



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

**А.Ю. Круковский, А.С. Болдарев,
О.Г. Ольховская**

Модель Шустера –
Шварцшильда для
цилиндрически
симметричных течений
излучающего газа

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Круковский А.Ю., Болдарев А.С., Ольховская О.Г. Модель Шустера – Шварцшильда для цилиндрически симметричных течений излучающего газа // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. № 42. 19 с.
<https://doi.org/10.20948/prepr-2021-42>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-42>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук

А.Ю. Круковский, А.С. Болдарев, О.Г. Ольховская

**Модель Шустера–Шварцшильда
для цилиндрически симметричных
течений излучающего газа**

Москва — 2021

Круковский А.Ю., Болдарев А.С., Ольховская О.Г.

Модель Шустера–Шварцшильда для цилиндрически симметричных течений излучающего газа

В работе представлен алгоритм расчета лучистого теплообмена в излучающем и поглощающем газе на основе приближения Шустера–Шварцшильда для случая цилиндрически симметричного течения. В данном приближении рассчитывается плотность энергии излучения в виде квадратуры от коэффициента поглощения и излучательной способности плазмы. Эта квадратура используется для расчета вклада лучистого теплообмена в энергобаланс газового потока. Описывается алгоритм построения одномерной адаптивной разностной сетки для численного расчета уравнения лучистого переноса энергии, позволяющий получить высокоточное численное решение на сетке меньшей размерности, чем исходная «газодинамическая» сетка. На тестовых примерах, моделирующих пространственную неоднородность поля излучения, проведено численное сравнение предложенного метода с некоторыми методами диффузионного типа на исходных газодинамических и адаптированных разностных сетках.

Ключевые слова: лучистый теплообмен, радиационная газодинамика, приближение Шустера–Шварцшильда, конечно-разностная схема

***Alexander Yurievich Krukovskiy, Alexey Sergeevich Boldarev,
Olga Gurgenovna Olkhovskaya***

Schuster–Schwarzschild model for cylindrically symmetric flows of the radiating gas

The paper presents an algorithm for calculating radiative heat transfer in an emitting and absorbing gas based on the Schuster – Schwarzschild approximation for the case of a cylindrically symmetric flow. In this approximation, the radiation energy density is calculated as a quadrature of the absorption coefficient and the emissivity of the plasma. This quadrature is used to calculate the contribution of radiative heat transfer to the energy balance of the gas flow. An algorithm is described for constructing a one-dimensional adaptive difference mesh for the numerical calculation of the radiative energy transfer equation, which makes it possible to obtain a high-precision numerical solution on a mesh of a smaller dimension than the original “gas-dynamic” mesh. On test examples simulating the spatial inhomogeneity of the radiation field, a numerical comparison of the proposed method with some diffusion-type methods on the initial gas-dynamic and adapted computational meshes is carried out.

Key words: radiative heat transfer, radiative hydrodynamics, Schuster – Schwarzschild approximation, finite-difference scheme

Введение

Изучение течений излучающего газа и плазмы в условиях цилиндрической симметрии представляет собой одно из важных направлений в радиационной газовой динамике (ГД) и магнитной гидродинамике (МГД), поскольку связано с широким кругом физических проблем, изучаемых в настоящее время экспериментально и теоретически (см. напр. [1–3]).

Численное решение задач радиационной ГД и МГД даже в одномерной геометрии требует больших затрат вычислительных ресурсов из-за появления в уравнении радиационного переноса дополнительных (угловых) независимых переменных. Поэтому важное значение имеют различные приближения, позволяющие эффективно понизить размерность уравнения радиационного переноса.

Известно [4], что в оптически плотном веществе в условиях, близких к термодинамическому равновесию, достаточно хорошей моделью служит приближение лучистой теплопроводности, а в прозрачной среде – приближение оптически тонкого слоя. В случае, когда анизотропия излучения мала, эффективными являются методы диффузионного типа [5]. Основными достоинствами диффузионного приближения являются простота реализации и высокая скорость вычислений. Данное приближение обеспечивает физически корректные результаты как в прозрачной, так и в плотной плазме. Однако в областях, где пробег фотона сравним с характерным масштабом плазмы, возможна существенная анизотропия излучения. В таких областях диффузионное приближение формально неприемлемо и может привести к некорректным результатам. Между тем нередки ситуации, когда в потоке излучающего газа или плазмы оптически прозрачные области соседствуют с областями, где коэффициент поглощения столь велик, что длина пробега кванта становится существенно меньше размера ячейки разностной сетки.

В настоящей работе представлен способ приближенного описания процессов переноса излучения в условиях цилиндрической симметрии течения на основе приближения Шустера–Шварцшильда («вперед-назад»). Как показано в [4], для плоской геометрии данное приближение позволяет получить выражение для плотности энергии излучения в виде квадратуры, определяемой коэффициентом поглощения среды. Для рассматриваемого ниже цилиндрически симметричного течения модель «вперед-назад» дает выражение для вклада процесса излучения в виде источника в уравнение энергии. На тестовых примерах моделируется пространственная неоднородность поля излучения, при этом проведено численное сравнение предложенного метода с несколькими методами диффузионного типа. В работе обсуждается возможность повышения точности решения разностных уравнений путем улучшения качества аппроксимации коэффициента поглощения.

Расчет поля излучения проводился как на «газодинамических», так и на адаптивных разностных сетках.

Некоторые приближения диффузионного типа для решения уравнения радиационного переноса

Для решения уравнений для параметров поля излучения одним из наиболее привлекательных в смысле простоты и универсальности является метод диффузионного приближения, априорно использующий предположение об изотропии поля излучения. Интегрирование уравнения переноса излучения приводит к системе уравнений диффузии, так как между потоком S и плотностью U энергии излучения получается связь, аналогичная связи между потоком и давлением при диффузии частиц.

