7.8) показан на рис. 7.

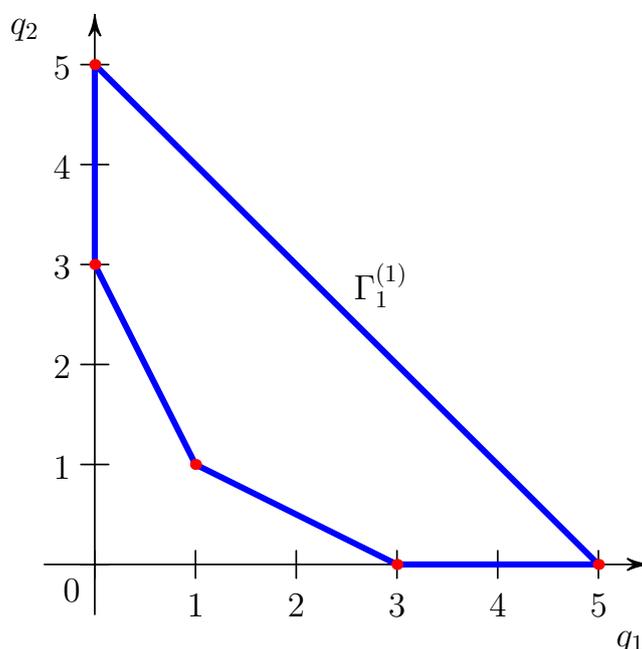


Рис. 7. Многоугольник Ньютона многочлена (7.8).

У него только одно ребро  $\Gamma_1^{(1)}$  соответствует бесконечности. Ему соответствует укороченный многочлен

$$\hat{f}_1^{(1)} \equiv (x_1^3 + x_2^3) (x_1 + x_2)^2 = (x_1 + x_2)^3 (x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2).$$

Он имеет трёхкратный корень  $x_2 = -x_1$ .

При  $x_1 \rightarrow +\infty$  имеются четыре критических линии: две для  $c = c_3^* = 0$  (включая критическую прямую  $x_1 + x_2 + 2 = 0$ ) и две ветви для  $c = c_2^*$ , к которым скапливаются остальные линии уровня. Некоторые из них имеют складку. Аналогичная картина имеет место при  $x_1 \rightarrow -\infty$ . Характер этих линий уровня можно видеть на рис. 6. □

**Пример 4.** В работах авторов [14—16] рассматривалась одна вещественная поверхность в  $\mathbb{R}^3$ , соответствующая особым точкам инвариантных метрик Эйн-

штейна. На плоскости в  $\mathbb{R}^3$ , где многочлен имеет кратный корень, сечение поверхности задаётся нулями многочлена

$$f_4(X) = -(1 + 2x_2) (8x_1x_2 + 8x_2^2 - 4x_1 - 4x_2 + 1) \times \\ \times (16x_1^3 + 16x_1^2x_2 - 4x_1 - 2x_2 + 1)^3. \quad (7.10)$$

Здесь, как и в примере 1,  $C_* = -\infty$ ,  $C^* = +\infty$ .

Базис Грёбнера  $\mathcal{GBJ}$  идеала (5.1), составленный для многочлена (7.10), здесь не приводим в силу его громоздкости, а соответствующий многочлен  $h(c)$  вычисленного базиса имеет вид

$$h = c(c + 16) (87071293440000000000c^4 + 861132808668019359744c^3 - \\ - 956419978944596480c^2 + 4296319584629409c - 940369969152).$$

Многочлен четвёртой степени имеет два вещественных корня, и, следовательно, множество критических значений  $c_j^*$  состоит из значений

$$c^* \in \{-16, -9.8910848, 0, 0.00022808\}.$$

Перестройка линий уровня происходит при этих четырёх значениях.

Размерность идеала  $\mathcal{GBJ}$  равна единице, поэтому здесь вначале находится его декомпозиция на два идеала размерностей 0 и 1 соответственно, а затем уже выполняется их примарное разложение. Для критического значения  $c_3^* = 0$  структура критических точек и кривых, а также линий уровня была описана в цитируемых выше работах и будет дана ниже. Поэтому рассмотрим структуру примарных идеалов, соответствующих другим критическим значениям параметра  $c$ .

