ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 49 за 2021 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

К.А. Попков

О самокорректирующихся схемах из ненадёжных функциональных элементов

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Попков К.А. О самокорректирующихся схемах из ненадёжных функциональных элементов // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. № 49. 18 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2021-49
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-49

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

К. А. Попков

О самокорректирующихся схемах из ненадёжных функциональных элементов

Москва — 2021

Попков К. А.

О самокорректирующихся схемах из ненадёжных функциональных элементов

Доказаны следующие утверждения:

1) для любого целого $m \geqslant 3$ существует базис, состоящий из булевых функций от не более чем m переменных, в котором любую булеву функцию можно реализовать схемой из ненадёжных функциональных элементов, самокорректирующейся относительно некоторых неисправностей произвольного числа элементов;

2) для любого натурального k существуют базисы, состоящие из булевых функций от не более чем двух переменных, в каждом из которых любую булеву функцию можно реализовать схемой из ненадёжных функциональных элементов, самокорректирующейся относительно некоторых неисправностей не более k элементов;

3) существует функционально полный базис, состоящий из булевых функций от не более чем двух переменных, в котором почти никакую булеву функцию нельзя реализовать схемой из ненадёжных функциональных элементов, самокорректирующейся относительно хотя бы каких-нибудь неисправностей не более одного элемента.

Ключевые слова: схема из функциональных элементов, самокорректирование, ненадёжный элемент, булева функция

Kirill Andreevich Popkov

On self-correcting logic circuits of unreliable gates

The following statements are proved:

1) for any integer $m \geq 3$ there is a basis consisting of Boolean functions of no more than m variables, in which any Boolean function can be implemented by a logic circuit of unreliable gates that self-corrects relative to certain faults in an arbitrary number of gates;

2) for any positive integer k there are bases consisting of Boolean functions of no more than two variables, in each of which any Boolean function can be implemented by a logic circuit of unreliable gates that self-correct relative to certain faults in no more than k gates;

3) there is a functionally complete basis consisting of Boolean functions of no more than two variables, in which almost no Boolean function can be implemented by a logic circuit of unreliable gates that self-correct relative to at least some faults in no more than one gate.

Key words: logic circuit, self-correction, unreliable gate, Boolean function

Введение

Одним из важных направлений математической теории синтеза, сложности, надёжности, контроля и диагностики управляющих систем является исследование возможностей построения самокорректирующихся схем, реализующих заданные булевы функции. Пусть S — произвольная (двухполюсная) контактная схема или схема из функциональных элементов [1]. Схема S называется *самокорректирующейся* относительно некоторого перечня неисправностей, если при наличии в ней произвольных неисправностей из этого перечня она реализует ту же булеву функцию, что и при отсутствии в ней неисправностей.

В качестве неисправностей в контактной схеме, как правило, рассматривают обрывы и/или замыкания контактов; при обрыве контакта проводимость между его концами становится тождественно нулевой, а при замыкании — тождественно единичной. Несложно показать, что для любых целых неотрицательных a и b любую булеву функцию можно реализовать контактной схемой S, самокорректирующейся относительно не более a обрывов и не более b замыканий контактов. Для этого достаточно взять произвольную контактную схему, реализующую данную функцию, и заменить в ней каждый контакт K на контактную схему, содержащую $(a+1)(b+1)$ контактов и представляющую собой параллельное соединение $a+1$ несамопересекающихся цепей, каждая из которых состоит из $b+1$ копий контакта K. Поэтому обычно ставится задача исследования возможности реализации произвольной булевой функции контактной схемой, самокорректирующейся относительно не более a обрывов и не более b замыканий контактов и имеющей небольшую сложность, т. е. содержащую небольшое число контактов. Основные результаты, полученные в этом направлении, представлены в работах [2–13].

В качестве неисправностей функциональных элементов часто рассматривают а) однотипные константные неисправности типа p, $p \in \in \{0,1\}$, на выходах элементов, б) произвольные константные неисправности на выходах элементов, в) инверсные неисправности на выходах элементов, г) произвольные неисправности элементов. При этих неисправностях булева функция, реализуемая каждым неисправным элементом, который в исправном состоянии реализовывал некоторую булеву функцию $\varphi(\tilde{x}^m)$ от своих входов, где $\tilde{x}^m = (x_1, \ldots, x_m)$ и $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (в случае $m = 0$ полагаем, что $x_1, \ldots, x_m$ — пустая строка), становится равной а) константе p, б) некоторой булевой константе независимо от неисправностей других элементов, в) функции $\overline{\varphi}(\tilde{x}^m)$, г) произвольной булевой функции от m переменных $x_1, \ldots, x_m$, отличной от $\varphi(\tilde{x}^m)$. Оказывается, при рассмотрении самокорректирующихся схем из функциональных элементов имеет место принципиально иная ситуация, чем при рассмотрении самокорректирующихся контактных схем. А именно, ни для какого $k \in \mathbb{N}$ никакую булеву функцию f, существенно зависящую по крайней мере от двух переменных, нельзя реализовать схемой из функциональных элементов, самокорректирующейся относительно неисправностей хотя бы какого-нибудь из видов а)–г) не более k элементов, поскольку при константной или инверсной неисправности на выходе выходного элемента схемы реализуемая этой схемой булева функция становится отличной от исходной. Поэтому при изучении самокорректирующихся схем из функциональных элементов обычно предполагают, что некоторые элементы являются надёжными, т. е. всегда исправными, и рассматривают задачу реализации булевых функций схемами из функциональных элементов, самокорректирующимися относительно неисправностей не более k ненадёжных элементов и имеющими небольшую сложность, определяемую как сумму весов всех элементов схемы. При этом используют одну из двух постановок задачи: 1) вес каждого функционального элемента (как надёжного, так и ненадёжного) равен 1, но наряду со сложностью схем требуется минимизировать число надёжных элементов в них; 2) вес каждого ненадёжного функционального элемента равен 1, а вес каждого надёжного — больше 1. Первая постановка задачи рассматривалась в работах [14–17]; вторая — в работах [18–22].