В случае цилиндрической симметрии, в предположении квазистационарности поля излучения в излучающей и поглощающей среде, система уравнений лучистого переноса энергии имеет вид [6]:

$$\sqrt{1-\gamma^2} \left(\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial I_\nu}{\partial \mu} \right) = \kappa_\nu (I_{\nu p} - I_\nu), \quad (1)$$

$$S = 2 \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 \sqrt{1-\gamma^2} d\gamma \int_{-1}^1 \frac{\mu I_\nu}{\sqrt{1-\mu^2}} d\mu. \quad (2)$$

Здесь S – поток энергии излучения; κ_ν – коэффициент поглощения излучения с частотой ν ; μ – косинус угла между направлением полета фотонов и радиусом, проведенным в данную точку; γ – косинус угла между направлением полета фотонов и осью симметрии (см. рис. 1); I_ν – спектральная интенсивность излучения; $I_{\nu p}$ – спектральная интенсивность излучения абсолютно черного тела.

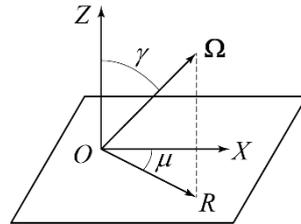


Рис. 1. К определению потока энергии излучения: γ – косинус угла между направлением полета фотона (лучом Ω) и осью Z , μ – косинус угла между осью X и проекцией луча Ω на площадку, пересекаемую потоком фотонов

Граничные условия для уравнений (1)–(2) задаются следующим образом:

- на оси симметрии $I_\nu(0, \mu, \gamma) = I_\nu(0, -\mu, \gamma)$;
- на внешней границе $I_\nu(R, \mu, \gamma) = 0$.

Проинтегрируем последовательно уравнение (1) с весами $1/\sqrt{1-\mu^2}$ и $\mu \sqrt{1-\gamma^2}/\sqrt{1-\mu^2}$ на множестве $\mu \in [-1, 1]$, $\gamma \in [-1, 1]$ и предположим, что

интенсивность излучения не зависит от угловых переменных μ и γ . Тогда в одногрупповом приближении имеем

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r S)}{\partial r} = \alpha (U_p - U), \quad (3)$$

$$\frac{1}{3} \frac{\partial U}{\partial r} + \alpha S = 0. \quad (4)$$

Здесь U_p – плотность равновесного излучения.

Граничные условия для системы уравнений (3)–(4) задаются следующим образом:

$$S_{r=0} = 0, \quad S_{r=R} = \frac{1}{2} U.$$

Аппроксимация уравнений диффузии проводится интегро-интерполяционным методом.

Получающиеся в результате трехточечная разностная схема решается методом прогонки [7].

Более развитой модификацией такого подхода является метод квазидиффузионного приближения [8]. При выводе уравнений квазидиффузии нет ограничений, связанных с зависимостью интенсивности от угловых переменных, а получающиеся уравнения по своей математической структуре аналогичны уравнениям (3)–(4). Отличие заключается в том, что в системе уравнений квазидиффузии появляются дополнительные коэффициенты, являющиеся интегральными функциями от точного решения уравнения переноса (1). Поэтому в методе квазидиффузионного приближения используется следующий прием: уравнение переноса, зависящее от углов и требующее достаточно больших затрат машинных ресурсов, решается один раз за N временных шагов ($N > 1$), а на остальных шагах решается не зависящая от угловых переменных система уравнений квазидиффузии.

Упрощение расчета лучистого теплообмена связано с переходом к осредненной по угловому распределению интенсивности излучения. В приближении Шустера–Шварцшильда с этой целью вводятся лучистые потоки, вычисляемые по полусферам для взаимно противоположных направлений полета фотонов («вперед-назад» по лучу). В плоском случае интенсивность излучения принимается кусочно-постоянной функцией от косинуса угла направления полета фотонов μ : при $\mu \in (0, 1]$ $I = I_1$, а при $\mu \in [-1, 0]$ $I = I_2$. Соответствующие уравнения в плоской геометрии излучающего и поглощающего слоя приведены, например, в [5, 8]. Они получены в предположении об изотропности излучения в пределах каждой из двух полусфер. Весьма эффективными оказались расчетные методики Фотрие и

Райбики [7], разработанные на основе таких полусферических лучистых потоков.

Обобщения на случай цилиндрической и сферической симметрии для расчета лучистого теплообмена между соосными цилиндрами или сферами рассмотрены в [9]. Также приближение «вперед-назад» для цилиндрически симметричного случая применялось в [10], где в направлении, перпендикулярном оси симметрии, азимутальная неоднородность интенсивности моделировалась кусочно-постоянной функцией, а в плоскости оси интенсивность считалась не зависящей от угла направления полета фотонов. Тогда интегрирование уравнения (1) по телесному углу с учетом сделанных ограничений приводит к следующей системе:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r I_1)}{\partial r} - \frac{I_1 + I_2}{2r} = 2 \alpha (I_p - I_1), \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r I_2)}{\partial r} - \frac{I_1 + I_2}{2r} = -2 \alpha (I_p - I_2). \quad (6)$$

Плотность излучения и его поток определяются следующим образом:

$$U = 2 \pi (I_1 + I_2), \quad S = \pi (I_1 - I_2).$$

Суммируя и вычитая попарно уравнения (5) и (6), мы получаем систему уравнений, которая совпадает с точностью до численного коэффициента с системой уравнений диффузионного приближения (3)–(4).

Заметим, что для таких конфигураций плазменных течений, как Z-пинч близко к финалу магнитной имплозии, характерный размер в осевом направлении существенно превосходит размер области плазмы в перпендикулярной к оси плоскости. Соответственно, более высокой является неоднородность интенсивности по полярному углу, чем по азимутальному. Такую неоднородность необходимо учитывать в первую очередь.

Методика расчета лучистых потоков

В цилиндрической геометрии интегрирование уравнения (1) по угловым переменным и частоте ν дает вклад теплопереноса излучением в уравнение энергобаланса газа (плазмы) в виде

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rS)}{\partial r} = \int_0^{\infty} \alpha_{\nu} (U_{\nu p} - U_{\nu}) d\nu, \quad U_{\nu p} = \sigma T^4.$$

Здесь

$$U_\nu = 2 \int_{-1}^1 d\gamma \int_{-1}^1 \frac{I_\nu}{\sqrt{1-\mu^2}} d\mu -$$

спектральная плотность энергии излучения; $U_{\nu p}$ – спектральная плотность равновесного излучения; σ – постоянная Стефана – Больцмана.