Значению  $c_1^* = -16$  соответствует критическая точка  $x_1^{(1)} = x_2^{(1)} = -1/4$ . В ней дискриминант  $\Delta_1 = -204800 < 0$ , и она является изолированной. Линии уровня для значения  $c = c_1^*$  показаны на рис. 8.

Критические значения  $c_2^* \approx -9.89108$  и  $c_4^* \approx 0.000228$  являются корнями многочлена 4-й степени, т. е. они алгебраические числа. Вычисления показывают, что при  $c = c_2^*$  имеется особая точка  $X_2 \approx (-0.4021306894, 0.2360338414)$ , в которой дискриминант  $\Delta_2 \approx 63676.18108 > 0$  и, следовательно, в ней происходит пересечение линий уровня (левая часть рис. 9). При  $c = c_4$  имеется особая точка  $X_4 \approx (0.8995846960, -0.8095257544)$ , в которой дискриминант  $\Delta_4 \approx -0.01855315801 < 0$ , т. е. она изолированная (правая часть рис. 9).

Наконец, как следует из (7.10), при  $c = c_3^* = 0$  многочлен  $f_4(X)$  раскладывается на множители.

В этом случае имеются критические точки

$$P_1^{(3)} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), P_2^{(3)} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), P_{3,4,5}^{(3)} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), P_{1,2,3}^{(1)} = \left(\frac{5}{8}, -\frac{1}{2}\right),$$

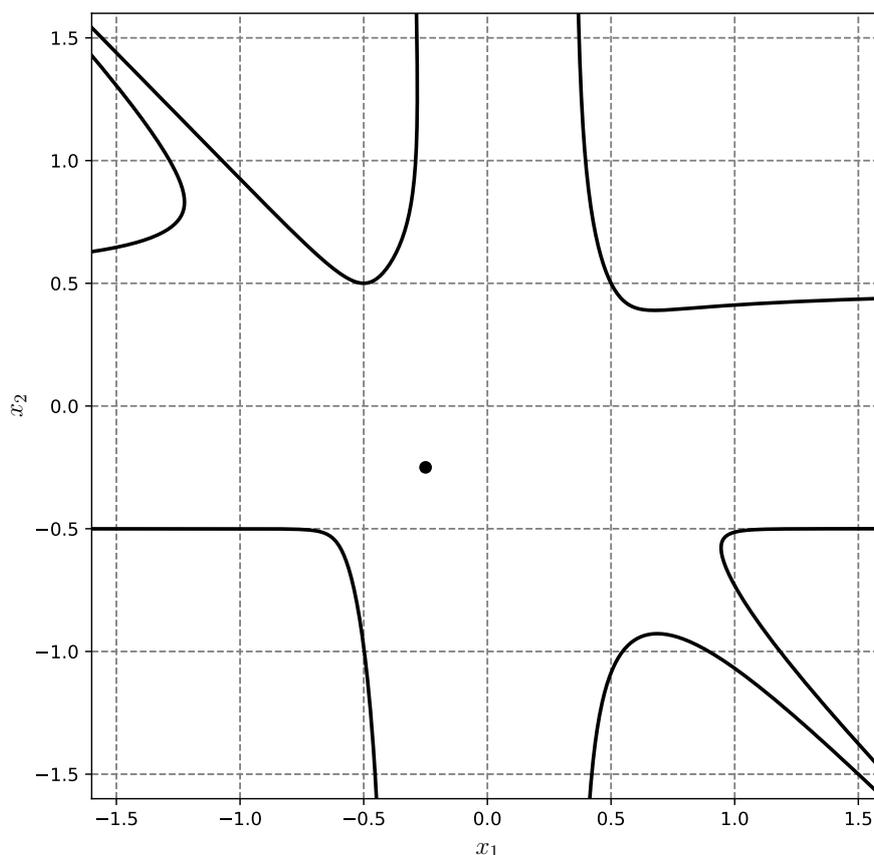


Рис. 8. Линии уровня многочлена (7.10) для значения  $c_1^*$ .