Отметим, что любая схема, самокорректирующаяся относительно некоторых неисправностей содержащихся в ней базисных элементов (контактов или функциональных элементов), не имеет ни одной функции неисправности, отличной от исходной функции, реализуемой схемой, и, как следствие, допускает проверяющий и диагностический тест длины 0 относительно указанных неисправностей; соответствующие определения можно найти, например, в [23].

В настоящей статье, в отличие от работ [14–22], исследуются возможности реализации булевых функций схемами, состоящими только из ненадёжных функциональных элементов. Устанавливается, что любую булеву функцию можно реализовать схемой из ненадёжных функциональных элементов, самокорректирующейся относительно некоторых неисправностей не более чем фиксированного числа элементов (теоремы 2, 3) и даже произвольного числа элементов (теорема 1). Данный эффект достигается за счёт рассмотрения неисправностей, не относящихся ни к одному из описанных выше видов а)–г).

Любое множество булевых функций, каждая из которых существенно зависит от всех своих переменных, будем называть *базисом*.

Рассматриваемая ниже модель неисправностей функциональных элементов, на наш взгляд, является наиболее общей в предположении, что неисправности функциональных элементов происходят независимо друг от друга и у каждого элемента возможна хотя бы одна неисправность. Суть модели состоит в следующем. Пусть зафиксирован базис B. Будем предполагать, что для каждой функции $\varphi(\tilde{x}^m)$ из B имеется сколь угодно много функциональных элементов, каждый из которых реализует в исправном состоянии эту функцию от своих входов; указанные элементы назовём *φ-элементами*. Для каждой функции $\varphi(\tilde{x}^m) \in B$ введём *допустимое* множество $M_\varphi = \{M_{\varphi,1}, \dots, M_{\varphi,r}\}$, где $r \in \mathbb{N}$ и $M_{\varphi,i}$ для каждого $i \in \{1, \dots, r\}$ — непустое множество (некоторых) отличных от $\varphi(\tilde{x}^m)$ булевых функций от m переменных $x_1, \dots, x_m$. Предполагается, что всевозможные φ-элементы разделены на r типов и каждый такой элемент i-го типа, $i = 1, \dots, r$, может перейти в одно из $|M_{\varphi,i}|$ неисправных состояний независимо от неисправностей других функциональных элементов и начать реализовывать вместо «правильной» функции $\varphi(\tilde{x}^m)$ некоторую функцию $\psi(\tilde{x}^m)$ (от своих входов) из множества $M_{\varphi,i}$; такую неисправность будем называть *неисправностью типа* ψ рассматриваемого элемента. Условие $M_{\varphi,i} \neq \varnothing$, где $i = 1, \dots, r$, означает, что для каждого φ-элемента i-го типа допустима хотя бы одна неисправность (нет «абсолютно надёжных» элементов). В случае $r = 1$ двойные фигурные скобки в записи множества M_φ будем для простоты заменять на одинарные, т. е. вместо «$M_\varphi = \{M_{\varphi,1}\}$» писать «$M_\varphi = M_{\varphi,1}$».

Пример 1. Неисправности рассмотренных выше видов а)–г) соответствуют случаям, когда для любой функции $\varphi(\tilde{x}^m) \in B$ а) $M_\varphi = \{p\}$ (и при этом $p \notin B$), б)

$$M_\varphi = \begin{cases} \{0,1\}, & \text{если } m \geqslant 1, \\ \{1\}, & \text{если } m = 0 \text{ и } \varphi \equiv 0, \\ \{0\}, & \text{если } m = 0 \text{ и } \varphi \equiv 1, \end{cases}$$

в) $M_\varphi = \{\overline{\varphi}(\tilde{x}^m)\}$, г) множество M_φ состоит из всех $2^{2^m} - 1$ булевых функций, зависящих от m переменных $x_1, \dots, x_m$ и отличных от $\varphi(\tilde{x}^m)$.

Пример 2. Если $M_\varphi = \{\{0\}, \{\overline{\varphi}\}\}$ для некоторой функции $\varphi(\tilde{x}^m)$ из базиса B, отличной от константы 0, то всевозможные φ-элементы разделены на два типа, причём у любого φ-элемента первого (второго) типа возможна только константная неисправность типа 0 (соответственно, инверсная неисправность) на его выходе.

Произвольное множество булевых функций называется *функционально полным* или просто *полным*, если всякая булева функция может быть выражена формулой над этим множеством (см., например, [24]). Функциональную полноту любого множества булевых функций можно проверить с использованием [24, с. 40, теорема 7].

Вместо «вход схемы S (элемента E), отвечающий переменной x_i» для краткости будем писать «вход „x_i“ схемы S (соответственно, элемента E)».

