ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 32 за 2021 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

А.В. Колесниченко

Модифицированный в рамках негауссовской каппа-статистики интегральный критерий устойчивости Чандрасекхара для равновесного сферического облака протозвезды

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Колесниченко А.В. Модифицированный в рамках негауссовской каппа-статистики интегральный критерий устойчивости Чандрасекхара для равновесного сферического облака протозвезды // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. № 32. 35 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2021-32
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-32

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

А.В. Колесниченко

Модифицированный в рамках негауссовой каппа-статистики интегральный критерий устойчивости Чандрасекара для равновесного сферического облака протозвезды

Москва — 2021

Колесниченко А.В.

Модифицированный в рамках негауссовой каппа-статистики интегральный критерий устойчивости Чандрасекара для равновесного сферического облака протозвезды.

Аннотация. В рамках неэкстенсивной статистической механики Каниадакиса получено обобщение интегральной теоремы устойчивости Чандрасекара сферически симметричного распределения материи и черного излучения в протозвездном облаке, находящемся в состоянии гравитационного равновесия. С этой целью используются элементы деформированной термодинамики для идеального газа, деформированное каноническое распределение Гиббса, а также эффективная гравитационная постоянная, вычисленная в формализме Верлинде. При этом параметр деформации κ (каппа) измеряет так называемую степень неэкстенсивности облачной системы. Кроме этого, обсуждаются в контексте каппа-статистики модифицированные термодинамические свойства излучения черного тела, в частности, κ -аналог закона Стефана для энергии излучения и обобщенные выражения для энтропии, теплоемкости и давления излучения. Представленный способ объединения указанных аномальных физических процессов обеспечивает альтернативу классической процедуре вывода Чандрасекаром известных интегральных теорем для газовых конфигураций, находящихся в гравитационном равновесии, и восстанавливает классические выражения в пределе $\kappa \to 0$.

Полученные результаты смогут интерпретировать, по мнению автора, некоторые астрофизические проблемы звездно-планетной космогонии, связанные, в частности, с моделированием процессов совместного образования и эволюции протосолнца и экзопланетного облака из единой туманности.

Ключевые слова: критерий устойчивости Чандрасекара, протозвездная туманность, чернотельное излучение, неэкстенсивная статистика Каниадакиса.

Aleksandr Vladimirovich Kolesnichenko

Chandrasekhar's integral stability criterion for an equilibrium spherical cloud of a protostar, modified in the framework of non-Gaussian kappa-statistics.

Annotation. Within the framework of the non-extensive statistical mechanics of Kaniadakis, a generalization of the integral stability theorem of Chandrasekhar for the spherically symmetric distribution of matter and black radiation in an exoplanetary cloud in a state of gravitational equilibrium is obtained. For this purpose, the elements of deformed thermodynamics for an ideal gas, deformed canonical Gibbs distribution, as well as the effective gravitational constant, calculated in the formalisms of Kanyadakis and Verlinde, are used. In this, the deformation parameter κ (kappa) measures the so-called degree of nonextensiveness of the cloud system. In addition, the modified thermodynamic properties of blackbody radiation, in particular, the analogue of Stefan's law for radiation energy and generalized expressions for the entropy, heat capacity and radiation pressure, are discussed in the context of κ -statistics. The presented method of combining the indicated anomalous physical processes provides an alternative to the classical procedure of Chandrasekhar's derivation of the well-known integral theorems for gas configurations in gravitational equilibrium, and restores all standard expressions in the limit $\kappa \to 0$.

The results obtained will be able, according to the author, to explain some astrophysical problems of stellar-planetary cosmogony, associated, in particular, with modeling the processes of joint formation and evolution of a protosun and an exoplanetary cloud from a single nebula.

Key words: Chandrasekhar stability criterion, stellar nebula, blackbody radiation, non-extensive statistics of Kaniadakis.

ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на большие достижения в области естественных наук, классическая статистическая механика, основанная на энтропии Больцмана–Гиббса (БГ), все же не является пригодной для описания многих сложных физических систем, особенно систем, характеризующихся большой дальностью пространственно-временных корреляций, немарковостью процессов, фрактальностью геометрии фазового пространства, дальнодействующими силовыми взаимодействиями, наличием степенных статистических распределений. В качестве примера можно привести невозможность объяснения в рамках статистики БГ спектра космических лучей – одной из важнейших систем релятивистских частиц. В связи с этим, за последние несколько десятилетий было предпринято множество попыток обобщить статистическую механику БГ. Начало систематического изучения в этом направлении связано с работой К. Тсаллиса (Tsallis, 1988), в которой был введен функционал энтропии $S_q(f) := k_{\mathcal{B}}(q-1)^{-1}\left[1-\int f^q d\Omega\right]$, зависящий от некоторого действительного числа q (так называемого параметра деформации) и обладающий неаддитивностью для совокупности независимых аномальных систем. Неэкстенсивная q-статистика Тсаллиса, являющаяся в настоящее время наиболее изученной в литературе, показала хорошее соответствие с наблюдениями и экспериментальными измерениями специфических свойств сложных систем, поведение которых часто невозможно описать в рамках классической статистики Больцмана–Гиббса (см., например, Kolesnichenko, Chetverushkin, 2013; Kolesnichenko, Marov, 2013, 2014, 2016, 2019b; Колесниченко, 2019a; Kolesnichenko, 2020a,b).

Вместе с тем определение энтропии Тсаллиса не является единственным примером деформированной энтропии. Фундаментом исследований в области неэкстенсивных статистик, проводимых в настоящее время, являются различные нелогарифмические энтропии, рассмотренные, например, в работах (Renyi, 1961; Sharma, Mittal, 1977; Taneja, 1989; Abe, 1997; Landsberg, Vedral, 1998; Kaniadakis, 2009; Зарипов, 2002, 2010; Колесниченко, 2018; Kolesnichenko, Marov, 2019). Основанные на неэкстенсивных энтропиях многочисленные статистические теории постоянно развиваются в ускоренном ритме, при котором появляются новые идеи, позволяющие глубже понять их природу, возможности и ограничения (см. Библиографию, представленную на сайте: Nonextensive statistical mechanics and thermodynamics (Bibliography/ http://tsallis.cat.cbpf.br/biblio. Htm), которая постоянно обновляется).

Среди разнообразных неэкстенсивных статистик особый интерес представляет каппа-статистика, основанная на энтропийном функционале Каниадакиса $S_\kappa(f):=-\frac{k_B}{2\kappa}\int f\left(f^{\kappa}-f^{-\kappa}\right)d\Omega$, который впервые был введен в работах (Kaniadakis, 2001a,b; Kaniadakis, Scarfone, 2002; Kaniadakis и др., 2002). Каппа-статистика Каниадакиса, естественно возникающая в рамках специальной теории относительности Эйнштейна, оказалась применимой для описания значительного числа экспериментально наблюдаемых аномальных явлений в физике и в других естественных науках. В качестве примера можно упомянуть работы, связанные с аномальными явлениями в специальной теории относительности (Kaniadaris, 2005), в квантовой механике (Kaniadaris, 2002), в звездной астрофизике (Carvalho и др., 2008, 2009; Soares, Silva, 2011), в деформированной термодинамике неэкстенсивных систем (Scarfone, Wada, 2006, 2014; Колесниченко, 2020a,b), в термодинамике Бозе-газа и черного излучения (Lourek, Tribeche, 2016; Ourabah, Tribeche, 2014; Kolesnichenko, 2020c) в газокинетических моделях аномальных систем (Kaniadakis, 2001; Rossani, Scarfone, 2004; Silva и др., 2008; Bento и др., 2013) и т.п. При изучении этих и подобного типа сложных систем возникают многочисленные новые математические проблемы, требующие своего решения. К их числу относится, в частности, проблема совместного образования звезды (протосолнца) и экзопланетного облака из вещества единой вращающейся туманности (Hoyle,1960).

В представленной статье, выполненной в рамках этой проблемы, мы рассмотрим идею Чандрасекара о существовании глобального критерия стабильности сферической конфигурации из вещества и излучения, находящейся в гравитационном равновесии и, опираясь на нее, сформулируем в контексте неэкстенсивной статистики Каниадакиса обобщенную интегральную теорему устойчивости для конечной протозвездной туманности.