Диапазон частот, в котором происходит основной теплообмен излучением, можно разбить на некоторое количество интервалов (групп) $0 \leq \nu_1, \dots, \nu_i \leq \nu_k$ и для каждой группы решить уравнение (1), используя осредненные значения для

$$I_i = \int_{\nu_i}^{\nu_{i+1}} I_\nu d\nu, \quad U_i = \int_{\nu_i}^{\nu_{i+1}} U_\nu d\nu$$

и предполагая, что на каждом интервале коэффициент поглощения не зависит от энергии фотона:

$$\alpha_\nu(T_e, \rho, \nu) = \alpha_i(T_e, \rho), \quad \nu_i \leq \nu \leq \nu_{i+1},$$

при этом

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rS)}{\partial r} = \sum_{i=1}^k \alpha_i (U_{ip} - U_i).$$

Поэтому далее мы опускаем зависимость от частоты и рассматриваем «одногрупповое» приближение, что, очевидно, не нарушает общности.

При решении уравнения (1) используем известный прием [4, 5], введя для $I_\nu(\mu, \gamma, r)$ двухгрупповое описание по угловой переменной μ и не делая никаких предположений относительно зависимости от угловой переменной γ :

$$I(\mu, \gamma, r) = \begin{cases} I^-(\gamma, r) & \mu \leq 0 \\ I^+(\gamma, r) & \mu > 0 \end{cases}.$$

Проинтегрируем по μ уравнение (1) сначала от -1 до 0 , затем от -1 до 1 . После интегрирования мы получаем уравнения для Γ и $U = \Gamma^+ + \Gamma^-$:

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial \Gamma^-}{\partial r} = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\gamma^2}} (I_p - \Gamma^-), \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 U)}{\partial r} + \frac{\alpha U}{\sqrt{1-\gamma^2}} = 2 \Gamma^- \left(\frac{\alpha}{\sqrt{1-\gamma^2}} + \frac{1}{r} \right). \quad (8)$$

Интегрирование уравнения (1) проводится с учетом граничных условий:

$$I_{zp}^-(R) = 0, \quad U_{zp}(0) = 2 \Gamma_{zp}^-(0), \quad 0 \leq r \leq R.$$

Решая последовательно уравнения (7)–(8), получаем

$$U(\gamma, r) = \frac{8}{r^2} \int_0^r \int_{r'}^R \frac{\mathfrak{a}(r'')}{\sqrt{1-\gamma^2}} I_p(r'') \left(r' + \frac{\mathfrak{a}(r')}{\sqrt{1-\gamma^2}} (r')^2 \right) \cdot \exp\left(-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\gamma^2}}\right) dr'' dr',$$

где

$$\zeta(r, r', r'') = 2 \left(\int_r^{r''} \mathfrak{a}(r''') dr''' + \int_{r'}^r \mathfrak{a}(r''') dr''' \right).$$

Проинтегрируем полученное выражение по γ и, сделав подстановку $\text{ch } x = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}}$, получим выражение для вклада переноса излучения в уравнение энергии

$$U(r) = \frac{8}{r^2} \int_0^r \int_{r'}^R \mathfrak{a}(r'') I_p(r'') \left(r' f(\zeta) - \mathfrak{a}(r') (r')^2 \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right) dr'' dr'. \quad (9)$$

Функция

$$f(\zeta) = 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-\zeta \text{ch } x}}{\text{ch } x} dx$$

может быть выражена в терминах модифицированных функций Ганкеля, т. к.

$$\frac{\partial f}{\partial \zeta} = -2 K_0(\zeta).$$

При проведении расчетов для функции $f(\zeta)$ можно использовать различные аппроксимации, что объясняется экспоненциальным спаданием $f(\zeta)$ в области $\zeta > 1$. Важными свойствами функции $f(\zeta)$, определяющими асимптотическое поведение распределения энергии излучения в пределах как оптически плотной ($\mathfrak{a} R \gg 1$), так и оптически прозрачной ($\mathfrak{a} R \rightarrow 1$) среды, являются следующие соотношения:

$$f(0) = \pi; \quad \int_0^{\infty} f(\zeta) d\zeta = 2.$$

В качестве первого приближения можно взять простейшую аппроксимацию функции $f(\zeta)$:

$$f(\zeta) = \begin{cases} \pi - \frac{\pi^2}{4} \zeta, & \zeta \leq \frac{4}{\pi}, \\ 0, & \zeta > \frac{4}{\pi}. \end{cases} \quad (10)$$

Такая аппроксимация $f(\zeta)$ позволяет существенно снизить затраты машинного времени и, как показали тестовые расчеты (см. ниже), погрешность, возникающая при данном приближении, является вполне допустимой для многих практических задач.

Построение алгоритма решения уравнения переноса

Область, заполненную веществом, разобьем на N (в общем случае неравномерных) ячеек. Обозначим множество узлов разностной сетки через $\bar{\omega}$, а множество ячеек разностной сетки ω . Введем пространства сеточных функций, определенных в узлах и ячейках разностной сетки, и обозначим их через H_ω и H_ω^- соответственно. Для записи сеточных функций $f \in H_\omega^-$ будем использовать индекс j : $f_j \in f \in H_\omega^-$. Сеточные функции $g \in H_\omega$ будем отмечать индексом l : $g_l \in g \in H_\omega$ ($l = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, N+1}$). Определим сеточную функцию r в узлах разностной сетки, а сеточные функции \varkappa , I , I_p , U и U_p – в ячейках. Для численной реализации предложенного метода аппроксимируем двойной интеграл (9) на разностной сетке $\bar{\omega}_h$. При этом мы учитываем, что коэффициент \varkappa постоянен в разностной ячейке “ l ”:

$$U_l = \frac{2}{r_{j+1}^2 - r_j^2} \int_{r_j}^{r_{j+1}} U(r) dr, \quad j = l.$$

Обозначим

$$J(\varkappa_{r'}) = f(\zeta) - \varkappa(r') r' \frac{\partial f}{\partial \zeta},$$

$$G(r) = I_p(r) \varkappa(r).$$

Тогда имеем

$$U(r) = \frac{8}{r^2} \int_0^r dr' \int_{r'}^{r_{N+1}} G(r'') r'' J(\varkappa_{r'}) dr'' =$$

$$= \frac{8}{r^2} \left(\sum_{k=1}^{j-1} \int_{r_k}^{r_{k+1}} dr' r' \int_{r'}^{r_{N+1}} G(r'') J(\varkappa_{r'}) dr'' + \int_{r_j}^r dr' r' \int_{r'}^{r_{N+1}} G(r'') J(\varkappa_{r'}) dr'' \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{8}{r^2} \left(\sum_{k=1}^{j-1} \int_{r_k}^{r_{k+1}} r' dr' \left\{ \int_{r'}^{r_{k+1}} G(r'') J(\mathfrak{a}_{r'}) dr'' + \sum_{i=k+1}^N \int_{r_i}^{r_{i+1}} G(r'') J(\mathfrak{a}_{r'}) dr'' \right\} + \right. \\
&\quad \left. + \int_{r_j}^r r' dr' \int_{r'}^{r_{N+1}} G(r'') J(\mathfrak{a}_{r'}) dr'' \right) = \\
&= \frac{8}{r^2} \left(\sum_{k=1}^{j-1} \int_{r_k}^{r_{k+1}} r' dr' \left\{ G(r_n) \int_{r'}^{r_{k+1}} J(\mathfrak{a}_n) dr'' + \sum_{i=k+1}^N G(r_m) \int_{r_i}^{r_{i+1}} J(\mathfrak{a}_n) dr'' \right\} + \right. \\
&\quad \left. + \int_{r_j}^r r' dr' \left\{ G(r_l) \int_{r_j}^{r_{j+1}} J(\mathfrak{a}_l) dr'' + \sum_{i=j+1}^N G(r_m) \int_{r_i}^{r_{i+1}} J(\mathfrak{a}_l) dr'' \right\} \right).
\end{aligned}$$

Здесь $n = k$, $m = i$, $r_n = 0,5(r_k + r_{k+1})$, $r_m = 0,5(r_i + r_{i+1})$.

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
U_n^{(1)}(r) &= \int_{r_k}^{r_{k+1}} r' \int_{r'}^{r_{k+1}} J(\mathfrak{a}_n) dr'' dr', \\
U_{nm}^{(2)}(r) &= \int_{r_k}^{r_{k+1}} r' \int_{r_i}^{r_{i+1}} J(\mathfrak{a}_n) dr'' dr', \\
U_l^{(3)}(r) &= \int_{r_j}^r r' \int_{r'}^{r_{j+1}} J(\mathfrak{a}_l) dr'' dr', \\
U_{lm}^{(4)}(r) &= \int_{r_j}^r r' \int_{r_i}^{r_{i+1}} J(\mathfrak{a}_l) dr'' dr'.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
U_r(r) &= \frac{8}{r^2} \left[\sum_{k=1}^{j-1} \left(G(r_n) U_n^{(1)}(r) + \sum_{i=k+1}^N G(r_m) U_{nm}^{(2)}(r) \right) + \right. \\
&\quad \left. + G(r_l) U_l^{(3)}(r) + \sum_{i=j+1}^N G(r_m) U_{lm}^{(4)}(r) \right]. \tag{11}
\end{aligned}$$

Для аргумента функции f

$$\zeta(r, r', r'') = 2 \left(\int_{r'}^r \mathfrak{a}(r''') dr''' + \int_{r'}^{r''} \mathfrak{a}(r''') dr''' \right).$$

Аналогично можно выписать следующие формулы:

- для $U_n^{(1)}(r)$: $r_k \leq r' \leq r_{k+1}$, $r' \leq r'' \leq r_{k+1}$:

$$\zeta^{(1)}(r, r', r'') = 2 \left(\sum_{k'=k+1}^{j-1} \alpha_{n'}(r_{k'+1} - r_{k'}) + \alpha_n(r_{k+1} + r'' - 2r') + \alpha_l(r - r_j) \right);$$

- для $U_{nm}^{(2)}(r)$: $r_k \leq r' \leq r_{k+1}$, $r_i \leq r'' \leq r_{i+1}$:

$$\zeta^{(2)}(r, r', r'') = 2 \left(\sum_{k'=k+1}^{j-1} \alpha_{n'}(r_{k'+1} - r_{k'}) + \sum_{k'=k+1}^{i-1} \alpha_{n'}(r_{k'+1} - r_{k'}) + 2 \alpha_n(r_{k+1} - 2r') + \alpha_l(r - r_j) + \alpha_m(r' - r_i) \right);$$

- для $U_l^{(3)}(r)$: $r_j \leq r' \leq r$, $r' \leq r'' \leq r_{j+1}$:

$$\zeta^{(3)}(r, r', r'') = 2 \alpha_l(r + r'' - 2r');$$

- для $U_{lm}^{(4)}(r)$: $r_j \leq r' \leq r$, $r_i \leq r'' \leq r_{i+1}$:

$$\zeta^{(4)}(r, r', r'') = 2 \left(\sum_{k'=j+1}^{i-1} \alpha_{n'}(r_{k'+1} - r_{k'}) + \alpha_l(r_{j+1} + r - 2r') + \alpha_m(r'' - r_i) \right);$$

где $n' = k'$.