Формулировки и доказательства основных результатов

Теорема 1. *Для любого целого $m \geqslant 3$ любую булеву функцию можно реализовать схемой из функциональных элементов в базисе $B = \{\varphi(\tilde{x}^m)\} = \left\{\overline{x_1 \& x_2 \& \ldots \& x_m}\right\}$, самокорректирующейся относительно неисправностей, задаваемых множеством $M_\varphi = \left\{\overline{x_1 \& x_2}\right\}$, произвольного числа элементов.*

Доказательство. Пусть $f(\tilde{x}^n)$ — произвольная булева функция. Её можно реализовать схемой S_0 из надёжных функциональных элементов в базисе $\left\{\overline{x_1 \& x_2}\right\}$, моделирующей формулу над этим множеством, реализующую функцию f, с учётом того, что оно является функционально полным. Последовательно заменим каждый элемент схемы S_0 на ненадёжный функциональный элемент, имеющий m входов, реализующий в исправном состоянии функцию $\overline{x_1 \& x_2 \& \ldots \& x_m}$, а в единственном возможном неисправном состоянии — функцию $\overline{x_1 \& x_2}$ (от своих входов); при этом вход «x_1» нового элемента соединим с тем узлом схемы (входом схемы или выходом элемента), с которым соединялся вход «x_1» старого элемента, а каждый из входов «x_2», …, «x_m» нового элемента — с тем узлом схемы, с которым соединялся вход «x_2» старого элемента. Легко видеть, что полученная в результате указанных преобразований схема S является схемой из функциональных элементов в базисе B, а на выходе каждого её элемента, в том числе выходного, как в случае его исправности (с учётом равенства $\overline{x_1 \& x_2 \underbrace{\& \ldots \&}_{m-1 \text{ раз}} x_2} = \overline{x_1 \& x_2}$), так и при его неисправности типа $\overline{x_1 \& x_2}$ реализуется та же булева функция, что и на выходе соответствующего двухвходового элемента схемы S_0, который был заменён на указанный элемент в ходе преобразования схемы S_0 в схему S (формально это можно доказать, двигаясь по схеме S «сверху вниз» от её входов к выходу). Отсюда следует, что схема S реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$ и является самокорректирующейся относительно неисправностей, задаваемых множеством $M_\varphi = \{\overline{x_1 \& x_2}\}$, произвольного числа элементов. Теорема 1 доказана. □

Любой функциональный элемент, реализующий в исправном состоянии булеву функцию $x \,|\, y = \overline{x \& y}$ (функцию $\overline{x}$, $x \& y$) от своих входов, будем называть *элементом Шеффера* (соответственно *инвертором*, *конъюнктором*).

Теорема 2. *Для любого натурального k любую булеву функцию можно реализовать схемой из функциональных элементов в базисе $B = \{x \,|\, y\}$, самокорректирующейся относительно неисправностей, задаваемых множеством $M_{x \,|\, y} = \{\overline{x}\}$, не более k элементов.*

Доказательство. Если отождествить входы любого элемента Шеффера, то при подаче на единственный вход получившегося элемента произвольной булевой функции h на выходе этого элемента возникнет функция $\overline{h \& h} = \overline{h}$, если он исправен, либо функция $\overline{h}$ при его неисправности типа $\overline{x}$. Таким образом, элемент Шеффера с отождествлёнными входами фактически является абсолютно надёжным инвертором, и можно считать, что при построении схем из функциональных элементов в базисе B разрешается использовать не только элементы Шеффера, но и не подверженные никаким неисправностям инверторы.

Построим в базисе B схему $S_\&$ со входами «x» и «y», реализующую при отсутствии в ней неисправностей функцию $x \& y$. Входы «x» и «y» произвольного элемента Шеффера соединим со входами соответственно «x» и «y» схемы, а его выход — со входом инвертора, выход которого объявим выходом схемы $S_\&$. Очевидно, что при отсутствии неисправностей данная схема реализует функцию $\overline{\overline{x \& y}} = x \& y$, а при единственно возможной неисправности в схеме, а именно неисправности типа $\overline{x}$ элемента Шеффера, — функцию $\overline{\overline{x}} = x$.

Построим теперь в базисе B схему $S_|$ со входами «x» и «y», реализующую при отсутствии в ней неисправностей функцию $x \,|\, y$ (см. рис. 1). Пусть $S_1, \ldots, S_{k+1}$ — копии схемы $S_\&$. На вход «x» схемы S_1 подадим переменную x, а на вход «y» каждой из схем $S_1, \ldots, S_{k+1}$ — переменную y. Для каждого $i = 2, \ldots, k+1$ вход «x» схемы S_i соединим с выходом схемы S_{i-1}. Выход схемы S_{k+1} соединим со входом инвертора I; выход элемента I объявим выходом итоговой схемы, которую обозначим через $S_|$. Легко видеть, что при отсутствии неисправностей схема $S_|$ реализует функцию $\overline{x \& y \underbrace{\& \ldots \&}_{k \text{ раз}} y} = x \,|\, y$.

Пусть в рассматриваемой схеме оказались неисправными не менее одного и не более k элементов. Тогда хотя бы в одной подсхеме S_i, $i \in \{1,$

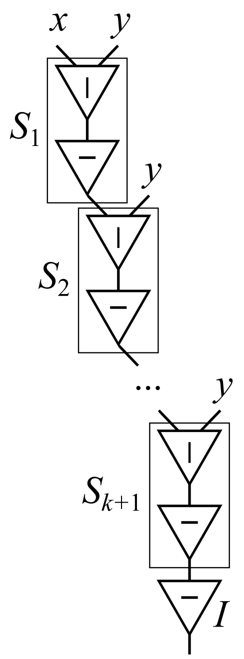

Рис. 1. Схема $S_|$

$\ldots, k+1\}$, оба элемента исправны, поэтому данная подсхема реализует функцию $x\&y$ от своих входов. Докажем индукцией по j следующее утверждение $(*)$: в схеме $S_|$ на выходе каждой подсхемы S_j, $j = 1, \ldots, k+1$, реализуется одна из функций $x\&y, x$, причём если $j \geqslant i$, то это обязательно функция $x\&y$.