Существует классическая интегральная теорема (см. Чандрасекар,1950; Теорема 6, стр.111) для находящейся в гравитационном равновесии сферической конфигурации из вещества (газа) и чёрнотельного излучения, гласящая, *что полное давление* P_{ce} *газа и излучения в центре притяжения гравитирующего облака массы* $\mathcal{M}$, *в котором средняя плотность* $\overline{\rho}(r)$ *в точке, находящейся на расстоянии* r *от центра, не увеличивается от центра к поверхности, должно удовлетворять неравенству*

$$\frac{1}{2}G\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3}\overline{\rho}^{4/3}\mathcal{M}^{2/3} \le P_{ce} \le \frac{1}{2}G\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3}\rho_{ce}^{4/3}\mathcal{M}^{2/3}. \tag{1}$$

Здесь $\overline{\rho}$, ρ_{ce} – соответственно средняя плотность облака и плотность в его центре. Смысл теоремы состоит в том, что давление, действующее в центре облака массы $\mathcal{M}$, должно быть промежуточным между давлениями в центрах двух конфигураций с однородной плотностью – одна с плотностью, равной средней плотности $\overline{\rho}$ конфигурации, а другая с плотностью, равной плотности ρ_{ce} в ее центре. Если неравенство (1) нарушается, то должны существовать некоторые области, в которых преобладают противоположные градиенты плотности; а это означает неустойчивость всей системы. Другими словами, можно считать, что неравенство (1) эквивалентно интегральному условию устойчивости «материнской» звёздной туманности (Чандрасекар, 1985).

Исходя из правой части этого неравенства, Чандрасекар доказал другую теорему (см. Чандрасекар,1950; Теорема 7, стр.113), согласно которой отношение давления излучения к полному давлению в центре газовой конфигурации, $(1-\beta_c)$, в которой $\bar{\rho}(r)$ не увеличивается от центра к периферии, удовлетворяет неравенству

$$(1-\beta_{ce}) \leq (1-\beta_*), \qquad (2)$$

где коэффициент β_* определяется из уравнения четвертого порядка $\left(\mu^2 M / 5.48 M_\odot\right)^2 \beta_*^4 = 1-\beta_*$. Здесь $\beta := p_{gas} / P$ – коэффициент, характеризующий долю вещества в полном давлении смеси; μ – средний молекулярный вес; $M_\odot = 1.989(2)\times 10^{33}\,г$ – масса Солнца. Эта теорема показывает, что для сферического гравитирующего облака значение величины $(1-\beta)$ в его центре «ce» не может превосходить некоторого количества, зависящего только от массы облака. В частности, для протосолнечного облака имеет место неравенство $(1-\beta_c) < 0,03$, откуда следует, что для звезды солнечной массы со средней молекулярной массой, равной единице, радиационное давление в центре не может превышать 3% от общего давления, иначе звезда будет нестабильной.

В представленной работе получено обобщение этих двух теорем на случай неэкстенсивного сферического протозвездного облака с учетом модифицированных в рамках статистики Каниадакиса термодинамики вещества, чернотельного излучения и гравитационной постоянной, а также дана количественная оценка роли параметра деформации каппа в образовании неустойчивости самогравитирующей протозвездной туманности. Показано, что этот параметр расширяет комбинацию естественных констант, входящих в неравенство (1), корректируя при этом численные значения соответствующих величин, необходимых для оценки протозвездных масс, и модифицирует тем самым классическую гипотезу Хойла (Hoyle,1960) о совместном образовании протозвезды и экзопланетного облака из вещества единой вращающейся туманности (небулы).

Статья организована следующим образом. В разделе 1 мы напоминаем основные элементы каппа-статистики и приводим деформированное каноническое распределение Гиббса для скоростей свободных газовых частиц (Kaniadakis, 2001; Silva и др., 2008). В разделе 2 обсуждается энтропия световых квантов Бозе в статистике Каниадакиса и представлены термодинамические соотношения для чернотельного излучения (Ourabah, Tribeche, 2014; Lourek, Tribeche, 2016; Kolesnichenko, 2020c). В разделе 3 приводится значение для модифицированной гравитационной постоянной, полученной в рамках формализмов Верлинде и Каниадакиса (Abreu и др., 2016a,b, 2017; Колесниченко, Маров, 2020). В разделе 4. приведены уравнения, описывающие неэкстенсивное протозвездное облако с излучением в состоянии механического равновесия, рассматриваемые для простоты в пренебрежении магнитными полями и эффектом вращения. Наконец, последний раздел 5 посвящен выводу интегрального условия устойчивости для сферически симметричного распределения вещества и излучения в протозвездном облаке на основе статистики Каниадакиса.

