[ИПМ им.М.В.Келдыша РАН](#) • [Электронная библиотека](#)

[Препринты ИПМ](#) • [Препринт № 4 за 2021 г.](#)

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

[А.В. Колесниченко](#)

Джинсовская неустойчивость протопланетного околозвездного диска с учетом магнитного поля и излучения в неэкстенсивной кинетике Тсаллиса

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Колесниченко А.В. Джинсовская неустойчивость протопланетного околозвездного диска с учетом магнитного поля и излучения в неэкстенсивной кинетике Тсаллиса // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. № 4. 40 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2021-4
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-4

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

А.В. Колесниченко

Джинсовская неустойчивость протопланетного околозвездного диска с учетом магнитного поля и излучения в неэкстенсивной кинетике Тсаллиса

Москва — 2021

Колесниченко А. В.

Джинсовская неустойчивость протопланетного околозвездного диска с учетом магнитного поля и излучения в неэкстенсивной кинетике Тсаллиса

В рамках неэкстенсивной статистики Тсаллиса дан вывод критериев гравитационной неустойчивости Джинса для самогравитирующего протопланетного диска, вещество которого состоит из смеси проводящего идеального q-газа и модифицированного излучения фотонного газа. Критерии неустойчивости выведены из соответствующих дисперсионных соотношений, записанных как для нейтрального дискового вещества, так и для намагниченной плазмы с модифицированным чернотельным излучением. Сконструирована термодинамика фотонного газа, основанная на неэкстенсивной квантовой энтропии Тсаллиса, зависящей от параметра деформации. Показано, что чернотельное q-излучение может стабилизировать состояние неэкстенсивной среды для чисто газового диска, а для электропроводящего диска критерий неустойчивости Джинса видоизменяется магнитным полем и радиационным давлением только в поперечном режиме распространения волны возмущения.

Ключевые слова: критерии Джинса, протопланетный диск, чёрнотельное излучение, неэкстенсивная кинетика Тсаллиса.

Aleksandr Vladimirovich Kolesnichenko

Jeans instability of the protoplanetary circumstellar disk taking into account the magnetic field and radiation in the nonextensive Tsallis kinetics.

Within the framework of the Tsallis non-extensive statistics, a derivation of the Jeans gravitational instability criteria is given for a self-gravitating protoplanetary disk, the substance of which consists of a mixture of a conducting ideal q-gas and modified radiation of a photon gas. The instability criteria are derived from the corresponding dispersion relations written for both neutral disk matter and magnetized plasma with modified blackbody radiation. The thermodynamics of a photon gas is constructed based on the nonextensive quantum entropy Tsallis, which depends on the deformation parameter. It is shown that blackbody radiation can stabilize the state of a nonextensive medium for a purely gaseous disk, and for an electrically conducting disk, the Jeans instability criterion is modified by a magnetic field and radiation pressure only in the transverse regime of propagation of the disturbance wave.

Keywords: Jeans criteria, protoplanetary disk, blackbody radiation, nonextensive Tsallis kinetics.

ВВЕДЕНИЕ

Звездообразование и формирование протопланетных газопылевых аккреционных дисков и экзопланет – это непрерывный процесс эволюции вещества во Вселенной. Наблюдения областей звездных сгущений свидетельствуют о всеобъемлющей связи волокон и магнитных полей с этими процессами. Эволюция газопылевой дисковой среды наиболее адекватно моделируется в рамках классической механики гетерогенных многокомпонентных турбулентных электропроводящих сред с учетом физико- химических свойств фаз, тепломассопереноса, вязкости, химических реакций, вариаций непрозрачности среды для звездного излучения, процессов коагуляции и др. Строгое математическое рассмотрение этой проблемы содержится, например, в работах (Колесниченко, 2011, 2016, 2017; Kolesnichenko, Marov, 2008, 2013, 2019; Marov, Kolesnichenko, 2013).

При условии, что хаотические турбулентные скорости пылевых частиц не превышают некоторого предела, в протопланетном диске развиваются разного рода гидродинамические неустойчивости, в частности, гравитационная (джинсовская) неустойчивость, соответствующая классическому сценарию Гольдрейха–Уорда формирования планетезималей (Goldrich, Ward, 1973). Гравитационная неустойчивость является фундаментальным процессом фрагментации гравитирующего космического вещества звездного протопланетного диска. Она вызывает формирование относительно устойчивых астрофизических объектов, таких как допланетные пылевые сгущения (пылевые кластеры), твердые планетезимали и, наконец, планеты (см., Jeans, 1902, 2009; Чандрасекар, 1985; Сафронов, 1969; Горькавый, Фридман, 1994; Фридман, Хоперсков, 2011). Самогравитирующая дисковая среда становится гравитационно неустойчивой, если возникшие в ней сколь угодно малые флуктуации скорости и плотности вещества неограниченно растут со временем вследствие тяготения; при этом гравитационное равновесие нарушается, если соответствующие длины волн возмущения превышают определенное значение. Проблеме гравитационной неустойчивости астрофизических дисков в последнее время посвящено большое число публикаций, среди которых можно выделить следующие работы (Chandrasekhar, Fermi, 1953; Bonnor, 1957; Hunter, 1972; Goldreich, Lynden-Bell, 1965; Low, Lynden-Bell, 1976; Shakura, Sunyaev, 1976; Camenzind и др., 1986; Cadez, 1990; Pandey, Avinash, 1994; Owen и др.,1997; Tsiklauri, 1998; Mace и др., 1998; Lima и др., 2002; Trigger и др., 2004; Sakagami, Taruya, 2004; Shukla, Stenflo, 2006; Tsintsadze и др., 2008; Masood и др., 2008; Cadez, 2010; Dhiman, Dadwal, 2012; Fridman, Polyachenko,1984, 2012; Kaothekar, Chhajlani, 2013; Joshi, Pensia, 2017; Pensia и др., 2018; Kumar и др., 2018; Колесниченко, 2015, 2018, 2019). Во всех этих работах рассмотрены различные аспекты джинсовской неустойчивости самогравитирующих космических сред как в рамках классических уравнений Навье-Стокса и МГД-уравнений, так и на основе бесстолкновительного уравнения Больцмана (при наличии гравитационного поля) и уравнения Пуассона.

Вместе с тем, в работах (Колесниченко, 2016a,b; 2017; Колесниченко, 2019; Колесниченко, Маров, 2015) было предложено рассматривать совокупность пылевых образований в дисковой среде, как особый тип сплошной среды – фрактальной среды, обладающей нецелой массовой размерностью, и применять для ее описания дробно-интегральную гидродинамику, в которой для учета фрактальности используются дробные интегралы, порядок которых определяется массовой размерностью фрактальных пылевых кластеров. Сложная пространственно-временная структура подобной среды приводит к нарушению принципа экстенсивности (аддитивности) для таких важнейших термодинамических характеристик, как энтропия или внутренняя энергия.

Исследования в области механики неэкстенсивных стохастических систем стали в последнее время предметом значительного интереса, что объясняется как новизной возникающих здесь общетеоретических проблем, так и важностью практических приложений. Начало систематического изучения в этом направлении связано с работой К. Тсаллиса (Tsallis, 1988), в которой был введен функционал энтропии $\mathcal{S}_q(f) := k(q-1)^{-1}\left[1-\int f^q dz\right]$, зависящий от некоторого действительного числа q (так называемого параметра деформации) и обладающий неаддитивностью для совокупности независимых аномальных систем. В пределе слабой связи $q \to 1$ энтропия Тсаллиса переходит в энтропию Больцмана−Гиббса. Важно при этом отметить, что деформированная статистика Тсаллиса специально предназначена для описания поведения аномальных систем с сильным силовым взаимодействием и сильными корреляциями отдельных ее частей, а также с фрактальным характером фазового пространства.

Неэкстенсивная статистика, в настоящее время интенсивно развивается. Возникают многочисленные новые математические проблемы, требующие своего решения. В научной литературе доступны коллекции миниобзоров (см., например, Tsallis, 1999; Abe, Okamoto, 2001; Grigolini и др., 2002; Kaniadakis и др., 2002, 2006; Kaniadakis, Lissia, 2004; Gell-Mann, Tsallis, 2004; Herrmann и др., 2004; Колесниченко, 2019). Статистика Тсаллиса успешно применяется ко многим природным системам, в частности, к ранней Вселенной (Pessah и др., 2001), к космической плазме (Lima и др., 2000), к астрофизическим проблемам (например, к трехмерной гравитационной проблеме N-тел), к космологическим проблемам (например, при толковании черных дыр, суперструн, темной материи (Leubner, 2005)) и так далее. Моделированию Бозе-газа и чернотельному излучению в рамках неэкстенсивной статистики также посвящено большое число публикаций (см., например, Tsallis и др., 1995; Plastino и др., 1995; Tirnakli и др., 1997; Lenzi, Mendes, 1998; Wang, Le Méhauté, 1998; Wang и др., 1998; Büyükkilic., Demirhan, 2000**;** Anchrordoqui, Torres, 2001; Martinez и др., 2001, 2002; Chamati и др., 2006; Zaripov, 2009; Rovenchak, 2018; Ma и др., 2019; Kolesnichenko, 2020). Тем не менее, в настоящей работе предлагается вновь обсудить в рамках формализма Тсаллиса механизм чернотельного излучения применительно к задачам космологии. Основанием для подобного намерения является, с одной стороны, противоречивое конструирование деформированной термодинамики чернотельного излучения, присутствующее в ряде публикаций (см. ниже), а с другой стороны, неоспоримый экспериментальный факт, согласно которому существующее космическое фоновое излучение (находящееся в тепловом равновесии) несколько отличается от классического закона излучения черного тела Планка из-за влияния дальнодействующего гравитационного воздействия на больших расстояниях (Mather и др., 1994). Это влияние может быть отражением того отдаленного во времени факта, когда материя и свет были сильно взаимосвязаны между собой, или же оно является результатом еще более замысловатых природных явлений (Sistema, Vucetich, 2005).

В работе (Kolesnichenko, Chetverushkin, 2013) в рамках статистики Тсаллиса была сконструирована на основе модифицированного кинетического уравнения (с интегралом столкновений в форме Бхатнагара-Гросса-Крука) обобщённая гидродинамика (так называемая q-гидродинамика Навье-Стокса), пригодная для моделирования сред с фрактальной структурой. Именно на основе этой гидродинамики в серии работ (Колесниченко, 2015, 2016b; Kolesnichenko, Marov, 2008, 2014, 2016) была рассмотрена проблема гравитационной неустойчивости Джинса для протопланетного газопылевого диска с фрактальной структурой при учёте радиации и воздействия вращательного движения диска на критическую длину волны возмущения, ведущей к неустойчивости. В этих работах проведено исследование влияния «классической» чернотельной радиации на гравитационную неустойчивость аккреционных дисков, находящихся на начальной стадии своего образования. Точнее речь идет о центральной части дисков, в которой практически всё излучение является длинноволновым, поскольку оно уже успело пройти через многократное поглощение и переизлучение частицами фрактальной дисковой среды. Именно там возможно существование локального термодинамического равновесия, при котором температура дискового вещества практически совпадает с температурой чёрного тела. Полученные при этом критерии, как правило, лучше отвечают условиям развития неустойчивости в радиационной дисковой среде с фрактальной структурой в фазовом пространстве.

В недавней работе автора (Kolesnichenko, 2020), посвященной рассмотрению в рамках неэкстенсивной статистики Тсаллиса джинсовской неустойчивости звездного протопланетного диска с радиацией, термодинамические параметры чернотельного излучения использовались в обычной классической форме. В отличие от нее в данной работе предлагается воспользоваться модифицированным (в рамках формализма Тсаллиса) механизмом Планка для черного излучения (теплового фотонного газа) и исследовать его влияние на гравитационную неустойчивость протопланетного диска. Поскольку во всём космосе нет такого места, где не присутствуют магнитные поля, существенно изменяющие условия неустойчивости, то вполне уместно рассмотреть в рамках неэкстенсивной q-гидродинамики гравитационную неустойчивость электропроводящего протопланетного диска (плазменной дисковой среды) с учетом деформированных радиационных процессов.

Таким образом, целью работы является изложение с единых позиций обобщенной статистики Тсаллиса круга вопросов, связанных с выводом критерия гравитационной неустойчивости Джинса для неэкстенсивной дисковой электропроводной среды при учете влияния на этот критерий чернотельного излучения, отвечающего модифицированной q-энтропии фотонного газа (q-энтропии световых квантов Бозе). При этом сконструирована деформированная термодинамика черного излучения, базирующаяся на свойствах универсального степенного q-распределения Бозе–Эйнштейна (негиббсового канонического ансамбля бозонных систем), полученного из вариационного принципа максимизации Джейнса (Jaynes, 1963) q-энтропии Бозе-газа. Этому распределению соответствуют обобщенные законы Планка, Рэлея–Джинса и Вина для фотонов теплового спектра, на основе которых в работе выведены модифицированные выражения для всех термодинамических параметров черного излучения.

1. ИСХОДНЫЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим сначала динамическую неэкстенсивную протопланетную систему с нормированным распределением частиц $f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c},t)$ в геометрическом пространстве $\boldsymbol{r}$ и в пространстве скоростей $\boldsymbol{c}$ с размерностью D. Предлагаемое Тсаллисом обобщение статистической механики (в случае статистики Курадо−Тсаллиса) лучше всего описывается следующими двумя аксиомами (Curado, Tsallis, 1991**;** Колесниченко, 2018):

Аксиома 1. Функционал энтропии, связанный с нормированным распределением функции вероятностей $f(z,t)$, равен

$$\mathcal{S}_q\left[f\right]:=\frac{k}{q-1}\int dz\left\{f(z)-\left[f(z)\right]^q\right\},$$

где q − параметр деформации – число, связанное с фрактальной размерностью, а для неэкстенсивных систем, являющееся мерой их неаддитивности (Tsallis, 2009); здесь $\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c})$ − элемент объёма фазового пространства; $d\boldsymbol{z}:=d\boldsymbol{r}d^D\boldsymbol{c}$, где D − нецелая размерность пространства скоростей; k − постоянная Больцмана.

Аксиома 2. Экспериментально измеряемое значение любой макроскопической величины $\langle\mathcal{A}\rangle_q$ задаётся соотношением

$$\langle\mathcal{A}\rangle_q:=\int\mathcal{A}(\boldsymbol{r},t)\left[f(\boldsymbol{z})\right]^q d\boldsymbol{z},$$

где $\mathcal{A}(\boldsymbol{r},t)$− соответствующая микроскопическая величина.

Важно подчеркнуть, что энтропия $\mathcal{S}_q(\mathcal{A}\cup\mathcal{B})$ двух независимых систем $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ не является аддитивной переменной при $q\neq1$, поскольку имеет место равенство (см. Tsallis, 2009)

$$\mathcal{S}_q(\mathcal{A}\cup\mathcal{B})=\mathcal{S}_q(\mathcal{A})+\mathcal{S}_q(\mathcal{B})+k^{-1}(1-q)\mathcal{S}_q(\mathcal{A})\mathcal{S}_q(\mathcal{A}).$$

Несмотря на это обстоятельство, в литературе было показано, что существует, тем не менее, значительное количество обычных статистических и термодинамических свойств, которые справедливы для любого значения величины q. (см., например, Bibliography/ http://tsallis.cat.cbpf.br/biblio.htm).

Основные определения и система уравнений q-гидромеханики. Энтропия Тсаллиса влечёт за собой не только обобщение статистической физики и термодинамики, но и обобщение физической кинетики и гидродинамики

(Oliveira, Galvao, 2018). Простейшей макроскопической величиной является плотность числа частиц $n_q(\boldsymbol{r},t) \equiv \int \left[f(\boldsymbol{z}) \right]^q d^D \boldsymbol{c}$. Тогда массовая q-плотность равна $\rho_q(\boldsymbol{r},t) \equiv m n_q(\boldsymbol{r},t)$. Поскольку частица, движущаяся со скоростью $\boldsymbol{c}$, обладает импульсом $m\boldsymbol{c}$, то выражение $\boldsymbol{u}_q(\boldsymbol{r},t) \equiv \int m\boldsymbol{c} \left[f(\boldsymbol{z}) \right]^q d^D \boldsymbol{c} / \rho_q(\boldsymbol{r},t)$ определяет гидродинамическую скорость элемента объёма. Величина $\varepsilon_q(\boldsymbol{r},t) = \rho_q^{-1} \int \frac{m}{2} \left| \boldsymbol{c} - \boldsymbol{u}_q \right|^2 [f(\boldsymbol{z})]^q d^D \boldsymbol{c}$ является удельной внутренней q-энергией (на единицу массы) неэкстенсивной системы. Потоки

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}_q(\boldsymbol{r},t) := m \int (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{u}_q)(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{u}_q) [f(\boldsymbol{z})]^q d^D \boldsymbol{c} \text{ и}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{J}}_q(\boldsymbol{r},t) := \tfrac{1}{2} m \int \left| \boldsymbol{c} - \boldsymbol{u}_q \right|^2 (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{u}_q) [f(\boldsymbol{z})]^q d^D \boldsymbol{c}$$

представляют собой соответственно тензор давлений и поток тепла. Гидростатическое q-давление определяется как

$$p_q(\boldsymbol{r},t) := \tfrac{1}{3} \boldsymbol{\mathcal{P}} : \boldsymbol{\mathcal{I}} = \tfrac{1}{3} m \int \left| \boldsymbol{c} - \boldsymbol{u}_q \right|^2 \left[f(\boldsymbol{z}) \right]^q d^D \boldsymbol{c},$$

где $\boldsymbol{\mathcal{I}}$ − единичный тензор второго ранга. В частности, если сдвиговые напряжения равны нулю, а нормальные напряжения равны между собой, то $\boldsymbol{\mathcal{P}}_q = p_q \boldsymbol{\mathcal{I}}$.

В работах (Boghosian,1998; Kolesnichenko, Chetverushkin, 2014) в рамках неэкстенсивной статистической механики Тсаллиса было проведено методом моментов конструирование гидродинамических уравнений на основе модифицированного кинетического уравнения Больцмана[1)] (с учетом само- гравитации) с интегралом столкновений в форме Бхатнагара−Гросса−Крука):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{c} \cdot grad + \boldsymbol{\mathcal{F}}_q \cdot grad_{\boldsymbol{c}} \right) \left[f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c},t) \right]^q = -\frac{1}{\tau} \left\{ \left[f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c},t) \right]^q - \left[f^{(0)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c},t) \right]^q \right\}. \quad (1)$$

[1)] В цитируемой работе кинетическая теория была основана на операторе столкновений Бхатнагера─Гросса─Крука (BGK), который был обобщен для произвольного значения параметра q .

Здесь $grad_{\boldsymbol{c}} := \boldsymbol{i}_x \partial / \partial c_x + \boldsymbol{i}_y \partial / \partial c_y + \boldsymbol{i}_z \partial / \partial c_z$; $\boldsymbol{\mathcal{F}}_q(\boldsymbol{r},t) := \boldsymbol{f} / m - grad\, \Psi_q(\boldsymbol{r},t)$ − не зависящая от скорости внешняя сила (сила тяжести) отнесённая к единице массы; $\boldsymbol{f}$ − сила негравитационного происхождения (например, электро- магнитная сила Лоренца); $\Psi_q(\boldsymbol{r},t) := -G\int \frac{m}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}[f(\boldsymbol{z}',t)]^q d\boldsymbol{z}'$ − гравитационный потенциал, удовлетворяющий уравнению Пуассона $\Delta\Psi_q(\boldsymbol{r}) = 4\pi G\int m f^q d^D\boldsymbol{c}$; G − гравитационная постоянная; τ − положительный параметр, который интерпретируется как характерное время релаксации произвольной функции распределения $f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c},t)$ к обобщенному локально-максвелловскому распределению (величина τ совпадает по порядку величины со средним временем свободного пробега частиц в системе). Равновесное распределение $f^{(0)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c})$, в случае когда $q>1$, определяется следующей формулой (см., например, Колесниченко, 2019)

$$f^{(0)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c}) = \left\{ c_{q,D}\frac{\rho_q}{m}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{D/2}\right\}^{1/q}\left\{1-(1-q)\frac{m(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{u}_q)^2}{2kT}\right\}^{1/(1-q)}, \qquad (2)$$

где $c_{q,D} = \dfrac{(1-q)^{D/2}\Gamma(\frac{q}{1-q})}{\Gamma(\frac{q}{1-q}-\frac{D}{2})}$; $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}dt$ − Гамма-функция.

В результате были получены следующие моментные уравнения q -гидродинамики, которые являются обобщением обычных гидродинамических уравнений Навье−Стокса:

$$\partial\rho_q / \partial t + div(\rho_q \boldsymbol{u}_q) = 0, \qquad (3)$$

$$\partial(\rho_q \boldsymbol{u}) / \partial t + Div\left(\boldsymbol{\mathcal{P}}_q + \rho_q \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}\right) = n_q \boldsymbol{f} - \rho_q\, grad\psi_q\ , \qquad (4)$$

$$\partial(\rho_q\varepsilon_q) / \partial t + div\left\{\boldsymbol{\mathcal{J}}_q + \rho_q\varepsilon_q\boldsymbol{u}_q\right\} + \boldsymbol{\mathcal{P}}_q : Grad\, \boldsymbol{u}_q = 0. \qquad (5)$$

Уравнения (3)-(5) не являются в общем случае замкнутыми, поскольку отсутствует необходимая связь (так называемые определяющие соотношения) потоковых величин ($\boldsymbol{\mathcal{P}}_q$ и $\boldsymbol{\mathcal{J}}_q$) и скалярных характеристик течения (ρ_q, $\boldsymbol{u}_q$ и T). Эта связь может быть найдена с помощью решения модельного кинетического уравнения (1) методом Чепмена−Энскога при использовании общего асимптотического разложения функции распределения по числу Кнудсена. Этот метод был использован в работе (Kolesnichenko, Chetverushkin, 2013), в результате чего были найдены определяющие соотношения, замыкающие систему (3)-(5). В частности, в случае приближения нулевого порядка, когда распределение $f \equiv f^{(0)}$ (т.е. является обобщённым локально-максвелловским распределением (2)), было показано, что тензор напряжения $\boldsymbol{\mathcal{P}}_q$ сводится к шаровому тензору $\boldsymbol{\mathcal{P}}_q^{(0)} \equiv p_q \boldsymbol{\mathcal{I}}$, а поток тепла $\boldsymbol{\mathcal{J}}_q = 0$. При этом внутренняя энергия ε_q и гидростатическое давление p_q задаются соотношениями

$$\varepsilon_q = \frac{DkT}{2m}[1+(1-q\tfrac{D}{2})]^{-1}, \quad p_q = \frac{\rho_q kT}{m[1+(1-q)\tfrac{D}{2}]} = \frac{2}{D}\rho_q \varepsilon_q. \tag{6}$$

Поскольку определение температуры в q-статистике достаточно произвольно (оно зависит от довольно произвольного определения температуры с точки зрения множителей Лагранжа), то далее мы будем интерпретировать величину $T_{eff} \equiv T / \left[1+(q-1)\tfrac{D}{2}\right]$ как обобщённую температуру сложной неаддитивной системы. Естественно, что эта температура в корне отличается от абсолютной термодинамической температуры T, характеризующей интенсивность хаотизации (беспорядочного движения) частиц системы. Заметим, что если записать через эффективную температуру T_{eff} выражение для внутренней энергии (6), то для величины ε_q получим соотношение $\varepsilon_q = DkT_{eff}/2m$, которое совпадает при $q \to 1$ и $D=3$ с определением внутренней энергии в статистике Больцмана–Гиббса, равному распределению энергии классического идеального газа по степеням свободы. Если сохранить обычные представления об обобщённой температуре T_{eff}, то тогда неравенство $\varepsilon_q > 0$ накладывает жёсткое ограничение на величину параметра деформации q.В этом случае энтропийный индекс удовлетворяет неравенству $0 < q < 1 + 2/D$.

В приближении первого порядка были найдены следующие определяющие уравнения для потока тепла $\boldsymbol{\mathcal{J}}_q$ и тензора вязких напряжений $\boldsymbol{\mathcal{T}}_q \equiv \boldsymbol{\mathcal{P}}_q - p_q \boldsymbol{\mathcal{I}}$:

$$\boldsymbol{\mathcal{J}}_q(\boldsymbol{r},t) = -\lambda_q \, gradT, \quad \boldsymbol{\mathcal{T}}(\boldsymbol{r},t) = \mu_q \left(\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^T - \frac{2}{3} \boldsymbol{\mathcal{I}} \nabla \cdot \boldsymbol{u} \right), \tag{7}$$

где $\lambda_q = \tau \dfrac{kp_q}{m} \dfrac{1+D/2}{1+(1-q)(1+D/2)}$, $\mu_q = \tau p_q = \tau \dfrac{\rho_q kT}{m[1+(1-q)\frac{D}{2}]}$ − соответственно коэффициенты теплопроводности и сдвиговой вязкости.

2. ЭНТРОПИЯ БОЗЕ-ГАЗА В СТАТИСТИКЕ БОЛЬЦМАНА−ГИББСА

Прежде чем приступить к обсуждению проблемы чернотельного излучения в статистике Тсаллиса, сделаем следующее замечание. Осреднение микроскопических физических величин в q-статистике возможно с помощью трех распределений: $f(\boldsymbol{r})$, $f^q(\boldsymbol{r})$, $f^q(\boldsymbol{r})/\int f^q(\boldsymbol{r})dz$. Первое осреднение соответствует первоначальной статистике Тсаллиса (Tsallis,1988), второе (ненормированное) осреднение – статистике Курадо−Тсаллиса (Curado, Tsallis, 1991; Зарипов, 2002, Колесниченко, 2018), третье нормированное (эскортное) осреднение – статистике Тсаллиса−Мендеса−Пластино (Tsallis и др., 1998). Различным способам осреднения соответствуют совершенно разные q-термодинамики. Именно по этой причине вопрос об использовании того или иного осреднения носит принципиальный характер в ряде физических приложений, поскольку различия в определении макроскопических параметров могут оказаться существенными при обработке экспериментальных данных. По мнению ряда авторов, получаемые при этом несоответствия могут быть благополучно устранены при использовании только нормированного эскортного распределения (см, например, Tsallis и др., 1998; Tsallis, 1999; Martinez и др., 2000).