База индукции: $j = 1$. На выходе подсхемы S_1, являющейся копией схемы $S_\&$, при отсутствии неисправностей реализуется функция $x\&y$, а при единственно возможной неисправности в подсхеме — функция x. Если $j \geqslant i$, то $i = 1$, поэтому в подсхеме S_1 оба элемента исправны и на её выходе реализуется функция $x\&y$. База индукции доказана.

Предположение и шаг индукции: пусть утверждение доказано для $j = t$, где $t \in \{1, \ldots, k\}$; докажем его для $j = t+1$. Реализуемая на выходе подсхемы S_t в схеме $S_|$ функция h_t по предположению индукции совпадает с одной из функций $x\&y, x$. Подсхема S_{t+1} при отсутствии в ней неисправностей реализует функцию $x\&y$ от своих входов, а при единственно возможной неисправности в ней — функцию x от своих входов, поскольку является копией схемы $S_\&$. Поэтому реализуемая на выходе подсхемы S_{t+1} в схеме $S_|$ функция h_{t+1} совпадает с одной из функций $h_t\&y$, h_t, т. е. с одной из функций $x\&y, x$. Если $j = t+1 \geqslant i$, то либо $t \geqslant i$, либо $t = i-1$. В первом из этих случаев по предположению индукции $h_t = x\&y$, поэтому функция h_{t+1} совпадает с одной из функций $(x\&y)\&y$, $x\&y$, а значит, равна функции $x\&y$. В случае же $t = i-1$ схема S_{t+1}, т. е. схема S_i, реализует функцию $x\&y$ от своих входов, следовательно, $h_{t+1} = h_t \& y$, и с учётом соотношения $h_t \in \{x\&y, x\}$ получаем, что $h_{t+1} = x\&y$. Шаг индукции, а вместе с ним требуемое утверждение доказаны.

Доказанное утверждение $(*)$ при $j = k+1$ с учётом неравенства $i \leqslant \leqslant k+1$ означает, что в схеме $S_|$ на выходе подсхемы S_{k+1} реализуется функция $x\&y$. Тогда на выходе схемы $S_|$ с учётом наличия в ней инвертора I реализуется функция $\overline{x\&y} = x \mid y$.

Тем самым установлено, что схема $S_|$ реализует функцию $x \mid y$ и является самокорректирующейся относительно неисправностей типа $\overline{x}$ не более k элементов Шеффера (все инверторы в данной схеме абсолютно надёжны). Отметим, что вход инвертора I соединён в схеме $S_|$ с выходом инвертора из подсхемы S_{k+1}. Схема $S'_|$, получающаяся при удалении из схемы $S_|$ обоих этих инверторов и переносе выхода схемы на выход элемента Шеффера из подсхемы S_{k+1}, также, очевидно, реализует функцию $x \mid y$ и является самокорректирующейся относительно указанных неисправностей.

Пусть теперь $f(\tilde{x}^n)$ — произвольная булева функция. Её можно реализовать формулой над множеством $\{x \mid y\}$. Пусть S — схема из функциональных элементов в базисе B, составленная из нескольких копий схемы $S'_|$ и моделирующая эту формулу (каждому функциональному символу «|» в формуле сопоставляется своя копия схемы $S'_|$). Тогда схема S реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$ и является самокорректирующейся относительно неисправностей типа $\overline{x}$ не более k элементов Шеффера. Действительно, при таких неисправностях в каждой из копий схемы $S'_|$ имеют место неисправности типа $\overline{x}$ не более k элементов Шеффера, а схема $S'_|$ является самокорректирующейся относительно указанных неисправностей. Теорема 2 доказана. □

Теорема 3. *Для любого натурального k любую булеву функцию можно реализовать схемой из функциональных элементов в базисе $B = \{x\&y, \overline{x}\}$, самокорректирующейся относительно неисправностей, задаваемых множествами $M_{x\&y} = \{x\}$, $M_{\overline{x}} = \{1\}$, не более k элементов.*

Доказательство. Построим в базисе B схему $S_\&$ со входами «x» и «y», реализующую при отсутствии в ней неисправностей функцию $x\&y$ и представляющую собой цепочку из конъюнкторов $E_1, \ldots, E_{k+1}$. На вход «x» конъюнктора E_1 подадим переменную x, а на вход «y» каждого из конъюнкторов $E_1, \ldots, E_{k+1}$ — переменную y. Для каждого $i = 2, \ldots, k+1$ вход «x» элемента E_i соединим с выходом элемента E_{i-1}. Выход элемента E_{k+1} объявим выходом схемы $S_\&$; очевидно, что при отсутствии неисправностей она реализует функцию $x\&y\underbrace{\&\ldots\&}_{k \text{ раз}}y = x\&y$.

