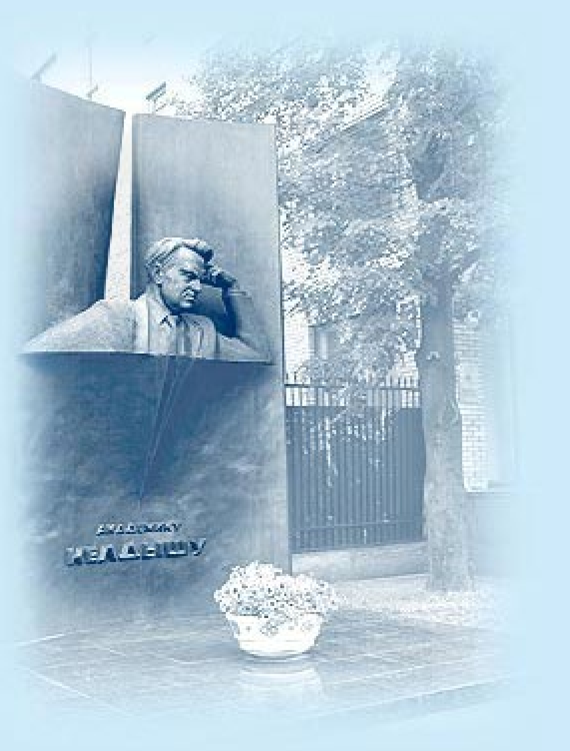
ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 37 за 2021 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

**М.А. Чумичев, Д.М. Мартьянов,
А.П. Алисейчик, Д.А. Грибков,
А.В. Подопросветов, И.А. Орлов**

# Методы управления движением искусственной мышцы и экзоскелета верхней части тела на ее основе

***Рекомендуемая форма библиографической ссылки:*** Методы управления движением искусственной мышцы и экзоскелета верхней части тела на ее основе / М.А. Чумичев [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. № 37. 24 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2021-37
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-37

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук

М.А. Чумичев, Д.М. Мартьянов, А.П. Алисейчик,
Д.А. Грибков, А.В. Подопросветов, И.А. Орлов

# Методы управления движением искусственной мышцы и экзоскелета верхней части тела на ее основе

Москва – 2021

УДК 531.38

***Чумичев М.А., Мартьянов Д.М., Алисейчик А.П., Подопросветов А.В., Грибков Д.А. Орлов И.А.*** **Методы управления движением искусственной мышцы и экзоскелета верхней части тела на ее основе**

В настоящей статье показан синтез стратегии управления активным приводом. Рассматривается экзоскелет верхней части тела, используемый для снятия нагрузки с мышц плечевого сустава при продолжительной работе с поднятыми над головой или на уровне груди руками. На первом этапе решается задача оптимального управления искусственной пневматической мышцей в составе экзоскелета с целью реализации наперед заданной функции тягового усилия при наличии механических ограничений. На втором — описывается задача оптимального управления при поднятии тяжести из зоны «A» в зону «B», при этом рассматривается импульсное управление. Работа описывает анализ и возможности определения оптимального процесса управления движением экзоскелета с минимальными затратами энергии как без учета, так и с учетом сил, прикладываемых оператором.

***Ключевые слова:*** экзоскелет, управление движением, функционал качества, оптимальное управление, краевая задача, пневматическая искусственная мышца.

***Chumichev M. A., Martianov D. M., Aliseychik A. P., Podoprosvetov A. V., Gribkov D. A., Orlov I. A.*** **Motion control methods of the pneumatic artificial muscle and upper body exoskeleton based on it**

This article presents the synthesis of the control strategy for an active drive. The authors considers an upper body exoskeleton for lessening the strain on shoulder joint muscles, which happens during any long-range operation with hands above ones head or at a breast height. At the first the optimal control problem for a pneumatic artificial muscle is solved in order to provide the traction force function, which is given in advance, taking into account given mechanical limits. At the second stage stage the optimal control problem for raising the weight from area "A" to area "B", using the impulse control structure, is posed. This research provides analysis and capacities to the optimal trajectory control process for the exoskeleton to reduce thr total energy consumption both inclusing the operator force effect and without it.

***Key words:*** exoskeleton, motion control, quality functional, optimal control, boundary value problem, pneumatic artificial muscle.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (проект № 18-71-10112).

## Введение

Мягкие экзоскелеты представляют глубокий научный интерес для специалистов в области механики (под мягким экзоскелетом понимается устройство, которое фиксируется на теле человека при помощи специальных манжет без использования жестких фиксаторов). Применение жестких конструкций в большинстве областей производства и медицинских целях показало свою несостоятельность ввиду ряда причин: громоздкость и вес конструкции; жесткость конструкции, сковывающей движения человека; высокий риск причинения вреда здоровью в случае внештатной ситуации.

Для исследований был собран мягкий экзоскелет верхней части тела, представляющий собой пассивную конструкцию с упругим элементом, который уменьшает нагрузку на мышцы человека без возможности управления и получения обратной связи. Данный экзоскелет предназначен для снижения на-

Рис. 1. Пассивный экзоскелет верхней части тела для промышленного применения Hoooldy (ООО «Полезные роботы»)

грузки на мышцы и суставы человека при подъеме груза или длительном удержании рук над головой. Упругий элемент облегчает подъем рук. Основные проблемы — отсутствие возможности регулирования силы упругости пружины не в ручном режиме; сила упругости, которая помогает поднимать руки, одновременно с этим препятствует их свободному опусканию.

На основании проведенных лабораторных испытаний прототипа был сделан вывод о необходимости доработки существующей конструкции. Существенным изменением стало бы добавление в конструкцию экзоскелета активных приводов, способных еще больше снизить усилия человека на выполнение операций, при этом не утяжеляя конструкцию и не препятствуя свободным движениям человека. Таким образом, основная цель модификации данного устройства — добавление в конструкцию управляемых приводов, способных расширить диапазон применимости данного экзоскелета. В качестве решения

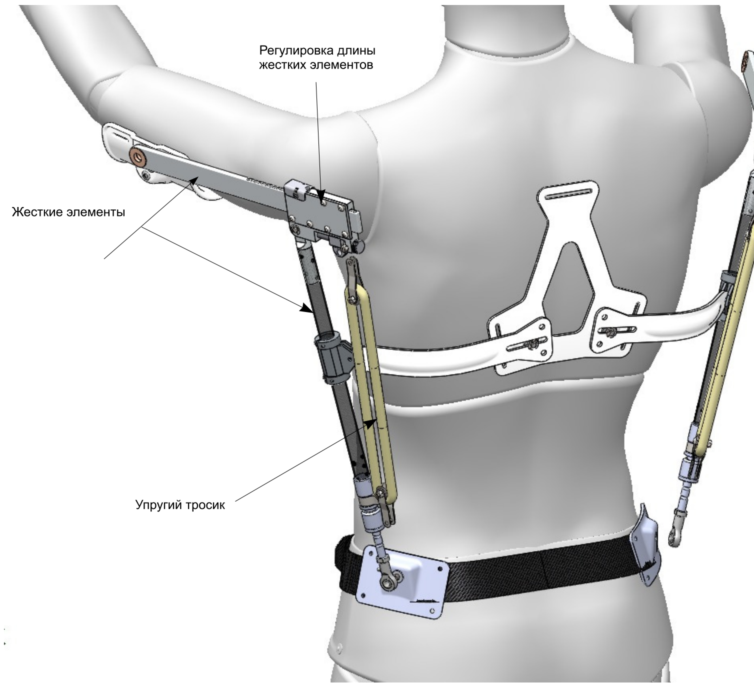



Рис. 2. Конструкция мягкого экзоскелета верхней части тела

была предложена замена упругого элемента на пневматическую искусственную мышцу (PAM — Pneumatic Artificial Muscle). В случае удачного решения задачи управления и обоснования возможности технической реализации полученного управления, которое бы соответствовало заданному движению человека и при этом снижало его усилия, появляется возможность использования данных приводов в различных экзоскелетах.