Вместе с тем существует и иная точка зрения (которой придерживается автор данной статьи), согласно которой единственно правильным осреднением в q-статистике Тсаллиса является осреднение с ненормированным распределением f^q, наличествующее в ее аксиоматическом обосновании (см. Havrda, Charvat, 1967; Daroczy, 1970). Именно это распределение не приводит к переопределению понятия температуры, которая в этой статистике является интенсивным параметром (т.е. абсолютной температурой T), а не функ- ционалом (так называемой физической температурой T_{ph}, зависящей от энтропии $\mathcal{S}_q$), как это происходит при иных определениях средневзвешенного осреднения. Отметим, что это и некоторые другие убедительные соображения в пользу использования осреднения Курадо−Тсаллиса приведены в монографиях (Зарипов, 2002, 2010).

Модификация чернотельного излучения рассматривалась в ряде работ (см., например, Tirnakli и др., 1997; Wang и др., 1998; Rovenchak, 2018), в которых в качестве отправной точки использовалось следующее обобщенное распределение Планка для собственных частот излучения фотонного газа: $p_0(\omega)=1/\left\{\left[1+(q-1)\frac{\hbar\omega}{kT}\right]^{1/(q-1)}-1\right\}$. Легко можно убедиться в том (см. ниже), что это распределение получается из условия максимума модифицированной q -энтропии Бозе-газа (Büyükkilic, Demirhan, 2000; Зарипов, 2010) только в том случае, когда в качестве осреднения микроскопических физических величин используется распределение $p(\omega)^q$. Несмотря на это обстоятельство, авторы цитируемых выше работ, исходя из приведенного равновесного распределения $p_0(\omega)$, при выводе обобщенной q-термодинамики Бозе-газа систематически использовали осреднение с распределением $p(\omega)$, соответствующее оригинальной статистике Тсаллиса. В ряде других публикаций (см., например, Martinez и др., 2002; Ma и др., 2019) за исходное равновесное распределение неэкстенсивного фотонного газа принималось приведенное q-распределение $p_0(\omega)$, в котором, однако, вместо абсолютной температуры T фигурирует физическая температура T_{ph}. Такая замена представляется совершенно не приемлемой, поскольку измерение величины T_{ph} практически нереально, что связано с ее зависимостью от функционала энтропии $\mathcal{S}_q$.

Бозе-газ состоит из бозонов − частиц, имеющих целый спин и подчиняющихся статистике Бозе−Эйнштейна[2)]. Напомним классический вероятностно -статистический способ нахождения энтропии Бозе-газа. С этой целью рассматриваются различные равновероятные группы квантовых состояний $j=1,2,\dots$, которыми может быть реализовано изучаемое макроскопическое состояние ансамбля из $\mathcal{N}$ частиц Бозе-газа. $6\mathcal{N}$-мерное фазовое пространство делится на $\mathcal{M}$ ячеек безразмерного объема $g_j:=(2\pi\hbar)^{-s}(\Delta\boldsymbol{r}_j\Delta\boldsymbol{c}_j)$, который характеризует максимально возможное число микросостояний в j-ой ячейке, содержащей n_j Бозе-частиц (здесь s − число степеней свободы элементарной

[2)] Бозе создал статистическую механику для газа фотонов, а Эйнштейн развил ее для описания массивных частиц.

частицы). Далее определяется величина $\mathcal{N} = \sum_j n_j$ − число всех возможных способов заполнения частиц по $\mathcal{M}$ ячейкам. Данное число является по определению статистическим весом $\Delta\Gamma$, характеризующим вероятность макроскопического состояния системы. Если теперь каждую группу из n_j частиц рассматривать как независимую подсистему и обозначить посредством $\Delta\Gamma_{n_j}$ ее статистический вес, то можно написать: $\Delta\Gamma = \prod_j \Delta\Gamma_{n_j}$. В классической статистике энтропия выражается логарифмической мерой статистического веса $\mathcal{S} := k\ln\Delta\Gamma = k\ln\prod_j \Delta\Gamma_{n_j}$. В случае статистики Бозе−Эйнштейна в каждом квантовом состоянии может находиться любое число частиц, так что статистический вес $\Delta\Gamma_{n_j}$ есть число всех способов, которыми можно распределить n_j частиц по g_j состояниям. Тогда из условия, что в ячейке может находиться любое количество частиц, вытекает следующий вид статистического веса $\Delta\Gamma_{n_j} = \dfrac{(g_j + n_j - 1)!}{n_j!(g_j - 1)!}$. Логарифмируя это выражение и воспользовавшись для логарифмов всех трех факториалов приближенной формулой Стирлинга $\ln x! = x\ln(x/e)$, найдем:

$$\mathcal{S}_{\mathcal{N}} = -k\sum_j \left\{ n_j \ln n_j + g_j \ln g_j - (g_j + n_j)\ln(g_j + n_j) \right\}.$$

Если записать эту формулу, используя среднее число $\bar{n}_j = n_j / g_j$ частиц в каждом из квантовых состояний j-й группы, то получим известное выражение для энтропии неравновесного Бозе-газа в классическом случае (см. Ландау, Лифшиц, 1964):

$$\mathcal{S}_{\mathcal{N}} = -k\sum_j g_j \left\{ \bar{n}_j \ln\bar{n}_j - (1 + \bar{n}_j)\ln(1 + \bar{n}_j) \right\}.$$

Легко убедиться в том, что условие экстремальности энтропии $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$ приводит к дискретному распределению Бозе−Эйнштейна:

$$\bar{n}_j = \left\{ \exp\left[(\varepsilon_j - \mu)/kT \right] - 1 \right\}^{-1}.$$

Заметим, что величина $\bar{n}_j$ есть дискретный аналог непрерывной функции распределения $p(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{c})$ по фазовому пространству $\boldsymbol{z} := \left\{ \boldsymbol{r}; \boldsymbol{c} \right\}$. Переход от дискретного распределения $\bar{n}_j$ к непрерывному распределению $p = p(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{c})$ Бозе частиц осуществляется заменой суммирования по j интегрированием по всему фазовому пространству, безразмерный элемент которого определяется соотношением

$$dz := g(2\pi\hbar)^{-s} d\boldsymbol{r}\, d^D\boldsymbol{c}, \quad d\boldsymbol{r}\, d^D\boldsymbol{c} = dV d^D\boldsymbol{c}$$

где $g = 2S + 1$, S − спин частицы;)[3].

В итоге получим следующее выражение для классической энтропии неравновесного Бозе-газа в случае непрерывных распределений:

$$\mathcal{S}(t) = -k\int\left\{p\ln p - (1+p)\ln(1+p)\right\}dz. \tag{8}$$

Здесь $p = p(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{c})$ − плотность распределения квантовых частиц в фазовом пространстве $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{c})$.

3. ЭНТРОПИЯ БОЗЕ−ГАЗА В СТАТИСТИКЕ ТСАЛЛИСА

Обобщенное выражение квантовой энтропии (8) для Бозе-газа, полученное в рамках неэкстенсивной статистики Тсаллиса в работах (Büyükkilic, Demirhan, 1993, 2000), имеет вид:

$$S_q := \frac{k}{q-1}\int\left[-p^q - 1 + (1+p)^q\right]dz. \tag{9}$$

Энтропию (9) удобно записать в следующих двух эквивалентных формах:

$$S_q = k\int dz\left[p^q \ln_{2-q}\left(\frac{1+p}{p}\right) + \ln_{2-q}(1+p)\right] =$$

$$= k\int dz(1+p)^{q-1}\left[p\ln_q\left(\frac{1+p}{p}\right) + \ln_q(1+p)\right], \tag{10}$$

где $\ln_q x := \dfrac{x^{1-q} - 1}{1-q}$ $(x \in R^+;\ q \in R)$ − так называемый «деформированный логарифм» (см., например, Tsallis, 2009; Колесниченко, 2019). При $q \to 1$ из (10) следует выражение (8) для классической энтропии неравновесного Бозе-газа для аддитивных систем. Используя (10), легко показать, что в статистике Тсаллиса

---

[3]) Интегрирование по dV часто сводится к замене dV на полный объем V однородного фотонного газа.

энтропия Бозе-газа двух независимых систем также не обладает свойством аддитивности.

Экстремум энтропии и равновесные состояния. Равновесные состояния неэкстенсивных систем характеризуются распределениями, которые не меняются с течением времени. В состоянии равновесия энтропия должна иметь максимальное значение. Таким образом, задача заключается в нахождении таких распределений $p_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c})$, при которых квантовая энтропия Бозе-газа (9) имеет максимальное значение, при следующих дополнительных условиях

$$\mathcal{E}_q := \int d\boldsymbol{z}\,\varepsilon(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c})p(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c})^q = const, \quad \mathcal{N}_q := \int p(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c})^q d\boldsymbol{z} = const, \tag{11}$$

выражающих постоянство полной энергии $\mathcal{E}_q$ и полного числа частиц $\mathcal{N}_q$ Бозе-газа. Следуя известному вариационному принципу Джейнса (Jaynes, 1963), приравняем нулю первую вариацию функционала

$$\mathcal{L}(p) := \mathcal{S}_q - \beta\int \varepsilon(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c})p^q d\boldsymbol{z} + \beta\mu\int p^q d\boldsymbol{z}, \tag{12}$$

где параметры β и μ являются множителями Лагранжа. Произведя теперь дифференцирование по p, получим

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta p} = \frac{k}{q-1}\int q\left\{\left[-p^{q-1} + (1+p)^{q-1}\right] - \frac{(q-1)\beta}{k}\left(\varepsilon(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c}) - \mu\right)p^{q-1}\right\}d\boldsymbol{z} = 0. \tag{13}$$

Отсюда следует

$$\frac{1+p_0}{p_0} = \left\{1 - \frac{(1-q)}{k}\beta_0\left[\varepsilon(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c}) - \mu_0\right]\right\}^{1/(q-1)}, \tag{14}$$

или

$$p_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c}) = \left\{\left[1 + (q-1)\frac{\varepsilon(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c}) - \mu_0}{kT_0}\right]^{1/q-1} - 1\right\}^{-1} = \left\{\exp_{2-q}\left[\frac{\varepsilon(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c}) - \mu_0}{kT_0}\right] - 1\right\}^{-1}. \tag{15}$$

Это есть не что иное, как обобщенное распределение Бозе–Энштейна в статистике Тсаллиса. Здесь $T_0 = 1/\beta_0$ – равновесная температура и μ_0 – равновесный химический потенциал Бозе-газа ($\mu_0 < 0$).

Присутствующая в (15) степенная функция $[..]^{1/1-q}$ записана в виде так называемой экспоненты Тсаллиса, которая определяется следующим образом (Тсаллис, 2009):

$$\exp_q(x) \equiv [1+(1-q)x]_+^{\frac{1}{1-q}} = \begin{cases} 0, & \textit{если } q<1 \textit{ и } x<-1/1-q; \\ [1+(1-q)x]^{1/1-q}, & \textit{если } q<1 \textit{ и } x \ge -1/1-q; \\ [1+(1-q)x]^{1/1-q}, & \textit{если } q>1 \textit{ и } x<-1/1-q. \end{cases} \quad (16)$$

При этом выражение, стоящее в квадратных скобках, либо положительно, либо равно нулю, $[y]_+ \equiv \max(y,0)$.В пределе $q \to 1$ функция (16) принимает стандартный вид: $\exp_{q\to 1}(x) = \exp(x)$. Легко проверить, что имеют место следующие формулы:

$$\exp_q[\ln_q(x)] = \ln_q[\exp_q(x)] = x, \quad (17)$$

$$\exp_{2-q}(x) = [1-(1-q)x]^{1/(q-1)}, \quad (\forall x; \forall q), \quad (18)$$

$$\exp_{2-q}(-x) = 1/\exp_q(x), \quad (\forall x; \forall q), \quad (19)$$

$$\frac{d}{dx}\ln_q x = \frac{1}{x^q}, \quad \frac{d}{dx}\exp_q(x) = [\exp_q(x)]^q, \quad (x>0; \forall q). \quad (20)$$

С помощью распределения (15) могут быть вычислены равновесные значения полного числа частиц и полной энергии системы:

$$\mathcal{N}_{q0} := \int p_0^q(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c})\,d\boldsymbol{z} = \int \left\{ \exp_{2-q}\left[\frac{\varepsilon(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c})-\mu_0}{kT_0}\right] - 1 \right\}^{-q} d\boldsymbol{z}, \quad (21)$$

$$\mathcal{E}_{q0} := \int \varepsilon(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c})\,p_0^q(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c})\,d\boldsymbol{z} = \int \varepsilon(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c}) \left\{ \exp_{2-q}\left[\frac{\varepsilon(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c})-\mu_0}{kT_0}\right] - 1 \right\}^{-q} d\boldsymbol{z}. \quad (22)$$

Заметим, что формула (21) определяет в неявном виде химический потенциал $\mu_0 = (T_0, \mathcal{N}_{q0})$ Бозе-газа как функцию от температуры T_0 и полного числа частиц $\mathcal{N}_{q0}$.