Пусть в рассматриваемой схеме оказались неисправными не менее одного и не более k элементов. Тогда хотя бы один конъюнктор E_i, $i \in \{1, \ldots, k+1\}$, исправен, поэтому он реализует функцию $x\&y$ от своих входов. Из равенства $M_{x\&y} = \{x\}$ следует, что единственной возможной неисправностью любого конъюнктора является его неисправность типа x. Рассуждая по аналогии с доказательством утверждения $(*)$, нетрудно установить, что в схеме $S_\&$ на выходе каждого элемента E_j, $j = 1, \ldots, k+1$, реализуется одна из функций $x\&y, x$, причём если $j \geqslant i$, то это обязательно функция $x\&y$. Взяв $j = k+1$, с учётом неравенства $i \leqslant k+1$ получим, что на выходе элемента E_{k+1} в схеме $S_\&$, т. е. на выходе этой схемы реализуется функция $x\&y$. Тем самым установлено, что схема $S_\&$ реализует функцию $x\&y$ и является самокорректирующейся относительно неисправностей типа x не более k элементов.

Построим теперь в базисе B схему $S_\neg$ со входом «x», реализующую при отсутствии в ней неисправностей функцию $\overline{x}$ (см. рис. 2). Возьмём $k+1$ инверторов $I_0, \ldots, I_k$ и на вход каждого из них подадим переменную x. Затем выходы всех этих инверторов соединим со входами цепочки из конъюнкторов $E'_1, \ldots, E'_k$. А именно, входы «x» и «y» конъюнктора E'_1 соединим с выходами инверторов I_0 и I_1 соответственно; для каждого $i = 2, \ldots, k$ входы «x» и «y» конъюнктора E'_i соединим с выходами соответственно конъюнктора E'_{i-1} и инвертора I_i. Выход элемента E'_k объявим выходом схемы $S_\neg$; очевидно, что при отсутствии неисправностей она реализует функцию $\overline{x}\underbrace{\&\ldots\&}_{k\text{ раз}}\overline{x} = \overline{x}$.

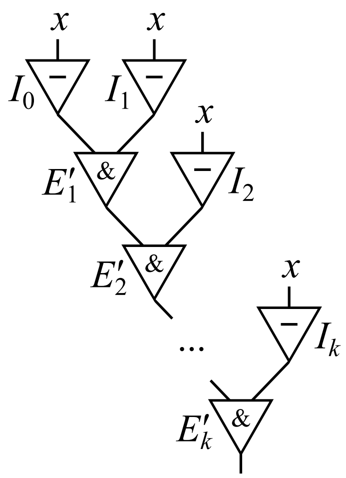

Рис. 2. Схема $S_\neg$

Множество всех функциональных элементов схемы $S_\neg$ разобьём на непересекающиеся подмножества $A_0 = \{I_0\}$, $A_i = \{E'_i, I_i\}$, где $i = 1, \ldots, k$. Инвертор I_0 назовём *главным* элементом множества A_0, а конъюнктор

E_i' — *главным* элементом множества A_i для каждого $i = 1, \ldots, k$.

Пусть в схеме $S_\neg$ оказались неисправными не менее одного и не более k элементов. Тогда хотя бы в одном множестве A_i, $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$, все элементы исправны. Из равенства $M_{\overline{x}} = \{1\}$ следует, что единственной возможной неисправностью любого инвертора является его неисправность типа 1. Докажем индукцией по j следующее утверждение $(**)$: в схеме $S_\neg$ на выходе главного элемента каждого множества A_j, $j = 0, 1, \ldots, k$, реализуется одна из функций $\overline{x}, 1$, причём если $j \geqslant i$, то это обязательно функция $\overline{x}$.

База индукции: $j = 0$. На выходе инвертора I_0 в случае, если он исправен, реализуется функция $\overline{x}$, а при его неисправности — константа 1. Если $j \geqslant i$, то $i = 0$, поэтому элемент I_0 исправен и на его выходе реализуется функция $\overline{x}$. База индукции доказана.

Предположение и шаг индукции: пусть утверждение доказано для $j = t$, где $t \in \{0, \ldots, k-1\}$; докажем его для $j = t + 1$. Реализуемая на выходе главного элемента множества A_t в схеме $S_\neg$ функция h_t по предположению индукции совпадает с одной из функций $\overline{x}, 1$. На выходе инвертора I_{t+1} в этой схеме реализуется функция $\overline{x}$, если он исправен, либо константа 1, если он неисправен. Конъюнктор E_{t+1}' в исправном (неисправном) состоянии реализует функцию $x\&y$ (соответственно x) от своих входов. Входы «x» и «y» данного конъюнктора по построению соединены в схеме $S_\neg$ с выходами соответственно главного элемента множества A_t и инвертора I_{t+1}. Поэтому реализуемая на выходе конъюнктора E_{t+1}', являющегося главным элементом множества A_{t+1}, в схеме $S_\neg$ функция h_{t+1} совпадает с одной из функций $h_t\&\overline{x}$, $h_t\&1$, h_t, т. е. с одной из функций $\overline{x}, 1$. Если $j = t+1 \geqslant i$, то либо $t \geqslant i$, либо $t = i-1$. В первом из этих случаев по предположению индукции $h_t = \overline{x}$, поэтому функция h_{t+1} совпадает с одной из функций $\overline{x}\&\overline{x}$, $\overline{x}\&1$, $\overline{x}$, а значит, равна функции $\overline{x}$. В случае же $t = i-1$ оба элемента из множества A_{t+1}, т. е. из множества A_i, а именно конъюнктор E_{t+1}' и инвертор I_{t+1}, исправны, следовательно, $h_{t+1} = h_t\&\overline{x}$, и с учётом соотношения $h_t \in \{\overline{x}, 1\}$ получаем, что $h_{t+1} = \overline{x}$. Шаг индукции, а вместе с ним требуемое утверждение доказаны.

