



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**П.С. Аронов, М.П. Галанин,**  
**А.С. Родин**

Сравнение методов  
решения систем линейных  
уравнений, возникающих в  
задачах с изменяющейся  
конфигурацией контактной  
поверхности

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Аронов П.С., Галанин М.П., Родин А.С. Сравнение методов решения систем линейных уравнений, возникающих в задачах с изменяющейся конфигурацией контактной поверхности // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. № 39. 28 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2021-39>  
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-39>

Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
им. М.В. Келдыша  
Российской академии наук

П. С. Аронов, М. П. Галанин, А. С. Родин

Сравнение методов решения систем линейных  
уравнений, возникающих в задачах с изменяющейся  
конфигурацией контактной поверхности

Москва — 2021

**Аронов П. С., Галанин М. П., Родин А. С.**

Сравнение методов решения систем линейных уравнений, возникающих в задачах с изменяющейся конфигурацией контактной поверхности

Рассмотрены итерационные алгоритмы решения систем линейных алгебраических уравнений, возникающих при решении задач контактного взаимодействия термоупругих тел с изменяющейся конфигурацией контактной поверхности. Представлены реализации модифицированного метода симметричной последовательной верхней релаксации (MSSOR), модифицированного метода верхней релаксации (MSOR), модифицированного метода Якоби (MJOR), метода Узавы, а также алгоритмов, основанных на использовании метода Гаусса с двумя вариантами итерационного уточнения, позволяющих учитывать выход из контакта отдельных участков контактной границы. Представлены результаты применения алгоритмов в демонстрационной задаче, моделирующей термомеханические процессы в участке тепловыделяющего элемента, включающем в себя две таблетки и фрагмент оболочки.

**Ключевые слова:** контактная задача теории упругости, метод конечных элементов, mortar-метод, модифицированный метод верхней релаксации, метод Узавы, тепловыделяющий элемент.

**Aronov P. S., Galanin M. P., Rodin A. S.**

Comparison of methods for solving systems of linear equations occurring in tasks with a changing configuration of the contact surface

The article discusses iterative algorithms for solving systems of linear algebraic equations arising when solving problems of contact interaction of thermoelastic bodies with a changing configuration of the contact surface. The implementations of the modified symmetric successive upper relaxation method (MSSOR), modified successive upper relaxation method (MSOR), modified Jacobi method (MJOR) and Uzawa method as well as algorithms based on the Gauss method with two options for iterative refinement, allowing to consider the exit from the contact of the contact border sections, are presented. The results of the application of these algorithms to the demo problem that simulates thermomechanical processes in the section of the fuel element, which includes two tablets and a fragment of the shell, are presented.

**Key words:** contact problem of the elasticity theory, finite element method, mortar-method, modified method of over relaxation, Uzawa method, fuel element.

## 1. Введение

При моделировании напряженно-деформированного состояния различных контактирующих функциональных узлов оборудования зачастую заранее неизвестно, какие участки контактных поверхностей будут участвовать в контакте. Поэтому актуальной является проблема создания эффективных алгоритмов, позволяющих выполнить численное решение контактных задач с изменяющейся конфигурацией контактной поверхности. Численное решение подобных задач осуществляется с помощью различных алгоритмов, среди которых можно выделить метод декомпозиции области [1], метод штрафа [2], различные варианты метода множителей Лагранжа [3], в частности mortar-метод [4, 5], основанный на построении достаточно подробной вспомогательной сетки для определения множителей Лагранжа.

В работе приведена достаточно общая постановка мультиконтактной задачи и представлены алгоритмы численного решения подобных задач с учетом изменения конфигурации контактных поверхностей. Для обеспечения граничных условий на контактных поверхностях тел использован mortar-метод. Для решения возникающей в ходе дискретизации методом конечных элементов плохо обусловленной системы линейных уравнений использованы несколько алгоритмов: модифицированный метод симметричной последовательной верхней релаксации (MSSOR), модифицированный метод верхней релаксации (MSOR), модифицированный метод Якоби (MJOR), метод Узавы и два варианта метода Гаусса с итерационным уточнением. Предложенные алгоритмы применены к задаче, моделирующей некоторые процессы в тепловыделяющем элементе (твэле), который работает в режиме постоянной мощности тепловыделения.

## 2. Математическая постановка задачи

Рассмотрим в трехмерном пространстве  $\mathbb{R}^3$  следующую группу осесимметричных термоупругих контактирующих тел: внутри цилиндрической оболочки  $G_N$  расположен столб из нескольких поставленных друг на друга одинаковых цилиндрических таблеток  $G_1, \dots, G_{N-1}$ , имеющих внутреннее отверстие и фаски на обоих торцах (рис. 1). Данная задача моделирует термомеханические процессы, протекающих в твэле. Тела занимают область  $G = \bigcup_{\alpha} G_{\alpha}$  ( $\alpha$  — индекс, обозначающий номер тела), ограниченную кусочно-гладкой границей  $\partial G$  ( $\partial G_{\alpha}$  — граница тела  $\alpha$ ).

Введем следующие обозначения для различных поверхностей тел:  $S_1^{\alpha}$  — нижний торец тела с номером  $\alpha$ ,  $S_1 = S_1^1 \cup S_1^N$  — объединение нижнего торца нижней таблетки и нижнего торца оболочки,  $S_2^{\alpha}$  — внутренняя поверхность тела с номером  $\alpha$ ,  $S_2 = \bigcup_{\alpha=1}^{N-1} S_2^{\alpha}$  — объединение внутренних поверхностей таблеток,  $S_3^{\alpha}$  — верхний торец тела с номером  $\alpha$ ,  $S_4^{\alpha}$  — внешняя поверхность тела

с номером  $\alpha$ ,  $S_4 = \bigcup_{\alpha=1}^{N-1} S_4^\alpha$  — объединение внешних поверхностей таблеток (без фасок).

Предположим, что эффектом связанности можно пренебречь, поэтому задачу теплопроводности будем решать отдельно, а полученное температурное поле использовать при решении контактной задачи теории термоупругости.

Математическая формулировка квазистационарной контактной задачи теории упругости для случая, когда объемные силы отсутствуют, включает в себя следующие соотношения [6] для каждого тела  $\alpha$  (топливной таблетки и оболочки), участвующего в контакте,  $i, j = \overline{1, 3}$ :

- уравнения равновесия

$$\sigma_{ji,j}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in G_\alpha; \quad (1)$$

- кинематические граничные условия

$$u_z(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_1; \quad (2)$$

- силовые граничные условия

$$\sigma_{ji}(\mathbf{x}, t)n_j = g_i(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \partial G \setminus S_1; \quad (3)$$

- соотношения Коши

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} (u_{i,j}(\mathbf{x}, t) + u_{j,i}(\mathbf{x}, t)), \quad \mathbf{x} \in G_\alpha; \quad (4)$$

- определяющие уравнения (закон Гука)

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl}(\mathbf{x}, t) - \varepsilon_{kl}^0(\mathbf{x}, t)), \quad \mathbf{x} \in G_\alpha; \quad (5)$$

где  $x_i$  — координаты вектора  $\mathbf{x} \in G_\alpha$ ;  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений;  $\varepsilon_{kl}$  — компоненты тензора деформации;  $\varepsilon_{kl}^0$  — компоненты тензора неупругой деформации;  $u_i$  — компоненты вектора перемещения;  $C_{ijkl}$  — компоненты тензора упругих постоянных;  $g_i$  — компоненты вектора поверхностных сил;  $n_j$  — компоненты вектора внешней нормали к соответствующей поверхности  $S_j$ . В проведенных расчетах полагалось, что нижние торцы оболочки и нижней таблетки закреплены по вертикали,  $g_i$  отличны от нуля только на верхнем торце верхней таблетки  $S_3$  (постоянное давление 50 МПа) и на внешней поверхности оболочки  $S_6$  (постоянное давление 10 МПа). В модели учитывалось, что каждая таблетка (кроме  $G_1$  и  $G_{N-1}$ ) вступает в контакт с двумя соседними (сверху и снизу) таблетками и оболочкой (считается, что начального зазора между ними нет).

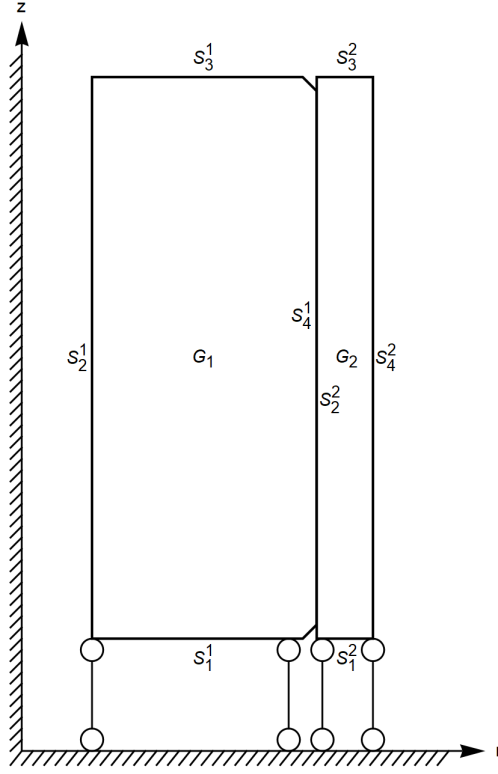


Рис. 1. Схема расчетной области для случая  $N = 2$

Рассмотрим пару потенциально контактных поверхностей, относящихся к телам с номерами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Для упрощения записи будем использовать индекс «1» вместо « $\alpha_1$ » и «2» вместо « $\alpha_2$ ». Тогда дополнительные условия на поверхности  $S_k^1$  для случая контакта без трения выглядят следующим образом (для поверхности  $S_k^2$  условия записываются аналогично):

$$\sigma_\tau^1(\mathbf{x}_1) = 0, \quad \mathbf{x}_1 \in S_k^1; \quad (6)$$

$$\sigma_n^1(\mathbf{x}_1) = \sigma_n^2(\mathbf{x}_2) \leq 0, \quad \mathbf{x}_1 \in S_k^1, \quad \mathbf{x}_2 \in S_k^2; \quad (7)$$

$$u_n^1(\mathbf{x}_1) + u_n^2(\mathbf{x}_2) \leq \delta_{0n}(\mathbf{x}_1), \quad \mathbf{x}_1 \in S_k^1, \quad \mathbf{x}_2 \in S_k^2; \quad (8)$$

$$\sigma_n^1(\mathbf{x}_1) (u_n^1(\mathbf{x}_1) + u_n^2(\mathbf{x}_2) - \delta_{0n}(\mathbf{x}_1)) = 0, \quad \mathbf{x}_1 \in S_k^1, \quad \mathbf{x}_2 \in S_k^2. \quad (9)$$

Здесь  $\mathbf{x}_1$  — некоторая точка, лежащая на поверхности  $S_k^1$ , а  $\mathbf{x}_2$  — сходственная точка, находящаяся напротив нее на поверхности  $S_k^2$ ,  $\delta_{0n}(\mathbf{x}_1) \geq 0$  — функция, задающая начальный зазор (участки поверхности в начальный момент могут не соприкасаться друг с другом),  $u_n^i = \mathbf{u}^i \cdot \mathbf{n}^i$ ,  $\sigma_\tau^i = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^i) \cdot \mathbf{n}^i \cdot \boldsymbol{\tau}^i$ ,  $\sigma_n^i = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^i) \cdot \mathbf{n}^i \cdot \mathbf{n}^i$ .

В качестве  $(S_{1k}, S_{2k})$  выступают  $N-2$  контактные пары таблетка/таблетка и  $N-1$  контактные пары таблетка/оболочка.

Условия (6)–(9) гарантируют, что на некотором участке  $S_k^{12}$  поверхности  $S_k^1$  и  $S_k^2$  будут совпадать (заранее конфигурация и положение этого участка неизвестны), при этом на контактирующие тела будут действовать сжимающие контактные силы. Условия (6)–(9) учитывают ситуации, когда в начальной

конфигурации какие-то участки не соприкасаются друг с другом, но в итоге они вступают в контакт, или наоборот: в начальной конфигурации участки соприкасаются друг с другом, но в итоге расходятся.

Решение задачи (1)–(9) эквивалентно [7] минимизации функционала

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_G \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dG - \int_{S'} \mathbf{u}^T \mathbf{g} dS + \int_{S_k} \lambda_n (u_{2n}(\mathbf{x}) + u_{1n}(\mathbf{x}) - \delta_{0n}) dS \quad (10)$$

при выполнении кинематических граничных условий (2), где  $\lambda_n$  — множители Лагранжа, являющиеся проекциями векторов напряжений на направления внешних нормалей,  $u_n = u_r n_r + u_z n_z$ .

### 3. Решение системы линейных уравнений, полученной после дискретизации задачи

Для пространственной дискретизации функционала (10) использован метод конечных элементов, в расчетах применены элементы второго порядка на четырехугольной сетке. Дискретизация интеграла по контактным поверхностям выполнена с помощью mortar-метода.

Mortar-метод решения контактных задач теории упругости основан на независимой конечно-элементной дискретизации непересекающихся подобластей  $s$ , вообще говоря, несогласованными на линии контакта сетками, при этом непрерывность решения достигается за счет использования множителей Лагранжа [8].