## 1. Модель пневматической мышцы

Пневматическая мышца представляет собой тонкостенную силиконовую трубку, на которую сверху надета нерастяжимая оболочка с некоторым углом переплетения нитей в недеформированном состоянии. При подаче воздуха через компрессор объем мышцы начинает увеличиваться, а давление растет. В результате описанного процесса мышца увеличивается в диаметре, сокращается и создает на своих концах усилие.

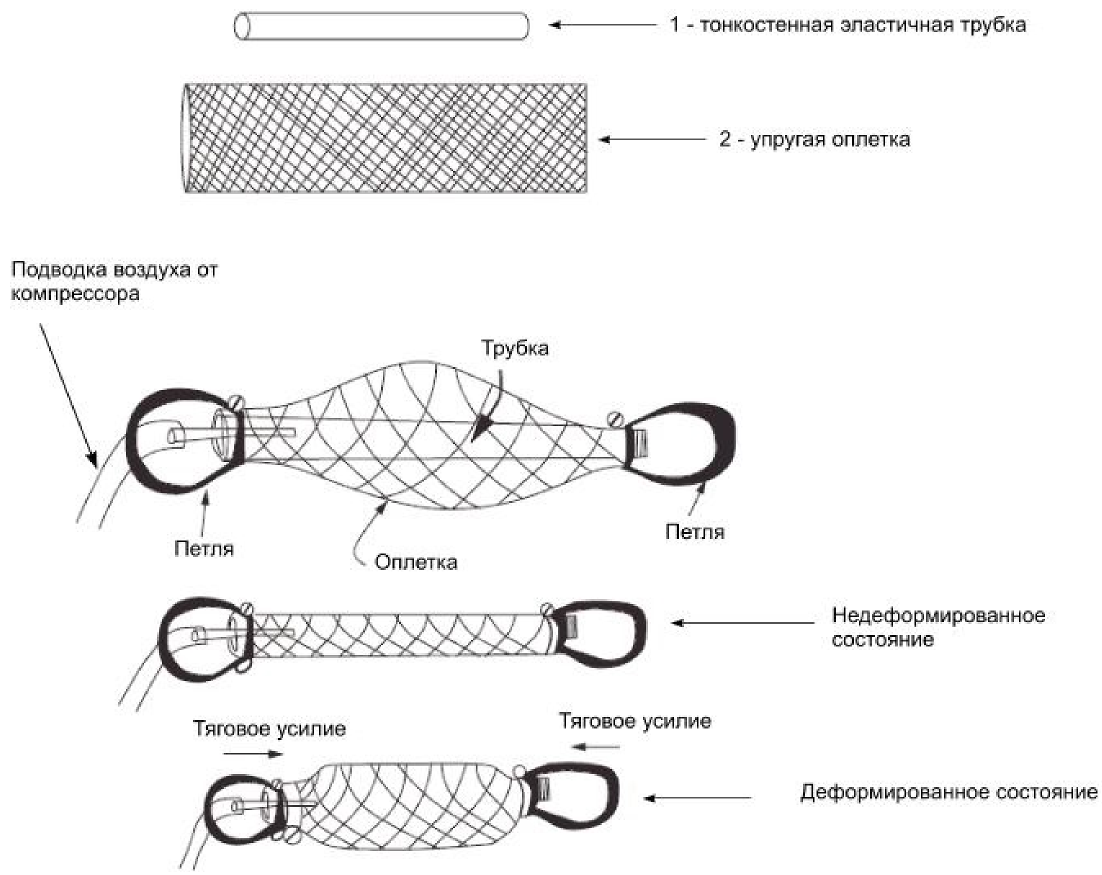



Рис. 3. Устройство искусственной мышцы

Рассмотрим пневматическую мышцу, у которой левый конец закреплен. Будем считать, что сила тяжести, действующая на оболочку, пренебрежимо мала. Мышца представляет собой тонкостенный цилиндр, на который намотана нить длины $b$, $n$ — число витков нити. Первоначальные длина и диаметр мышцы равны $x_0$ и $d_0$ соответственно. $\theta$ — угол между намотанной нитью и осью $Ox$. В силу круговой симметрии будем рассматривать плоскую задачу.

Далее рассмотрим статическую задачу: Обозначим через $p$ давление, созданное в мышце. Тогда работа идеального газа на расширении будет равна $A = pdV$. По предположению, вся работа газа преобразуется в работу по перемещению правого конца мышцы $A = (\vec{F}, \vec{dr_x}) = Fdx$, где $\vec{F}$ — это тяговое усилие, создаваемое на конце мышцы, $\vec{dr_x}$ — вектор перемещения крайней правой точки, а $F$ и $dx$ — проекции этих векторов на ось $Ox$.

В результате проведенных исследований были получены следующие формулы для усилия на конце и динамическое уравнение для точки массы $m$ на

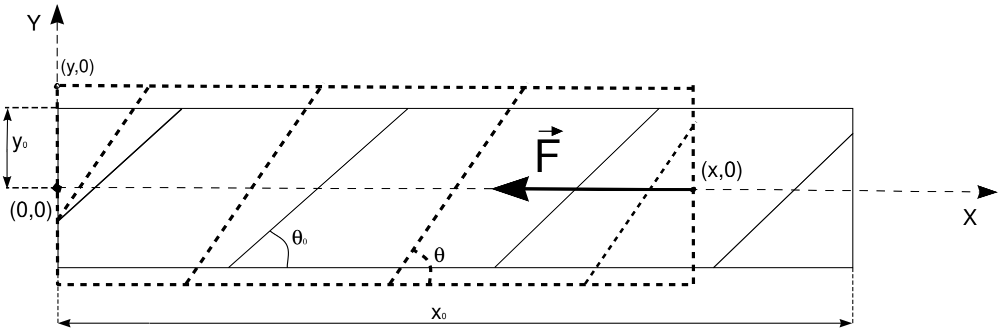



Рис. 4. Искусственная мышца

свободном конце:

$$\begin{cases} F = \frac{(p-p_a)\pi d_0^2}{4\sin^2\theta_0}(1 - 3\cos^2\theta_0(\frac{x}{x_0})^2), \\ \frac{x_0\cos\theta_0}{\sqrt{3}} = x_{extr} < x < x_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

$$m\frac{d^2\vec{r_x}}{dt^2} = \vec{F} + \vec{F_H}, \tag{1.2}$$

где $F_H$ — внешняя сила, приложенная к мышце.

Откуда было получено соотношение для выражения силы через относительное удлинение и обратное соотношение:

$$F = (p - p_a)\frac{x_0 - \Delta x}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{b^2 - (x_0 - \Delta x)^2}{b^2 - x_0^2 - \Delta x^2 + 2x_0\Delta x}} - (p - p_a)\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{b^2 - (x_0 - \Delta x)^2}{\pi}}, \tag{1.3}$$

$$\Delta x = x_0(1 - \sqrt{\frac{1}{3\cos\theta}(1 + \frac{4\sin{\theta_0}^2 F}{\pi d_0^2(p - p_a)})}). \tag{1.4}$$

## 2. Модель газа и уравнения термодинамических процессов

Рабочим телом в пневматической мышце является сжатый воздух, который в данной задаче можно положить эквивалентным идеальному газу. При используемых в данной задаче давлениях и относительно невысоких скоростях газа это предположение вполне уместно (при необходимости в дальнейших исследованиях можно использовать модель газа Ван-дер-Ваальса, Абеля и т.д.). В данной работе будет использоваться уравнение состояния

Менделеева-Клайперона (в работах [3] и [4] в качестве рабочего тела был выбран идеальный газ, и экспериментальные данные подтвердили возможность применения данного предположения):

$$pV = \nu RT, \tag{2.1}$$

где p — давление (Па / $m^2$), V — объем ($m^3$), $\nu$ — количество вещества газа (моль), R — газовая постоянная (8.31 Дж/(моль * К) ), T — температура (К).