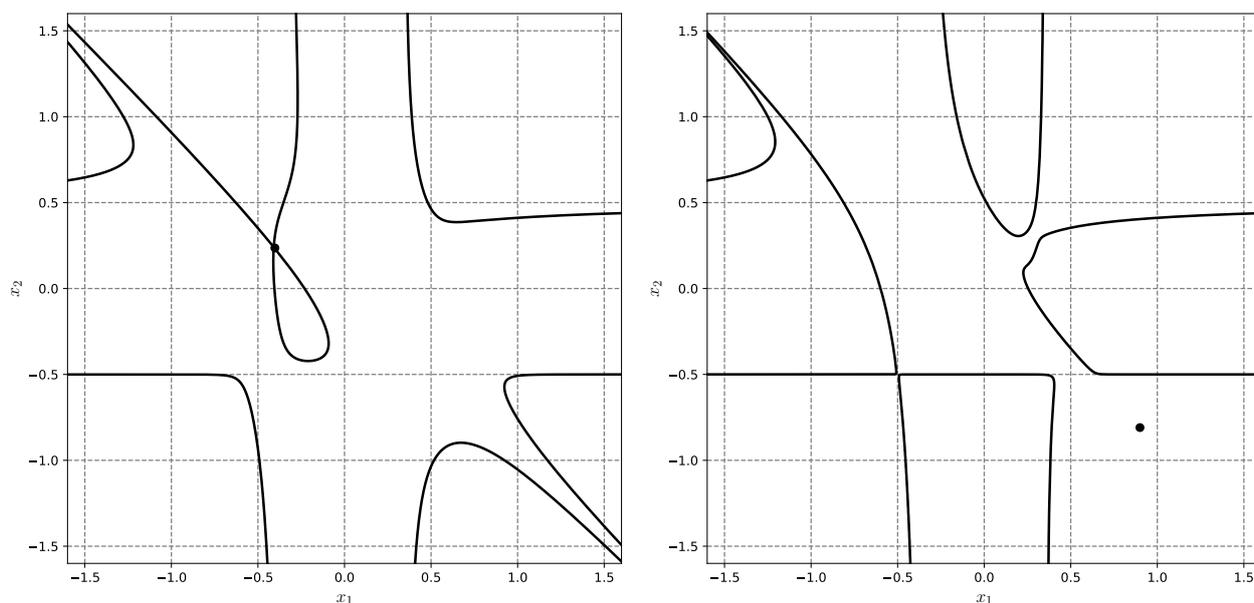


Рис. 9. Линии уровня многочлена (7.10) для значений  $c_2^*$  (слева) и  $c_4^*$  (справа).

которые суть точки пересечения рациональных кривых  $\mathcal{Z}_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , задаваемых нулями соответствующих множителей формулы (7.10), а также критическая кривая  $\mathcal{Z}_3$  (см. рис. 10). Критической кривой  $\mathcal{Z}_3$  (показана сплошной линией на

рис. 10) соответствует тройной корень. Здесь сохранены обозначения, используемые в указанных выше работах авторов.