Термодинамические соотношения. Получим теперь экстремальное (равновесное) значение S_{q0} энтропии и основные соотношения обобщенной равновесной термодинамики. Подставляя распределение (14) в выражение (10) для q -энтропии Тсаллиса и используя формулу (19), получим:

$$\mathcal{S}_{q0} = k\int\left[p_0{}^q \ln_{2-q}\left(\frac{1+p_0}{p_0}\right) + \ln_{2-q}(1+p_0)\right]d\boldsymbol{z} =$$

$$= k\int\left[p_0{}^q \frac{\beta_0\left(\varepsilon(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c}) - \mu_0\right)}{k} + \ln_{2-q}(1+p_0)\right]d\boldsymbol{z} =$$

$$= \beta_0(\mathcal{E}_q - \mu_0\mathcal{N}_q) + k\int \ln_{2-q}(1+p_0)\,d\boldsymbol{z} = \beta_0(\mathcal{E}_{q0} - \mu_0\mathcal{N}_{q0}) - \beta_0\Omega_{q0}. \qquad (23)$$

Здесь

$$\Omega_q := \int \Omega_q(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c})d\boldsymbol{z} = -k\beta^{-1}\int \ln_{2-q}\left[1 + p_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c})\right]d\boldsymbol{z} \qquad (24)$$

– термодинамический потенциал полного числа частиц бозонного газа; $\Omega_q(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c})$ – локальный термодинамический потенциал частиц, определяемый как

$$\Omega_q(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c}) := -\frac{k}{\beta}\frac{1-\left[1+p_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c})\right]^{q-1}}{(1-q)} = -\frac{k}{\beta}\ln_{2-q}\left[1+p_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c})\right] =$$

$$= \frac{k}{\beta}\ln_q\left\{1 - \left[\exp_{2-q}\left(\frac{\varepsilon(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c})-\mu_0}{kT_0}\right)\right]^{-1}\right\}. \qquad (25)$$

Используя производные от распределения p_0 по параметрам β_0, μ_0 и ε

$$\left(\frac{\partial p_0}{\partial \beta_0}\right)_{\mu_0} = -\frac{\varepsilon(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c}) - \mu_0}{k} p_0^q(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c})\left\{1 + p_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c})\right\}^{2-q},$$

$$\left(\frac{\partial p_0}{\partial \mu_0}\right)_{\beta_0} = -\frac{\beta_0}{k} p_0^q(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c})\left[1 + p_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c})\right]^{2-q},$$

$$\left(\frac{\partial p_0}{\partial \varepsilon}\right)_{\mu_0} = \frac{\beta_0}{k} p_0^q(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c})\left\{1 + p_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c})\right\}^{2-q} \qquad (26)$$

и формулы (20), легко получить следующие уравнения равновесной термодинамики для системы Бозе-газа с переменным числом частиц:

$$\Omega_{q0} = -k\,\beta^{-1}\int \ln_{2-q}(1+p_0)\,d\boldsymbol{z}, \qquad (27)$$

$$\mathcal{N}_{q0} = -\partial\Omega_{q0} / \partial\mu_0, \quad p_0^q(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c}) = -\partial\Omega_{q0}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c}) / \partial\mu_0, \qquad (28)$$

$$\partial(\beta_0\Omega_{q0}) / \partial\beta_0 = \mathcal{E}_{q0} - \mu_0 \int p_0^q(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c}) dz\,, \quad \mathcal{S}_{q0} = -\partial\Omega_{q0} / \partial\beta_0^{-1}\,, \tag{29}$$

$$d\mathcal{S}_{q0} / \beta_0 = d\mathcal{E}_{q0} - \mu_0\, d\left(\int p_0^q(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c}) dz\right). \tag{30}$$

Вторая вариация функционала (12) имеет вид:

$$\delta^2\mathcal{L} = -kq\int p^{q-2}\left\{1-(1-q)\frac{\beta}{k}\left[\varepsilon(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c})-\mu\right]-\left(\frac{1+p}{p}\right)^{q-2}\right\}(\delta p)^2 dz\,, \tag{31}$$

из которого следует, что при $q > 0$ экстремум соответствует максимуму функционала, $\delta^2\mathcal{L} < 0$. Таким образом, распределение (15) максимизирует обобщенную q-энтропию для бозонного газа.

Можно показать, что из принципа максимум равновесного распределения q -энтропии Бозе–Эйнштейна следует, что энтропия равновесного состояния $\mathcal{S}_{q0}$ больше, чем энтропия $\mathcal{S}_q\,(t)$ произвольного состояния, $\mathcal{S}_{q0} \geq \mathcal{S}_q\,(t)$. Таким образом, q-энтропия Бозе-газа непрерывно растет в направлении равновесия, где энтропия становится максимальной и достигает конечного значения.

4. ЭНТРОПИЯ СВЕТОВЫХ КВАНТОВ БОЗЕ. ЧЕРНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Электромагнитное излучение, находящееся в тепловом равновесии (так называемое черное излучение) можно рассматривать как фотонный газ. В силу целочисленности момента импульса фотонов этот газ подчиняется статистике Бозе−Эйнштейна. Поскольку фотоны не взаимодействуют друг с другом (принцип суперпозиции для электромагнитного поля), то состоящий из фотонов газ можно считать идеальным. Для возможности установления теплового равновесия в излучении необходимо наличие хотя бы небольшого количества материальной среды. Механизм, обеспечивающий установление равновесия, заключается при этом в поглощении и испускании фотонов веществом. Это обстоятельство приводит к существенной специфической особенности фотонного газа − число частиц $\mathcal{N}$ в нем является переменной величиной и само должно определиться из условий теплового равновесия, что приводит к равенству нулю химического потенциала μ фотонного газа (Ландау, Лифшиц, 1964).

Следовательно, распределение фотонов по различным уровням энергии $\varepsilon := \hbar\omega$ (где ω − собственная частота колебаний черного излучения в данном объеме V) определяется формулой (15) с $\mu = 0$:

$$p_\omega = \left\{ \left[1 + (q-1)\frac{\hbar\omega}{kT} \right]^{1/q-1} - 1 \right\}^{-1} = \left[\exp_{2-q}\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1 \right]^{-1} . \tag{32}$$

Это есть так называемое обобщенное распределение Планка в статистике Тсаллиса.

Заметим, что в силу определения (16) экспоненты Тсаллиса, второе представление распределения p_ω в формуле (32) справедливо в том случае, когда при $q < 1$ имеет место неравенство $\hbar\omega / kT < (1-q)^{-1}$ или когда при $q > 1$ и $\hbar\omega / kT \geq (1-q)^{-1}$.

Для непрерывного распределения энергии фотонов, число квантовых состояний фотонов с частотами собственных колебаний в интервале частот между ω и $\omega + d\omega$ может быть задано как (Ландау, Лифшиц, 1964)

$$dz = V(\omega^2 / \pi^2 c^3) d\omega. \tag{33}$$

где c − скорость света в вакууме, а ω − угловая частота. Умножив распределение (32) на эту величину, найдем число фотонов в данном интервале частот:

$$d\mathcal{N}_{rad}(\omega, T, q) = V \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \left[\exp_{2-q}\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1 \right]^{-q} d\omega, \tag{34}$$

а умножив еще на $\hbar\omega$, получим энергию излучения, заключенную в этом же участке спектра:

$$d\mathcal{E}_{rad}(\omega, T, q) = V \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \omega^3 \left[\exp_{2-q}\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1 \right]^{-q} d\omega. \tag{35}$$

Формула (36) для спектрального распределения энергии черного излучения является обобщенной формулой Планка в статистике Тсаллиса.

Обобщенный закон Планка (32) описывает распределение электромагнитной энергии (или распределение плотности фотонов), излучаемой черным телом при данной температуре T . Закон Планка может быть представлен в различных вариантах, включающих такие параметры, как плотность потока или спектральное распределение. Два предельных случая, а именно, $\hbar\omega \ll kT$ и $\hbar\omega \gg kT$, заслуживают особого внимания.

В низкочастотном или высокотемпературном пределе ($\hbar\omega \ll kT$) из соотношения (36), при учете разложения $\exp_{2-q}(x) \underset{x\to 0}{\cong} 1 + x + \ldots$, получим:

$$d\mathcal{E}_{rad}(\omega,T,q) = V\frac{kT}{\pi^2 c^3}\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^{1-q}\omega^2 d\omega = = V\frac{\hbar^{1-q}}{\pi^2 c^3}(kT)^q \omega^{3-q}. \tag{36}$$

В статистике Тсаллиса эту формулу можно считать q-обобщением классической формулы Рэлея–Джинса

$$d\mathcal{E}(\omega) = V(\pi^2 c^3)^{-1} kT\omega^2 d\omega. \tag{37}$$

Она справедлива, если $1 > q \to -\infty$. Из (36) видно, что с уменьшением q черное тела излучает меньше энергии по сравнению со стандартным излучением закона Рэлея–Джинса.

В случае больших частот ($\hbar\omega \gg kT$) соотношение (35) при учете формулы $\exp_{2-q}(x) = 1/\exp_q(-x)$ дает:

$$d\mathcal{E}_{rad}(\omega,T,q) = V\frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\omega^3\left[\exp_q\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)\right]^q d\omega. \tag{38}$$

При написании (38) использовано свойство $\exp_q(-x) \underset{x\to -\infty}{=} 0$ деформированной экспоненты Тсаллиса (Tsallis, 2009). Выражение (38) можно рассматривать как q-обобщение классического закона Вина. Заметим, что в пределе слабой связи $q \to 1$ формулы (37) и (38) восстанавливают свои классические выражения.

Термодинамика черного излучения. Интегрируя (36) по всем частотам, получим полную энергию фотонного газа (черного излучения) в объеме V

$$\mathcal{E}_{rad}(T,q) = V\frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\int_0^\infty \omega^3\left[\exp_{2-q}\left(\hbar\omega/kT\right) - 1\right]^{-q} d\omega. \tag{39}$$

Используя обозначение $x := \hbar\omega/kT$, перепишем формулу (39) в виде:

$$\mathcal{E}_{rad}(T,q) = V\frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\left(\frac{kT}{\hbar}\right)^4 \int_0^\infty x^3\left[\exp_{2-q}(x) - 1\right]^{-q} dx. \tag{40}$$

В выражение (40) входит интеграл вида $\int\limits_0^\infty x^3\left[\exp_{2-q}(x)-1\right]^{-q}dx$, который при $q\to 1$ равен $\pi^4/15 \simeq 6.49394$ (Ландау, Лифшиц, 1964).

Обозначим интеграл через[4)]

$$J_q^{(n)} := \frac{15}{\pi^4}\int\limits_0^\infty x^n\left[\exp_{2-q}(x)-1\right]^{-q}dx\,. \tag{41}$$

Тогда для полной энергии излучения будем иметь:

$$\mathcal{E}_{rad}(T,q) = VT^4\frac{\pi^5 k^4}{15c^3\hbar^3}J_q^{(3)} = VaJ_q^{(3)}T^4 = Va_qT^4, \tag{42}$$

где $a_q := aJ_q^{(3)}$; $a = \pi^5k^4/15c^3\hbar^3 = 7{,}56566(7)\cdot 10^{-15}\,\textit{эргсм}^{-3}K^{-4}$ – постоянная давления излучения.

Как известно, при $\mu = 0$ термодинамический потенциал $\Omega_{rad}(V,T,q)$ совпадает со свободной энергией $\mathcal{F}_{rad}(V,T,q)$. При использовании формулы (29), в которой положим $\mu = 0$, для величины $\mathcal{F}_{rad}$ получим:

$$\beta\mathcal{F}_{rad} = \int\limits_0^\beta \mathcal{E}_{rad}d\beta = Va_q\int\limits_0^\beta \beta^{-4}d\beta = -V\frac{1}{3}a_q\beta^{-3}. \tag{43}$$

Отсюда

$$\mathcal{F}_{rad}(V,T,q) = -V\frac{(kT)^4\pi^5}{45(c\hbar)^3}J_q^{(3)} = -V\frac{1}{3}a_qT^4 = -\frac{1}{3}\mathcal{E}_{rad}. \tag{44}$$

Энтропия чернотельного излучения в статистике Тсаллиса равна

$$\mathcal{S}_{rad}(V,T,q) = -\frac{\partial\mathcal{F}_{rad}}{\partial T} = V\frac{4}{3}a_qT^3. \tag{45}$$

Она пропорциональна кубу температуры.

Полная энергия излучения, согласно (23), равна

[4)] Вычисление интегралов такого рода проведено в работе (Колесниченко, 2020).

$$J_q^{(n)} = -\frac{15\,\Gamma(1-q)}{\pi^4(q-1)^n}\sum_{k=0}^{n}\left\{\frac{(n-k)n!}{k!(n-k+1)!}\frac{\Gamma\left[(1-q)(n-k)\right]}{\Gamma\left[(1-q)(n-k+1)\right]}\right\}.$$

$$\mathcal{E}_{rad} = T\mathcal{S}_{rad} + \mathcal{F}_{rad} = Va_q T^4 = -3\mathcal{F}_{rad}. \tag{46}$$

Таким образом, полная энергия черного излучения пропорциональна четвертой степени температуры (закон Больцмана).

Для теплоемкости чернотельного излучения $C_{rad,V} := \left(\partial\mathcal{E}_{rad} / \partial T\right)_V$ имеем:

$$C_{rad,V} = V4a_q T^3. \tag{47}$$

Наконец, давление и уравнения состояния определяются соотношениями:

$$P_{rad}(T,q) = -\left(\frac{\partial\mathcal{F}_{rad}}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{3}a_q T^4, \tag{48}$$

$$P_{rad}\cdot V = V\frac{1}{3}a_q T^4 = \frac{\mathcal{E}_{rad}}{3}. \tag{49}$$

Таким образом, несмотря на зависимость термодинамических величин от параметра деформации q, уравнение для полной энергии излучения (46) и уравнение состояния (49) остаются неизменными и в формализме Тсаллиса.

5. ЗАМКНУТАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ q-ГИДРОДИНАМИКИ ДЛЯ ПРОПЛАНЕТНОГО АККРЕЦИОННОГО ДИСКА С РАВНОВЕСНЫМ q-ИЗЛУЧЕНИЕМ

В эволюции многих протопланетных аккреционных дисков, особенно на ранней стадии их возникновения, большую роль играет давление излучения, как фактор их гидростатического равновесия. Впервые анализ неустойчивости в аккреционных дисках относительно осесимметричных возмущений с учетом давления излучения был проведен в работе Шакуры и Сюняева (Shakura, Sunyaev, 1976). В последующих работах рассматривались общие политропные модели (Camenzind и др.,1986), учитывались неосесимметричные возмущения (McKee, 1990), звуковые и эпициклические колебания (Хоперсков, Храпов,1995; Фридман, Хоперсков, 2011) и т.д.

Ниже мы используем приведенную выше систему уравнений q- гидродинамики для моделирования неустойчивости околосолнечного допланетного толстого диска, вещество которого состоит из смеси вещества (находящегося в состоянии идеального q-газа) и чёрнотельного изотропного излучения при температуре T, распространяющегося по всем направлениям. Будем предполагать, что протопланетный диск является оптически толстым и распределение поля излучения близко к равновесному. Подчеркнём также, что диск в значительной мере обладает осевой симметрией, что является следствием его вращения вокруг центральной звезды. Далее будем также предполагать, что диск является самогравитирующим, для которого вертикальная структура (вдоль оси вращения) определяется балансом сил давления и гравитации самого диска.

В случае пренебрежения гидродинамическими диссипативными процессами и нагревом космического вещества, обусловленным диссипацией и процессами ионизации и возбуждения, исходная система q-уравнений, состоящая из аналога уравнений Эйлера и уравнения Пуассона, имеет вид[5)] (см., например, Колесниченко, 2019):

$$\partial\rho / \partial t + div(\rho \boldsymbol{u}) = 0, \tag{50}$$

$$d\boldsymbol{u} / dt = -\rho^{-1} grad P - grad \psi, \tag{51}$$

$$\Delta\psi = 4\pi G\rho, \tag{52}$$

$$d\mathcal{E} / dt = -P\rho^{-1} div \boldsymbol{u} + dQ / dt, \tag{53}$$

где соотношением $d\mathcal{A}/dt := \partial\mathcal{A}/dt + (\boldsymbol{u} \cdot grad)\mathcal{A}$ определяется полная производная структурной величины $\mathcal{A}(\boldsymbol{r}, t)$ по времени. Здесь

$$P(\boldsymbol{r}, t) = p_q + P_{rad} \equiv p_q + a_q T^4 / 3, \tag{54}$$

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{r}, t) = \varepsilon_q + \varepsilon_{rad} \equiv \varepsilon_q + a_q T^4 / \rho \tag{55}$$

– соответственно полное давление и полная внутренняя энергия (на единицу массы) смеси идеального q-газа и чёрнотельного излучения; $\rho dQ / dt$ – полная скорость выделения тепла за счет вязкой диссипации и энергия, уносимая теплопроводностью и излучением из элемента среды при его движении; $\varepsilon_q(\boldsymbol{r}, t) = c_{vq} T(\boldsymbol{r}, t) = \dfrac{D}{2 + (1-q)D} \dfrac{kT(\boldsymbol{r}, t)}{m}$ – внутренняя энергия (на единицу массы газовой составляющей допланетного диска); $\varepsilon_{rad} = a_q T^4 / \rho$ – удельная энергия излучения (в статистике Тсаллиса) чёрного тела, находящаяся в единице массы; $p_q(\boldsymbol{r}, t) = \dfrac{2}{2 + (1-q)D} \dfrac{k}{m} T(\boldsymbol{r}, t) \rho(\boldsymbol{r}, t) = \dfrac{2}{D} \rho \varepsilon_q$ – газовое давление в не-

[5)] Далее индекс "q" у ряда гидродинамических и термодинамических переменных мы будем опускать.

экстенсивной дисковой системе (аналог закона состояния в кинетической теории идеальных газов); T − абсолютная температура; $P_{rad} \equiv a_q T^4/3$ − лучевое давление; $a_q := aJ_q^{(3)}$ − модифицированная постоянная излучения Стефана− Больцмана (см. (41)); $\psi(\boldsymbol{r},t) = -G\int_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}',t)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d\boldsymbol{r}'$ − гравитационный потенциал, являющийся решением уравнения Пуассона (8) (интеграл здесь берётся по всему объёму V, занимаемому допланетным облаком); $c_{vq} = \frac{D}{2+(1-q)D}\frac{k}{m}$ − удельная изохорная теплоёмкость газовой составляющей смеси. Определим также показатель адиабаты газового вещества диска, как отношение $\gamma_q \equiv \gamma_{gas} = c_{pq}/c_{vq}$. Тогда

$$\gamma_q \equiv \gamma_{gas} = 2 - q + 2/D, \quad \gamma_1 = (2+D)/D. \tag{56}$$

Уравнение для полной внутренней энергии (53) удобно переписать, используя уравнение неразрывности (50), в обычной форме первого начала термодинамики

$$Td\mathcal{S}/dt \equiv dQ/dt = d\mathcal{E}/dt + Pdv/dt, \tag{57}$$

выражающего скорость $d\mathcal{S}/dt$ изменения энтропии $\mathcal{S}$ (на единицу массы) дискового вещества и излучения при движении элемента среды вдоль его траектории. Здесь $v(\boldsymbol{r},t) = 1/\rho$ − удельный объём вещества протопланетного диска.

Изоэнтропические изменения в среде, содержащей q-газ и q-радиацию. Далее мы будем рассматривать такие движения космического вещества (находящегося в состоянии идеального q-газа) и чёрнотельного q-излучения, для которых энтропия каждой частицы среды (вещество + излучение) остается в первом приближении постоянной на протяжении всего пути частицы, т.е. $d\mathcal{S}/dt \equiv \partial\mathcal{S}/\partial t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\mathcal{S} = 0$. Подобные обратимые и адиабатические движения являются изоэнтропическими. Для них энергетическое уравнение (21) сводится к уравнению

$$\rho\, d\mathcal{E}/dt + P\,div\,\boldsymbol{u} = 0, \tag{58}$$

выражающему тот факт, что скорость изменения полной внутренней энергии движущегося элемента среды равна работе по сжатию этого элемента, совершаемой окружающей средой.

Вместе с тем для астрофизических целей часто удобно использовать другие формы уравнения (58), которые впервые были выведены Эддингтоном (Eddington, 1988) и Чандрасекхаром (Чандрасекхар, 1950). Эти формы справедливы, когда давление P и внутреннюю энергию $\mathcal{E}$ дисковой среды можно вычислить из соответствующих уравнений состояния как функций от удельного объёма v и температуры T (или энтропии $\mathcal{S}$) в зависимости от исследуемого процесса. Для «медленного» процесса, характеризуемого временем, много большим времени теплопередачи, любые возмущения профиля температуры будут успевать релаксировать. Следовательно, этот процесс можно рассматривать как изотермический, при котором $P = P(v,T_0) = P(v)$. «Быстрый» процесс (по сравнению с процессом теплопереноса) можно считать адиабатическим в силу нехватки времени для обмена теплом двух соседних областей: $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 = const$ и $P = P(v,\mathcal{S}_0) = P(v)$.

Из энергетического уравнения (58) для квазистатического процесса следует

$$\left(\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial T}\right)_v dT + \left(\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial v}\right)_T dv + Pdv = \frac{v}{T}\left(12P_{rad} + \frac{c_{vq}}{c_{pq}-c_{vq}}p_q\right)dT + (4P_{rad} + p_q)dv. \quad (59)$$

Следовательно, для изоэнтропических изменений имеем

$$\left(12P_{rad} + \frac{1}{\gamma_q - 1}p_q\right)d\,lnT + (4P_{rad} + p_q)d\ln v = 0. \quad (60)$$

Введём теперь адиабатические показатели смеси вещества и излучения Γ_1, Γ_2 и Γ_3 соотношениями

$$d\,lnP / dt = \Gamma_1 d\,ln\rho / dt, \quad (61)$$

$$\frac{d}{dt}lnT = (\Gamma_3 - 1)\frac{d}{dt}ln\,\rho = \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2}\frac{d}{dt}ln\,P, \quad (62)$$

которые могут быть использованы вместо энергетического уравнения (58). С учётом уравнений состояния для смеси идеального q-газа (6) и идеального q-излучения» (49) можно записать

$$dP = d(P_{rad} + p_q) = (4P_{rad} + p_q)d\,lnT - p_q d\ln v. \quad (63)$$

Следовательно, (61) есть не что иное, как

$$(4P_{rad} + p_q)d\,lnT + [\Gamma_1(P_{rad} + p_q) - p_q]d\ln v = 0. \quad (64)$$

Из (60) и (64) следует, что

$$\frac{12P_{rad}+(\gamma_q-1)^{-1}p_q}{4P_{rad}+p_q}=\frac{4P_{rad}+p_q}{\Gamma_1(P_{rad}+p_q)-p_q}. \qquad (65)$$

Введём теперь в рассмотрение коэффициент $\beta := p_{gas}/P$, характери- зующий долю вещества в полном давлении системы[6]. При использовании этого коэффициента соотношение (65) можно переписать в виде:

$$\Gamma_1=\beta+\frac{(4-3\beta)^2(\gamma_q-1)}{\beta+12(\gamma_q-1)(1-\beta)}, \quad (\gamma_q-1=1-q+2/D). \qquad (66)$$

Легко можно показать, что имеют место следующие соотношения:

$$\Gamma_2=\frac{(4-3\beta)\Gamma_1}{\beta+3(1-\beta)\Gamma_1}=1+\frac{(4-3\beta)(\gamma_q-1)}{3(\gamma_q-1)(1-\beta)(4+\beta)}, \qquad (67)$$

$$\Gamma_3=1+\frac{\Gamma_1-\beta}{4-3\beta}=1+\frac{\Gamma_1(\Gamma_2-1)}{\Gamma_2}=1+\frac{(4-3\beta)(\gamma_q-1)}{\beta+12(\gamma_q-1)(1-\beta)}. \qquad (68)$$

Если $p_{rad} \ll p_q$, то все обобщённые показатели адиабаты Γ для «q-газа +излучение» совпадают с показателем адиабаты чистого q -газа $\left(\gamma_q=2/D+2-q\right)$, а когда присутствует одно лишь излучение абсолютно чёрного тела ($p_q \ll p_{rad}$), то они равны $4/3$. Таким образом, для смеси «идеального q-газа» и q-радиации обобщенные показатели адиабаты принимают промежуточные значения от $4/3$ до γ_q.

6. ДЖИНСОВСКАЯ ГРАВИТАЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В НЕЭКСТЕНСИВНОЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Рассмотрим теперь простейшую задачу возникновения неустойчивости в бесконечной покоящейся сферически однородной среде. Напомним, что при рассмотрении гравитационной неустойчивости Дж. Джинс рассматривал однородное состояние самогравитирующей среды в состоянии покоя, что не совсем корректно, так как такое состояние не является состоянием равновесия. Тем не

[6] На особую важность отношения $(1-\beta)$ для теории звездной структуры впервые указал Эддингтон. В известном отрывке из его книги «Внутреннее строение звезд» Эддингтон связывал это отношение с «явлением звезды» («happening of the stars»).

менее его вывод критерия неустойчивости можно рассматривать как первое приближение, которое в наиболее простых случаях даёт правильный порядок нижней критической длины волны возмущения, ведущего к неустойчивости (см., например, Сафронов, 1969; Фридман, Хоперсков, 2011).

Линеаризованные основные дифференциальные уравнения (50)-(53) для случая чисто радиального сферически симметричного движения с учётом допущений, что невозмущённое состояние является равновесным $(u = u_0 + u',\ u_0 = 0)$ и что уравнение Пуассона (52) можно применить лишь к возмущениям плотности (условие $\psi_0 \cong 0$ называют иногда «мошенничеством» Джинса (см. Jeans, 1902)), имеют вид:

$$\partial\rho' / \partial t + \partial(\rho_0 u) / \partial r = 0, \tag{69}$$

$$\partial u / \partial t = \rho_0^{-1} \partial P' / \partial r - \rho' \rho_0^{-2} \partial P_0 / \partial r - \partial\psi' / \partial r, \tag{70}$$

$$d(P' / P_0) / dt = \Gamma_{1,0} d(\rho' / \rho_0) / dt, \tag{71}$$

$$\partial^2 \psi' / \partial r^2 = 4\pi G \rho'. \tag{72}$$

Уравнение (71) тривиально интегрируется. Если выбрать постоянную интегрирования так, чтобы $P' = 0$ при $\rho' = 0$, то получим

$$P'/ P_0) = \Gamma_{1,0}\, \rho'/ \rho_0. \tag{73}$$

Допустим теперь, что характерная длина, связанная с пространственными изменениями величин P_0 и ρ_0, велика по сравнению с другими характерными длинами задачи (это так называемое приближение коротковолновой акустики), т.е. можно пренебречь производными $\partial P_0 / \partial r$ и $\partial\rho_0 / \partial r$. При этих дополнительных упрощающих предположениях уравнение неразрывности, импульса и энергии легко объединить в одно уравнение для адиабатической звуковой волны[7] (см., например, Ландау, Лифшиц, 1964)

$$\partial^2 \rho' / \partial t^2 + v_{S,0}^2 \partial^2 \rho' / \partial r^2 - 4\pi G \rho_0 \rho' = 0. \tag{74}$$

Здесь возмущённая производная давления $\partial P' / \partial r$ выражается, согласно (73), через возмущённую производную плотности $\partial\rho' / \partial r$ в виде

$$\partial P' / \partial r = (\Gamma_{1,0} P_0 / \rho_0) \partial\rho' / \partial r = v_{S,0}^2 \partial\rho' / \partial r,$$

---

[7] При изучении возмущённых состояний самогравитирующего космического вещества, часто приходится иметь дело с разновидностью звуковых волн.