Описание процесса, протекающего в пневматической мышце, осуществляется посредством 3 основных уравнений:

*1-ый закон термодинамики для процесса с переменной массой газа*:

$$dQ + \Pi_m dW_m = dU + AdL + \Pi dW, \tag{2.2}$$

где $Q$ — количество теплоты, подведенное в связи с теплообменом (ккал), $\Pi_m$ ($\Pi$) — энергия, привносимая с поступившим газом из магистрали из рабочего объема (ккал/кгс), $W_m$ ($W$) — вес привнесенного из магистрали газа (покинувшего рабочий объем) в объеме привнесенного газа (кгс), $U$ — внутренняя энергия газа (кгс), $dL$ - механическая работа (кгс * м), $A$ — термический эквивалент работы газа (ккал/кгс * м).

*Уравнение движения газа*:

$$d(\frac{v^2}{2g}) + \frac{V}{W}dp + \zeta d(\frac{v^2}{2g}) = 0, \tag{2.3}$$

$\omega$ — скорость газа (м/с), $g$ — ускорение свободного падения (9.81 м/$c^2$), $\zeta = \frac{k-n}{k(n-1)}$ — коэффициент трения газа о стенки магистрали, n — показатель политропы, k — показатель адиабаты.

*Уравнение неразрывности*:

$$dG = \rho v s, \tag{2.4}$$

$G$ — расход ($\frac{kg}{c}$), $s$ — площадь сечения, через которое протекает газ ($m^2$), $\rho$ — плотность газа.

На основании 3 перечисленных уравнений можно получить связь давления и объема рабочего газа при различных процессах. На основании [5] можно сделать вывод, как именно необходимо получать требуемые уравнения: для установления связи давление–объем необходимо исследовать процесс наполнения газом полости пневматической мышцы, а для получения расхода из ресивера необходимо рассмотреть вытекание газа из бесконечного объема.

Пусть исследуемый процесс является политропическим — это процесс, при котором теплоемкость газа остается постоянной (опустим более подробное описание). $k = 1.4$ — показатель адиабаты для газа. Процесс также будем считать адиабатическим, первый закон термодинамики, используя уравнения состояния и принимая во внимание связь коэффициентов в заданных процессах (см. [3]), можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} kRTd\nu_m = Vdp + kpdV, \\ d\nu_m = \frac{G_m}{\mu}dt, \end{cases} \tag{2.5}$$

$G_m$ — массовый расход газа, поступающего из магистрали, $\mu$ — молярная масса воздуха (0.029 kg/моль)

Данную систему удобно переписать в следующем виде, подставляя в него выражение для объема пневматической мышцы:

$$\begin{cases} \dot{p} = \frac{kRT}{V\mu}G_m + \frac{kp}{V}\dot{V}, \\ \dot{V} = \frac{\pi d_0^2}{4\sin^2\theta_0}(1 - 3\cos^2\theta_0(\frac{x}{x_0})^2)\dot{x}. \end{cases} \tag{2.6}$$

В итоге мы получили требуемую связь, но одного полученного уравнения недостаточно для получения полного решения, т.к. расход не может быть произвольным. Для того чтобы получить расход газа из ресивера, воспользуемся уравнением движения 2.3, проинтегрируем его и учтем, что скорость движения газа внутри ресивера пренебрежимо мала (как в задаче Торричелли):

$$v = \sqrt{\frac{2k}{k-1}\frac{p_m}{\rho_m}(1 - (\frac{p}{p_m})^{\frac{n-1}{n}})},$$

$p_m$ — давление в магистрали.

После подстановки в уравнение 2.4, а также учитывая уравнение политропы $\frac{V}{W} = \frac{V_m}{W_m}(\frac{p_m}{p})^{\frac{1}{n}} \iff \rho = \rho_m(\frac{p}{p_m})^{\frac{1}{n}}$ получим выражение для расхода газа, вытекающего из магистрали:

$$G_m = s\sqrt{\frac{2k}{k-1}p_m\rho_m((\frac{p}{p_m})^{\frac{2}{n}} - (\frac{p}{p_m})^{\frac{n+1}{n}})}.$$

Далее в некоторых инженерных приложения рекомендуют вводить коэффициент расхода $\chi$, который позволяет избавиться от показателя политропы, но при этом учесть потери при трении в магистрали (ясно, что этот коэффициент меньше 1). Тогда выражение для расхода перепишется следующим образом:

$$G_m = \chi s p_m\sqrt{\frac{\mu}{RT}}\sqrt{\frac{2k}{k-1}((\frac{p}{p_m})^{\frac{2}{k}} - (\frac{p}{p_m})^{\frac{k+1}{k}})}. \tag{2.7}$$

Выражение: $\phi(p) = \sqrt{(\frac{p}{p_m})^{\frac{2}{k}} - (\frac{p}{p_m})^{\frac{k+1}{k}}}$ называется функцией расхода. У нее есть максимум:

$$(\frac{p}{p_m})_{kr} = \frac{2}{k+1}^{\frac{k}{k-1}}.$$

Если подставить данную точку в уравнение 2.7, то получим максимальный расход, который соответствует установлению скорости звука в трубе. Для сухого воздуха критический перепад давлений приблизительно равен: $(\frac{p}{p_m})_{kr} = 0.5282$.

Когда перепад давлений больше критического (надкритический режим) применяем формулу для критического расхода, как только перепад давлений становится меньше, применяется формула 2.7. На этом модель газа полностью построена и все термодинамические процессы, протекающие в системе выражены через связь давление–объем.

# 3. Динамическая система, описывающая поведение PAM

После того, как были выведены термодинамические уравнения, становится возможным записать полную систему уравнений динамики PAM: Рассматривается материальная точка массы $m$, закрепленная на свободном конце пневматической мышцы, для которой будут выписаны уравнения динамики. Совместное решение полученной системы даст решение задачи динамики пневматической мышцы. Данная система получается совместным выписыванием уравнений динамики 1.1 и 1.2, уравнения связи давления и объема рабочего газа 2.6 и уравнения расхода 2.7:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2, \\ \dot{x_2} = \frac{(p-p_a)\pi d_0^2}{4m\sin^2\theta_0}(1 - 3\cos^2\theta_0(\frac{x_1}{x_0})^2) + F_H, \\ \dot{p} = \frac{kRT}{V\mu}G_m - \frac{kp}{V}\dot{V}, \\ \dot{V} = \frac{\pi d_0^2}{4\sin^2\theta_0}(1 - 3\cos^2\theta_0(\frac{x_1}{x_0})^2)x_2, \\ G_m = \chi s p_m \sqrt{\frac{\mu}{RT}}\sqrt{\frac{2k}{k-1}((\frac{p}{p_m})^{\frac{2}{k}} - (\frac{p}{p_m})^{\frac{k+1}{k}})}, \quad \frac{p}{p_m} < (\frac{p}{p_m})_{kr}. \\ G_m = \chi s p_m \sqrt{\frac{\mu}{RT}}\sqrt{\frac{2k}{k-1}}(\frac{2}{k-1})^{\frac{1}{k-1}}, \quad \frac{p}{p_m} \geq (\frac{p}{p_m})_{kr}, \\ \frac{x_0}{\cos\theta_0} \leq x_1(t) \leq x_0, \\ p_a \leq p(t) \leq p_m \end{cases} \tag{3.1}$$

Для упрощения системы введем следующие коэффициенты:

$$A = \frac{\pi d_0^2 p_a}{4m\sin^2\theta_0} > 0, \quad B = k\sqrt{\frac{RT}{\mu}}\sqrt{\frac{2k}{k-1}}\chi p_m p_a = 1065,95\chi p_m * p_a * [\frac{m}{c}].$$

Обезразмерим второе уравнение системы: $A = 1 \;\; N/kg$, $\tau = 1\ c$ — безразмерное время. Также разделим третье уравнение на A и подставим B. Обозначим $\lambda = \frac{B}{Am}$ — новый коэффициент расхода. (Не стоит данные преобразования путать с понятием обезразмеривания механической системы, т.к. описанные манипуляции таковыми не являются, а служат только для упрощения записи системы.)