Минимизация функционала (10), включающего в себя интеграл по контактной поверхности, приводит к формированию следующей системы линейных алгебраических уравнений [9]:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad (11)$$

где

$$\mathbf{A} = \text{diag}(\mathbf{A}_{11}, \dots, \mathbf{A}_{NN}), \quad (12)$$

$$\mathbf{M} = (\mathbf{M}_1 \ \dots \ \mathbf{M}_N)^T, \quad (13)$$

$$\mathbf{M}_i = (\mathbf{M}_{i1} \ \dots \ \mathbf{M}_{iq}), \quad (14)$$

$$\mathbf{R} = (\mathbf{R}_1 \ \dots \ \mathbf{R}_N), \quad (15)$$

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1 \ \dots \ \mathbf{u}_N)^T, \quad (16)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_{q-1} \ \lambda_q)^T, \quad (17)$$

где  $N$  — количество тел,  $q$  — количество контактных пар,  $\mathbf{A}_{ii}$  — стандартные матрицы жесткости для  $i$  тела, которые имеют размерности  $n_i \times n_i$ , матрица  $\mathbf{M}_i$  имеет размерность  $n_i \times m$  ( $m$  — общее количество вводимых множителей Лагранжа).

Рассмотрим матрицу  $\mathbf{M}_i$ , соответствующую телу с номером  $i$ . Тогда матрица  $\mathbf{M}_{ij}$ , являющаяся блоком матрицы  $\mathbf{M}_i$  и отвечающая за  $j$ -ю контактную пару поверхностей, является нулевой ( $\mathbf{M}_{ij} = 0$ ), если  $i$ -е тело не входит в  $j$ -ю контактную поверхность, а если входит, то  $\mathbf{M}_{ij} \neq 0$ .

Блочная система уравнений (11) соответствует задаче с седловой точкой. В матрице есть нулевой блок на диагонали, поэтому для ее решения нельзя использовать большую часть классических итерационных методов решения систем линейных уравнений (методы Якоби, Гаусса — Зейделя, SOR, сопряженных градиентов). Для решения подобных систем используют либо прямые методы (варианты метода Гаусса), либо специальные итерационные методы. Ситуация осложняется тем, что полученная матрица является плохо обусловленной, поэтому для получения приемлемой скорости сходимости нужно использовать предобуславливатели. Поскольку конфигурация контактных поверхностей в системе тел может меняться, то численный алгоритм в любом случае (даже при использовании прямых методов) является итерационным.

Для учета интеграла по контактной поверхности в (10) можно поступать двумя способами:

- 1) Считать, что в интеграл всегда входят все узлы сетки, лежащие на рассматриваемых потенциально контактных поверхностях. В этом случае в тех узлах, которые по факту выходят из контакта при минимизации функционала, должны получиться маленькие значения множителей Лагранжа. В силу их малости допускается возникновение разрыва по нормальным перемещениям в противоположащих узлах, относящихся к соседним телам. Главным преимуществом подобного подхода является то, что все матричные блоки в (11) имеют постоянную размерность и их не нужно корректировать в ходе итерационного процесса. Главным недостатком является то, что при решении плохо обусловленной системы уравнений без внешней коррекции текущей конфигурации поверхностей значения множителей Лагранжа в узлах, которые должны выйти из контакта, могут получиться достаточно большими, поэтому фактического выхода из контакта не произойдет.
- 2) В конце каждой итерации корректировать список узлов, относящихся к контактным поверхностям (если узел выходит из контакта, то он больше не дает вклад в интеграл). Главным преимуществом подобного подхода является возможность строго контролировать выполнение граничных условий (6)–(9), а главным недостатком — тот факт, что размерность блоков  $\mathbf{M}_{ij}$  может меняться на каждой итерации, поэтому указанные



блоки и связанные с ними величины нужно будет каждый раз корректировать.

В работе для численного решения задачи использованы следующие итерационные методы [10]: модифицированный метод Якоби (MJOR), модифицированный метод последовательной верхней релаксации (MSOR), модифицированный метод симметричной последовательной верхней релаксации (MSSOR) и метод Узавы. Во всех этих методах на каждой итерации нужно решить два (для MSSOR — три) блока уравнений: первый блок состоит из систем уравнений, соответствующих каждому из рассматриваемых тел (в качестве искомых неизвестных выступают перемещения), второй блок — из систем уравнений, соответствующих каждой паре контактных поверхностей (в качестве искомых неизвестных выступают множители Лагранжа). Отметим, что каждая локальная система уравнений решается по отдельности с помощью метода сопряженных градиентов. В этих методах для учета интеграла по контактной поверхности применен первый способ. Также в работе использованы два итерационных процесса для двух способов учета интеграла по контактной поверхности, в которых на каждой итерации глобальная система уравнений решается с помощью метода Гаусса. Отметим, что применение первого варианта метода Гаусса позволяет один раз осуществить LU-разложение матрицы системы и затем использовать его на всех итерациях. При использовании второго варианта метода Гаусса матрица постоянно меняется, и LU-разложение требуется выполнять на каждой итерации.

### 1) Модифицированный метод Якоби (MJOR)

Система уравнений модифицированного метода Якоби [10], обобщенного на случай контакта нескольких тел, выглядит следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\tau} \mathbf{A}_{11} (\mathbf{u}_1^{k+1} - \mathbf{u}_1^k) + \mathbf{A}_{11} \mathbf{u}_1^k + \mathbf{M}_1 \boldsymbol{\lambda}^k = \mathbf{R}_1, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{1}{\tau} \mathbf{A}_{NN} (\mathbf{u}_N^{k+1} - \mathbf{u}_N^k) + \mathbf{A}_{NN} \mathbf{u}_N^k + \mathbf{M}_N \boldsymbol{\lambda}^k = \mathbf{R}_N, \\ -\frac{\alpha}{\tau} \mathbf{B}_1 (\boldsymbol{\lambda}_1^{k+1} - \boldsymbol{\lambda}_1^k) + \sum_{t=1}^N \mathbf{M}_{t1}^T \mathbf{u}_t^k = \mathbf{0}, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ -\frac{\alpha}{\tau} \mathbf{B}_q (\boldsymbol{\lambda}_q^{k+1} - \boldsymbol{\lambda}_q^k) + \sum_{t=1}^N \mathbf{M}_{tq}^T \mathbf{u}_t^k = \mathbf{0}, \end{array} \right. \quad (18)$$

### 2) Модифицированный метод верхней релаксации (MSOR)

Система уравнений модифицированного метода верхней релаксации [10], обобщенного на случай контакта нескольких тел, выглядит следующим образом:



множителей Лагранжа  $\lambda$  и затем вычислить векторы перемещений  $u_i$  из первых  $N$  уравнений системы (18)–(20). При этом MJOR и MSOR являются одноэтапными, а MSSOR — двухэтапным. Для случая двух тел с одной парой контактирующих поверхностей в качестве предобуславливателя используется матрица  $\mathbf{B} = \mathbf{M}_1^T \text{diag} \{ \mathbf{A}_{11}^{-1} \} \mathbf{M}_1$ . Для случая  $N$  тел и  $q$  пар контактирующих поверхностей предобуславливатель является блочно диагональной матрицей, блоки выбираются следующим образом:  $\mathbf{B}_i = \sum_{j=1}^N \mathbf{M}_{ji}^T \text{diag} \{ \mathbf{A}_{jj}^{-1} \} \mathbf{M}_{ji}$ .

#### 4) Метод Узавы

Решение системы (11) можно осуществлять и с помощью варианта метода Узавы [11], в котором на каждой итерации неизвестные значения вычисляются следующим образом:

$$\mathbf{u}_i^{k+1} = \mathbf{A}_i^{-1} (\mathbf{R}_i - \mathbf{M}_i \boldsymbol{\lambda}^k), \quad (21)$$

$$\boldsymbol{\lambda}^{k+1} = \boldsymbol{\lambda}^k + \omega \mathbf{B}^{-1} \mathbf{M}^T \mathbf{u}^{k+1}, \quad (22)$$

где  $\mathbf{B}$  — матрица-предобуславливатель,  $\omega$  — итерационный параметр. Для случая двух тел в качестве предобуславливателя используется матрица  $\mathbf{B} = \mathbf{M}_1^T \text{diag} \{ \mathbf{A}_{11}^{-1} \} \mathbf{M}_1$ .

Данный вариант метода Узавы совпадает с MSOR при следующем выборе итерационных параметров:  $\tau = 1$ ,  $\alpha = \frac{1}{\omega}$ .

#### 5) 1-й вариант метода Гаусса (с итерационным уточнением и обнулением множителей Лагранжа)

На каждой итерации решается следующая система уравнений (ее размерность остается постоянной):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R} - \mathbf{A} \mathbf{u}^k - \mathbf{M} \boldsymbol{\lambda}^k \\ -\mathbf{M}^T \boldsymbol{\lambda}^k \end{Bmatrix}, \quad (23)$$

где  $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k$ ,  $\Delta \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^{k+1} - \boldsymbol{\lambda}^k$ . В конце итерации осуществляется корректировка множителей Лагранжа: компоненты  $\boldsymbol{\lambda}^k$ , соответствующие узлам, в которых возникают растягивающие контактные напряжения, полагаются равными нулю.

#### 6) 2-й вариант метода Гаусса (с удалением строк)

Во втором варианте на каждой итерации решается следующая система уравнений (ее размерность может меняться):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{M}^k \\ \mathbf{M}^{kT} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{k+1} \\ \boldsymbol{\lambda}^{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \quad (24)$$

В конце итерации происходит формирование нового блока  $\mathbf{M}^{k+1}$  путем удаления из блока  $\mathbf{M}^k$  столбцов, соответствующих компонентам  $\boldsymbol{\lambda}^k$ , для которых возникают растягивающие контактные напряжения. Этот вариант является более вычислительно корректным, так как в интеграле (10) участвует только тот участок границы, для которого выполнены условия (6)–(9).

Методы 1)–4) работают только тогда, когда блок  $\mathbf{A}$  является симметричным и положительно определенным. При этом может возникнуть ситуация, когда отдельно рассматриваемое  $i$ -е тело не имеет закрепления в направлении одной из осей, поэтому задача становится некорректной и матрица  $\mathbf{A}_{ii}$  является вырожденной. Для исправления этой ситуации предположим, что систему тел можно пронумеровать таким образом, чтобы сначала решить уравнения для тел, которые имеют нужное количество закреплений (для них матрицы не вырождены), а потом последовательно решать задачи для тел, которые контактируют с предыдущими телами, для которых перемещения на текущей итерации уже получены. Используя эти перемещения, можно поставить дополнительные условия 1-го рода на контактных границах данных тел, в результате соответствующие матрицы становятся невырожденными, для них при необходимости можно провести процедуру, приводящую их к симметричному виду. Закрепление можно осуществлять либо в одном узле, либо в одном элементе (второй вариант дает меньшее количество итераций, для него далее приведены графики). Пусть тело с номером  $i_2$  контактирует с телом с номером  $i_1$  ( $i_2 > i_1$ ), для  $i_1$  на текущей итерации  $k + 1$  (для MSSOR — также и  $k + \frac{1}{2}$ ) значение  $\mathbf{u}_{i_1}^{k+1}$  (для MSSOR — также и  $\mathbf{u}_{i_1}^{k+\frac{1}{2}}$ ) уже известно. Тогда для выбранного подмножества узлов  $p_1, \dots, p_s$ , относящихся к рассматриваемой контактной поверхности тела  $i_2$ , считается, что нормальные перемещения совпадают с нормальными перемещениями в сходственных точках, расположенных на контактной поверхности тела  $i_1$ .

$$u_{r,p1}^{k+1} n_r + u_{z,p1}^{k+1} n_z = \bar{u}_{n,p1}^{k+1}. \quad (25)$$

Если для тела  $i_2$  не хватает закрепления относительно оси  $z$ , то считаем, что (при  $n_z \neq 0$ )

$$u_{z,p1}^{k+1} = \frac{1}{n_z} (\bar{u}_{n,p1}^{k+1} - u_{r,p1}^k n_r). \quad (26)$$

Таким образом, строка в матрице  $A_{i_2 i_2}$ , соответствующая данному перемещению, становится строкой единичной матрицы. Соответствующий столбец матрицы  $A_{i_2 i_2}$  тоже приводится к виду столбца единичной матрицы путем переноса всех слагаемых, относящихся к  $u_{z,p1}^{k+1}$ , в правую часть (поскольку

это перемещение известно). В итоге блок  $A_{i_2i_2}$  становится симметричным и положительно определенным, как и вся матрица  $A$ .

## 4. Результаты численного моделирования

В [12] представлены результаты, соответствующие задачам, в которых количество таблеток менялось от 2 до 100. В рамках данной работы ограничимся случаем 2 таблеток.