где

$$v_{S,0} := \left(\Gamma_{1,0}\frac{P_0}{\rho_0}\right)^{1/2} = \left\{\frac{1}{(\gamma_q - 1)D/2}\frac{kT_0}{m}\left[1 + \frac{(4-3\beta_0)^2(\gamma_q - 1)}{\beta_0^2 + 12\beta_0(\gamma_q - 1)(1-\beta_0)}\right]\right\}^{1/2} \quad (75)$$

– адиабатическая (или лапласова) скорость звука в дисковой среде. При написании (75) было учтено, что

$$\frac{P_0}{\rho_0} = \frac{p_{q,0} + p_{rad,0}}{\rho_0} = \frac{1}{\beta_0}\frac{p_{q,0}}{\rho_0} = \frac{1}{\beta_0}\frac{1}{1+(1-q)D/2}\frac{kT_0}{m} = \frac{1}{\beta_0}\frac{2}{(\gamma_q - 1)D}\frac{kT_0}{m}. \quad (76)$$

Заметим, что в частном случае, когда $q = 1$ и $D = 3$, имеем классический идеальный газ , $\gamma_1 = 5/3$. Отсюда следует, что

$$v_{S,0} \equiv \left(\frac{k}{m}T_0\left[1 + \frac{2(4-3\beta_0)^2}{3\beta_0(8-7\beta_0)}\right]\right)^{1/2}. \quad (77)$$

Когда излучение отсутствует ($\beta_0 = 1$), то $v_{S,0} := v_{gas,0} \equiv (\gamma_1 kT_0 / m)^{1/2}$ – адиабатическая скорость звука в идеальном газе.

Если $q \neq 1$ (идеальный q-газ) и излучение отсутствует ($\beta_0 = 1$), то

$$v_{S,0} = \left(\frac{kT_0}{m}\frac{2\gamma_q}{(\gamma_q - 1)D}\right)^{1/2} = \left(\frac{kT_0}{m}\frac{2 - q + 2/D}{(1-q)D/2 + 1}\right)^{1/2}. \quad (78)$$

Уравнение (74) является линейным и однородным уравнением в частных производных, следовательно, к нему применим метод нормальных колебаний (метод мод). Решая уравнения (74) для возмущённой плотности в виде $\rho' \sim \exp(-i\omega t + i\mathrm{k}r)$, описывающем волны с угловой частотой ω, волновым вектором k в направлении r [8)] и длиной волны $\lambda_r = 2\pi/\mathrm{k}$, получим следующее дисперсионное уравнение для бегущей волны

$$\omega^2 - \mathrm{k}^2\frac{p_{q,0}}{\rho_0}\left\{1 + \frac{\Gamma_{1,0} - \beta_0}{4 - 3\beta_0}\left(1 + 4\frac{1-\beta_0}{\beta_0}\right)\right\} + 4\pi G\rho_0 = 0, \quad (79)$$

[8)] Следует заметить, что линеаризованное уравнение импульса требует, чтобы скорость $\boldsymbol{u}$ была параллельна волновому вектору $\pm\boldsymbol{k}$ (Ландау, Лифшиц, 1964). Следовательно, скорости частиц жидкости, связанные с адиабатическими звуковыми волнами, параллельны направлению распространения волн.

которое с учетом соотношений (40) и (41) принимает «стандартный» вид

$$\omega^2 = \mathrm{k}^2 v_{S,0}^2 - 4\pi G\rho_0 . \tag{80}$$

Здесь адиабатическая скорость звука $v_{S,0}$ определяется формулой (75).

Для устойчивых волн с частотами ω имеем $\omega^2 > 0$, тогда как неустойчивость соответствует условию $\omega^2 < 0$. Эти два класса разделяет случай нейтральной устойчивости $\omega^2 = 0$, что соответствует модам с критической длиной волны возмущения

$$\lambda_{cr} = 2\pi / \mathrm{k}_{cr}, \quad \mathrm{k}_{cr}^2 = \omega_{cr}^2 / v_{S0}^2, \quad \omega_{cr}^2 = 4\pi G\rho_0 . \tag{81}$$

Из уравнения (80) следует, что граничное значение $\mathrm{k} = \mathrm{k}_{cr}$ разделяет устойчивые $(\mathrm{k} > \mathrm{k}_{cr})$ и неустойчивые $(\mathrm{k} < \mathrm{k}_{cr})$ пульсации плотности. При малых k (длинные волны) пульсации будут расти со временем и появляется нестабильность Джинса, а коротковолновые пульсации плотности (большие k, малые длины волн) колеблются, т.е. распространяются в виде звуковых волн.

Таким образом, критическая длина волны возмущения, равная

$$\lambda_{cr} = \frac{2\pi v_{S0}}{\omega_{cr}} = \left(\frac{\pi v_{S0}^2}{G\rho_0}\right)^{1/2} = \left(\frac{2\pi k T_0}{m G\rho_0 D}\left[\frac{1}{\gamma_q - 1} + \frac{(4-3\beta_0)^2}{\beta_0^2 + 12\beta_0(\gamma_q - 1)(1-\beta_0)}\right]\right)^{1/2}, \tag{82}$$

является размером мельчайших «капель» рассматриваемой «фрактальной» газовой среды с излучением, которые могут удерживаться вместе собственным гравитационным притяжением. Следовательно, модифицированный в рамках неэкстенсивной кинетической теории критерий неустойчивости Джинса для смеси q -газа и чёрнотельной q-радиации будет выглядеть следующим образом: длина неустойчивой волны возмущения λ_r должна удовлетворять неравенству

$$\lambda_r \geq \lambda_{cr} = v_{S0}\left(\frac{\pi}{G\rho_0}\right)^{1/2} = \left(\frac{\pi k T_0}{m G\rho_0}\frac{2}{(\gamma_q - 1)D}\left[1 + \frac{(4-3\beta_0)^2(\gamma_q - 1)}{\beta_0^2 + 12\beta_0(\gamma_q - 1)(1-\beta_0)}\right]\right)^{1/2} . \tag{83}$$

Заметим, что в традиционной литературе длину

$$\lambda_{\mathcal{J}} = \left(\pi v_{gas,0}^2 / G\rho_0\right)^{1/2} = \left(\gamma_1 \pi k T_0 / m G\rho_0\right)^{1/2}, \tag{84}$$

соответствующую размеру области сжатия самогравитирующего газа, называют длиной Джинса. С учётом (83) критерий неустойчивости Джинса в неэкстенсивной кинетике может быть переписан в виде:

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_{\mathcal{J}}} \geq \frac{v_{S0}}{v_{gas,0}} = \left(\frac{1}{\gamma_1}\frac{2}{(\gamma_q-1)D}\left[1+\frac{(4-3\beta_0)^2(\gamma_q-1)}{\beta_0^2+12\beta_0(\gamma_q-1)(1-\beta_0)}\right]\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\frac{1}{\gamma_1}\frac{2/D}{(1-q+2/D)}\left[1+\frac{(4-3\beta_0)^2(1-q+2/D)}{\beta_0^2+12\beta_0(1-q+2/D)(1-\beta_0)}\right]\right)^{1/2} \equiv \Xi. \quad (85)$$

Отсюда следует:

1.Если $q=1$ (при этом $\gamma_1 = 1+2/D$), то фактор

$$\Xi \equiv \left[\frac{1}{\gamma_1}\left(1+\frac{(4-3\beta_0)^2 2/D}{\beta_0^2+24\beta_0(1-\beta_0)/D}\right)\right]^{1/2} \geq 1. \quad (86)$$

Следовательно, критическая длина волны возмущения в рассматриваемом случае больше джинсовской, т.е. благодаря давлению излучения система стабилизируется.

2.Если $q \neq 1$, но излучение отсутствует $\beta_0 = 1$, то фактор

$$\Xi = \frac{1}{\gamma_1}\left(2/D+\frac{2/D}{1-q+2/D}\right)^{1/2}, \quad 0<q<1+2/D. \quad (87)$$

В этом случае критерий гравитационной неустойчивости зависит от численных значений параметров деформации q и нецелой размерности пространства скоростей D. При этом возможна ситуация, при которой гравитационно- устойчивое (на основе классической статистики Больцмана−Гиббса) облако газа, будет неустойчивым согласно неэкстенсивной статистике Тсаллиса (см. Колесниченко, Маров, 2014; Kolesnichenko, Marov, 2014, 2016).

Связанная с λ_{cr} критическая масса (масса, содержащаяся внутри сферы диаметром λ_{cr}) определяется соотношением

$$\mathcal{M}_{cr} = (\pi/6)\rho_0\lambda_{cr}^3 = \mathcal{M}_{\mathcal{J}}\Xi^3, \quad (88)$$

где

$$\mathcal{M}_{\mathcal{J}} \equiv (\pi/6)\rho_0\lambda_{\mathcal{J}}^3 = (\pi/6)\rho_0\left(\gamma_1\pi k T_0/mG\rho_0\right)^{3/2} \quad (89)$$

— критическая масса Джинса. Возмущения с массой $\mathcal{M}_r$, превышающей критическую массу Джинса $\mathcal{M}_{\mathcal{J}}$ ($\Xi > 1$), могут расти, формируя гравитационно-ограниченные структуры, в то время как возмущения с массой $\mathcal{M}_r$ меньше $\mathcal{M}_{\mathcal{J}}$ не растут и ведут себя как акустические волны. При этом для самогравитирующих неэкстенсивных сред с излучением критические значения длины волны и массы явно зависят от энтропийного индекса q, нецелой размерности пространства скоростей D и коэффициента β, которые, являясь свободными параметрами, должны определяться в каждом конкретном случае эмпирическим путём из экспериментальных данных. Это позволяет при исследовании неустойчивости самогравитирующих космических объектов в рамках неэкстенсивной статистики более обоснованно моделировать реально складывающуюся ситуацию.

Заметим, что дальнейшее развитие предложенного здесь подхода может быть связано с учётом влияния на джинсовскую неустойчивость вращения среды, магнитного поля, вязкости и других диссипативных эффектов.

7. ГРАВИТАЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ДЖИНСА ДЛЯ НАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЫ С ЧЁРНОТЕЛЬНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

Исходные бездиссипативные уравнения намагниченной плазмы с радиационными процессами состоят из уравнений: уравнений Эйлера для идеальной q-жидкости, уравнения Пуассона и уравнения магнитной индукции в магнитной гидродинамике:

$$\partial\rho / \partial t + grad(\rho \boldsymbol{u}) = 0, \tag{90}$$

$$\rho\, d\boldsymbol{u} / dt = c^{-1} \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{\mathcal{B}} - grad P - \rho\, grad\, \psi, \tag{91}$$

$$\frac{dT}{dt} = (\Gamma_3 - 1)\frac{T}{\rho}\frac{d\rho}{dt}, \quad \Gamma_3 = 1 + \frac{\Gamma_1 - \beta}{4 - 3\beta} = 1 + \frac{(4-3\beta)(\gamma_q - 1)}{\beta + 12(\gamma_q - 1)(1-\beta)}, \tag{92}$$

$$\Delta\psi = 4\pi G\rho, \tag{93}$$

$$\partial\boldsymbol{\mathcal{B}} / \partial t = rot(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{\mathcal{B}}), \quad div\boldsymbol{\mathcal{B}} = 0\,. \tag{94}$$

Здесь $\boldsymbol{\mathcal{B}} = \boldsymbol{\mathcal{B}}_0 \equiv \mathcal{B}_0 \boldsymbol{i}_z$ — магнитное поле; c — скорость света; $\boldsymbol{j} = (c/4\pi) rot\boldsymbol{\mathcal{B}}$ — сила тока; $\gamma_q - 1 = 1 - q + 2/D$.