Введем следующие обозначения для функций:

$$\begin{cases} V(x) = \frac{\pi d_0^2}{4\sin^2\theta_0}(1 - \cos^2\theta_0(\frac{x}{x_0})^2)x, \\ V_x(x) = \frac{\pi d_0^2}{4\sin^2\theta_0}(1 - 3\cos^2\theta_0(\frac{x_1}{x_0})^2), \\ G_m^* = \chi p_m\sqrt{\frac{\mu}{RT}}\sqrt{\frac{2k}{k-1}((\frac{p}{p_m})^{\frac{2}{k}} - (\frac{p}{p_m})^{\frac{k+1}{k}})}, \;\; \frac{p}{p_m} < (\frac{p}{p_m})_{kr}, \\ G_m^* = \chi s p_m\sqrt{\frac{\mu}{RT}}\sqrt{\frac{2k}{k-1}}(\frac{2}{k-1})^{\frac{1}{k-1}}, \;\; \frac{p}{p_m} \geq (\frac{p}{p_m})_{kr}. \end{cases} \tag{3.2}$$

Система 3.1 перепишется в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2, \\ \dot{x_2} = \frac{(p-p_a)}{m}V_x(x1) + F_H, \\ \dot{p} = \frac{G_m^*(p)}{V(x1)}s - k\frac{px_2V_x(x1)}{V(x1)}, \\ \frac{x_0}{\sqrt{3}\cos\theta_0} \leq x_1(t) \leq x_0, \\ p_a \leq p(t) \leq p_m. \end{cases} \tag{3.3}$$

В дальнейшем $s$ будет выбрано в качестве управления, действительно, открытие клапана до необходимого уровня позволяет регулировать поступление газа из ресивера в полость мышцы. А функция расхода $\phi(p)$ однозначно определяется перепадом давлений в мышце и в ресивере.

$$\begin{cases} \phi(p) = \sqrt{(\frac{p}{p_m})^{\frac{2}{k}} - (\frac{p}{p_m})^{\frac{k+1}{k}}}, \;\; \frac{p}{p_m} < (\frac{p}{p_m})_{kr} \approx 0.5282, \\ \phi(p) = (\frac{2}{k+1})^{\frac{1}{k-1}} \approx 0.2588, \;\; \frac{p}{p_m} \geq (\frac{p}{p_m})_{kr} \approx 0.5282. \end{cases} \tag{3.4}$$

В результате мы получили замкнутую систему ОДУ, которую можно исследовать на наличие допустимых решений $x_1(t)$ и $p(t)$, в случае когда клапан ресивера открыт.

Приравняем правые части к нулю, в результате чего получим два особых решения системы: $(x_0, \;\; 0, \;\; p_a)$ и $(\frac{x_0\cos\theta_0}{\sqrt{3}}, \; 0, \; p_{max})$. Что соответствует двум крайним положениям мышцы и не представляет никакого научного или практического интереса.

В случае когда клапан ресивера открыт, в третьем уравнении добавляется дополнительное слагаемое, являющееся функцией давления и координат, но после приравнивания правых частей нулю, из третьего уравнения получаем, что либо $\phi(p) = 0$, либо $s = 0$. Первое равенство говорит о том, что давление в полости мышцы сравнялось с давлением в ресивере, а значит, достигнуто максимально возможное сокращение, а второе указывает на то, что клапан закрыт. В любом случае, оба этих решения не добавляют новых особых случаев.

Ниже приведены графики решений системы, полученные численно при различных процессах.

## 4. Задача оптимального управления PAM

Вопрос управления пневматическими приводами достаточно сложный. Даже с учетом правильной записи уравнений газодинамических процессов существует ряд проблем, усложняющих управление: негерметичность магистрали, нагревание трубопровода, вязкость, конструктивные особенности датчиков и реле.

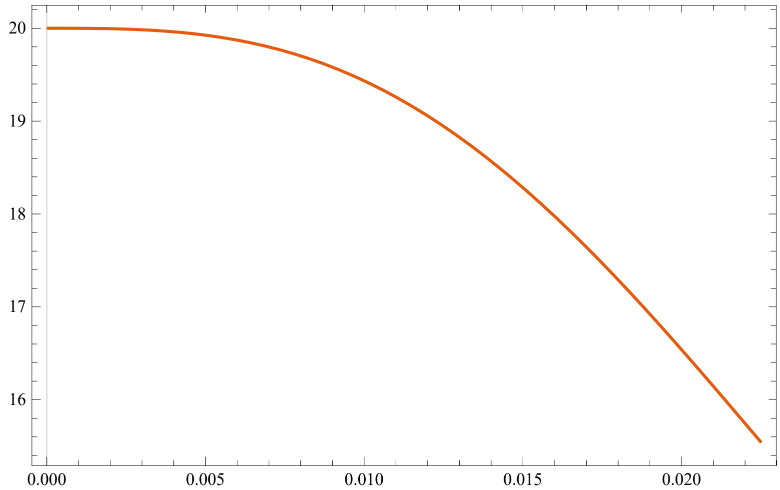
В текущем разделе будет рассмотрена задача управления системой 3.3 при помощи управляющего клапана, который регулирует $s$, во то время как проблемы реализации данного управления будут затронуты минимально.

Для успешного решения описанной задачи управления необходимо провести ее формализацию с точки зрения механики управляемых систем.

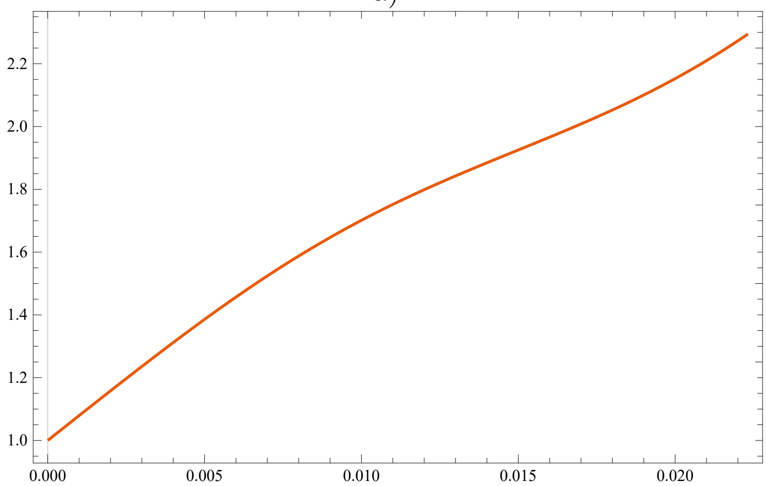
Общий вид задачи управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u), \\ u(.) \in U, \\ J(u) = \Phi_0(x(t_k)) \to \min\limits_{u \in U}, \\ x(t_0) = x_0, \quad y(t_k) \in M. \\ t \in [t_0, t_k]. \end{cases} \tag{4.1}$$