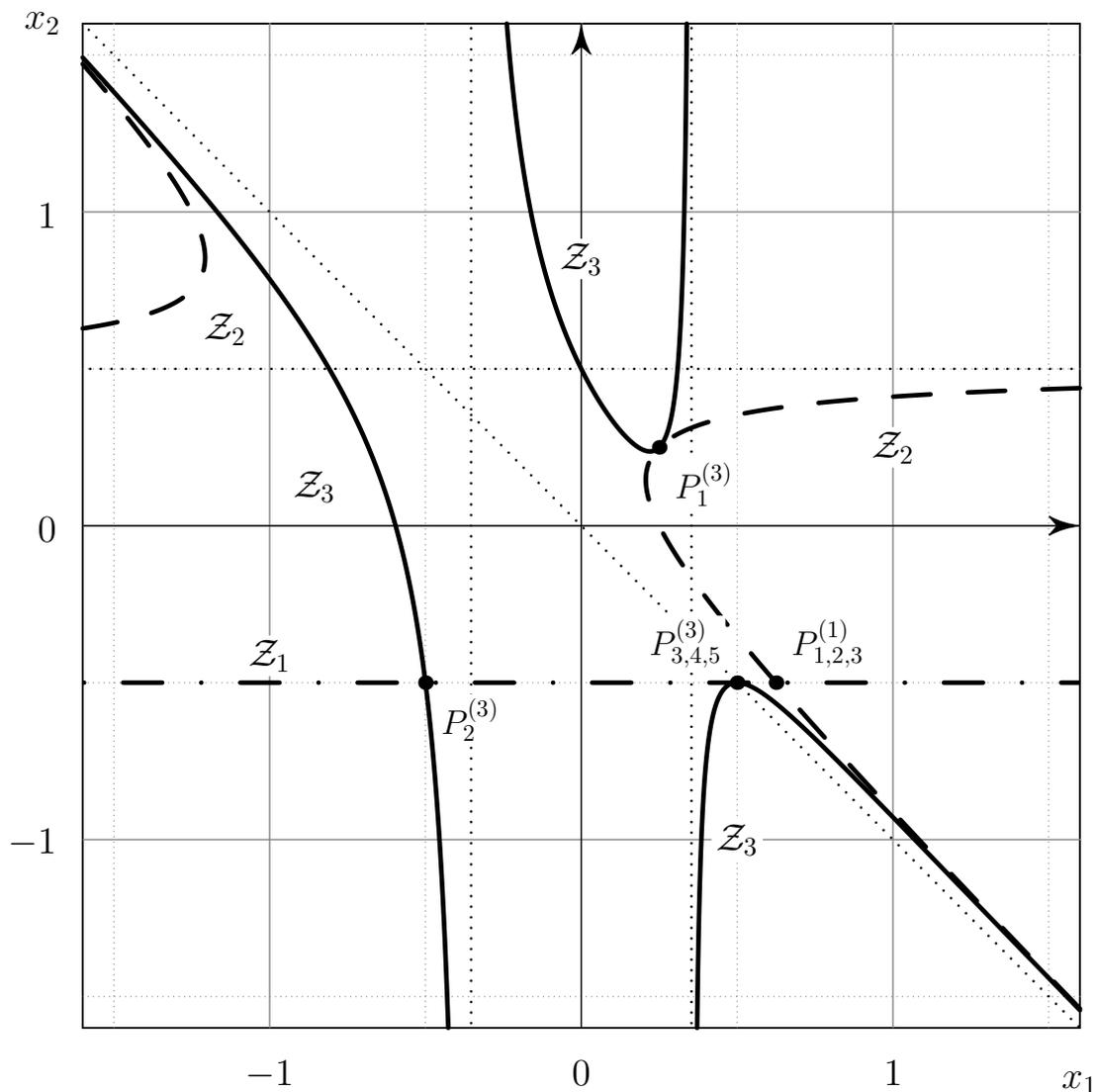


Рис. 10. Линии уровня многочлена (7.10) для значения  $c = 0$ .

Для анализа критических линий на бесконечности построим многоугольник Ньютона многочлена (7.10) (см. рис. 11) и выделим укороченные многочлены, соответствующие рёбрам, чьи нормали имеют хотя бы одну положительную координату.

Подходящие рёбра многоугольника обозначены  $\Gamma_1^{(1)}$ ,  $\Gamma_2^{(1)}$ ,  $\Gamma_3^{(1)}$  на рис. 11, а соответствующие им укороченные многочлены суть