Для сравнения предложенных методов рассмотрим три задачи: в первой осуществляется контакт между двумя таблетками без оболочки, при этом температурное поле отсутствует; во второй задаче между собой контактируют две таблетки с приложенным температурным полем; в третьей моделируется контакт двух таблеток и оболочки с приложенным температурным полем. Точность полученного итерационного решения оценивалась двумя способами: сравнением перемещений на двух соседних итерациях по формуле (27) и отношением текущей невязки решения к начальной невязке  $\frac{\|r\|}{\|r_0\|}$ . При этом относительная точность вычислялась следующим образом:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum_i S_i \frac{(\hat{u}_{r_i} - u_{r_i})^2 - (\hat{u}_{z_i} - u_{z_i})^2}{u_{r_i}^2 + u_{z_i}^2}}{\sum_i S_i}}. \quad (27)$$

### 4.1. Задача № 1

На рис. 2(а)–3(б) показаны графики зависимостей относительной точности от числа итераций для MSSOR, MSOR, MJOR при разных значениях итерационных параметров. При оптимальном (из рассмотренных вариантов) выборе параметров для MSSOR сходимость достигается за 22 итерации, для MSOR — за 26 итераций, для MJOR — за 32 итерации, а для метода Узавы — за 267 итераций (относительная точность  $\varepsilon = 10^{-5}$ ). Итерационные параметры заданы следующим образом: для MSSOR, MSOR, MJOR  $\tau = 0, 2$ , для MSSOR  $\alpha = 1, 5$ , для MSOR и MJOR  $\alpha = 1, 3$ , для метода Узавы  $\omega = 4 \cdot 10^{-7}$ . Итоговое отношение невязок для MSSOR —  $2,41563 \cdot 10^{-6}$ , для MSOR —  $1,97911 \cdot 10^{-6}$ , для MJOR —  $3,18642 \cdot 10^{-6}$ , для метода Узавы —  $5,16354 \cdot 10^{-6}$ . В данной задаче конфигурация контактной поверхности не меняется (выхода из контакта не происходит), поэтому для обоих вариантов метода Гаусса результаты совпадают, итоговое отношение невязок —  $1,84449 \cdot 10^{-6}$ .

Проведено исследование влияния предобуславливателя на сходимость методов. Во всех методах при использовании единичного предобуславливателя сходимость не достигается. При использовании в качестве предобуславливателя матрицы  $B = M_1^T M_1$  сходимость никак не зависит от параметра  $\alpha$ , но

зависит от параметра  $\tau$ , при этом количество итераций существенно возрастает. Например, для достижения относительной точности  $\varepsilon = 10^{-5}$  в методе MSSOR при  $\tau = 0,5$  требуется 543 итерации.

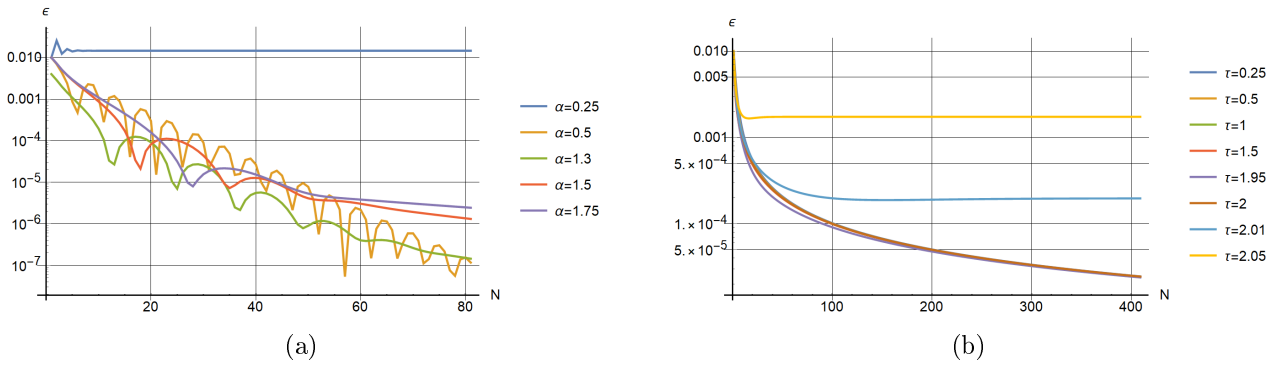


Рис. 2. Зависимости относительной точности от числа итераций для MSSOR: а) — предобуславливатель  $\mathbf{B} = \mathbf{M}_1^T \text{diag}\{\mathbf{A}_{11}^{-1}\}\mathbf{M}_1$ ,  $\tau = 0, 2$ , б) — MSSOR, предобуславливатель  $\mathbf{B} = \mathbf{M}_1^T \mathbf{M}_1$

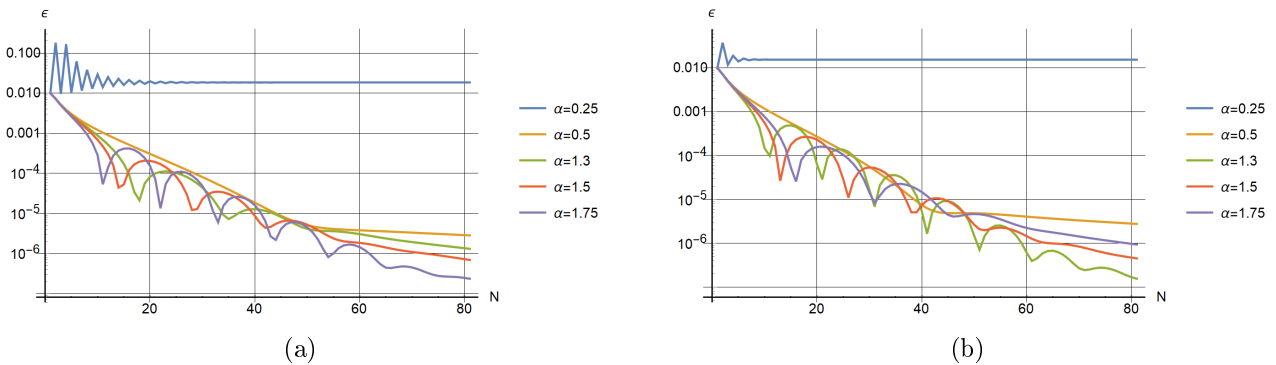


Рис. 3. Зависимости относительной точности от числа итераций для а) — MSOR, б) — MJOR, предобуславливатель (для а) и б))  $\mathbf{B} = \mathbf{M}_1^T \text{diag}\{\mathbf{A}_{11}^{-1}\}\mathbf{M}_1$ ,  $\tau = 0, 2$

На рис. 4(a)–5(b) представлены графики перемещений и напряжений на двух контактных границах, относящихся к 1-й и 2-й таблеткам, для первой задачи. Из рисунков видно, что кинематические граничные условия выполнены с приемлемой точностью (максимальное относительное расхождение для перемещений в противоположащих узлах поверхностей, вычисленное в  $C$ -норме, составляет 0,001645), графики осевых напряжений визуально неотличимы (кроме участка на левом краю поверхностей). Напряжения везде являются сжимающими, поэтому при отсутствии температурного поля выхода из контакта не происходит. На 4(a)–5(b) показаны результаты, полученные с помощью MSSOR и метода Гаусса. Остальные методы также демонстрируют близкие результаты. Методы MSSOR, MSOR, MJOR в процессе сходимости качественно ведут себя похожим образом, поэтому в дальнейшем будем приводить графики только для MSSOR.

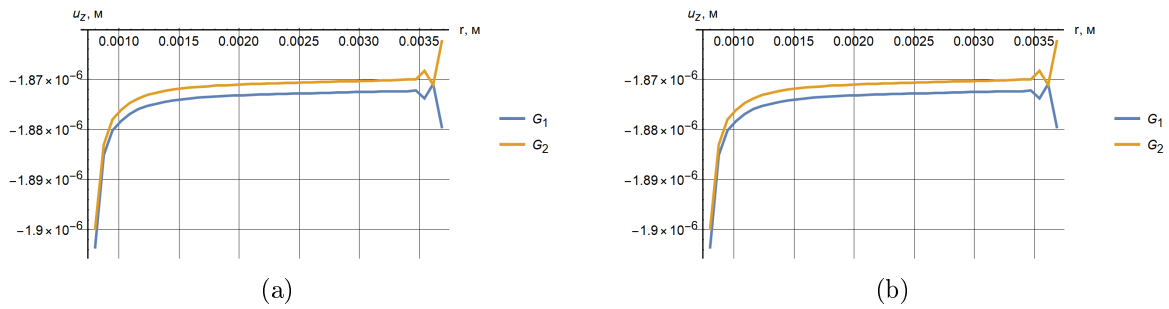


Рис. 4. Зависимости осевого перемещения  $u_z(r)$  в узлах элементов для задачи № 1, а) MSSOR, б) метод Гаусса

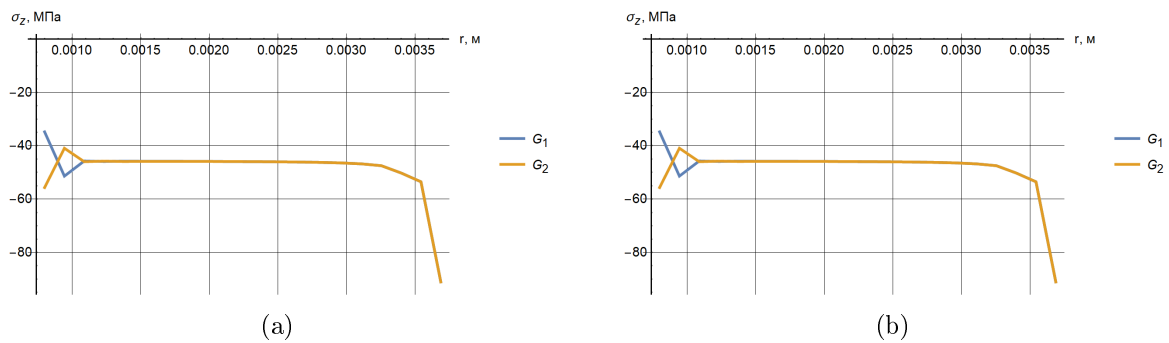


Рис. 5. Зависимости осевого напряжения  $\sigma_z(r)$  в узлах элементов для задачи № 1, а) MSSOR, б) метод Гаусса

## 4.2. Задача № 2

На рис. 6–13 показаны графики перемещений и напряжений на границе между таблетками для второй задачи, соответствующие итерациям решения системы линейных уравнений разными методами. Из рисунков видно, что при использовании MSSOR и метода Узавы осцилляции значений перемещений и напряжений, возникающие с первых итераций, постепенно уменьшаются, а при использовании различных вариантов метода Гаусса постепенно меняются распределения перемещений и напряжений, при этом осцилляций практически не возникает. На первых итерациях алгоритмов на основе метода Гаусса в контакте находятся все узлы границы между таблетками, впоследствии конфигурация контактной поверхности меняется. После проведения примерно одинакового количества итераций распределения перемещений и напряжений, полученные разными методами, оказываются достаточно близки. Для MSSOR уже на 3-й итерации из контакта выходит значительная часть поверхностных узлов, а к 7-й итерации устанавливается итоговая конфигурация контактных поверхностей. Для MSSOR сходимость достигается за 31 итерацию, для MSOR — за 43 итерации, для MJOR — за 39 итераций, для метода Узавы — за 285 итераций, для варианта метода Гаусса с обнулением множителей Лагранжа — за 26 итераций, для варианта метода Гаусса с удалением строк — за 8 итераций (относительная точность  $\varepsilon = 10^{-5}$ ).

Итерационные параметры заданы следующим образом: для MSSOR, MSOR, MJOR  $\tau = 0,2$ , для MSSOR  $\alpha = 1,25$ , для MSOR и MJOR  $\alpha = 1,3$ , для метода Узавы  $\omega = 4 \cdot 10^{-7}$ . Итоговое отношение невязок для MSSOR —  $8,1984 \cdot 10^{-6}$ , для MSOR —  $7,6873 \cdot 10^{-6}$ , для MJOR —  $7,5376 \cdot 10^{-5}$  для метода Узавы —  $5,8191 \cdot 10^{-5}$ , для варианта метода Гаусса с обнулением множителей Лагранжа —  $7,4568 \cdot 10^{-5}$ , для варианта метода Гаусса с удалением строк —  $4,6152 \cdot 10^{-5}$ . При использовании единичного предобуславливателя сходимость не достигается.