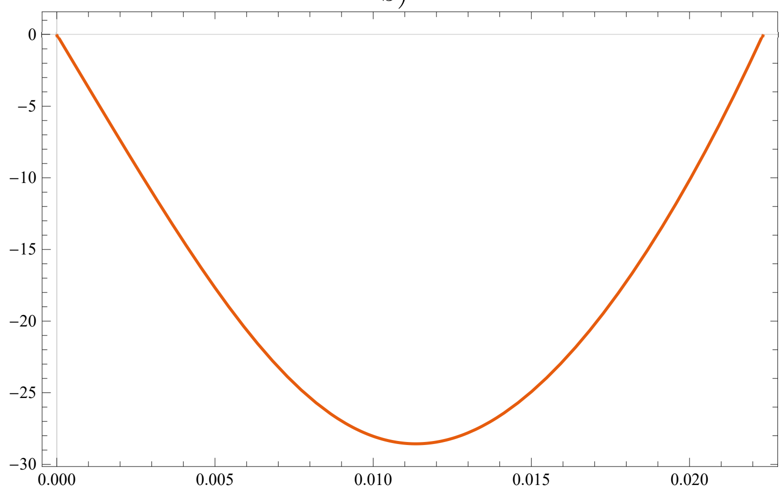
В нашей задаче управлением является степень открытия клапана $s$, а соответствующее ей множество допустимых управлений запишется в следующем виде: $U = [0, s_{max}]$. Рассматриваемый отрезок времени: $t \in [0, t_k]$ (в качестве $t_k$ для простоты возьмем 1). Начальные условия выглядят следующим образом: $x_1(0) = x0$, $x_2(0) = 0$, $p(0) = p_a$. Конечное многообразие, на которое




a)



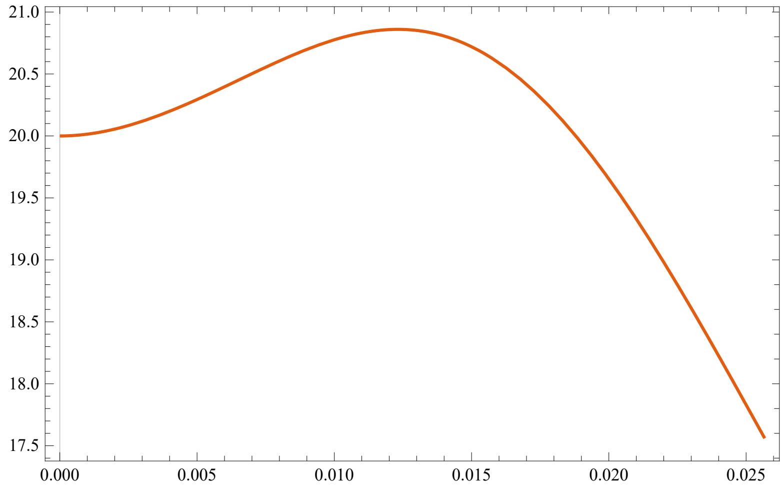

b)



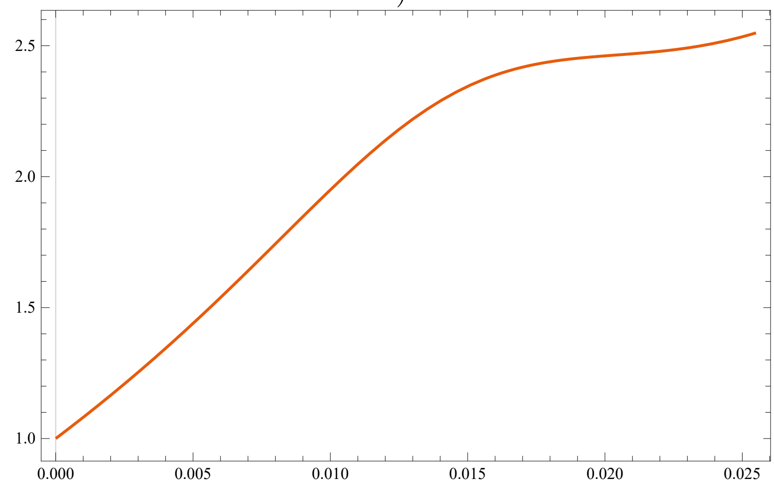

c)

Рис. 5. Графики основных характеристик мышцы при свободном сокращении и полностью открытом клапане. a) x(t) - длина мышцы, b) p(t) - давление внутри мышцы, c) F(t) - развиваемое усилие. ($x_0 = 20$см, $d_0 = 2$см)

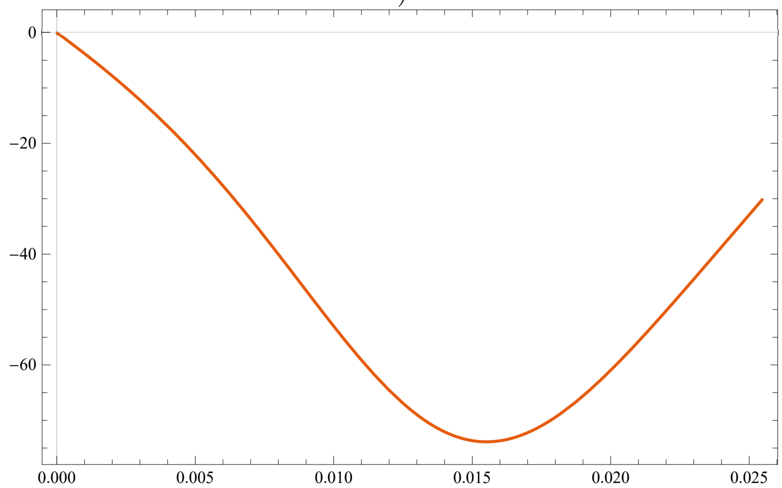
приходит решение, задано следующим образом: $x(1) = \frac{x_0}{\sqrt{3}\cos\theta_0}$, $x_2(1) = 0$.




a)

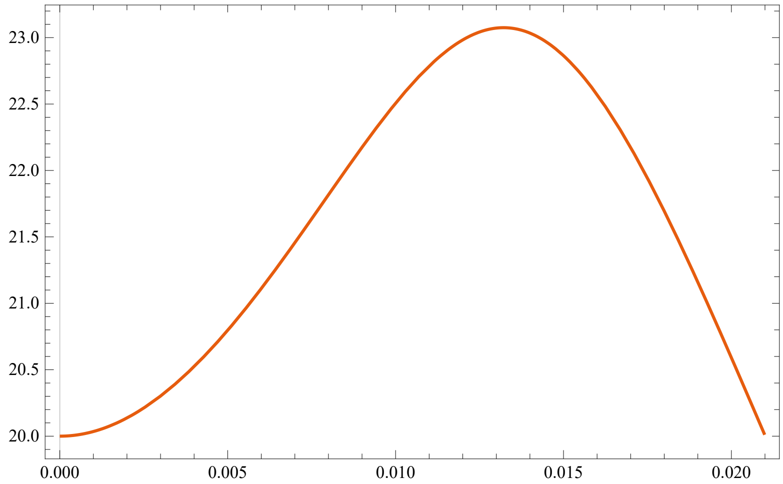



b)

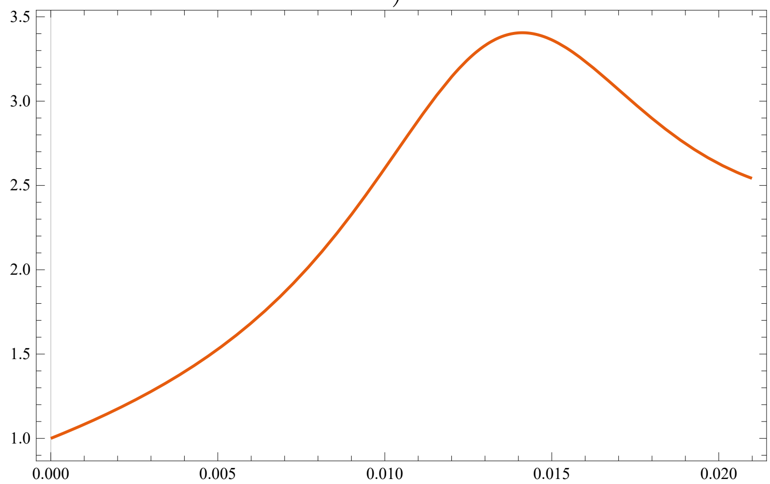



c)