Доказанное утверждение $(**)$ при $j = k$ с учётом неравенства $i \leqslant k$ означает, что на выходе элемента E_k' в схеме $S_\neg$, т. е. на выходе этой схемы, реализуется функция $\overline{x}$. Тем самым установлено, что схема $S_\neg$ реализует функцию $\overline{x}$ и является самокорректирующейся относительно неисправностей, задаваемых множествами $M_{x\&y}$ и $M_{\overline{x}}$, не более k элементов.

Пусть теперь $f(\tilde{x}^n)$ — произвольная булева функция. Её можно реализовать формулой над множеством $\{x\&y, \overline{x}\}$ с учётом того, что это множество является функционально полным. Пусть S — схема из функциональных элементов в базисе B, составленная из нескольких копий схем $S_\&$, $S_\neg$ и моделирующая эту формулу (каждому функциональному символу «&», «$\bar{\ }$» в формуле сопоставляется своя копия схемы $S_\&$, $S_\neg$ соответственно). Тогда схема S реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$ и является самокорректирующейся относительно неисправностей, задаваемых множествами $M_{x\&y}$ и $M_{\overline{x}}$, не более k элементов. Действительно, при таких неисправностях в каждой копии каждой из схем $S_\&$, $S_\neg$ имеют место неисправности, задаваемые данными множествами, не более k элементов, а схемы $S_\&$ и $S_\neg$ является самокорректирующимися относительно указанных неисправностей. Теорема 3 доказана. □

Через I^∞ обозначается множество булевых функций, каждая из которых не превосходит некоторой своей переменной (см., например, [25, с. 17]). Скажем, $x\&\overline{y} \leqslant x$ (для любых $x, y \in \{0,1\}$), поэтому $x\&\overline{y} \in I^\infty$. Также предполагается, что константа 0, рассматриваемая как булева функция от нуля переменных, принадлежит I^∞.

Теорема 4. *Пусть $l \in \mathbb{N}$ и $\varphi_1(\tilde{x}^{m_1}), \ldots, \varphi_l(\tilde{x}^{m_l})$ — произвольные булевы функции из множества I^∞. Тогда никакую булеву функцию, не принадлежащую I^∞, нельзя реализовать схемой из функциональных элементов в базисе $B = \{\varphi_1(\tilde{x}^{m_1}), \ldots, \varphi_l(\tilde{x}^{m_l}), 1\}$, самокорректирующейся относительно неисправностей не более одного элемента, задаваемых хотя бы какими-нибудь допустимыми множествами $M_{\varphi_1}, \ldots, M_{\varphi_l}, M_1$.*

Доказательство. Предположим противное: существуют такие булева функция $f(\tilde{x}^n) \notin I^\infty$, схема из функциональных элементов S в базисе B и допустимые множества $M_{\varphi_1}, \ldots, M_{\varphi_l}, M_1$, что схема S реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$ и является самокорректирующейся относительно неисправностей, задаваемых множествами $M_{\varphi_1}, \ldots, M_{\varphi_l}, M_1$, не более одного элемента. Отметим, что если некоторый элемент схемы S не имеет входов, то он реализует в исправном состоянии константу α для некоторого $\alpha \in \{0,1\}$; кроме того, $M_\alpha = \{\overline{\alpha}\}$ в силу определения допустимого множества M_φ, и единственной возможной неисправностью указанного элемента является его неисправность типа $\overline{\alpha}$.

Если выход схемы S совпадает с одним из её входов, то реализуемая на этом выходе функция f имеет вид x_i, где $i \in \{1, \ldots, n\}$, но тогда $f \leqslant x_i$ и $f \in I^\infty$; противоречие. Значит, выход схемы S является выходом некоторого функционального элемента E_1. Если данный элемент не имеет входов и реализует в исправном состоянии константу α, то $f \equiv \alpha$ и при неисправности типа $\overline{\alpha}$ элемента E_1 схема станет реализовывать константу $\overline{\alpha}$, т. е. не является самокорректирующейся, что противоречит предположению. Таким образом, элемент E_1 реализует в исправном состоянии функцию $\varphi_{i_1}(\tilde{x}^{m_{i_1}})$ от своих входов для некоторого $i_1 \in \{1, \ldots, l\}$, причём $m_{i_1} \geqslant 1$. По условию $\varphi_{i_1}(\tilde{x}^{m_{i_1}}) \in I^\infty$, поэтому $\varphi_{i_1} \leqslant x_{j_1}$ для некоторого $j_1 \in \{1, \ldots, m_{i_1}\}$. Вход «$x_{j_1}$» элемента E_1 может быть соединён в схеме S а) с каким-то входом схемы; б) с выходом элемента, не имеющего входов; в) с выходом элемента, имеющего хотя бы один вход. В случае в) указанный элемент обозначим через E_2; по аналогии с рассуждениями, проведёнными для элемента E_1, получаем, что элемент E_2 реализует в исправном состоянии функцию $\varphi_{i_2}(\tilde{x}^{m_{i_2}})$ от своих входов для некоторого $i_2 \in \{1, \ldots, l\}$, причём $m_{i_2} \geqslant 1$ и $\varphi_{i_2} \leqslant x_{j_2}$ для некоторого $j_2 \in \{1, \ldots, m_{i_2}\}$. Вход «$x_{j_2}$» элемента E_2 может быть соединён в схеме S а) с каким-то входом схемы; б) с выходом элемента, не имеющего входов; в) с выходом элемента, имеющего хотя бы один вход. В случае в) указанный элемент обозначим через E_3; для него также выполнен один из случаев а)–в), и т. д. В силу конечности числа элементов в схеме S найдётся такое $t \in \mathbb{N}$, что для каждого из элементов $E_1, \ldots, E_{t-1}$ при $t \geqslant 2$ выполнен случай в), а для элемента E_t выполнен один из случаев а), б).