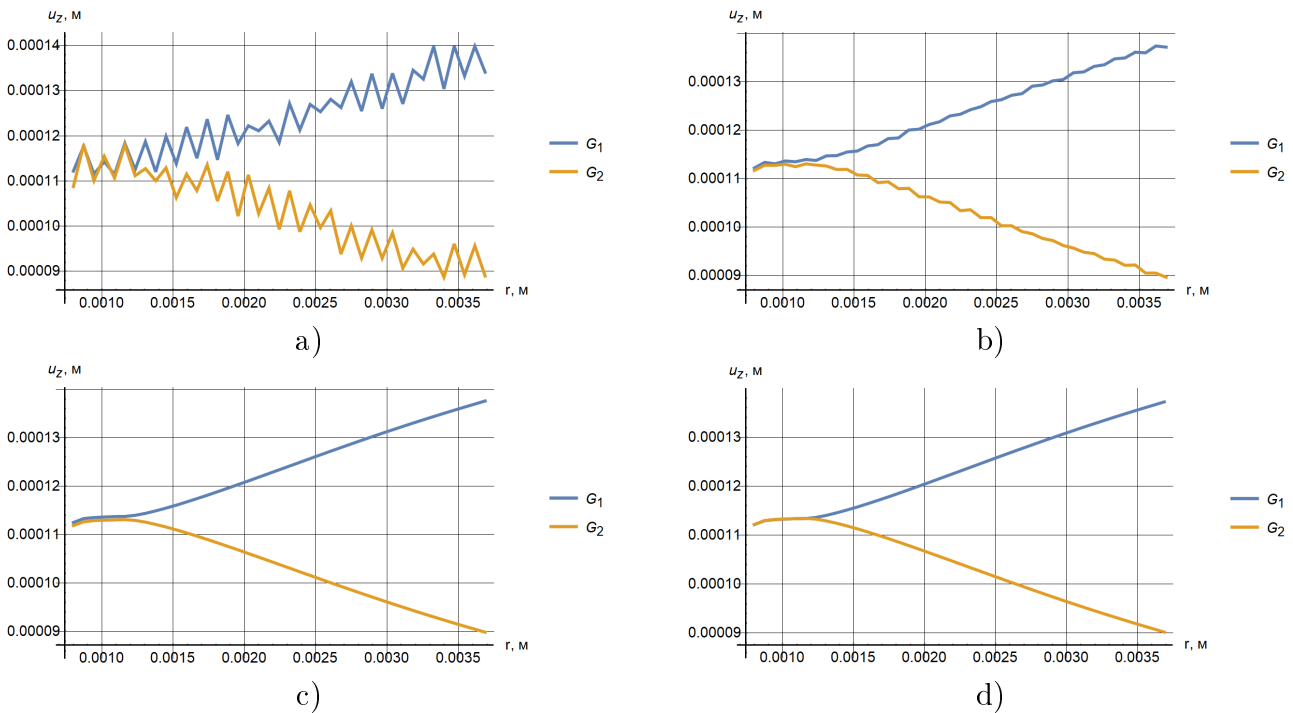


Рис. 6. Зависимости осевого перемещения  $u_z(r)$  в узлах элементов для задачи № 2, MSSOR: а) 3-я итерация, б) 9-я итерация, в) 18-я итерация, г) 31-я итерация

На рис. 14(a)–14(b) показаны графики зависимости невязки решения системы линейных уравнений от числа итераций и графики зависимости относительной точности от количества итераций для MSSOR, MSOR, MJOR и двух вариантов метода Гаусса. Из приведенных графиков видно, что MSSOR сходится несколько быстрее, чем метод Гаусса с обнулением множителей Лагранжа, тогда как при использовании метода Гаусса с удалением строк искомая конфигурация контактных поверхностей устанавливается после 8 итераций.



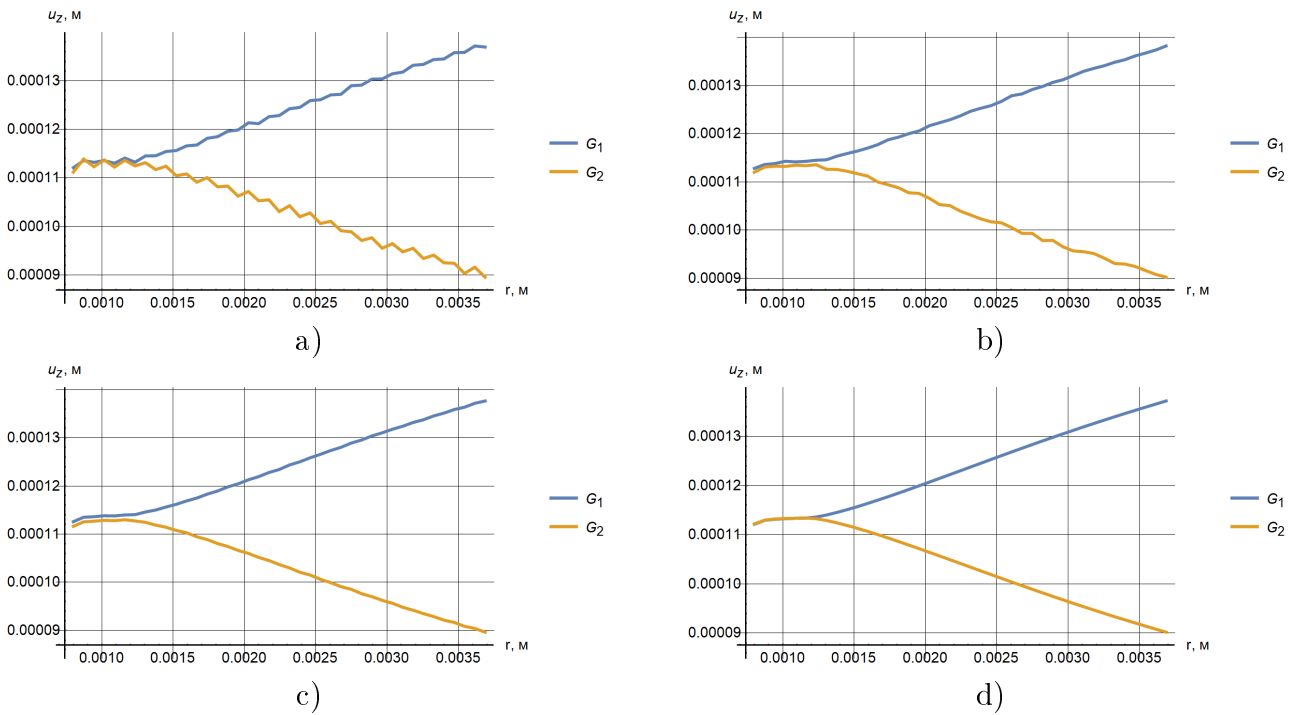


Рис. 7. Зависимости осевого перемещения  $u_z(r)$  в узлах элементов для задачи № 2, метод Узавы: а) 25-я итерация, б) 100-я итерация, с) 200-я итерация, д) 285-я итерация

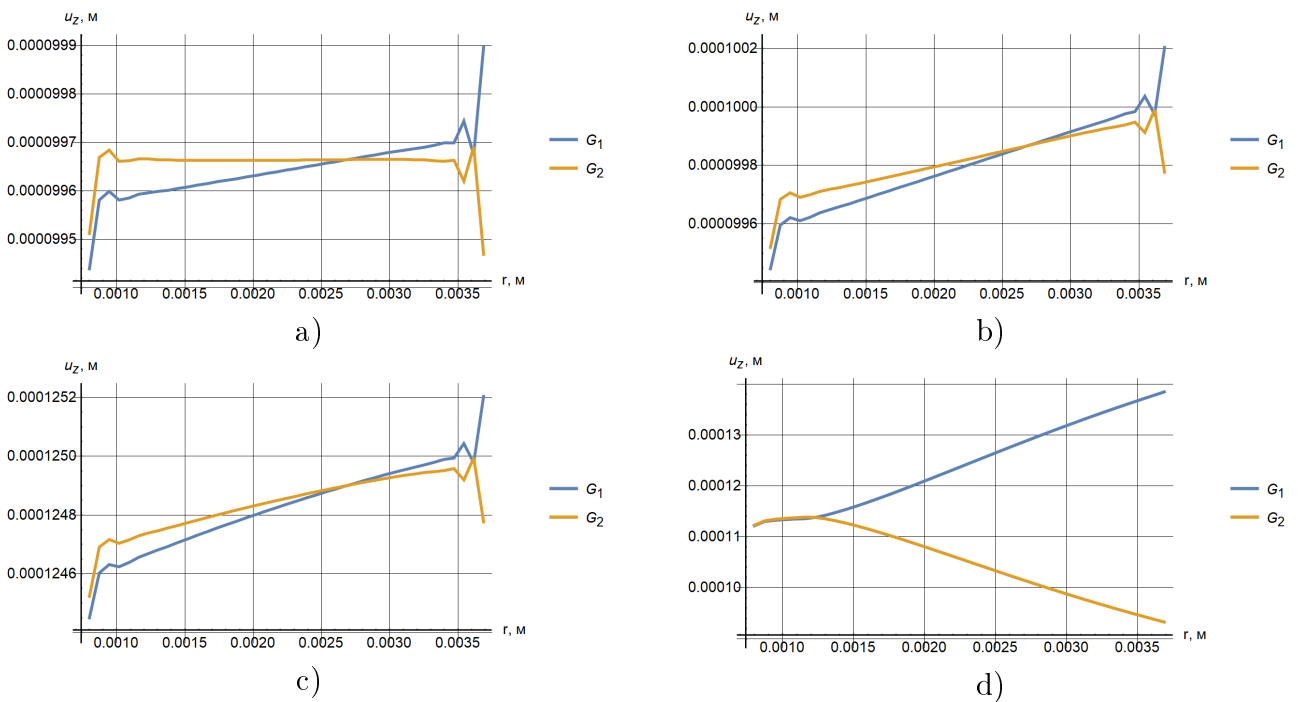


Рис. 8. Зависимости осевого перемещения  $u_z(r)$  в узлах элементов для задачи № 2, метод Гаусса с обнулением множителей Лагранжа: а) 1-я итерация, б) 8-я итерация, с) 16-я итерация, д) 26-я итерация

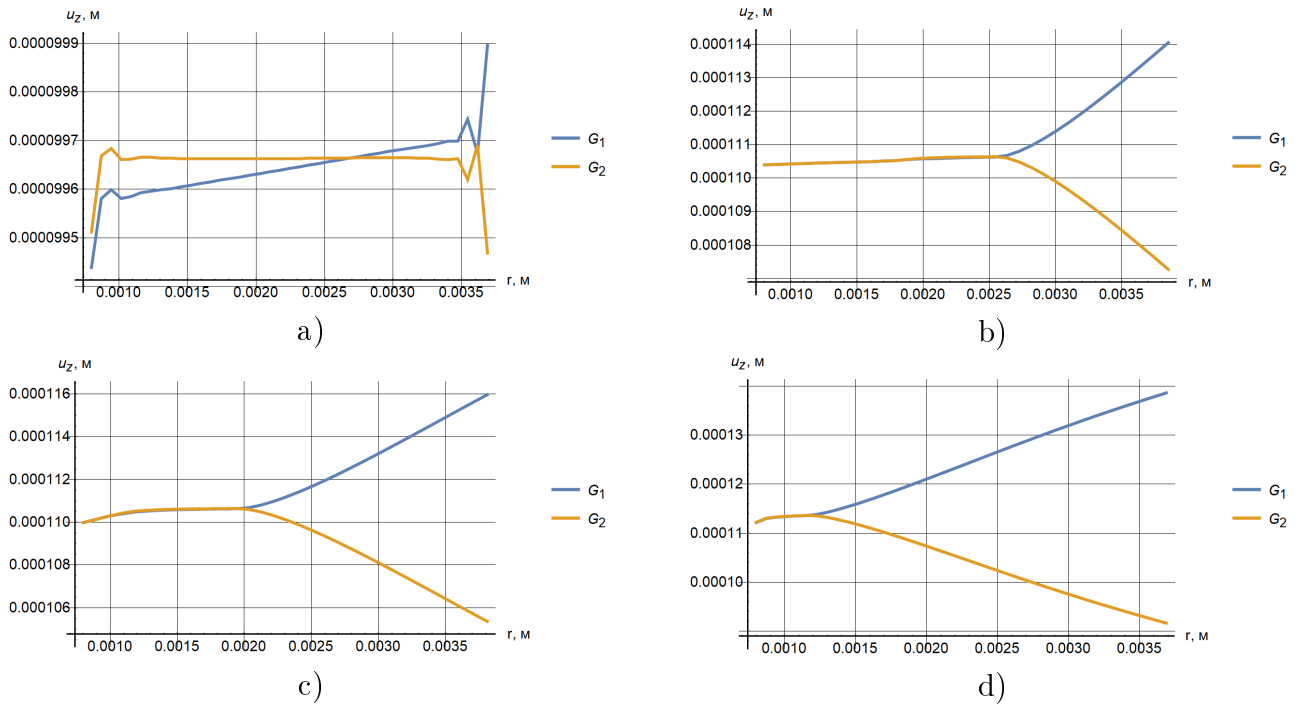


Рис. 9. Зависимости осевого перемещения  $u_z(r)$  в узлах элементов для задачи № 2, метод Гаусса с удалением строк: а) 1-я итерация, б) 2-я итерация, с) 6-я итерация, д) 8-я итерация