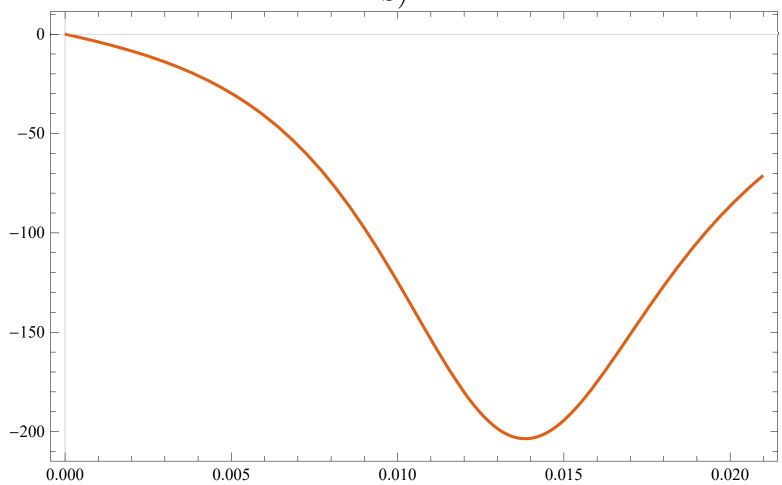
Рис. 6. Графики основных характеристик мышцы при сокращении с нагрузкой 30 Н при полностью открытом клапане. a) x(t) — длина мышцы, b) p(t) — давление внутри мышцы, c) F(t) — развиваемое усилие. ($x_0 = 20$см, $d_0 = 2$см)




a)




b)




c)

Рис. 7. Графики основных характеристик мышцы при уравновешивании прикладываемых усилий и полностью открытом клапане. a) x(t) — длина мышцы, b) p(t) — давление внутри мышцы, c) F(t) — развиваемое усилие. ($x_0 = 20$см, $d_0 = 2$см)

Минимизируемый функционал: $\Phi(t_k) = p(1)$.

Данная постановка обусловлена физическим смыслом задачи: требуется из недеформированного перевести пневматическую мышцу в максимально сокращенное состояние, при этом в результате давление должно быть минимальным. В самом деле, в силу особенности конструкции пневматическая мышца сократится на необходимое расстояние, но при этом чем ниже в ней будет давление, тем лучше с точки зрения энергозатрат и безопасности. В случае, когда присутствует тянущее по оси $Ox$ дополнительное усилие, достаточно добавить его во второе уравнение системы 3.3, при этом решение останется верным.

Запишем формализованную задачу управления:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2, \\ \dot{x_2} = \frac{(p-p_a)}{m}V_x(x1) + F_H, \\ \dot{p} = \frac{G_m^*(p)}{V(x1)}s - k\frac{px_2V_x(x1)}{V(x1)}, \\ x_1(0) = x_0,\ x_2(0) = 0,\ p(0) = p_a, \\ x_1(1) = \frac{x_0}{\sqrt{3}\cos\theta_0},\ x_2(1) = 0, \\ p(1) \to \underset{s\in U}{min}. \end{cases} \tag{4.2}$$

Тем самым мы формализовали задачу управления пневматической мышцей, после чего становится возможным приступить к решению.

Поставленная задача является задачей оптимального управления с фиксированным отрезком времени. Проведем решение поставленной задачи, используя принцип максимума Понтрягина: выпишем функцию Понтрягина для задачи, выпишем условие оптимальности управления, выпишем сопряженную систему, выпишем условия трансверсальности — после этого изначальная задача будет сведена к краевой.

1. Функция Понтрягина:

$$H = (\psi^T, f) = \psi_1 x_2 + \psi_2(\frac{(p-p_a)}{m}V_x(x1) + F_H) + \\ \psi_3(\frac{G_m^*(p)}{V(x1)}s - k\frac{px_2V_x(x1)}{V(x1)}).$$

2. Сопряженная система:

$$\dot{\psi} = -(\frac{\partial f(x,s)}{\partial x})^T\psi,$$

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 6\psi_2 A(p-p_a)\cos^2\theta_0 \dfrac{x_1}{x_0^2} + \dfrac{V_x(x_1)G_m^*(p)}{V^2(x_1)} s\psi_3 - 6kmA\cos^2\theta_0 \dfrac{px_1x_2}{x_0^2 V(x_1)}\psi_3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - kpx_2(\dfrac{V_x(x_1)}{V(x_1)})^2\psi_3, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + \psi_3 \frac{kpV_x(x_1)}{V(x_1)}, \\ \dot{\psi}_3 = -\psi_2 \frac{V_x(x_1)}{m} - \psi_3 \frac{(G_m^*(p))'}{V(x_1)} s + \psi_3 kp \frac{V_x(x_1)}{V(x_1)}, \end{cases} \tag{4.3}$$

3. Условие трансверсальности:

$$\psi(1) + \lambda_0 \frac{\partial \Phi(1)}{\partial x} \perp M$$

,

$$\begin{bmatrix} \psi_1(1) \\ \psi_2(1) \\ \psi_3(1) \end{bmatrix} + \lambda_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{4.4}$$

$$\psi_1(1) = -\lambda_1,\ \psi_2(1) = -\lambda_2,\ \psi_3(1) = -\lambda_0.$$

Воспользуемся условием нормировки и положим $\lambda_0 = 1$.

4. Необходимое условие оптимальности:

$$\frac{\partial H}{\partial s} = \psi_3 \frac{G_m^*(p)}{V(x_1)} = 0 \Longleftrightarrow \psi_3 = 0,\ \phi(p) = 0.$$

Случай $\phi(p) = 0$ соответствует установлению в мышце давления магистрали, а при $\psi_3 = 0$ на любом конечном участке получаем $\psi_1 = 0,\ \psi_2 = 0, \psi_3 = 0$ на всем отрезке интегрирования. Отсюда следует, что оптимальное управление строится следующим образом:

$$s^o = \begin{cases} s_{max}, & \psi_3 > 0, \\ 0, & \psi_3 < 0. \end{cases}$$

5. Рассмотрим анормальный случай $\lambda_0 = 0$:

В результате получили краевую задачу, решение которой будем искать численно методом стрельбы:

$$\begin{cases}
\dot{x_1} = x_2, \\
\dot{x_2} = \frac{(p-p_a)}{p_a}(1 - 3\cos^2\theta_0(\frac{x_1}{x_0})^2), \\
\dot{p} = \frac{\lambda\phi(p)s - kp(1-3\cos^2\theta_0(\frac{x_1}{x_0})^2 x_2)}{x_1(1-\cos^2\theta_0(\frac{x_1}{x_0})^2)}, \\
\dot{\psi}_1 = 6\psi_2 A(p-p_a)\cos^2\theta_0\dfrac{x_1}{x_0^2} + \dfrac{V_x(x_1)G_m^*(p)}{V^2(x_1)}s\psi_3 - 6kmA\cos^2\theta_0\dfrac{px_1x_2}{x_0^2V(x_1)}\psi_3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - kpx_2(\dfrac{V_x(x_1)}{V(x_1)})^2\psi_3, \\
\dot{\psi}_2 = -\psi_1 + \psi_3\frac{kpV_x(x_1)}{V(x_1)}, \\
\dot{\psi}_3 = -\psi_2\frac{V_x(x_1)}{m} - \psi_3\frac{(G_m^*(p))'}{V(x_1)}s + \psi_3 kp\frac{V_x(x_1)}{V(x_1)}, \\
x_1(0) = x_0,\ x_2(0) = 0,\ p(0) = p_a, \\
x_1(1) = \frac{x_0}{\sqrt{3}\cos\theta_0},\ x_2(1) = 0,\ \psi_3(1) = 1.
\end{cases} \tag{4.5}$$