Далее будем считать, что все элементы $E_1, \ldots, E_t$ схемы S исправны, а среди остальных её элементов имеют место неисправности, задаваемые множествами $M_{\varphi_1}, \ldots, M_{\varphi_l}, M_1$, не более одного элемента. Схема S является самокорректирующейся, поэтому на её выходе в указанном предположении реализуется функция $f(\tilde{x}^n)$. Докажем следующее утверждение $(***)$: если на некотором наборе $\tilde{\sigma}$ значений входных переменных схемы S на вход «x_{j_t}» элемента E_t поступает значение 0, то на её выходе возникает значение 0. По построению $\varphi_{i_t} \leqslant x_{j_t}$, поэтому на наборе $\tilde{\sigma}$ на выходе элемента E_t в схеме S возникнет значение 0. В случае $t \geqslant 2$ это значение поступит на вход «$x_{j_{t-1}}$» элемента E_{t-1}; по построению $\varphi_{i_{t-1}} \leqslant x_{j_{t-1}}$, поэтому на наборе $\tilde{\sigma}$ на выходе элемента E_{t-1} в схеме S возникнет значение 0, и т. д. В итоге значение 0 «пройдёт» по цепочке из элементов $E_t, E_{t-1}, \ldots, E_1$ до выхода схемы S, что и требовалось доказать.

Предположим, что для элемента E_t выполнен случай а). Тогда вход «x_{j_t}» элемента E_t соединён в схеме S с каким-то её входом «x_q», $q \in \{1, \ldots, n\}$. На любом входном наборе $\tilde{\sigma}$ схемы S, на котором переменная x_q принимает значение 0, на вход «x_{j_t}» элемента E_t поступит это значение, и по утверждению $(***)$ на выходе схемы также возникнет значение 0. В таком случае выполнено неравенство $f(\tilde{x}^n) \leqslant x_q$ (для его доказательства достаточно отдельно рассмотреть всевозможные входные наборы схемы S, на которых переменная x_q принимает значение 0 и значение 1), поэтому $f(\tilde{x}^n) \in I^\infty$; противоречие. Значит, для элемента E_t выполнен случай б) и его вход «x_{j_t}» соединён в схеме S с выходом какого-то элемента E_{t+1}, не имеющего входов и, как следствие, реализующего в исправном состоянии некоторую булеву константу α. Будем считать, что если $\alpha = 0$, то элемент E_{t+1} исправен, а если $\alpha = 1$, то имеет место неисправность типа $\overline{\alpha} = 0$ этого элемента (и при этом все остальные элементы схемы S исправны). Тогда в каждом из случаев $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ на выходе элемента E_{t+1} в схеме реализуется константа 0. Она подаётся на вход «x_{j_t}» элемента E_t, поэтому на любом входном наборе схемы S на этот вход поступит значение 0, и такое же значение возникнет на выходе схемы по утверждению $(***)$. Тем самым установлено, что $f(\tilde{x}^n) \equiv 0$. При $n = 0$ имеем $f \equiv 0$ и $f \in I^\infty$, а при $n \geqslant 1$ выполнено, например, неравенство $f \leqslant x_1$, откуда $f(\tilde{x}^n) \in I^\infty$; однако это противоречит соотношению $f(\tilde{x}^n) \notin I^\infty$.

Во всех случаях получено противоречие. Теорема 4 доказана. □

Замечание 1. В качестве базиса B в формулировке теоремы 4 можно взять, например, множество $\{x\&\overline{y}, 1\}$; оно является функционально полным.

Замечание 2. Доля булевых функций от n переменных, принадлежащих множеству I^∞, стремится к 0 при $n \to \infty$. Действительно, обозначим через F_n множество всех функций из I^∞, формально зависящих от переменных $x_1, \ldots, x_n$, а через F_n^i — множество всех булевых функций от этих переменных, не превосходящих переменной x_i, где $n \in \mathbb{N}$ и $i = 1, \ldots, n$. Тогда каждая функция из множества F_n^i принимает значение 0 на всех 2^{n-1} двоичных наборах длины n, i-я компонента каждого из которых равна 0, и может принимать произвольные значения из множества $\{0, 1\}$ на остальных 2^{n-1} наборах, поэтому $|F_n^i| = 2^{2^{n-1}}$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$. В силу определения множества I^∞ имеем

$$F_n \subseteq F_n^1 \cup \ldots \cup F_n^n,$$
$$|F_n| \leqslant |F_n^1| + \ldots + |F_n^n| = n \cdot 2^{2^{n-1}},$$
$$\frac{|F_n|}{2^{2^n}} \leqslant \frac{n \cdot 2^{2^{n-1}}}{2^{2^n}} = \frac{n}{2^{2^{n-1}}} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

т. е. отношение числа булевых функций от n переменных, принадлежащих множеству I^∞, к общему числу булевых функций от n переменных, равному 2^{2^n}, стремится к 0 при $n \to \infty$, что и требовалось доказать.