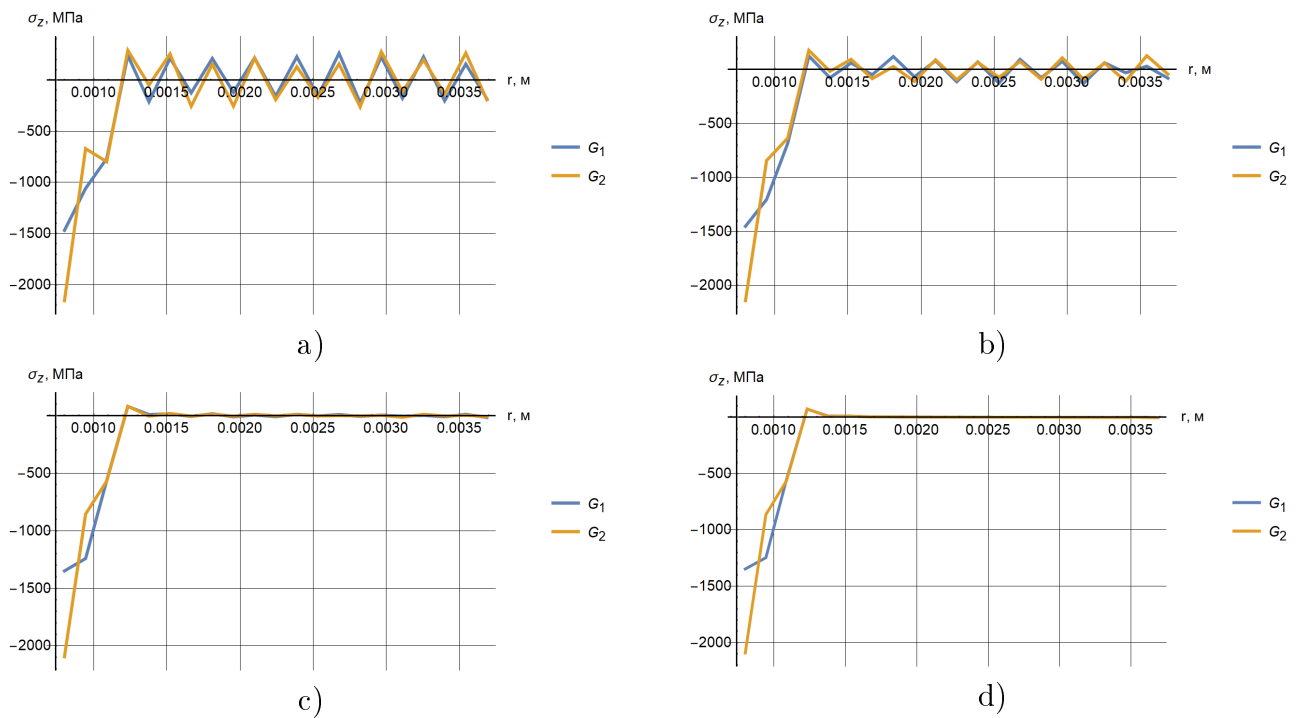


Рис. 10. Зависимости осевого напряжения  $\sigma_z(r)$  в узлах элементов для задачи № 2, MSSOR: а) 3-я итерация, б) 9-я итерация, с) 18-я итерация, д) 31-я итерация

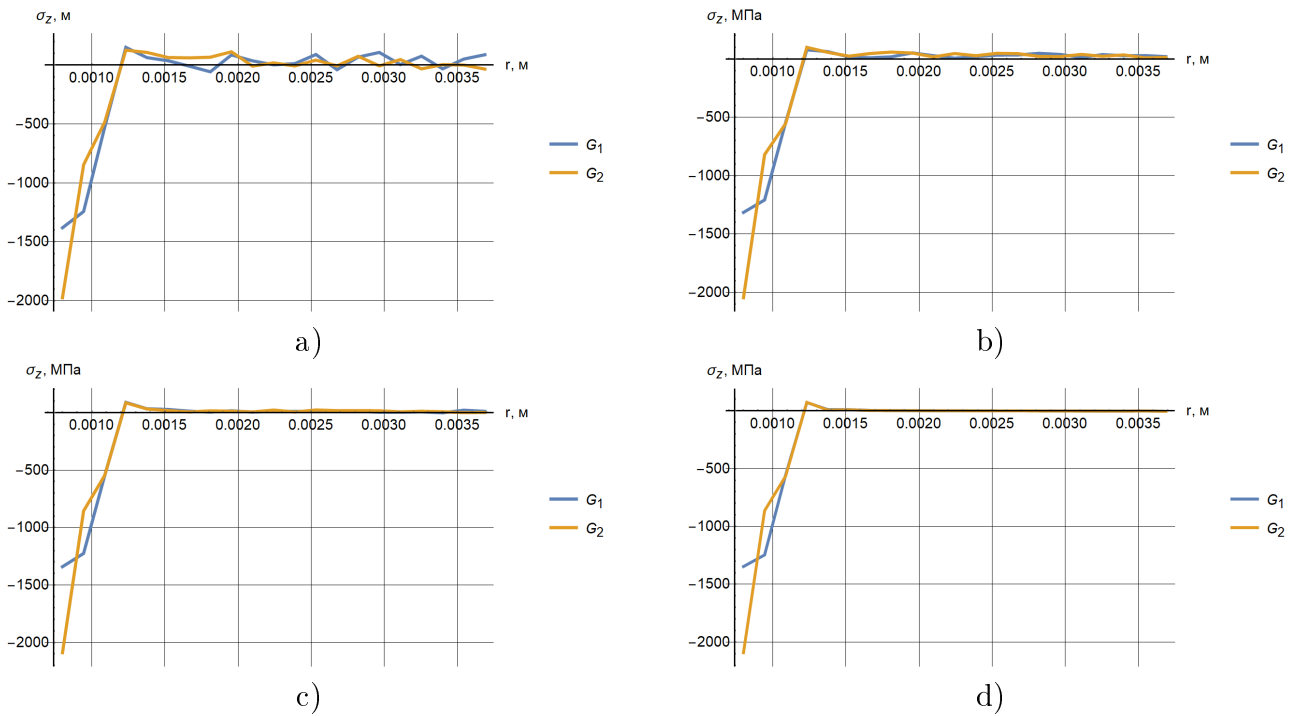


Рис. 11. Зависимости осевого напряжения  $\sigma_z(r)$  в узлах элементов для задачи № 2, метод Узавы: а) 25-я итерация, б) 100-я итерация, в) 200-я итерация, г) 285-я итерация

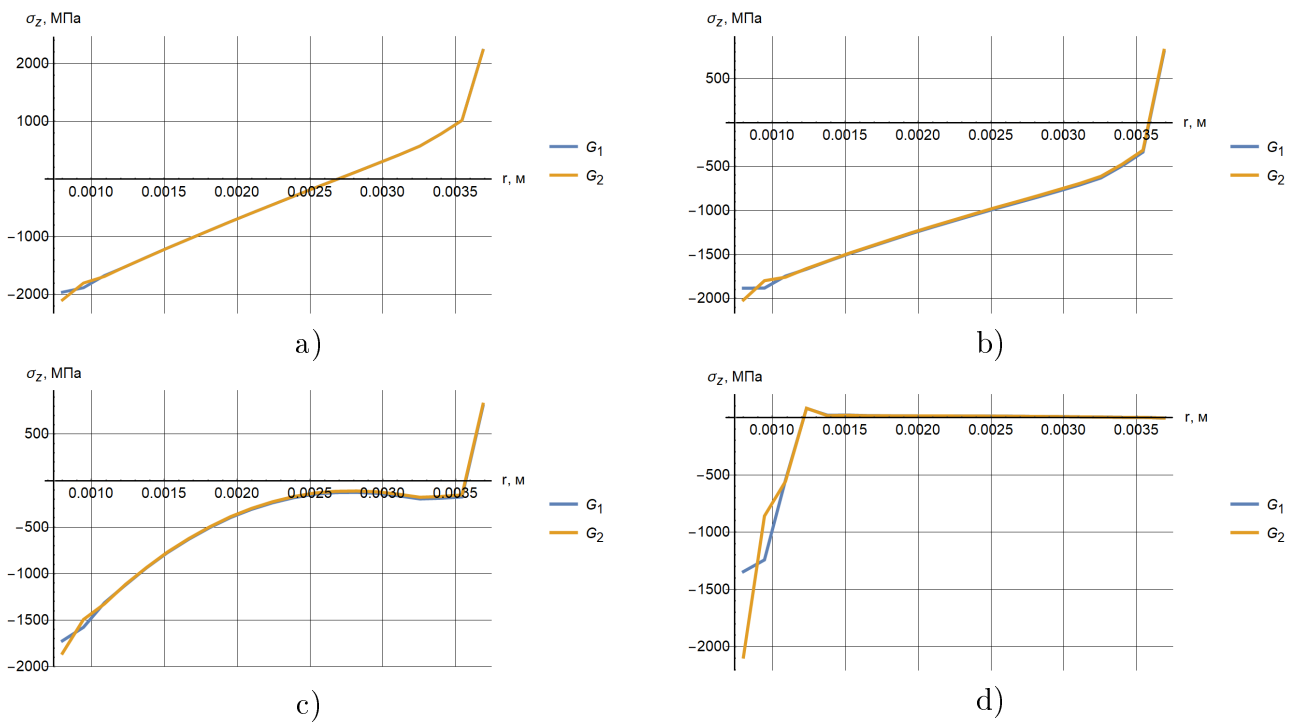


Рис. 12. Зависимости осевого напряжения  $\sigma_z(r)$  в узлах элементов для задачи № 2, метод Гаусса с обнулением множителей Лагранжа: а) 1-я итерация, б) 8-я итерация, в) 16-я итерация, г) 26-я итерация

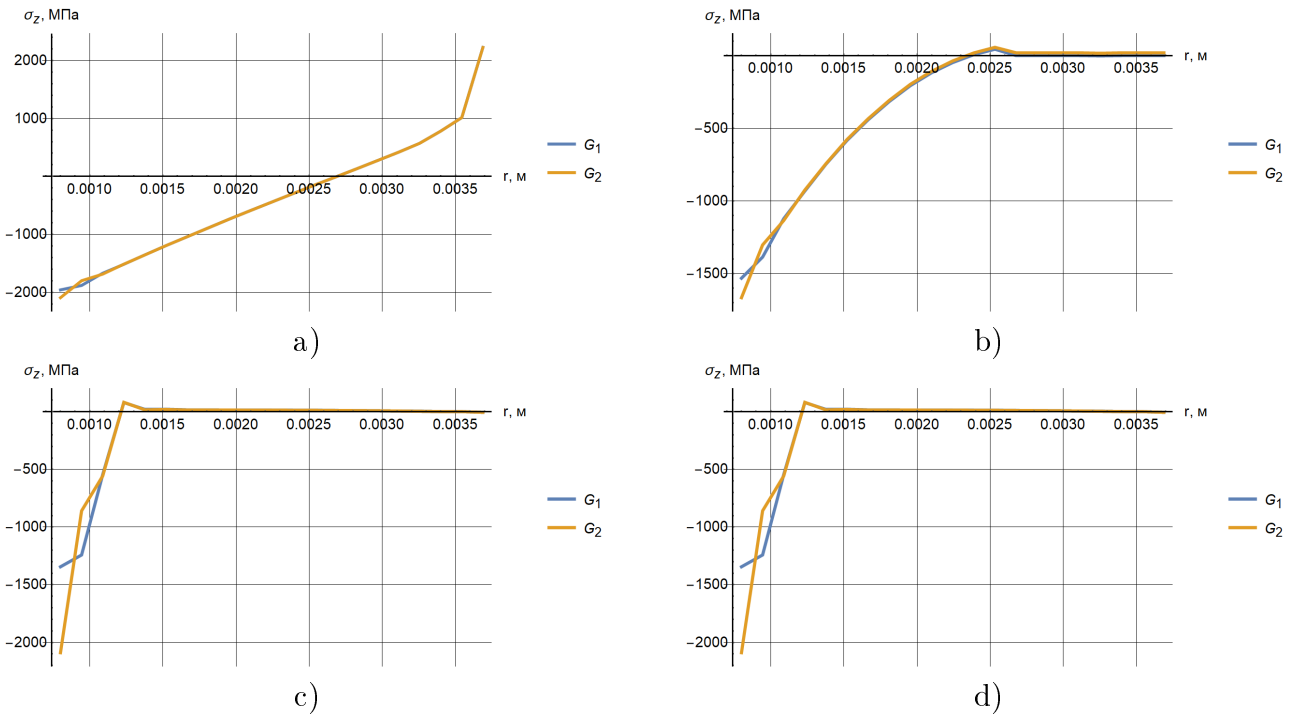


Рис. 13. Зависимости осевого напряжения  $\sigma_z(r)$  в узлах элементов для задачи № 2, метод Гаусса с удалением строк: а) 1-я итерация, б) 2-я итерация, с) 6-я итерация, д) 8-я итерация

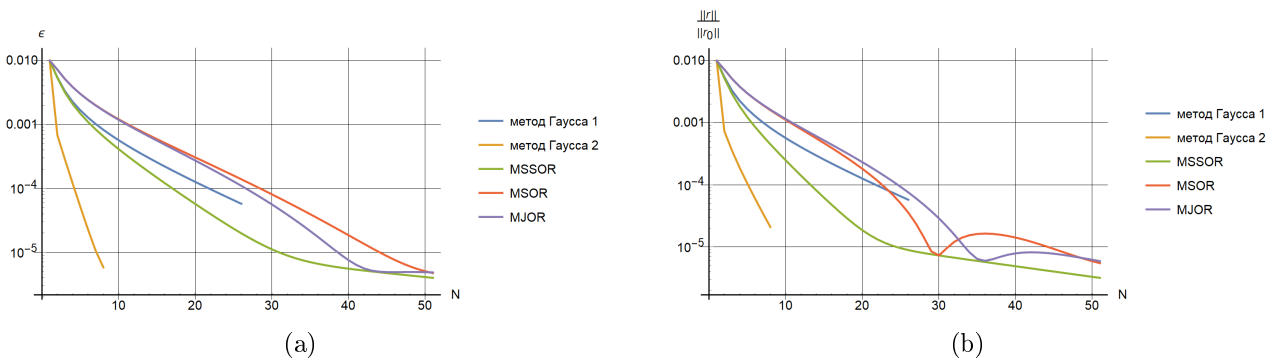


Рис. 14. а) — Зависимости относительной точности от числа итераций для MSSOR,  $\tau = 0,2$  и метода Гаусса, задача № 2, б) — Зависимости отношения невязок от числа итераций для MSSOR,  $\tau = 0,2$  и метода Гаусса, задача № 2