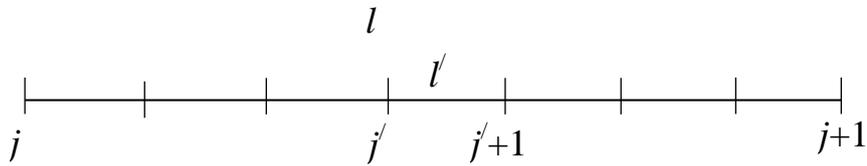
Таким образом, вклад переноса излучения записан в уравнение энергии в виде конечно-разностной квадратурной формулы (11). При этом единственным предположением модели является приближение «вперед-назад» в азимутальной плоскости. Из сравнительного анализа, проведенного на тестовых примерах, результаты которого приведены ниже, видно, что такой подход, несмотря на алгоритмическую сложность, связанную с аппроксимацией двойного интеграла на разностной сетке, имеет несомненные достоинства, обусловленные именно его интегральностью.

Построение редуцированной разностной сетки

Опишем алгоритм построения расчетной сетки, которая может иметь существенно меньший размер, чем исходная «газодинамическая» сетка, позволяя, тем не менее, получить приемлемое по точности решение уравнения переноса. Фактором, позволяющим существенно снизить затраты машинного времени на построение редуцированной разностной сетки, является безразмерный параметр $\alpha \Delta r$. На первом этапе алгоритма производится просмотр газодинамической разностной сетки с целью выявления участков, на

которых параметр $\alpha \Delta r$ не претерпевает существенных изменений: $c_1 \alpha_{l'} \Delta r_{j'} \leq \alpha_{l'+1} \Delta r_{j'+1} \leq c_2 \alpha_{l'} \Delta r_{j'}$ (коэффициенты c_1 и c_2 выбираются из соображений точности решения: $c_1 < 1$, $c_2 > 1$). В этом случае происходит объединение разностных ячеек, имеющих близкую оптическую толщину. Таким образом, расчетная область разбивается на участки, которые и являются промежуточными ячейками новой разностной сетки размерности N_1 . Редукция исходной разностной сетки имеет смысл, если $N_1 \ll N$. Практика крупносериальных вычислительных экспериментов [11] показала, что этот прием оказывается полезным при расчете поля излучения в многогрупповом (по спектру) приближении.

Переход с газодинамической сетки на промежуточную осуществляется следующим образом:



по формуле $\Delta m_l = \sum_{l'} \Delta m_{l'}$, $l = \overline{1, N_1}$, определяется масса “ l ” ячейки новой сетки,

а по формулам $\rho_l = \frac{2 \Delta m_l}{r_{j+1}^2 - r_j^2}$, $\varepsilon_l = \frac{\sum_{l'} \varepsilon_{l'} \Delta m_{l'}}{\Delta m_l}$ – ее плотность и энергия

соответственно. После этого находится температура $T_l = \varepsilon_l(\rho_l, T_l)$ и коэффициенты излучения: $\alpha_l = \alpha_l(\rho_l, T_l)$ – коэффициент поглощения и $U_{pl} = U_p(\rho_l, T_l)$ – плотность равновесного излучения. На новой разностной сетке решается уравнение переноса излучения одним из описанных выше методов. Найденное решение может использоваться для дальнейшей редукции разностной сетки.

Очередной этап построения редукции сетки заключается в следующем. Находится численное решение U_{2N_1} на разностной сетке, имеющей размерность $2N_1$, которая получается из разностной сетки, полученной на предыдущем этапе, путем деления разностных ячеек пополам. При построении новой разностной сетки N_2 ($N_1 \leq N_2 \leq 2N_1$, $N_2 \leq N$) проверяется неравенство

$$\left| U_{N_1}(l) - \frac{U_{2N_1}(2l) + U_{2N_1}(2l-1)}{2} \right| < \varepsilon |U_{N_1}(l)| + \varepsilon_0 \quad (12)$$

для всех ячеек разностных сеток $l = \overline{1, N_1}$. Здесь ε и ε_0 – относительная и абсолютная погрешности решения уравнения переноса соответственно. Там,

где условия (12) выполнены, участок новой сетки формируется из разностных ячеек, принадлежащих первой сетке, а там, где неравенство (12) нарушается – из разностных ячеек, принадлежащих второй сетке. Если $N_1 = N_2$ (т. е. (12) справедливо для всех ячеек) – N_1 – окончательная размерность новой сетки, а U_{N_1} – численное решение уравнения переноса. Если же (12) нарушается хотя бы в одной ячейке, процесс редукции сетки повторяется до выполнения условия $N_k = N_{k+1}$ и, следовательно, $U_{N_k} = U_{N_{k+1}}$. Очевидно, не составляет труда после расчета лучистого переноса на вспомогательной сетке произвести перерасчет интенсивности излучения на исходную сетку.

Решение прикладных задач (см., например, [11]) показало полезность приема построения редуцированной сетки.

Результаты тестовых расчетов

Описанный в настоящей работе алгоритм расчета переноса излучения был протестирован на задачах, связанных с МГД течениями излучающего газа. Система уравнений радиационной МГД в переменных Лагранжа для цилиндрически симметричного случая имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -r \frac{\partial p}{\partial m} - \frac{1}{4\pi} \left(r B_z \frac{\partial B_z}{\partial m} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial m} (r^2 B_\phi^2) \right) \quad (13)$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} = u(m, t), \quad dm = \rho r dr \quad (14)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_e}{\partial t} = -P_e \frac{\partial}{\partial t} (1/\rho) - \frac{\partial W_e}{\partial m} + Q_{ei} + G_{joul} + G_e - \frac{\partial r S}{\partial m} \quad (15)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t} = -P_i \frac{\partial}{\partial t} (1/\rho) - \frac{\partial W_i}{\partial m} - Q_{ei} + G_i \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B_z}{\rho} \right) = - \frac{\partial}{\partial m} (r E_\phi) \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B_\phi}{\rho r} \right) = \frac{\partial E_z}{\partial m} \quad (18)$$

$$E_\phi = - \frac{\rho r}{4\pi\sigma} \frac{\partial B_z}{\partial m} \quad (19)$$

$$E_z = \frac{\rho}{4\pi\sigma} \frac{\partial}{\partial m} (r B_\phi) \quad (20)$$

$$P = P_e + P_i, \quad P_{e,i} = p(\rho, T_{e,i}), \quad \varepsilon_{e,i} = \varepsilon(\rho, T_{e,i}). \quad (21)$$