Линеаризуем уравнения (90)-(94), предполагая, что невозмущённое состояние среды является однородным и равновесным $(\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{u}',\ \boldsymbol{u}_0 = 0)$ и что $\psi_0 \cong 0$; тогда, в случае цилиндрически симметричного движения ($\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}_x x + \boldsymbol{i}_z z$), получим[9]:

$$\partial\rho' / \partial t + \rho_0\, div\, \boldsymbol{u} = 0\,, \tag{95}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = \frac{\beta_0 P_0}{\rho_0}\left[\frac{grad\,\rho'}{\rho_0} - \frac{4-3\beta_0}{\beta_0}\frac{grad\,T'}{T_0}\right] - grad\,\psi' - \frac{1}{4\pi\rho_0}(rot\boldsymbol{\mathcal{B}}') \times \boldsymbol{\mathcal{B}}_0\,, \tag{96}$$

$$\partial T' / \partial t - (\Gamma_{3,0} - 1) T_0 \rho_0^{-1} \partial\rho' / \partial t = 0\,, \tag{97}$$

$$\Delta\psi' = 4\pi G \rho'\,, \qquad 70)$$

$$\partial\boldsymbol{\mathcal{B}}'/\partial t = rot(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{\mathcal{B}}_0), \quad div\,\boldsymbol{\mathcal{B}}' = 0\,. \tag{99}$$

где

$$\frac{\beta_0 P_0}{\rho_0} = \frac{2}{(\gamma_q - 1)D}\frac{kT_0}{m_0} = \frac{k}{m_0}\frac{T_0}{1+(1-q)D/2} \equiv \frac{k}{m_0} T_{eff,0}\,. \tag{100}$$

Получим теперь в рамках неэкстенсивной механики Тсаллиса дисперсионное уравнение для определения критерия неустойчивости однородной плазмы с учётом воздействия радиационного давления. Используем для этого метод нормальных колебаний, при условии экспоненциального возмущения всех

---

[9]) Известно, что проблему устойчивости самогравитирующего двумерного газового облака в принципе нельзя описывать в рамках двумерного приближения, поскольку оно заведомо является сильно неустойчивым (см., например, Фридман, Хоперсков, 2011). Однако при наличии сильного внешнего гравитационного поля с цилиндрической геометрией и с образующей вдоль оси вращения облака, возможно обеспечить его устойчивость в случае, когда угловая скорость вращения достаточно велика. В этом случае структура допланетного облака вдоль оси вращения будет определяться исключительно его самогравитацией. Разумеется, этот случай искусственный, поскольку в реальных астрофизических системах такие цилиндрические поля если и встречаются, то без вложенных дисков. Вместе с тем рассмотрение такого вложенного в цилиндр самогравитирующего газового диска представляет определённый математический интерес, поскольку только в этом случае можно выделить эффекты, к которым приводит самогравитация в чистом виде. Именно такие модели рассматривались в большинстве классических работ по астрофизическим дискам (см., например, Goldreich, Lynden-Bell, 1965; Hunter ,1972; Toomre, 1964).

пульсирующих параметров: ρ', u, T', ψ' и $\boldsymbol{\mathcal{B}}'$, т.е. когда они пропорциональны $\sim \exp[i(-\omega t + \mathrm{k}_x x + \mathrm{k}_z z)]$. Здесь ω

— частота гармонических колебаний, $\mathrm{k} = \sqrt{\mathrm{k}_x^2 + \mathrm{k}_z^2}$ — волновое число. В результате будем иметь:

$$\left(-\omega^2 + V_{\mathcal{B}}^2 \mathrm{k}_z^2\right)\left[\left(-\omega^2 + V_{Alf}^2 \mathrm{k}^2 + \mathcal{A}\mathrm{k}_x^2\right)\left(-\omega^2 + \mathcal{A}\mathrm{k}_z^2\right) - \mathcal{A}^2 \mathrm{k}_x^2 \mathrm{k}_z^2\right] = 0, \qquad (101)$$

где

$$\mathcal{A} \equiv \frac{\beta_0 P_0}{\rho_0}\left[1 + \frac{4 - 3\beta_0}{\beta_0}(\Gamma_{3,0} - 1\right] - \frac{4\pi G\rho_0}{\mathrm{k}^2} = v_{S,0}^2 - \frac{4\pi G\rho_0}{\mathrm{k}^2}; \qquad (102)$$

$$V_{Alf}^2 = \mathcal{B}_0 / \sqrt{4\pi\rho_0} \qquad (103)$$

— альфвеновская скорость плазмы.

Рассмотрим два простых случая:

1. Для поперечного распространения волн (когда $\mathrm{k}_x = \mathrm{k}$, $\mathrm{k}_z = 0$) уравнение (101) сводится к простой форме (сравни с (80))

$$\omega^2 - V_{Alf}^2 \mathrm{k}_x^2 - v_{S,0}^2 \mathrm{k}_x^2 + 4\pi G\rho_0 = 0, \qquad (104)$$

для которого, с учётом формулы (75), критерий гравитационной неустойчивости самогравитирующей плазмы с магнитным полем и радиационным давлением принимает вид:

$$\mathrm{k}_x^2 (V_{Alf}^2 + \frac{1}{(\gamma_q - 1)D/2}\frac{kT_0}{m}\left[1 + \frac{(4 - 3\beta_0)^2(\gamma_q - 1)}{\beta_0^2 + 12\beta_0(\gamma_q - 1)(1 - \beta_0)}\right] > 4\pi G\rho_0. \qquad (105)$$

2. В случае продольного (к направлению магнитного поля) распространения пульсационных волн (для которых $\mathrm{k}_z = \mathrm{k}$, $\mathrm{k}_x = 0$) уравнение (101) сводится к следующим двум уравнениям:

$$\omega^2 - V_{Alf}^2 \mathrm{k}_z^2 = 0, \quad \omega^2 - v_{S,0}^2 \mathrm{k}_z^2 + 4\pi G\rho_0 = 0. \qquad (106)$$

Таким образом, в поперечном режиме распространения волны возмущения критерий неустойчивости Джинса для плазмы модифицируется магнитным полем и радиационным давлением. В случае продольного режима на джинсовский критерий не влияет магнитное поле, поскольку этот режим обеспечивает Альфвен-режим движения отдельно от гравитационного режима.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Экзопланеты образуются из протопланетных дисков в результате потери ими устойчивости. Гравитационная неустойчивость является фундаментальным процессом фрагментации гравитирующего космического вещества протопланетного диска. В конечном счете, именно с ней связано формирование экзопланет. Однако полной ясности в том, какие физико-химические процессы идут при их формировании и какие из них доминируют, до сих пор нет. Большинство обнаруженных на сегодня протопланетных дисков вокруг солнечноподобных звезд сильно отличаются от протопланетного диска Солнца. По этой причине теория, которая используется для описания Солнечной системы, только одна из многих, и для описания эволюции звездных протопланетных дисков она должна быть намного более сложной. Об этом, в частности, свидетельствует коллекция обнаруженных во Вселенной экзопланет, которые весьма разнообразны. В связи со сказанным назрела необходимость в создании нестандартных моделей, объясняющих многообразие протопланетных дисков и планетных систем.

Имея в виду большое космологическое значение гравитационной неустойчивости в проблеме образования экзопланет, в представленной работе рассмотрена неустойчивость Джинса на основе нетрадиционной статистики Тсаллиса, в рамках которой предлагается моделировать эволюцию протопланетных электропроводных дисков с фрактальной структурой с учетом излучения. В работе выведены дисперсионные уравнения, на основе которых выполнен анализ осесимметричных колебаний протопланетных дисков с фрактальной структурой фазового пространства при учете чернотельного q-излучения. Получен модифицированный критерий джинсовской гравитационной неустойчивости как для покоящейся бездиссипативной сферически однородной среды, состоящей из идеального q-газа и чёрнотельного q-излучения, так и для намагниченной плазмы, подверженной воздействию радиационного давления.

Для подобного самогравитирующего протопланетного диска найдены критические значения длин волн и масс, которые явно зависят от индекса деформации энтропии Тсаллиса, нецелой размерности пространства скоростей и коэффициента, характеризующего долю излучения в полном давлении смеси. Полученные параметрические критерии неустойчивости Джинса позволяют более свободно моделировать эволюцию разнообразных аномальных протопланетных газо-пылевых дисков. Предложенный подход может быть распространён также и на другие процессы эволюции дисков, связанные, например, с исследованием гравитационных возмущений диссипативных дисков с излучением, с исследованием собственных частот колебаний вертикально неоднородных магнитных протопланетных дисков и др.

Следует заметить, что, численное значение параметра деформации q играет при этом существенную роль. К сожалению, проблема его определения всё ещё остаётся открытой. Вместе с тем, в настоящее время имеются серьёзные успехи в гелиосейсмологии, которая исследует внутреннюю структуру и динамику Солнца (см. Gough, 2012). В солнечной атмосфере установлены и изучены почти 10 миллионов резонансных мод колебаний. Их частоты измерены с достаточно большой точностью, что позволяет исследовать внутреннюю структуру Солнца на больших глубинах (Gough, Hindman, 2010). Эти результаты поднимают ряд теоретических вопросов, ответы на которые необходимы для понимания того, как на самом деле эволюционирует обычная звезда с протопланетным диском. Поскольку гелиосейсмология приводит экспериментальные доказательства присутствия неэкстенсивных эффектов в недрах звезды (в частности, по найденным скоростям звука), то есть надежда, что она также сможет в самое ближайшее время предоставить космологические экспериментальные данные по численным значениям параметра деформации q, отличным от единицы.

Работа выполнена при поддержке гранта № 075-15-2020-780 Минобрнауки России «Теоретические и экспериментальные исследования формирования и эволюции внесолнечных планетных систем и характеристик экзопланет»

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Горькавый Н.Н., Фридман А.М. Физика планетных колец. М.: Наука. 1994. 348 с.

Зарипов Р.Г. Самоорганизация и необратимость в неэкстенсивных системах. Казань: Фэн. 2002. 251 с.

Зарипов Р.Г. Принципы неэкстенсивной статистической механики и геометрия мер беспорядка и порядка. Казань: Изд-во Казан. Гос. техн. ун-та. 2010. 404 с.

Колесниченко А.В. Модификация в рамках статистики Тсаллиса критериев гравитационной неустойчивости астрофизических дисков с фрактальной структурой фазового пространства // Mathematica Montisnigri. 2015. Т. 32. С. 93-118.

Колесниченко А.В. Модификация в рамках неаддитивной статистики Тсаллиса критериев гравитационной неустойчивости астрофизических дисков // Матем. Моделирование. 2016b. Т. 28. № 3. С. 96-118.

Колесниченко А.В. Конструирование континуальных моделей турбулентных космических сред. Проблемы математического моделирования астрофизических аккреционных дисков // LAP LAMBERT Academic Publishing RU. 2016a. 380 с.

Колесниченко А.В. Некоторые проблемы конструирования космических сплошных сред. Моделирование аккреционных протопланетных дисков. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2017. 372 с.

Колесниченко А.В. К построению неаддитивной термодинамики сложных систем на основе статистики Курадо–Тсаллиса // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. № 25. 40 с.

Колесниченко А.В. Статистическая механика и термодинамика Тсаллиса неаддитивных систем. Введение в теорию и приложения. М.: ЛЕНАНД. (Синергетика: от прошлого к будущему. № 87). 2019. 360 с.

Колесниченко А.В., Маров М.Я. Модификация критерия джинсовской неустойчивости астрофизических объектов с фрактальной структурой в рамках неэкстенсивной статистики //Астроном. Вестн. 2014. Т. 48. № 5. С. 383–395.

Колесниченко А.В., Маров М.Я. К моделированию процесса агрегации пылевых фрактальных кластеров в протопланетном ламинарном диске // Исследования Солнечной системы: космические вехи. Механика, управление, и информатика. М.: ИКИ РАН, 2015a. С. 349-385.

Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. М.: Наука. 1964. 567 с.

Сафронов В.С. Эволюция допланетного облака и образование Земли и планет. М.: Наука. 1969. 244 с.

Фридман А.М., Хоперсков А.В. Физика галактических дисков. М.: Физматлит. 2011. 640 с.

Хоперсков А.В., Храпов С.С. Неустойчивость звуковых волн в тонком газовом диске // Письма в АЖ. 1995. Т. 21. С. 388-393.

Чандрасекхар С.Введение в учение о строении звезд. М.: Изд-во ИЛ. 1950. 476 с.

Abe S., Okamoto Y. Eds., “Nonextensive Statistical Mechanicsand Its Applications”. Series Lecture Notes in Physics. Springer: Verlag, Berlin, New York. 2001.

Anchrordoqui L.A., Torres D.F. Non-extensivity effects and the highest energy cosmic ray affair // Phys. Lett. A . 2001. V. 283. P. 319-322.

Boghosian B. M. Navier-Storts Equations for Generalized Thermostatistics // Bras. J. Phys. 1999. V. 29. № 1. P. 91-107.

Bonnor W. B. Jeans' Formula for Gravitational Instability // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 1957. V. 117. № 1. P. 104-117. (https://doi.org/10.1093/mnras/117.1.104).

Büyükkilic F., Demirhan D. A fractal approach to entropy and distribution functions // Phys. Lett. A. 1993. V.181. P. 24-28.

Büyükkilic F., Demirhan D. A unified grand canonical description of the non-extensive thermostatistics of the quantum gases: Fractal and fractional approach // Eur. Phys. J. B. 2000. V. 14. P. 705-711.

Cadez V.M. Applicability problem of Jeans criterion to a stationary self-gravita ting cloud // Astron. Astrophys. 1990. V. 235. P. 242-244.

Cadez V. M. Instabilities in stratified magnetized Stellar atmospheres //Publ. Astron. Obs. Belgrade. 2010. V. 90. P. 121-124.