### 4.3. Задача № 3

В данной задаче моделируется контактное взаимодействие двух таблеток друг с другом и с оболочкой с учетом приложенного температурного поля. На рис. 15–22 показаны графики перемещений и напряжений на границе между таблетками, а также между таблетками и оболочкой, соответствующие итерациям решения системы линейных уравнений разными методами. Из рисунков видно, что при использовании модифицированного метода симметричной последовательной верхней релаксации осцилляции значений перемещений и напряжений, возникающие с первых итераций, постепенно уменьшаются, а при использовании различных вариантов метода Гаусса постепенно меняются распределения перемещений и напряжений, при этом осцилляций практически не возникает. Также стоит отметить, что для задачи с оболочкой значения перемещений, полученные с помощью MSSOR, отличаются от значений, полученных с помощью метода Гаусса (без итерационного уточнения), примерно на 30%. Для MSSOR сходимость достигается за 32 итерации, для MSOR — за 48 итераций, для MJOR — за 40 итераций, для метода Узавы — за 285 итераций, для варианта метода Гаусса с обнулением множителей Лагранжа — за 27 итераций, для варианта метода Гаусса с удалением строк — за 12 итераций (относительная точность  $\varepsilon = 10^{-5}$ ). Итерационные параметры заданы следующим образом: для MSSOR, MSOR, MJOR  $\tau = 0, 2$ ,  $\alpha = 1, 3$ , для метода Узавы  $\omega = 4 \cdot 10^{-7}$ . Итоговое отношение невязок для MSSOR —  $6, 1543 \cdot 10^{-5}$ , для MSOR —  $6, 3552 \cdot 10^{-5}$ , для MJOR —  $5, 2689 \cdot 10^{-5}$  для метода Узавы —  $5, 8191 \cdot 10^{-5}$ , для варианта метода Гаусса с обнулением множителей Лагранжа —  $3, 1291 \cdot 10^{-6}$ , для варианта метода Гаусса с удалением строк —  $6, 4973 \cdot 10^{-5}$ . Стоит отметить, что при использовании в качестве предобуславливателя единичной матрицы сходимость методов MSSOR, MSOR, MJOR и метода Узавы отсутствует при любом использованном выборе итерационных параметров.

Основным преимуществом методов MJOR, MSOR и MSSOR по сравнению с итерационными процессами, организованными на основе метода Гаусса, является то, что количество итераций сопоставимо, но при этом решается несколько систем линейных уравнений размерности  $n_i$  (для перемещений в  $i$ -м теле) и  $m_j$  (для множителей Лагранжа в  $j$ -й контактной паре) методом сопряженных градиентов с характерным числом операций  $O(n_i^{3/2})$ , а при использовании метода Гаусса на каждой итерации решается полная система уравнений размерности  $n = \sum_i n_i + \sum_j m_j$  с характерным числом операций  $O(n^3)$ .

В проведенных расчетах  $n_1 = 810$ ,  $n_2 = 810$ ,  $n_3 = 702$ ,  $m_1 = 21$ ,  $m_2 = 21$ ,  $m_3 = 21$ . Общее время расчета для MSSOR составило 14,8 с, для MSOR — 11,2 с, для MJOR — 9,5 с, для метода Узавы — 31,4 с, для варианта метода Гаусса с обнулением множителей Лагранжа — 89,5 с, для варианта метода Гаусса с удалением строк — 54,7 с.

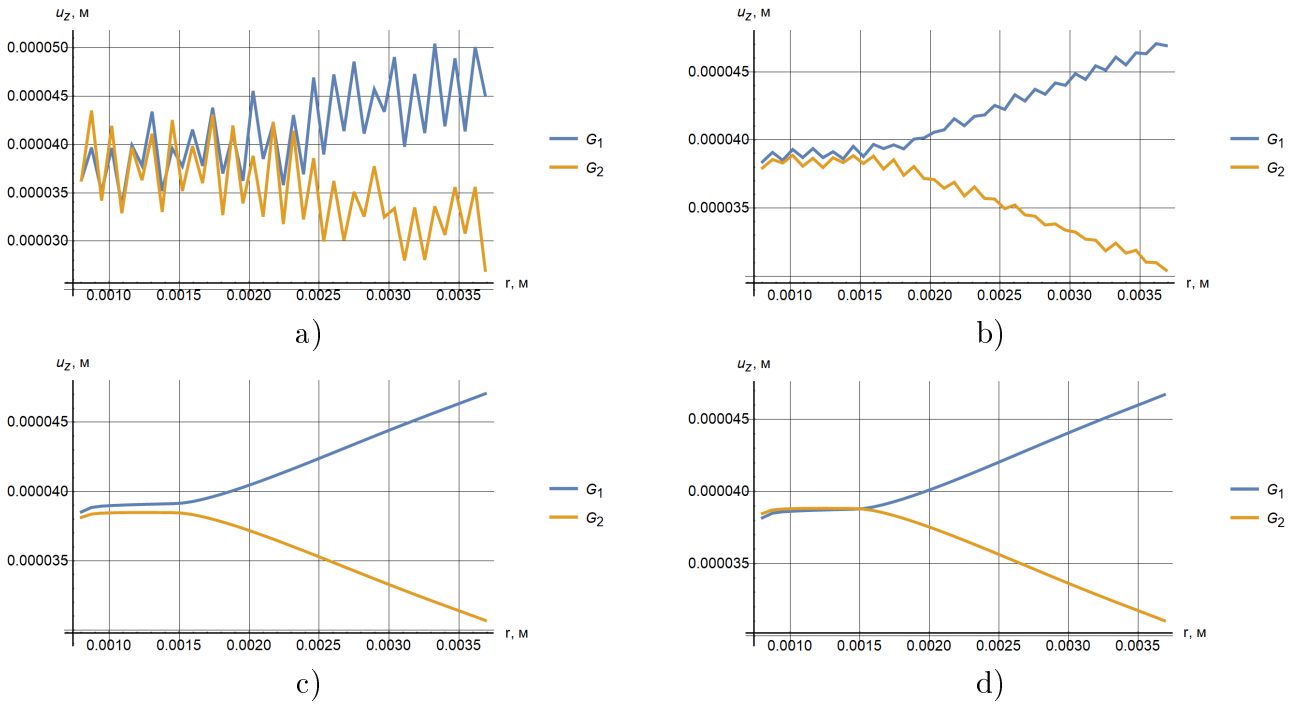


Рис. 15. Зависимости осевого перемещения  $u_z(r)$  в узлах элементов на границе между таблетками для задачи № 3, MSSOR: а) 4-я итерация, б) 10-я итерация, в) 20-я итерация, д) 32-я итерация

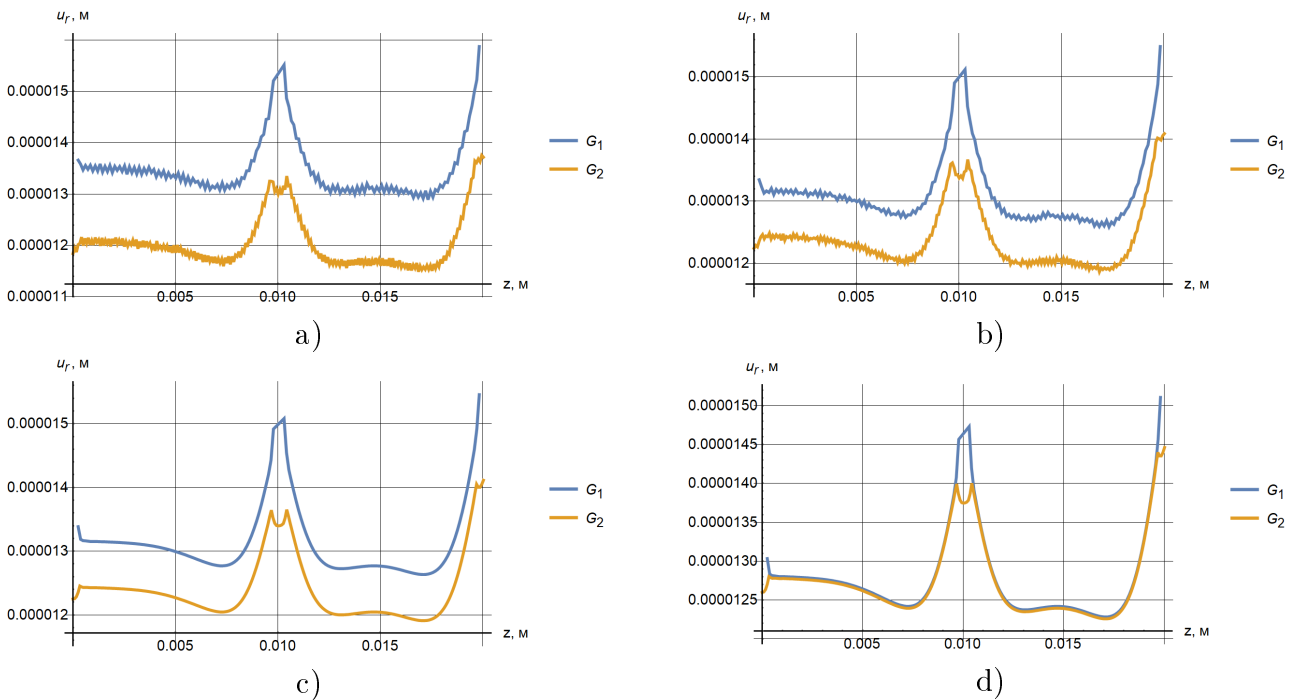


Рис. 16. Зависимости радиального перемещения  $u_r(r)$  в узлах элементов на границе между таблетками и оболочкой для задачи № 3, MSSOR: а) 4-я итерация, б) 10-я итерация, в) 20-я итерация, д) 32-я итерация

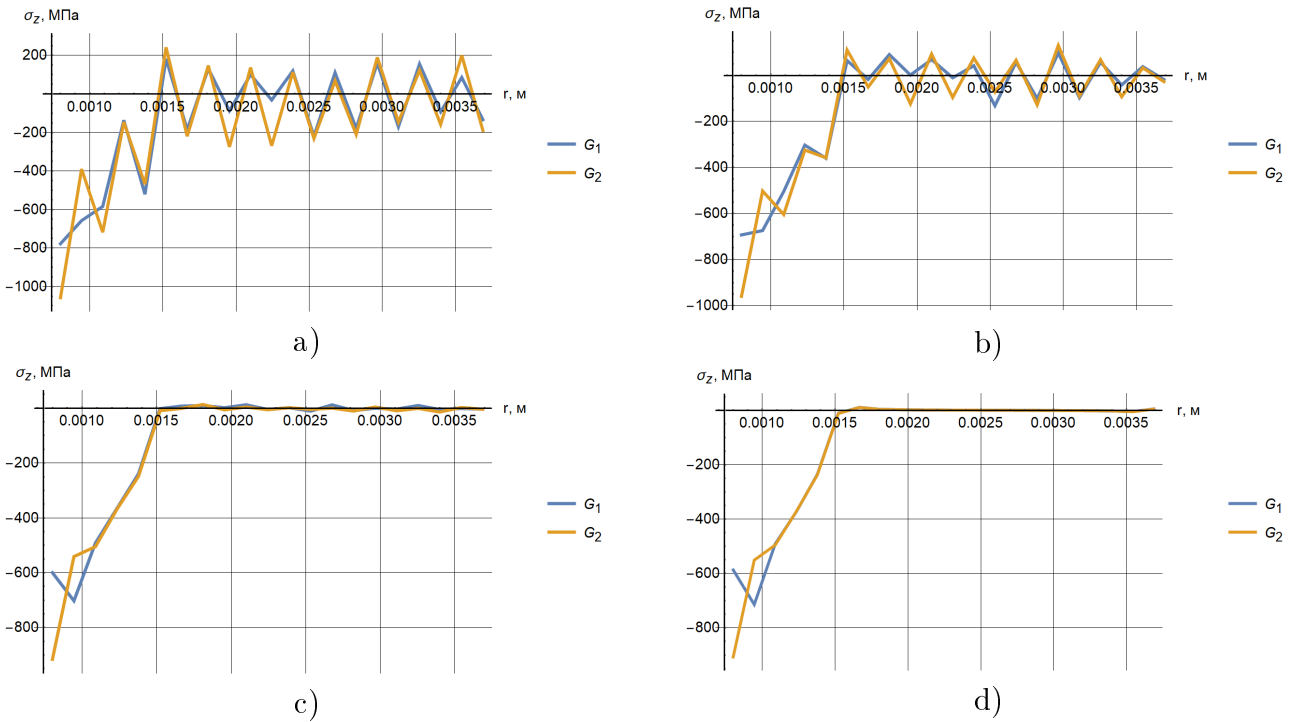


Рис. 17. Зависимости осевого напряжения  $\sigma_z(r)$  в узлах элементов на границе между таблетками для задачи № 3, MSSOR: а) 4-я итерация, б) 10-я итерация, в) 20-я итерация, г) 32-я итерация