Здесь u – скорость вещества; t – время; r – пространственная координата: $0 \leq r(m, t) \leq R(M, t)$; m – массовая переменная: $0 \leq m \leq M$; p – газодинамическое давление; p_e и p_i – давление электронного и ионного газа соответственно; ε_e и ε_i – внутренняя энергия электронов и ионов; E_φ , E_z и B_φ , B_z – азимутальные и продольные компоненты электрического и магнитного полей; $W_{e,i}$ – электронный и ионный потоки тепла: $W_{e,i} = -\alpha_{e,i} \rho r^2 \frac{\partial T_{e,i}}{\partial m}$; $\alpha_{e,i}(T_{e,i}, \rho, \mathbf{B})$ – коэффициент электронной и ионной теплопроводности; $\sigma(T_e, \rho, \mathbf{B})$ – электропроводность; G_{joul} – мощность джоулева энерговыделения:

$$G_{joul} = \frac{1}{4\pi} \left(E_z \frac{\partial}{\partial m} (r B_\varphi) - r E_\varphi \frac{\partial B_z}{\partial m} \right);$$

$Q_{e,i}$ – скорость обмена энергией между электронами и ионами; $G_{e,i}$ – объемные стоки (источники) электронной и ионной энергии. Поток энергии излучения S , входящий в уравнение энергии электронов (15), находится из решения уравнений переноса (1)–(2).

Значения коэффициентов для тестовых расчетов, моделирующих пространственную неоднородность поля излучения, задавались следующим образом (см. рис. 2). Коэффициент поглощения α полагался постоянным и равным α_1 в интервале $r_1 \leq r \leq r_2$ для всех расчетов, а в остальной области $0 \leq r \leq r_1$ и $r_2 \leq r \leq R$ коэффициент поглощения имел вид $\alpha_2 = \frac{\alpha_1}{c_n}$, $n = 1, 2, 3$.

При этом предполагалось, что оптическая толщина слоя $[r_1, r_2]$ существенно больше единицы. Плотность равновесного излучения задавалась постоянной во всей расчетной области $0 \leq r \leq R$.

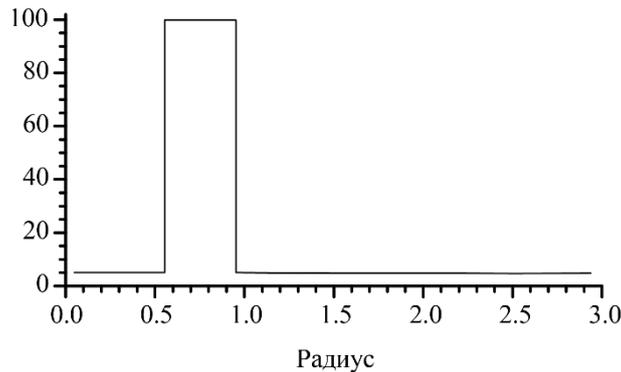


Рис. 2. Зависимость коэффициента поглощения от радиуса

Аналитический расчет по (1) распределения интенсивности $I(r, \varphi, \gamma)$ и соответствующей ей плотности энергии излучения $U(r, \varphi, \gamma)$ даже в этом относительно простом тесте оказывается достаточно сложным. Поэтому для сравнения с численными расчетами по методу Шустера–Шварцшильда и

методами диффузионного типа ограничимся оценкой качественного поведения профиля $U(r)$.

Поскольку плотная оболочка оптически непрозрачна для излучения, $\alpha_1(r_2 - r_1) \gg 1$, то внутри оболочки при $r < r_1$ распределение плотности энергии излучения практически постоянно и соответствует значению $U = U_p$. Внешняя оболочка оптически прозрачна для излучения, поэтому вблизи границы плотной оболочки на размере $1/\alpha_1 \ll (r_2 - r_1)$ функция $U(r)$ резко падает до значения $U = U_p / 2$, а снаружи плотной оболочки падает по закону, близкому к $U(r) \approx 1/r$, поскольку $\alpha \rightarrow 0$. Тогда вдоль траектории полета фотонов интенсивность приблизительно постоянна, а угол, под которым видна плотная оболочка при удалении от нее, $\Delta\varphi \approx 1/r$. Отсюда следует закон спада функции $U(r)$, поскольку $U = 2\pi\Delta\varphi I$.

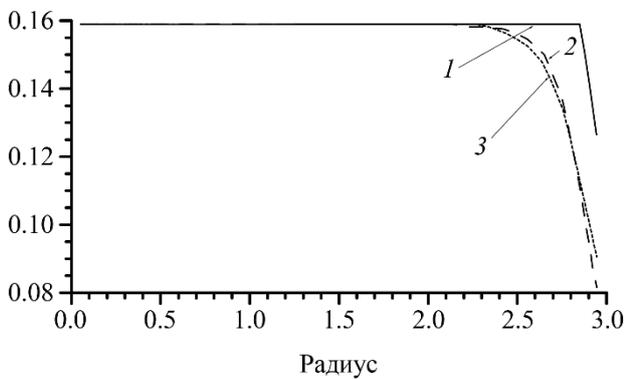


Рис. 3. $c_1 = 2 \cdot 10^2$, 1 – методика данной работы, 2 – диффузионное приближение [6], 3 – приближение «вперед-назад» [10]

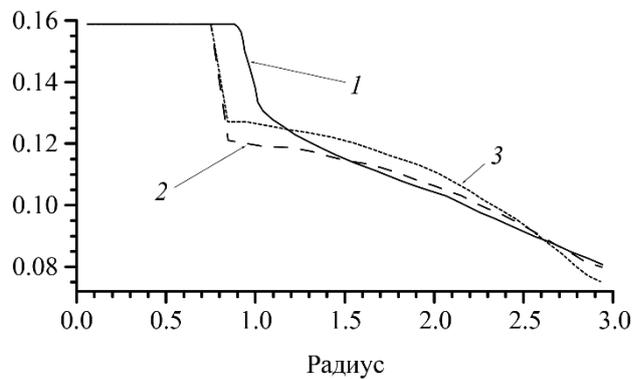


Рис. 4. $c_2 = 2 \cdot 10^4$, 1 – методика данной работы, 2 – диффузионное приближение [6], 3 – приближение «вперед-назад» [10]