$$\hat{f}_1^{(1)} \equiv -128x_2^6 (8x_1^2 - 1)^3, \quad (7.11)$$

$$\hat{f}_2^{(1)} \equiv -65536x_1^6 x_2^2 (x_1 + x_2)^4, \quad (7.12)$$

$$\hat{f}_3^{(1)} \equiv -16384x_1^{10} (2x_2 - 1)(2x_2 + 1). \quad (7.13)$$

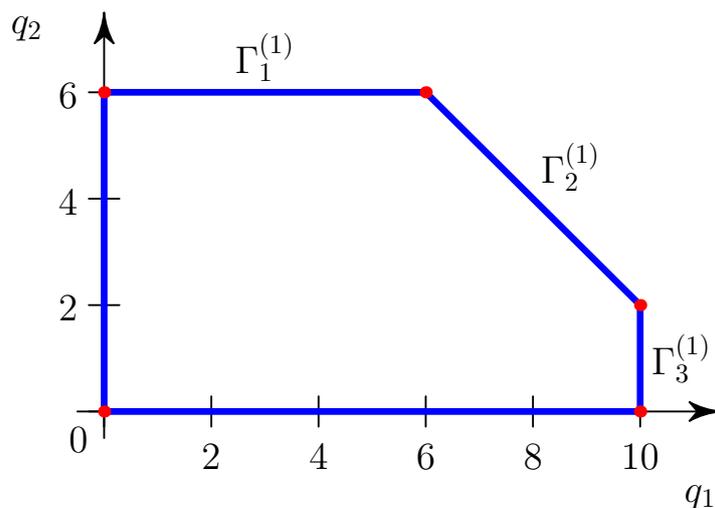


Рис. 11. Многоугольник Ньютона многочлена (7.10).

Следовательно, из разложения многочлена (7.11) следует, что на бесконечности имеются трёхкратные корни  $X = (\pm 1/\sqrt{8}, \infty)$ . Из разложения многочлена (7.12) следует наличие четырёхкратного корня  $x_2 = -x_1$  при  $x_1 \rightarrow \pm\infty$ . Наконец, из разложения многочлена (7.13) следует наличие простых корней  $X = (\pm\infty, \pm 1/2)$ . Эти корни легко отслеживаются в виде вертикальных, наклонных и горизонтальных асимптот на рис. 8 – 10, причём на последнем рисунке они показаны точечными линиями.

Напоследок опишем перестройку линий уровня многочлена (7.10) при изменении  $c$  от  $c_3^*$  к  $c_4^*$  и далее. При  $c > c_3^*$  ветви кривых  $\mathcal{Z}_2$  и  $\mathcal{Z}_3$ , идущие от критических точек  $P_{1,2,3}^{(1)}$  и  $P_{3,4,5}^{(3)}$  соответственно в правый нижний угол рис. 11, соединяются и образуют замкнутую кривую. Эта кривая, по мере приближения  $c$  к значению  $c_4^*$  снизу, стягивается к изолированной критической точке  $X_4$ .

В левом верхнем углу рис. 11 ветви кривых  $\mathcal{Z}_2$  и  $\mathcal{Z}_3$ , идущие вдоль асимптоты  $x_2 = -x_1$ , также соединяются. Таким образом, при  $c > c_4^*$  не остаётся линий уровня, уходящих на бесконечность вдоль асимптоты  $x_2 = -x_1$ . В этом можно убедиться, если построить разложение  $f_4(X) - c$  в ряд Пуанкаре при  $x_1 \rightarrow \infty$ , например, используя процедуру `puisex` из пакета `algsurves` системы Maple. Это разложение имеет три ветви:

$$x_2 = -\frac{1}{2}, \tag{7.14}$$

$$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8x_1} + \frac{1}{16x_1^2} + \dots, \tag{7.15}$$

$$x_2 = -x_1 + \frac{1}{8x_1} + \frac{\alpha}{x_1^2} + \dots, \tag{7.16}$$

где  $\alpha$  есть корень многочлена

$$2^{16}y^4 + 2^{14}y^3 + 3 \cdot 2^9y^2 + 2^6y + c + 1. \quad (7.17)$$

Разложение (7.14) соответствует прямой  $\mathcal{Z}_1$ , разложение (7.15) соответствует ветви кривой  $\mathcal{Z}_2$  при  $x_1 \rightarrow \infty$ ,  $x_2 \rightarrow 1/2$ . Несложно показать либо с использованием последовательности Штурма, либо с помощью теоремы Якоби–Борхарда (см., например, [17, Гл. XVI, § 2]), либо вычисляя последовательность субдискриминантов многочлена (7.17) [18] и применяя теорему 4.33 из [19], что при  $c > 0$  многочлен (7.17) имеет только комплексные корни. Следовательно, разложение (7.16) не соответствует никакой вещественной кривой.  $\square$