# 5. Постановка задачи управления движением экзоскелета верхней части тела

Целью работы является отыскание управления движением экзоскелета, которое будет минимизировать энергетические затраты человека. Будем рассматривать движение системы в одной плоскости, в дальнейшем можно считать, что рассматривается проекция траектории движения всех точек экзоскелета и человеческого тела на двумерную плоскость, и далее задача будет ставиться и решаться в этой двумерной плоскости. Рассматривается двузвенный физический маятник в вертикальной плоскости. Центр масс первого звена OA лежит на отрезке OA, центр масс второго звена AB не совпадает с точкой A. Также первое звено маятника соединено пружиной CD с неподвижной точкой D таким образом, что точка C лежит на отрезке OA, OD — вертикальная прямая. Угол отклонения от вертикали первого звена — $\varphi_1$, угол отклонения от вертикали второго звена — $\varphi_2$ угол отклонения второго звена от первого — $\alpha$. Углы отсчитываются против часовой стрелки.Рассматривается движение этого маятника в вертикальной плоскости под действием силы тяжести, силы упругости, приложенной в пружине и момента, возникающего в точке O. Считается, что момент в точке O складывается из момента, создаваемого человеком, и управляющего момента, создаваемого «извне». Связь между этими моментами считается известной.

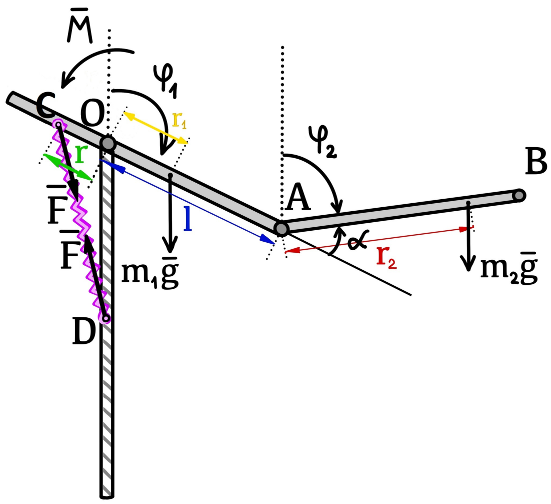



Рис. 8. Механическая система. OD = a, OC = b, $\angle DCO = \beta$

Требуется построить управление из некоторой заданной области, минимизирующее затраты энергии при приведении маятника в положение $\varphi_1 = \varphi_2 = 30^\circ$ и стабилизации маятника в этом положении. Начальные условия предполагаются равными $\varphi_1 = \varphi_2 = 90^\circ$ градусов. Результатом данной работы является получение зависимости управляющего момента от времени (построение управления).

Упругий элемент сокращается по закону:

$$F = F_0 + k_n(l - l_0), \tag{5.1}$$

где $F_0$ — начальная сила, возникающая в упругом элементе ($F_0 = 0$ на правом рисунке и $F_0 = k_0(l_n - l_0)$ на левом рисунке. $k_0$ — начальный коэффициент жёсткости упругого элемента, $k_n$ — коэффициент жёсткости части растянутого упругого элемента до заэжима, $l_0$ — начальная длина упругого элемента, $l_n$ — длина растянутого упругого элемента, $l = l(_1)$ — длина пружины в данный момент времени. В итоге получим формулу для $F(\varphi_1)$:

$$F(\varphi_1) = k_0\left(\frac{l_n}{l_0}l(\varphi_1) - l_0\right). \tag{5.2}$$

Кинетическая и потенциальная энергия системы, соответственно, равны:

$$T = \frac{1}{2}(a_{11}\dot{\varphi}_1^2 + 2a_{12}\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + a_{22}\dot{\varphi}_2^2), \tag{5.3}$$

$$V = b_1\cos\varphi_1 + b_2\cos\varphi_2, \tag{5.4}$$

где:

$$a_{11} = I_1 + m_2 l^2,$$

$$a_{22} = I_2,$$
$$a_{12} = m_2 r_2 l,$$
$$b_1 = (m_1 r_1 + m_2 l)g,$$
$$b_2 = m_2 r_2 g,$$

$I_1$, $I_2$ — моменты инерции 1 и 2 звена соответственно, $r_1$, $r_2$ — расстояния от точек O и A соответственно до центров масс соответствующих звеньев, $l$ — длина первого звена, $r$ — расстояние от точки O до точки приложения упругой силы.

Виртуальная работа равна:

$$\delta W = (M + rF\sin\beta), \tag{5.5}$$

где $\beta$ — угол между CD и CA, $\beta = \beta(\varphi_1, l_0)$, $F = F(\varphi_1, l_0)$, $l_0$ — длина нерастянутой пружины.

Уравнения Лагранжа:

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{\varphi}_1 + a_{12}\ddot{\varphi}_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) - a_{12}\dot{\varphi}_2^2\sin(\varphi_2 - \varphi_1) - b_1\sin\varphi_1 = \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = M + rF\sin\beta\text{'} \\ a_{12}\ddot{\varphi}_1\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + a_{22}\ddot{\varphi}_2 + a_{12}\dot{\varphi}_1^2\sin(\varphi_2 - \varphi_1) - b_2\sin\varphi_2 = 0. \end{cases} \tag{5.6}$$

Будем рассматривать задачу о приведении маятника при помощи управляющего момента $M$ в положение равновесия за заданное время $T > 0$. Качество управления будем оценивать функционалом:

$$J(0, T) = \int_0^T |u(t)\dot{\varphi}_1(t)| + |m(t)\dot{\varphi}_2(t)|dt. \tag{5.7}$$

Здесь за $u(t)$ обозначен управляющий момент $M$, а за $m(t)$ — момент, возникающий в локтевом суставе (точке $A$). Этот момент далее находится экспериментально. Функционал характеризует затраты механической энергии в случае, когда действие привода, развивающего управляющее воздействие, необратимо, т.е. его работа вызывает потребление энергии независимо от того, направлен ли управляющий момент по движению маятника или против него.

Обозначим $x_1 = \varphi_1$, $x_2 = \varphi_2$, $y_1 = \dot{\varphi}_1$,$y_2 = \dot{\varphi}_2$. Тогда система уравнений Лагранжа примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1, \\ \dot{x}_2 = y_2, \\ \dot{y}_1 = f(x_1, x_2, y_1, y_2, u), \\ \dot{y}_2 = g(x_1, x_2, y_1, y_2, u). \end{cases} \tag{5.8}$$

Где функции $f$ и $g$ выглядят следующим образом:

$$f = \frac{a_{12}\cos(x_2 - x_1)[b_2 \sin x_2 - a_{12} y_1^2 \sin(x_2 - x_1)]}{a_{12}^2 \cos^2(x_2 - x_1) - a_{11} a_{22}} - \\ - \frac{a_{22}[a_{12} y_2^2 \sin(x_2 - x_1) + b_1 \sin x_1 + u + r k_0 b \sin x_1 \left(\frac{l_n}{l_0} - \frac{l_0}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos x_1}}\right)]}{a_{12}^2 \cos^2(x_2 - x_1) - a_{11} a_{22}}, \tag{5.9}$$

$$g = \frac{-a_{11}[b_2 \sin x_2 - a_{12} y_1^2 \sin(x_2 - x_1)]}{a_{12}^2 \cos^2(x_2 - x_1) - a_{11} a_{22}} + \\ + \frac{a_{12}\cos(x_2 - x_1) a_{12} y_2^2 \sin(x_2 - x_1)}{a_{12}^2 \cos^2(x_2 - x_1) - a_{11} a_{22}} + \\ + \frac{a_{12}\cos(x_2 - x_1)[b_1 \sin x_1 + u + r k_0 b \sin x_1 \left(\frac{l_n}{l_0} - \frac{l_0}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos x_1}}\right)]}{a_{12}^2 \cos^2(x_2 - x_1) - a_{11} a_{22}}. \tag{5.10}$$

Всё это при условии $a_{12}^2 \neq a_{11} a_{22}$.