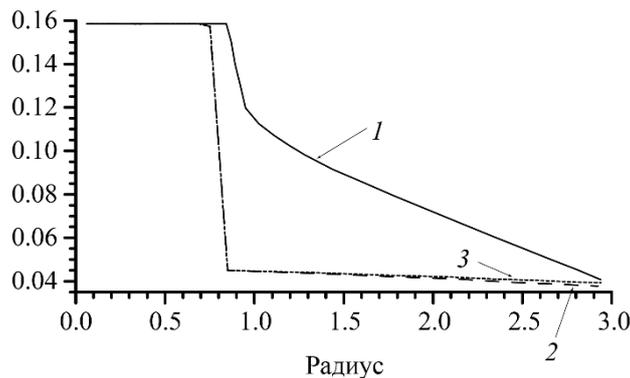


Рис. 5. $c_3 = 10^5$, 1 – методика данной работы, 2 – диффузионное приближение [6], 3 – приближение «вперед-назад» [10]

На рис. 3–5 представлены результаты численных расчетов по методу, описанному в данной работе, и некоторым методам диффузионного типа.

Параметры задачи задавались в виде: $\alpha_1 = 100$, $U_p = 0.5$, $r_1 = 0.7$, $r_2 = 1$, $R = 3$, $c_1 = 200$, $c_2 = 2 \cdot 10^4$, $c_3 = 10^5$.

Результаты расчета (см. рис. 5) показывают, что в случае диффузионного приближения и метода диффузионного типа, предложенного в [10], даже при разрыве в коэффициенте поглощения, не превышающем четырех порядков, плотность излучения сильно «зарезается» при $r > r_2$ по сравнению с точным решением, что в практических расчетах приводит к существенному снижению потока излучения и неоправданному перегреву области $r \leq r_2$, где излучение «заперто». Расчет же, выполненный по рассматриваемой в данной работе методике, дает качественно правильное спадание плотности излучения в области $r > r_2$.

Заметим, что при построении схемы с конечно-разностной аппроксимацией уравнений (3)–(4) использовалась линейная интерполяция коэффициента поглощения α . Попытка улучшить качество аппроксимации путем интегрирования уравнений (3)–(4) по разностной ячейке при постоянном α с дальнейшим использованием для аппроксимации точного решения, аналогично тому, как это было сделано для случая плоской геометрии в [4], принципиально не меняет характер решения. Даже тот факт, что из-за цилиндричности необходимо работать в терминах модифицированных функций Бесселя, приводит к достаточно сложным формулам. Но главным является то, что в данном случае из сходимости численного решения системы (3)–(4) совсем не следует сходимость к точному решению уравнения (1). Поэтому при данных коэффициентах излучения использование методик диффузионного типа представляется нецелесообразным.

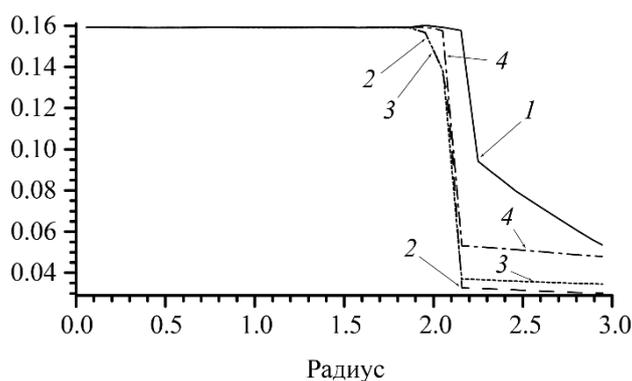


Рис. 6. $c_4 = 10^5$, $r_1 = 2$, $r_2 = 2.3$. 1 – методика данной работы, 2 – диффузионное приближение [6], 3 – приближение «вперед-назад» [10], 4 – диффузионное приближение с аппроксимацией [12]

На рис. 6 представлен расчет с применением аппроксимационных формул из [12], параметры расчета полагались такими же, как в предыдущем случае рис. 5, за исключением параметров r_1 и r_2 , значения которых равнялись 2 и 2.3 соответственно, что обуславливало несущественное влияние цилиндричности на расчет.

На рис. 7–9 представлены расчеты тех же вариантов, что и на рис. 3–5 с использованием адаптивной разностной сетки. Эти расчеты занимают существенно (в 2–6 раз) меньше расчетного времени, при этом полученные результаты, безусловно, ближе к точному решению. Однако для методов диффузионного типа результаты принципиально не меняются.

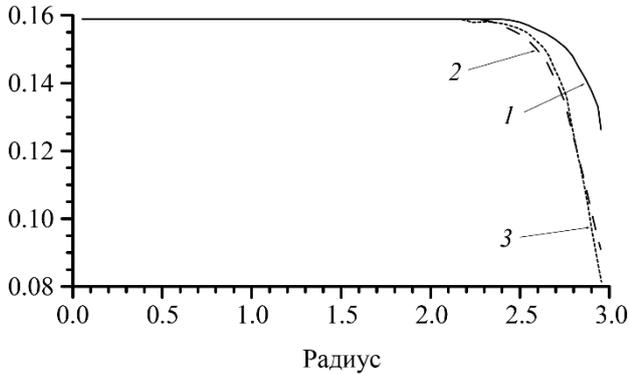


Рис. 7. $c_1 = 2 \cdot 10^2$, 1 – методика данной работы, 2 – диффузионное приближение [6], 3 – приближение «вперед-назад» [10]