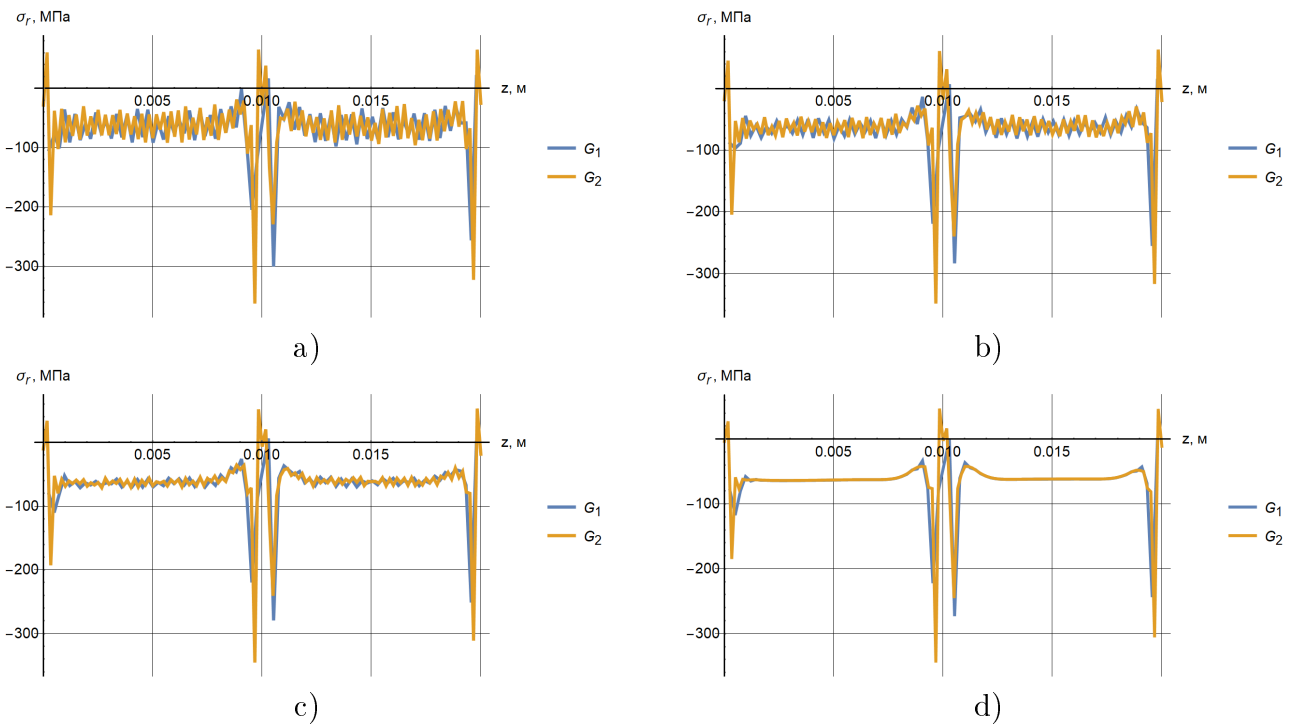


Рис. 18. Зависимости радиального напряжения  $\sigma_r(r)$  в узлах элементов на границе между таблетками и оболочкой для задачи № 3, MSSOR: а) 4-я итерация, б) 10-я итерация, в) 20-я итерация, г) 32-я итерация

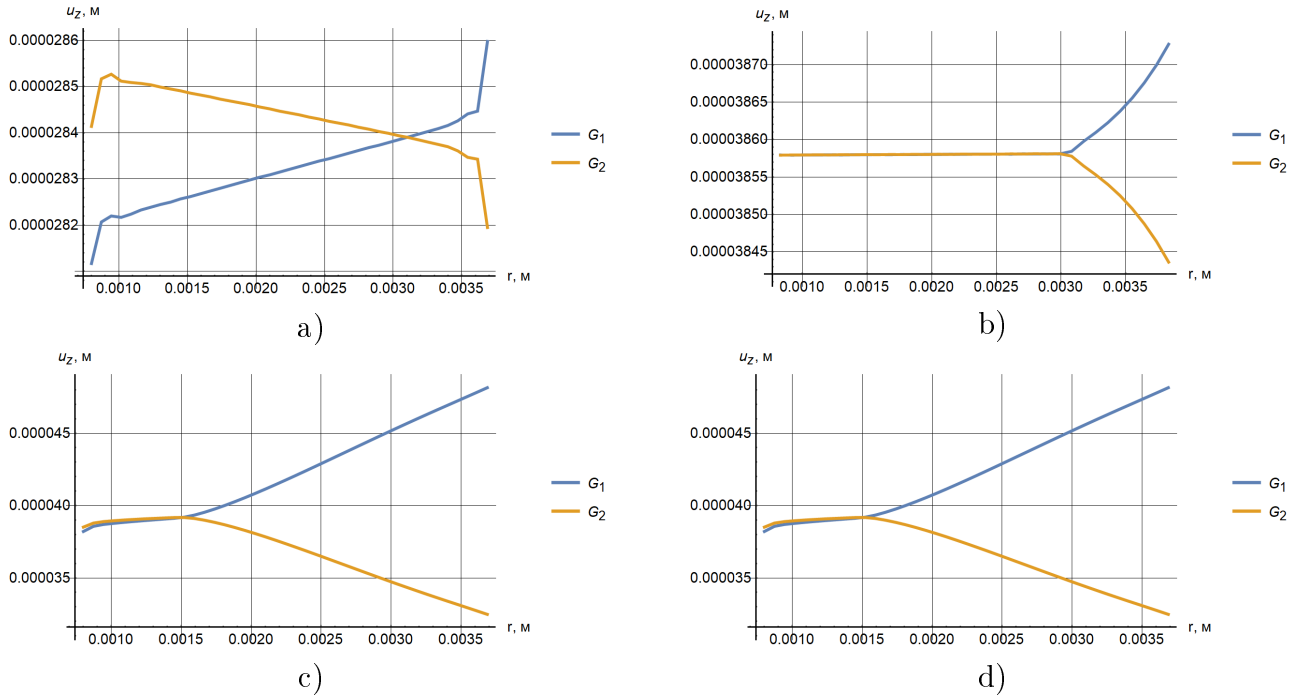


Рис. 19. Зависимости осевого перемещения  $u_z(r)$  в узлах элементов на границе между таблетками для задачи № 3, метод Гаусса с удалением строк: а) 1-я итерация, б) 2-я итерация, в) 9-я итерация, д) 12-я итерация

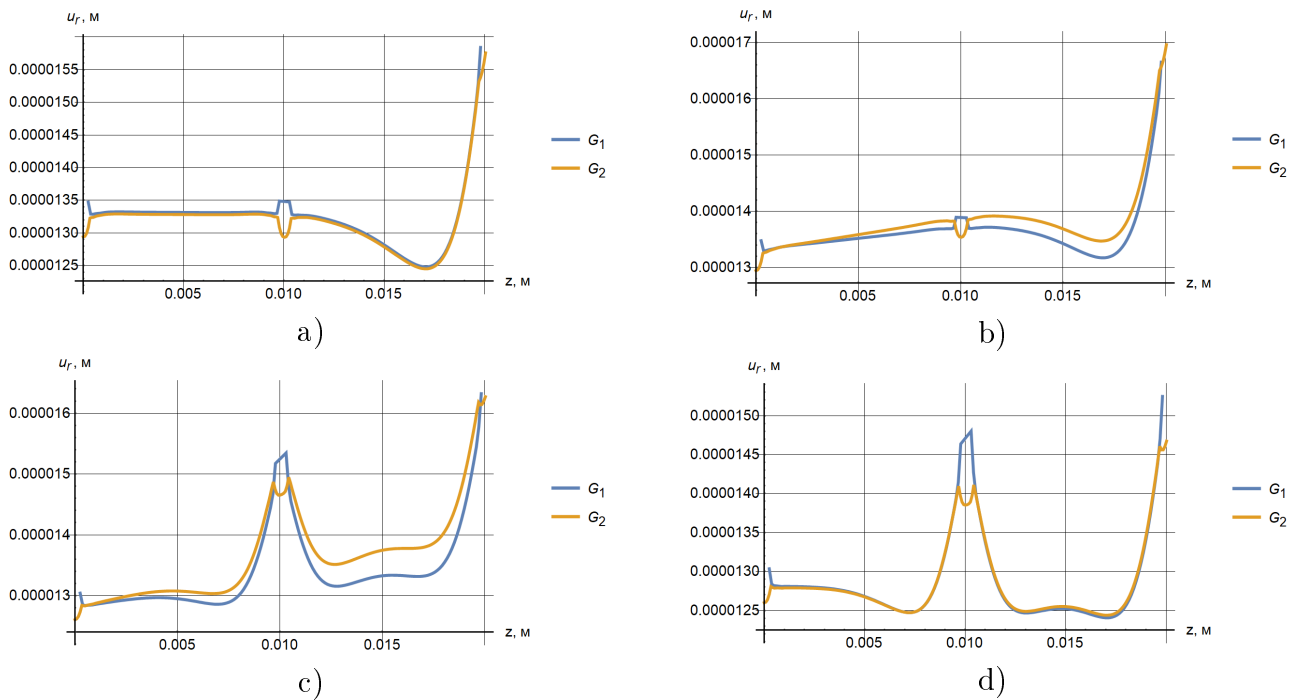


Рис. 20. Зависимости радиального перемещения  $u_r(r)$  в узлах элементов на границе между таблетками и оболочкой для задачи № 3, метод Гаусса с удалением строк: а) 1-я итерация, б) 2-я итерация, в) 9-я итерация, д) 12-я итерация



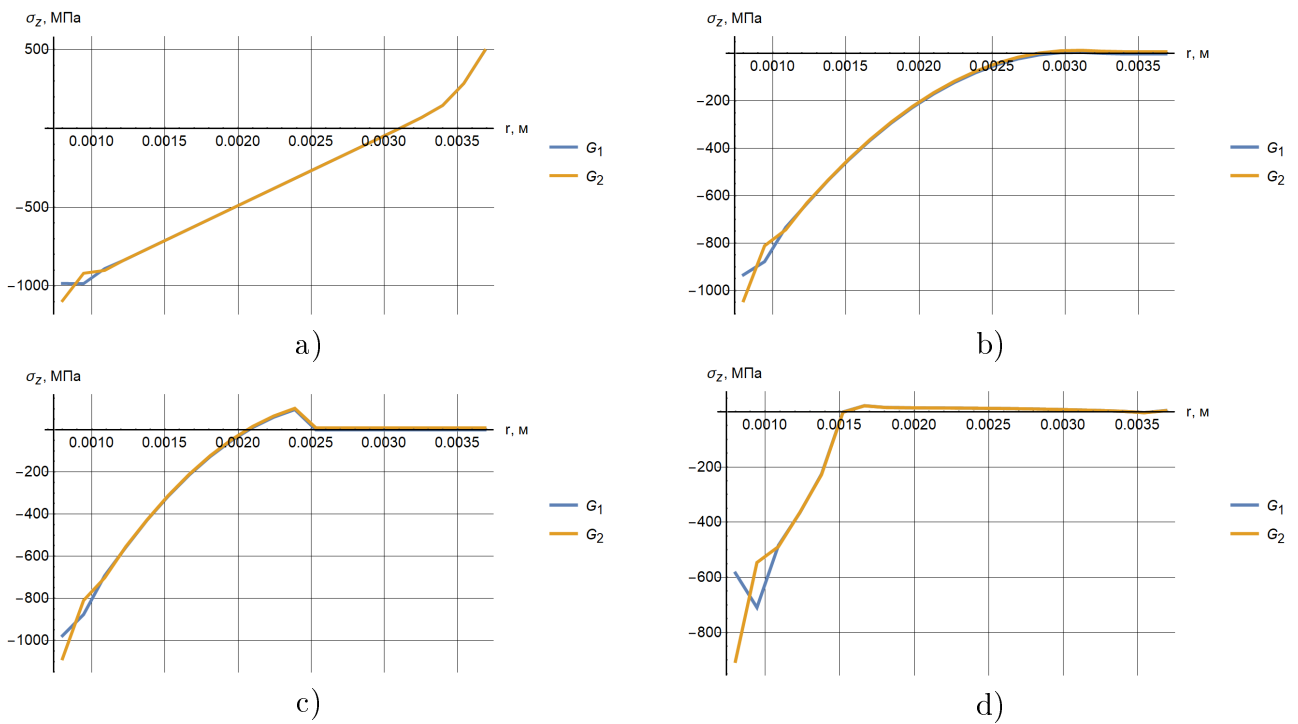


Рис. 21. Зависимости осевого напряжения  $\sigma_r(r)$  в узлах элементов на границе между таблетками для задачи № 3, метод Гаусса с удалением строк: а) 1-я итерация, б) 2-я итерация, в) 9-я итерация, г) 12-я итерация