Заключение

В теореме 1 для любого целого $m \geqslant 3$ приведён пример базиса, максимальное число существенных переменных у функций из которого равно m и в котором любую булеву функцию можно реализовать схемой, самокорректирующейся относительно некоторых неисправностей произвольного числа функциональных элементов; в теоремах 2 и 3 установлены аналогичные факты для случая $m = 2$ и неисправностей не более чем фиксированного числа элементов. Остаётся открытым вопрос о возможности реализации произвольной булевой функции схемой из функциональных элементов в каком бы то ни было полном базисе, состоящем из функций от не более чем двух переменных, самокорректирующейся относительно каких бы то ни было неисправностей произвольного числа элементов.

Теоремы 2–4 показывают, что существуют как «простые» полные базисы (а именно $\{x \mid y\}$ и $\{x\&y, \overline{x}\}$), в которых для любого $k \in \mathbb{N}$ любую булеву функцию можно реализовать схемой, самокорректирующейся относительно некоторых неисправностей не более k элементов, так и «простые» полные базисы (например, $\{x\&\overline{y}, 1\}$), в которых с учётом замечания 2 почти никакую булеву функцию нельзя реализовать схемой, самокорректирующейся относительно хотя бы каких-нибудь неисправностей не более одного элемента.

Теоремы 1–3 представляют собой, по-видимому, первые результаты, в которых установлена возможность реализации произвольной булевой функции самокорректирующимися схемами из ненадёжных функциональных элементов. Ранее при построении самокорректирующихся схем обычно предполагалось, что некоторые функциональные элементы являются надёжными, т. е. всегда исправными. Таким образом, результаты работы, на наш взгляд, имеют важное теоретическое значение.

Список литературы

[1] Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. — 138 с.

[2] Потапов Ю. Г., Яблонский С. В. О синтезе самокорректирующихся контактных схем // Докл. АН СССР. — 1960. — Т. 134, № 3. — С. 544–547.

[3] Мадатян Х. А. О синтезе схем, корректирующих размыкание контактов // Докл. АН СССР. — 1964. — Т. 159, № 2. — С. 290–293.

[4] Рабинович В. М. О самокорректирующихся схемах для счётчика чётности // Пробл. киберн. Вып. 17. — М.: Наука, 1966. — С. 227–231.

[5] Нечипорук Э. И. О корректировании замыканий в контактных схемах // Матем. заметки. — 1967. — Т. 2, № 1. — С. 15–24.

[6] Нечипорук Э. И. О корректировании обрывов в вентильных и контактных схемах // Кибернетика. — 1968. — № 5. — С. 40–48.

[7] Нечипорук Э. И. О топологических принципах самокорректирования // Пробл. киберн. Вып. 21. — М.: Наука, 1969. — С. 5–102.

[8] Улиг Д. Самокорректирующиеся контактные схемы, исправляющие большое число ошибок // Докл. АН СССР. — 1978. — Т. 241, № 6. — С. 1273–1276.

[9] Редькин Н. П. О самокорректировании контактных схем // Пробл. киберн. Вып. 33. — М.: Наука, 1978. — С. 119–138.

[10] Редькин Н. П. О самокорректировании контактных схем. II // Пробл. киберн. Вып. 36. — М.: Наука, 1979. — С. 195–208.

[11] Андреев А. Е. Метод бесповторной редукции синтеза самокорректирующихся схем // Докл. АН СССР. — 1985. — Т. 283, № 2. — С. 265–269.

[12] Андреев А. Е. Универсальный принцип самокорректирования // Матем. сб. — 1985. — Т. 127(169), № 2(6). — С. 147–172.

[13] Редькин Н. П. О сложности реализации булевых функций с малым числом единиц самокорректирующимися контактными схемами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. — 2011. — № 1. — С. 19–21.

[14] Кириенко Г. И. О самокорректирующихся схемах из функциональных элементов // Пробл. киберн. Вып. 12. — М.: Наука, 1964. — С. 29–37.

[15] Кириенко Г. И. Синтез самокорректирующихся схем из функциональных элементов для случая растущего числа ошибок в схеме // Дискрет. анализ. Вып. 16. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1970. — С. 38–43.

[16] Улиг Д. О синтезе самокорректирующихся схем из функциональных элементов с малым числом надёжных элементов // Матем. заметки. — 1974. — Т. 15, № 6. — С. 937–944.

[17] Чашкин А. В. Самокорректирующиеся схемы для функций полиномиального веса // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. — 1997. — № 5. — С. 64–66.

[18] Турдалиев Н. И. О самокорректировании схем для некоторых последовательностей булевых функций // Дискрет. матем. — 1989. — Т. 1, вып. 3. — С. 77–86.

[19] Турдалиев Н. И. О самокорректирующихся схемах из функциональных элементов для линейной функции // Дискрет. матем. — 1990. — Т. 2, вып. 2. — С. 150–154.

[20] Редькин Н. П. Об асимптотически минимальных самокорректирующихся схемах для одной последовательности булевых функций // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. — 1996. — № 3. — С. 3–9.

[21] Редькин Н. П. Асимптотически минимальные самокорректирующиеся схемы для одной последовательности булевых функций // Дискрет. анализ и исслед. опер. — 1996. — Т. 3, № 2. — С. 62–79.

[22] Краснов В. М. О сложности самокорректирующихся схем для одной последовательности булевых функций // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. — 2009. — № 5. — С. 55–57.

[23] Редькин Н. П. Надёжность и диагностика схем. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1992. — 192 с.

[24] Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986. — 384 с.

[25] Угольников А. Б. Классы Поста. Учебное пособие. — М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом ф-те МГУ, 2008. — 64 с.

Оглавление

Введение 3
Формулировки и доказательства основных результатов 6
Заключение 15
Список литературы 15