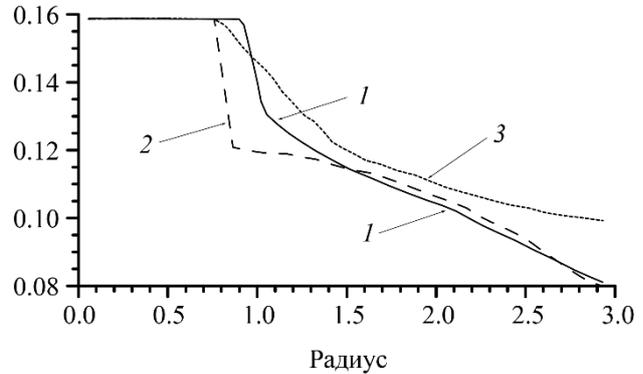


Рис. 8. $c_2 = 2 \cdot 10^4$, 1 – методика данной работы, 2 – диффузионное приближение [6], 3 – приближение «вперед-назад» [10]

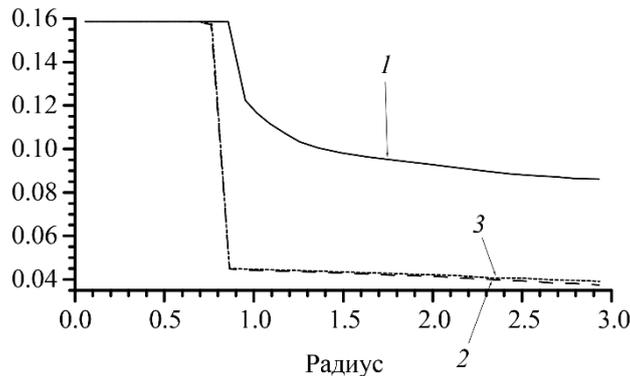


Рис. 9. $c_3 = 10^5$, 1 – методика данной работы, 2 – диффузионное приближение [6], 3 – приближение «вперед-назад» [10]

По-видимому, ситуация имеет принципиальный характер. В ГД и МГД расчетах в первую очередь представляют интерес интегральные величины: поток $\mathbf{S} = S\Omega d\Omega$ или плотность излучения $U = \text{div } \mathbf{S}$. Даже если, используя один из разностных методов [6] для уравнения переноса (1), достаточно точно вычислить интенсивность излучения I , то вычисление интегральных характеристик \mathbf{S} или U при существенно неоднородных коэффициентах поглощения излучения из-за ошибок округления может привести к качественно неверным результатам. Метод же, предложенный в настоящей работе, обладает очевидным преимуществом, поскольку интегральность заложена в его структуре.

Литература

1. В.И. Орешкин. Излучение высокотемпературной плазмы. Пинч-эффект. – Lambert Academic Publishing, Saarbrucken, Deutchland, 2013, 189 p.
2. S.B. Hansen, M.R. Gomez, A.B. Sefkow, S.A. Slutz, D.B. Sinars, K.D. Hahn, E.C. Harding, P.F. Knapp, P.F. Schmit, T.J. Awe, R.D. McBride, C.A. Jennings, M. Geissel, A.J. Harvey-Thompson, K.J. Peterson, D.C. Rovang, G.A. Chandler, G.W. Cooper, M.E. Cuneo, M.C. Herrmann, M.H. Hess, O. Johns, D.C. Lamppa, M.R. Martin, J.L. Porter, G.K. Robertson, G.A. Rochau, C.L. Ruiz, M.E. Savage, I.C. Smith, W.A. Stygar, R.A. Vesey, B.E. Blue, D. Ryutov, D.G. Schroen, and K. Tomlinson. Diagnosing magnetized liner inertial fusion experiments on Z // *Physics of Plasmas* **22**, 056313 (2015).
3. J. Gonsalves, K. Nakamura, J. Daniels, C. Benedetti, C. Pieronek, T. de Raadt, S. Steinke, J. Bin, S.S. Bulanov, J. van Tilborg, C.G.R. Geddes, C.B. Schroeder, Cs. Toth, E. Esarey, K. Swanson, L. Fan-Chiang, G. Bagdasarov, N. Bobrova, V. Gasilov, P. Sasorov, W.P. Leemans. Petawatt laser guiding and electron beam acceleration to 8 GeV in a laser-heated capillary discharge waveguide // *Physical Review Letters* **122**, 084801 (2019), p.1–6.
4. Я.Б. Зельдович, Ю.П. Райзер. Физика ударных волн и высокотемпературных газодинамических явлений. – М.: Физматлит, 2008, 653 с.
5. М.Н. Оцисик. Сложный теплообмен. – М.: Мир, 1976. 305 с.
6. Б.Н. Четверушкин. Математическое моделирование задач динамики излучающего газа. – М.: Наука, 1985, 304 с.
7. G.V. Rybicki. A modified Feautrier Method // *J. Quant. Spectrosc. Radiat Transfer* Vol. II, p. 589–595. – Pergamon Press, Great Britain, 1971.
8. M. Negati, M. Ozisik. *Radiative Transfer and Interactions with Conduction and Convection*. – Wiley&Sons, New York, 1974. 305 p.
9. А.Д. Рекин. Уравнения переноса излучения в приближении Шустера–Шварцшильда для задач со сферической и цилиндрической симметрией // *ТВТ* **16**, выпуск 4 (1978), с. 811–818.
10. Г.С. Романов, А.С. Сметанников. Численное моделирование слоистого импульсного разряда с учетом переноса энергии излучения // *ЖТФ* **52**, № 9 (1982), с. 1756–1762.
11. В.А. Гасилов, С.В. Захаров, А.Ю. Круковский, К.В. Скороваров. Генерация интенсивных потоков излучения и мегабарных ударных волн сжимающимися лайнерами // *Физика плазмы* **21**, № 5 (1995), с. 399–406.
12. Ю.Н. Куликов, Б.Н. Четверушкин. Неявный разностный метод определения температуры в задачах радиационной газовой динамики // *ЖВМ и МФ* **13**, № 1 (1973), с. 136–146.

Оглавление

Введение	3
Некоторые приближения диффузионного типа для решения уравнения радиационного переноса	4
Методика расчета лучистых потоков	6
Построение алгоритма решения уравнения переноса	9
Построение редуцированной разностной сетки.....	11
Результаты тестовых расчетов	13
Литература	18