Camenzind M., Demole F., Straumann N. The stability of radiation–pressure–dominated accretion discs // Astron.Astrophys. 1986. V. 158. P. 212-216.

Chamati H., Djankova A.T., Tonchev N.S. On the application of nonextensive statistical mechanics to the black-body radiation // Physica A. 2006. V. 360. P. 297-303.

Chandrasekhar S., Fermi E. Problems of gravitational stability in the Presence of a magnetic field // Astrophysical Journal. 1953.V. 118. P. 116-141.

Curado E.M.F., Tsallis C. Generalized statistical mechanics: connection with thermodynamics // J. Phys. 1991. A 24. P. L69-72.

Daroczy Z. Generalized information function// Inform. Control. 1970. V.16. P. 36–51.

Dhiman J.S., Dadwal R. On the Jeans Criterion of a Stratified Heat Conducting Gaseous Medium in the Presence of Non-uniform Rotation and Magnetic Field // Journal of Astrophysics and Astronomy. 2012.V. 33. № 4. P. 363-373.

Eddington A. S. The Internal Constitution of the Stars. Cambridge. England: Cambridge University Press. 1988. 407 p.

Fridman A.M, Polyachenko V.L. Physics of gravitating system- N.Y.: Springer-Verlag. 1984. V. 1. 468 p.; V. 2. 358 p.

Fridman A.M., Polyachenko V.L. Physics of Gravitating Systems I: Equilibrium and Stability. Springer Science & Business Media. 2012. 468 p.

Gell-Mann M., Tsallis C. Eds. “Nonextensive Entropy- Interdisciplinary Applications” // Oxford University Press. 2004. 440 p.

Grigolini P., Tsallis C., West B.J. Eds., “Classical and Quantum Complexity and Nonextensive Thermodynamics” // Chaos, Solitons and Fractals. 2002. 13, № 3. P. 367.

Goldreich P., Lynden-Bell D. I. Gravatational stability of uniformly rotating disks // MNRAS, 1965. V. 130. P. 97-124.

Goldreich P., Ward W.R. The Formation of Planetesimals // Astrophysical Journal. 1973. V. 183. P. 1051-1062 .

Gough D. O., Hindman B. Helioseismic Detection of Deep Meridional Flow // J. Astroph. 2010. V. 714. № 1. P. 960-970.

Gough D. O Heliophysics Gleaned from Seismology // Progress in solar/stellar Physics with Helio- and Asteroseismology, Proc. 65th Fujihara Seminar, Astron. Soc. Pacific Conf. Ser., 2011. V. 462. P. 429-454 (arXiv:1210.1114v1 [astro-ph.SR]. 2012).

Havrda J., Charvat F. Quantification Method of Classification Processes // Kybernetika. 1967. V. 3. P. 30–35.

Herrmann H.J., Barbosa M., Curado E.M.F. Eds. “Trends and perspectives in extensive and non-extensive statistical mechanics”// Physica A. 2004. V. 344. № 3-4. P. v-vi.

Hunter C. Self-gravitating gaseous disks // Ann. Rev. Fluid Mech. 1972. V.4. P. 219-242.

Jaynes E.T. Information theory and statistical mechanics // In collec. “Statistical Physics 3”, Lectures from Brandeis Summer Institute 1962 . New York: W.A. Benjamin, Inc., 1963. p.181.

Jeans J.H. The stability of a spherical nebula 199 // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A. Containing Papers of a Mathematical or Physical Character. 1902. V.199. P. 1-53.

Jeans J. H. Astronomy and Cosmogony, Cambridge Univ. Press. 2009. 476 p.

Joshi H., Pensia R. K. Effect of rotation on Jeans instability of magnetized radiative quantum plasma // Physics of plasmas. 2017. V. 24. P. 032113 -1 ─ 032113-8.

Kaniadakis G., Lissia M., Rapisarda A. Eds. “Non Extensive Thermodynamics and Physical Applications” // Physica A. 2002. V. 305. № 1-2. P. xv-xvii.

Kaniadakis G., Lissia M. Eds. “News and Expectations in Thermostatistics”// Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2004. V. 340. № 1. P. xv-xix.

Kaniadakis G., Carbone A., Lissia M. Eds. “News, expectations and trends in statistical physics”// Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2006. V. 365. № 1. P. xi-xi.

Kaothekar S., Chhajlani R.K Jeans Instability Of Self Gravitating Partially Ionized Hall Plasma With Radiative Heat Loss Functions And Porosity // AIP Conference Proceedings 1536. 2013. P.1288-1289.

Kolesnichenko A. V. On the Simulation of Helical Turbulence in an Astrophysical Nonmagnetic Disk// Solar System Research. 2011. том 45, вып. 3, стр. 246-263.

Kolesnichenko A.V. Thermodynamics of the Bose Gas and Blackbody Radiation in Non-Extensive Tsallis Statistics // Solar System Research. 2020a V. 54, № 5, P. 420-431.

Kolesnichenko A.V., Marov M. Ya. Thermodynamic Model of MHD Turbulence and Some of Its Applications to Accretion Disks // Solar System Research. 2008. V. 42. № 3. P. 226-255 .

Kolesnichenko A.V., Chetverushkin B.N. Kinetic derivation of a quasi-hydrodinamic system of equations on the base of nonextensive statistics. RJNAMM (Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling). 2013. V.28. № 6. P. 547-576.

Kolesnichenko A.V. Jeans Instability of a Protoplanetary Gas Cloud with Radiation in Nonextensive Tsallis Kinetics // Solar System Research. 2020. V. 54. № 2. P. 137-149.

Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. Modeling of Aggregation of Fractal Dust Clusters in a Laminar Protoplanetary Disk // Solar System Research. 2013. V. 47. № 2. P. 80-98.

Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. Modification of the jeans instability criterion for fractal-structure astrophysical objects in the framework of nonextensive statistics // Solar System Research. 2014. V. 48, № 5. P. 354-365.

Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. Modification of the Jeans and Toomre Instability Criteria for Astrophysical Fractal Objects Within Nonextensive Statistics// Solar System Research, 2016. V. 50. № 4. P. 251-261.

Kolesnichenko A. V., Marov M.Ya. Streaming Instability in the Gas–Dust Medium of the Protoplanetary Disc and the Formation of Fractal Dust Clusters // Solar System Research. 2019. V. 53. № 3. P. 181-198.

Kumar V., Sutar D. L., Pensia, R. K., Sharma S. Effect of fine dust particles and finite electron inertia of rotating magnetized plasma // 2nd International Conference on Condensed Matter and Applied Physics (ICC 2017).AIP Conf. Proc. 1953. 2018. P. 060036-1–060036-4.

Leubner M.P. Nonextensive Theory of Dark Matter and Gas Density Profiles // Astrophys. J. 2005. V. 632. L1–L4.

Lima J.A.S., Silva R. Jr., Santos J. Plasma oscillations and nonextensive statistics // Phys.Rev. E. 2000. V. 61. № 3. P. 3260-3263 .

Lima J.A. S., Silva R., Santos J. Jeans' gravitational instability and nonextensive kinetic theory // Astronomy and Astrophysics. 2002. V. 396. P. 309-313.

Low C., Lynden-Bell D. The minimum Jeans mass or when fragmentation must Ssop.// Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1976. V. 176. № 2. P. 367-390.

Ma P., Zheng Y., Qi G. The nonextensive Bose-Einstein condensation and photon gas with parameter transformation // Eur. Phys. J. Plus. 2019. V. 134. P. 502 (1-11).

Mace R. L., Verheest, Frank; Hellberg M. A. Jeans stability of dusty space plasmas // Physics Letters A. 1998. V. 237. P 146-151.

McKee M.R. The radial-azimuthal stability of accretion disks around black holes // Astron. Astrophys. 1990. V. 235. P. 521-525.

Marov M. Ya., Kolesnichenko A. V. Turbulenceand Self-Organization. Modeling Astrophysical Objects. Springer Science+Business Media New York. 2013. 657 c.

Martinez S., Nicolas F., Pennini F., Plastino A. Tsallis’entropy maximization procedure revisited // Physica A. 2000. V. 286. P. 489-502.

Masood W., Salimullah M., Shah H. A. A quantum hydrodynamic model for multicomponent quantum magnetoplasma with Jeans term // Physics Letters A, 372. 2008. V.45. P. 6757-6760.

Mather J.C., Cheng E.S., Cottingham D.A., Eplee R.E., Fixsen D.J., Hewagama T., Isaacman R.B., Jensen K.A, Meyer S.S., Noerdlinger P.D., Read S.M, Rosen L.P., Shafer R.A., Wright E.L., Bennett C.L., Boggess N.W, Hauser M.G., Kelsall T., Moseley S.H., Silverberg R.F, Smoot G.F., Weiss R., Wilkinson D.T. Measurement of the cosmic microwave background spectrum by the cobe 1firas instrument // Astrophys. J. 1994. V. 420. P. 439-444.

Nonextensive statistical mechanics and thermodynamics: Bibliography / http://tsallis. cat.cbpf.br/biblio.htm.

Owen J. M., Villumsen J. Baryons V. Dark Matter, and the Jeans Mass in Simulations of Cosmological Structure Formation // J. Astroph. 1997. V. 481. № 1. P. 1-21.

Pandey B.P., Avinash K. Jeans instability of a dusty plasma // Physical Review E (Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics). 1994 .V. 49. № 6. P. 5599-5606.

Pensia R. K., Sutar D. L., Sharma S. Analysis of Jeans Instability of Optically Thick Quantum Plasma under the Effect of Modified Ohms law // 2nd International Conference on Condensed Matter and Applied Physics (ICC 2017).AIP Conf. Proc. 1953. 2018. P. 060044-1–060044-4.

Pessah M.E, Torres D.F., Vucetich H. Statistical mechanics and the description of the early universe. (I). Foundations for a slightly non-extensive cosmology // Phys. A: Statis. Mech. 2001. V. 297. № 1-2. P. 164-200.

Plastino A.R., Plastino A., Vucetich H. A quantitative test of Gibbs' statistical mechanics // Physics Let. A. 1995. V. 207. P. 42-46.

Rovenchak A. Ideal Bose-gas in nonadditive statistics // Low temperature physics. 2018. V. 44. №. 10. P. 1025-1031.

Sakagami M., Taruya A. Self-gravitating stellar systems and non-extensive thermostatistics // Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2004. V. 16. № 3. P. 279-292.

Sistema P. D., Vucetich H. Cosmology, oscillating physics, and oscillating biology // Phys. Rev. Lett. 1994. V.72. №. 4. P. 454-457.

Shakura N.I., Sunyaev R.A. A theory of the instability of disk accretion onto black holes and the variability of binary X-ray sources, galactic nuclei and quasars // Mon. Not. RAS, astr.Soc. 1976. V. 175. P. 613-632.

Shukla P. K., Stenflo L. Jeans instability in a self-gravitating dusty plasma // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 462. 2006. P. 403-407.

Tirnakli U., Büyükkiliç F., Demirhan D. Generalized Distribution Functions and an Alternative Approach to Generalized Planck Radiation Law // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 1997. V. 240. № 3-4. P. 657-664.

Trigger S. A., Ershkovich A. I., van Heijst G. J. F., Schram P. P. J. M. Kinetic theory of Jeans instability // Phys. Rev. E 69, 2004. P. 066403 –066405.

Toomre A. On the gravitational stability of a disk of stars // J. Astroph. 1964. V.139. P. 1217-1238.

Tsiklauri D. Jeans Instability of Interstellar Gas Clouds in the Background of Weakly Interacting Massive Particles // J. Astroph. 1998. V. 507. № 1. P. 226-228.

Tsintsadze N. L., Chaudhary R., Shah H. A., Murtaza G. Jeans instability in a magneto- radiative dusty plasma // Journal of Plasma Physics. 2008. V. 74. № 6. P. 847-853.

Tsallis C. Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs-Statistics // J. Stat. Phys. 1988. V. 52. № 1/2. P. 479-487.

Tsallis C. Nonextensive Statistic: Theoretical, Experimental and Computational Evi-dences and Connections // Brazilian J. Phys. 1999. V. 29. № 1. P. 1-35.

Tsallis C. Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics. Approaching a Complex World. New York: Springer. 2009. 382 p.

Tsallis C., Sa Barreto F.C., Loh E.D. Generalization of the Planck radiation law and application to the cosmic microwave background radiation // Physical Rev. E. 1995. V. 52. № 2. P. 1448-1451.

Tsallis C., Mendes R.S., Plastino A.R. The role of containts within generalized nonextensive statistics // Physica A. 1998. V. 261. P. 534-554.

Toomre A. On the gravitational stability of a disk of stars // J. Astroph. 1964. V.139. P. 1217-1238.

Wang Q.A., Le Méhauté A. Nonextensive black-body distribution function and Einstein's coefficients *A* and *B* // Phys. Lett. A. 1998. V. 242 . P. 301-306.

Wang Q.A., Nivanen L., Le Méhauté A. Generalized blackbody distribution within the dilute gas approximation // Physica A. 1998. V. 260 P. 490-498.

Zaripov R. G. Elementary particle physics and field theory. Evolution of the difference information in the process of the fermi and bose gas self-organization for nonextensive systems // Russian Physics Journal. 2009. V. 52. №. 4. P. 329-336.

ОГЛАВЛЕНИЕ