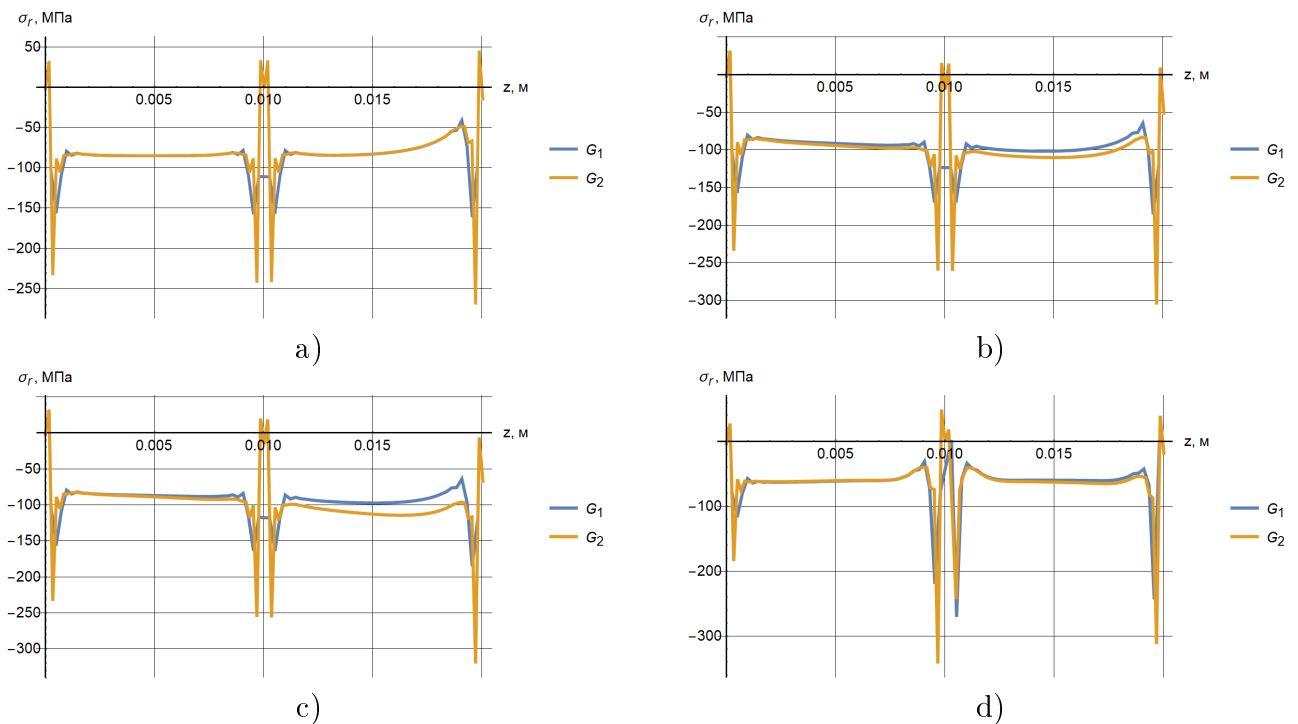


Рис. 22. Зависимости радиального напряжения  $\sigma_r(r)$  в узлах элементов на границе между таблетками и оболочкой для задачи № 3, метод Гаусса с удалением строк: а) 1-я итерация, б) 2-я итерация, в) 9-я итерация, г) 12-я итерация

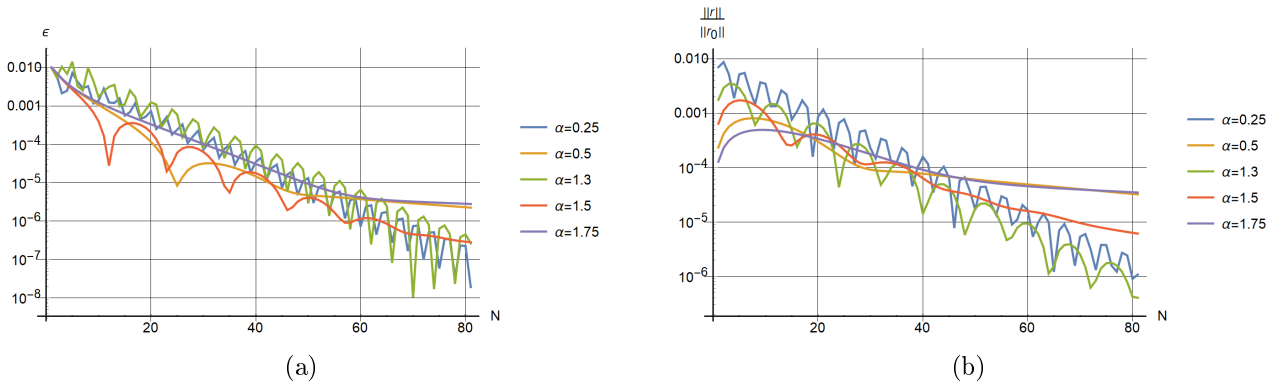


Рис. 23. а) — Зависимости относительной точности от числа итераций для MSSOR,  $\tau = 0, 2$ , задача № 3, б) — Зависимости отношения невязок от числа итераций для MSSOR,  $\tau = 0, 2$ , задача № 3

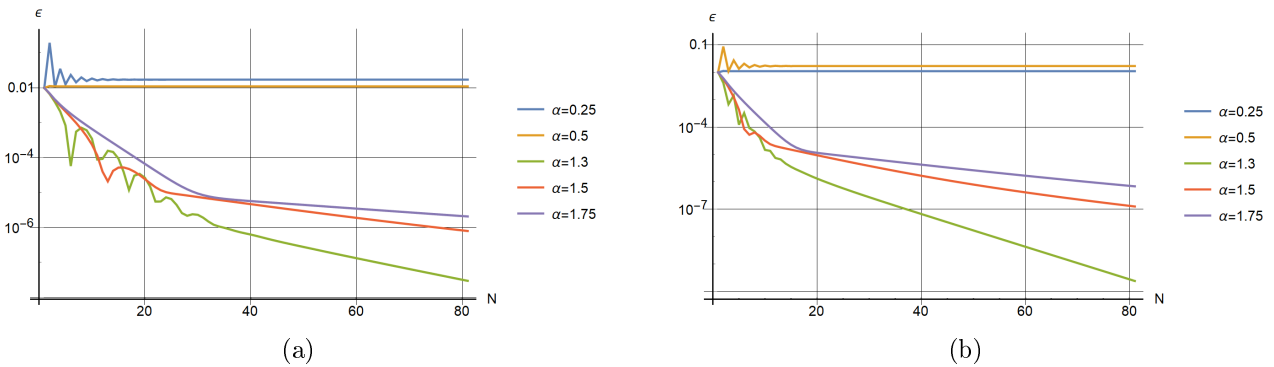


Рис. 24. а) — Зависимости относительной точности от числа итераций для MSSOR,  $\tau = 0, 25$ , задача № 3, б) — Зависимости относительной точности от числа итераций для MSSOR,  $\tau = 0, 5$ , задача № 3

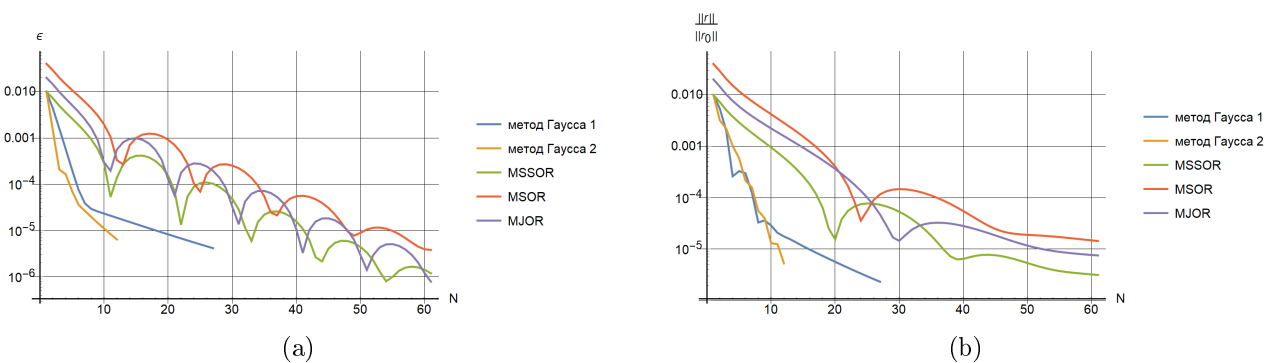


Рис. 25. а) — Зависимости относительной точности от числа итераций для двух вариантов метода Гаусса, задача № 3, б) — Зависимости отношения невязок от числа итераций для двух вариантов метода Гаусса, задача № 3

Рассмотрим графики зависимости невязки решения системы линейных уравнений от числа итераций и графики зависимости относительной точности от количества итераций для MSSOR, MSOR, MJOR и двух вариантов метода Гаусса (рис. 23(a)–25(b)). Из графиков видно, что количество итераций, требуемых для достижения заданной точности в методах MSSOR, MSOR и MJOR довольно существенно зависит от выбора итерационных параметров. Для всех задач существуют такие параметры, при которых сходимость не наблюдается при любом использованном выборе предобуславливателя, а для двух вариантов методов Гаусса существенных различий в сходимости не наблюдается.

## 5. Заключение

Представлены математическая и вычислительная модели для задачи контактного взаимодействия тел в тепловыделяющем элементе в осесимметричной термоупругой постановке. Для численного решения тепловой и механической задач использован метод конечных элементов. Для учета граничных условий на контактных поверхностях использован mortar-метод, для решения полученной системы линейных уравнений (задача с седловой точкой) применены итерационные методы MSSOR, MSOR, MJOR, метод Узавы, а также два варианта метода Гаусса с итерационным уточнением. На примере тестовых задач показано, как предложенные алгоритмы учитывают выход из контакта различных участков контактной поверхности. Представлены результаты применения описанного алгоритма для решения демонстрационной задачи, моделирующей некоторые процессы в твэле для режима с постоянной мощностью тепловыделения. Продемонстрировано, что MSSOR, MSOR, MJOR и метод Узавы позволяют получить искомую конфигурацию контактной поверхности без дополнительного вмешательства в алгоритм, однако количество итераций, требуемых для достижения заданной точности, в методе Узавы существенно больше. Также рассмотрены два варианта метода Гаусса с итерационным уточнением: в одном из них на каждой итерации в узлах контактной поверхности с положительными напряжениями полагались равными нулю множители Лагранжа, а в другом — из матрицы системы уравнений удалялись строки, соответствующие множителям Лагранжа для таких узлов. Показано, что численные решения тестовых задач с использованием всех методов достаточно близки, количество итераций для MSSOR, MSOR, MJOR и вариантов метода Гаусса сопоставимо, однако при использовании MSSOR, MSOR, MJOR и метода Узавы решается несколько систем линейных уравнений меньшей размерности методом сопряженных градиентов, а при использовании метода Гаусса — полная система уравнений большей размерности.

## Список литературы

- [1] Станкевич И. В., Яковлев М. Е., Си Ту Хтет. Разработка алгоритма контактного взаимодействия на основе альтернирующего метода Шварца // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2011. Спец. вып. Прикладная математика. С. 134–141.
- [2] Babuska I. The finite element method with penalty // Mathematics of Computation. 1973. Vol. 27. P. 221–228.
- [3] Le Tallec P., Sassi T. Domain decomposition with nonmatching grids: augmented Lagrangian approach // Mathematics of Computation. 1995. Vol. 64. P. 1367–1396.
- [4] Wriggers P. Computational Contact Mechanics. Berlin-Heidelberg: Speinger-Verlag. 2006. 520 p.
- [5] Lamichhane B. P. Higher Order Mortar Finite Elements with Dual Lagrange Multiplier Spaces and Applications. Stuttgart: Universitat Stuttgart. 2006. 190 p.
- [6] Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2008. 512 с.
- [7] Розин Л. А. Вариационные постановки задач для упругих систем. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1978. 222 с.
- [8] Wohlmuth B. I. A mortar finite element method using dual spaces for the Lagrange multiplier // SIAM Journal on Numerical anysis. 2000. Vol. 38. (No. 3). P.989–1012.
- [9] Станкевич И. В., Аронов П. С. Математическое моделирование контактного взаимодействия двух упругих тел с помощью mortar-метода // Математика и математическое моделирование. 2018. № 3. С. 26–44.
- [10] Быченков Ю. В., Чижонков Е. В. Итерационные методы решения седловых задач. М.: БИНОМ, 2010. 349 с.
- [11] Саад Ю. Итерационные методы для разреженных линейных систем. В 2 т. Т. 1: пер. с англ. М.: Изд-во МГУ, 2013. 326 с.
- [12] Aronov P. S., Galanin M. P., Rodin A. S., Mathematical modeling of the contact interaction of fuel elements using the mortar method // Mathematica Montisnigri. 2020, Vol. 48, PP. 43–57.

## Содержание

<b>1. Введение</b>	<b>3</b>
<b>2. Математическая постановка задачи</b>	<b>3</b>
<b>3. Решение системы линейных уравнений, полученной после дискретизации задачи</b>	<b>6</b>
<b>4. Результаты численного моделирования</b>	<b>12</b>
4.1. Задача № 1 . . . . .	12
4.2. Задача № 2 . . . . .	14
4.3. Задача № 3 . . . . .	20
<b>5. Заключение</b>	<b>26</b>