## Список литературы

1. Брюно А. Д., Батхин А. Б. Введение в нелинейный анализ алгебраических уравнений // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2020. № 87. DOI: <https://doi.org/10.20948/prepr-2020-87>.
2. Брюно А. Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. 252 с.
3. Kollár J. Lectures on Resolution of Singularities. Princeton, Oxford: Princeton University Press, 2007.
4. Kollár J. Resolution of Singularities – Seattle Lecture. 2007. arXiv: math/0508332v3 [math.AG].
5. Милнор Д. Теория Морса: Пер. с англ. Изд. 3-е. М.: Издательство ЛКИ, 2011. 184 с.
6. Buchberger B. A theoretical basis for the reduction of polynomials to canonical forms. // ACM SIGSAM Bulletin. 1976. Vol. 10, no. 3. P. 19–29. DOI: 10.1145/1088216.1088219 .
7. Кокс Д., Литтл Д., О’Ши Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы. Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры. М.: Мир, 2000. 687 с.
8. Атья М., Макдональд И. Введение в коммутативную алгебру. М.: Мир, 1972. 160 с.
9. Брюно А. Д., Батхин А. Алгоритмы и программы вычисления корней многочлена от одной или двух неизвестных // Программирование. 2021. № 5. С. 22—43. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0132347421050046>.
10. Singh C., Singh J. Accurate contour plotting using 6-node triangular elements in 2D // Finite Elements in Analysis and Design. 2009. Vol. 45, no. 2. P. 81–93. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.finel.2008.07.011>.
11. Hunter J. D. Matplotlib: A 2D graphics environment // Computing in Science & Engineering. 2007. Т. 9, № 3. С. 90—95. DOI: <https://doi.org/10.1109/MCSE.2007.55>.
12. Hoeij M. Rational parametrizations of algebraic curves using a canonical divisor // J. Symbolic Computation. 1997. Vol. 23. P. 209–227.
13. Lawden D. F. Elliptic Functions and Applications. Vol. 80. New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo, Hong Kong: Springer-Verlag, 1989. 350 p. (Applied Mathematical Sciences).

14. *Батхин А. Б., Брюно А. Д.* Исследование одной вещественной алгебраической поверхности // Программирование. 2015. № 2. С. 7—17. ISSN 0132-3474.
15. *Батхин А. Б.* Глобальные параметризации одной вещественной алгебраической поверхности // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2016. № 76. ISSN 2071–2898. DOI: 10.20948/prepr-2016-76. URL: [http://www.keldysh.ru/papers/2016/prep2016\\_76.pdf](http://www.keldysh.ru/papers/2016/prep2016_76.pdf).
16. *Батхин А. Б.* Одно вещественное многообразие с краем и его глобальная параметризация // Программирование. 2017. № 2. С. 17—27.
17. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. 4-е изд. М.: Наука, 1988. 552 с.
18. *Батхин А. Б.* Параметризация дискриминантного множества вещественного многочлена // Программирование. 2016. Т. 42, № 2. С. 8—21.
19. *Basu S., Pollack R., Roy M.-F.* Algorithms in Real Algebraic Geometry. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 2006. ix+662. (Algorithms and Computations in Mathematics 10).

## Список рисунков

1	Многоугольник Ньютона многочлена (7.1). . . . .	9
2	Линии уровня многочлена (7.1). . . . .	11
3	Многоугольник Ньютона многочлена (7.7). . . . .	12
4	Линии уровня многочлена (7.7). . . . .	13
5	Линии уровня многочлена (7.8) (крупный масштаб). . . . .	14
6	Линии уровня многочлена (7.8). . . . .	15
7	Многоугольник Ньютона многочлена (7.8). . . . .	16
8	Линии уровня многочлена (7.10) для значения $c_1^*$ . . . . .	18
9	Линии уровня многочлена (7.10) для значений $c_2^*$ и $c_4^*$ . . . . .	18
10	Линии уровня многочлена (7.10) для значения $c = 0$ . . . . .	19
11	Многоугольник Ньютона многочлена (7.10). . . . .	20

## **Оглавление**

1	Введение . . . . .	3
2	Критические точки и критические кривые . . . . .	3
3	Локальный анализ линий уровня . . . . .	4
4	Глобальный анализ линий уровня . . . . .	6
5	Вычисление критических значений, точек и кривых . . . . .	7
6	Построение эскизов линий уровня . . . . .	8
7	Примеры . . . . .	9
	Список литературы . . . . .	22
	Список рисунков . . . . .	23