Начальные условия, полученные из экспериментальных данных и физического смысла:

$$\begin{cases} x_1(0) = x_1^0 = \frac{\pi}{2}, \\ x_2(0) = x_2^0 = \frac{\pi}{2}, \\ y_1(0) = 0, \\ y_2(0) = 0. \end{cases} \tag{5.11}$$

Минимизируемый функционал $J$ будет выглядеть следующим образом:

$$J(0, T) = \int_0^T |u y_1| + |m y_2| dt \to min_u. \tag{5.12}$$

Для завершения постановки задачи добавим конечное многообразие, полученное из экспериментальных данных и физического смысла:

$$M(T) = \{x_1(T) = \frac{11\pi}{36}, x_2(T) = \frac{\pi}{4}, y_1(T) = 0, y_2(T) = 0\}. \tag{5.13}$$

Наконец, добавим ограничение ресурсов управления:

$$|u(t)| \leq const. \tag{5.14}$$

Введём новую переменную:

$$z(\tau) = \int_0^\tau |uy_1| + |my_2| dt. \tag{5.15}$$

В таком случае имеем:

$$z(0) = 0, \tag{5.16}$$

$$z(T) = J(u) = \int_0^T |uy_1| + |my_2| dt. \tag{5.17}$$

Функция Понтрягина:

$$H = \psi_1 y_1 + \psi_2 y_2 + \psi_3 f(x_1, x_2, y_1, y_2, u) + \psi_4 g(x_1, x_2, y_1, y_2, u) + \psi_5(|uy_1| + |my_2|). \tag{5.18}$$

Сопряжённая система:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -\psi_3 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} - \psi_4 \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1}, \\ \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_3 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2} - \psi_4 \cdot \frac{\partial g}{\partial x_2}, \\ \dot{\psi}_3 = -\frac{\partial H}{\partial y_1} = -\psi_1 - \psi_5 u \cdot sgn(uy_1) \\ \dot{\psi}_4 = -\frac{\partial H}{\partial y_2} = -\psi_2 - \psi_5 m \cdot sgn(my_2), \\ \dot{\psi}_3 = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0. \end{cases} \tag{5.19}$$

Обозначим:

$$\overline{x} = (x_1, x_2, y_1, y_2, z)^T, \tag{5.20}$$

$$\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5)^T. \tag{5.21}$$

Из условия трансверсальности $\overline{\psi}(T) + \lambda_0 \frac{\partial J(\overline{x})}{\partial \overline{x}} \perp M$ получим:

$$\begin{cases} \psi_1(T) = \lambda_1, \\ \psi_2(T) = \lambda_2, \\ \psi_3(T) = \lambda_3, \\ \psi_4(T) = \lambda_4, \\ \psi_5(T) = -\lambda_0. \end{cases} \tag{5.22}$$

Данная задача решается численно методом стрельбы. Перепишем в векторном виде сопряжённую и основную систему, для которых и применим метод:

$$\begin{cases} \dot{\overline{x}} = F(\overline{x}, u), \\ \dot{\overline{\psi}} = G(\overline{x}, \overline{\psi}, u), \\ \overline{x}(0) = (x_1^0, x_2^0, 0, 0, 0)^T, \\ \overline{\psi}(T) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, -\lambda_0)^T. \end{cases} \tag{5.23}$$

Метод стрельбы сводит решение краевой задачи к решению системы нелинейных уравнений относительно параметров пристрелки и к решению задачи Коши, решаемой методом Рунге-Кутты. Для нашей системы рассматривается следующая задача Коши:

$$\begin{cases} \dot{\overline{x}}(\alpha) = F(\overline{x}(\alpha), u), \\ \dot{\overline{\psi}}(\alpha) = G(\overline{x}(\alpha), \overline{\psi}(\alpha), u), \\ \overline{x}(0) = (x_1^0, x_2^0, 0, 0, 0)^T, \\ \overline{\psi}(0) = \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)^T. \end{cases} \tag{5.24}$$

Положим $\overline{\varphi}(\alpha) = \overline{\psi}(T, \alpha) - (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, -\lambda_0)^T$.

В таком случае $\alpha$ находится из решения уравнения $\overline{\varphi}(\alpha) = 0$.

## Заключение

В настоящей статье описана математическая модель пневматической искусственной мышцы. Описана динамика её движения и построено оптимальное управление. Рассматривается задача оптимального управления движением экзоскелета верхней части тела при поднятии тяжести с условием минимизации затрачиваемой оператором энергии. Проведен анализ и возможности определения оптимального процесса управления движением экзоскелета с минимальными затратами энергии как без учета, так и с учетом сил, прикладываемых оператором.

## Список литературы


1. *Gabrio Antonneli, Pierluigi Beomonte Zobel, Walte D'Ambrogio, Francesco Durante, Terenziano Raparelli*, An analitical formula for designing McKibben pneumatic muscles, International Journal of Mechanical Engineering and Technology (IJMET), 12, December 2018.

2. *M.A.Chumichev, D.A. Gribkov, V.E. Pavlovsky, I.A. Orlov*, A model of pneumatic artifitial muscle, Proceedings of the International Scientific and Technological Conference EXTREME ROBOTICS, July 2019.

3. *Matthew Robert Gonzales, B.S.*, Engineering a Compliant Muscle Joint for Dynamic Locomotion in Very Rough Terrain, The University of Texas at Austin, Master Report, December 2011.

4. *S.N. van den Brink*, Modelling and control of a robotic arm actuated by nonlinear artificial muscles, Technische Universiteit Eindhoven Department of Mechanical Engineering Dynamics and Control Group, Eindhoven, 25th January 2007.

5. *Герц Е.И., Крейнин Г.В.*, Расчет пневмоприводов, 1975.

6. *Chou C.-P., Hannaford B.*, Measurement and modeling of McKibben pneumatic artificial muscles, IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 12, N. 1, February 1996.

7. *Frank Daerden, Dirk Lefeber*, Pneumatic Artificial Muscles: actuators for robotics and automation, IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics 2001.

8. *S. И.С. Григорьев*, Методическое пособие по численным методам решения краевых задач принципа максимума в задачах оптимального управления, 2005.

9. *Terenziano Raparelli, Francesco Durante and Pierluigi Beomonte Zobel*, Numerical Modeling and Experimental Validation of a Pneumatic Muscle Actuator, 2016.

10. *В.В. Белецкий*, Двуногая ходьба: модельные задачи динамики и управления, 1984.

11. *А.М.Формальский*, Управление движением неустойчивых объектов, 2012.

12. *Xin X, Yamasaki T*, Energy-based swing-up control for a remotely driven acrobot: Theoretical and experimental results, 2012.

13. *Spong M.*, Energy Based Control of a Class of Underactuated Mechanical Systems, 2003.

14. *Cyr C., Dostal L., Duecker D., Kreuzer E.*, Towards reinforcement learning-based control of an energy harvesting pendulum, 2019.

15. *Gregory J., Olivares A., Staffetti E.*, Energy-optimal trajectory planning for the Pendubot and the Acrobot // Optimal Control Applications and Methods, 2013, Pp. 275-295.

# Содержание