1.РАВНОВЕСНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ СВОБОДНЫХ ЧАСТИЦ В РАМКАХ ФОРМАЛИЗМА КАНИАДАКИСА

В деформированной статистической механике Каниадакиса для непрерывных аномальных систем при вероятностной нормировке $\int_{\mathcal{R}} f(\boldsymbol{u})\,d\Omega = 1$ для плотности вероятности распределения частиц $f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{u})$ в фазовом пространстве, κ -энтропия системы задается следующим функционалом (Kaniadakis, 2001a,b)

$$S_\kappa(f) := -k_{\mathcal{B}} \int_R f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{u}) \frac{f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{u})^{\kappa} - f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{u})^{-\kappa}}{2\kappa} d\Omega, \tag{3}$$

где $d\Omega = d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{u}$; $k_{\mathcal{B}} = 1.380662(44)\times 10^{-16}\, эрг\, K^{-1}$ – постоянная Больцмана; энтропийный индекс κ представляет собой вещественное число, принадлежащее области $|\kappa| = 1$. В пределе слабой связи (когда $\kappa \to 0$) каппа-энтропия системы переходит в каноническую форму классической статистики Больцмана–Гиббса, $S_{\mathcal{BG}}(f) := -k_{\mathcal{B}} \int_R f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{u}) \ln f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{u})\, d\Omega$.

Основанная на энтропии Каниадакиса неэкстенсивная статистика сохраняет математическую и гносеологическую структуру обычной статистической механики Больцмана–Гиббса и пригодна для описания большого класса сложных явлений в различных прикладных областях. Каппа-статистика изначально обобщает классическую статистику введением так называемых κ-экспоненты и κ-логарифма, которые определяются формулами

$$\exp_{\kappa}(x) := \left[\kappa x + \sqrt{1+\kappa^2 x^2}\right]^{1/\kappa}, \quad \ln_{\kappa}(x) := \frac{x^{\kappa} - x^{-\kappa}}{2^{\kappa}}, \tag{4}$$

при выполнении следующей операции

$$\ln_{\kappa}\left[\exp_{\kappa}(x)\right] = \exp_{\kappa}\left[\ln_{\kappa}(x)\right] = x, \tag{5}$$

и дают в пределе $\kappa \to 0$ обычный логарифм и обычную экспоненту. Многочисленные свойства этих деформированных функций представлены в работах (Scarfone, Wada, 2006; Kaniadakis, 2013; Колесниченко, 2020a,b)

Рассмотрим теперь не меняющиеся с течением времени стационарную функцию распределения вероятностей для сложных κ-систем. Для них в работах (Kaniadakis, 2001; Silva, 2006; Bento и др., 2013) было получено в случае однородной среды следующее равновесное распределение свободных частиц в одномерном пространстве скоростей

$$f_{eq}(u)=\frac{1}{\tilde{Z}}\exp_{\kappa}\left(-\frac{mu^2}{2k_{\mathcal{B}}T}\right). \tag{6}$$

Здесь

$$\tilde{Z}=\int_{\mathcal{R}}\exp_{\kappa}\left(-\frac{mu^2}{2k_{\mathcal{B}}T}\right)du, \qquad |\kappa|<2/3 \tag{7}$$

– постоянная κ-нормировки; m – масса одной частицы космического вещества протопланетного облака; T – измеряемая в градусах абсолютная температура. В предположении, что $a:=m/2k_{\mathcal{B}}T$, $x:=au^2$, для величины $\tilde{Z}$ получим $\tilde{Z}=\frac{1}{2\sqrt{a}}\int_0^{\infty}x^{-1/2}\exp_{\{\kappa\}}(-x)dx$. При использовании интегральной формулы (см., например, Bento и др., 2013)

$$\int_0^{\infty}x^{r-1}\exp_{\kappa}(-x)\,dx=\frac{|2\kappa|^{-r}}{1+r|\kappa|}\Gamma(r)\times\frac{\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1}-r/2\right]}{\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1}+r/2\right]}, \tag{8}$$

в конечном счете будем иметь

$$\tilde{Z}=\sqrt{\frac{2\pi k_{\mathcal{B}}T}{m}}\,\frac{|2\kappa|^{-1/2}}{1+|\kappa|/2}\,\frac{\Gamma\left(|2\kappa|^{-1}-1/4\right)}{\Gamma\left(|2\kappa|^{-1}+1/4\right)}. \tag{9}$$

(Здесь $\Gamma(x)$ – Гамма-функция).

Применяя формулу (8), легко получить среднее значение квадрата скорости частицы для каждой степени свободы

$$\langle u^2\rangle_{\kappa}:=\int_0^{\infty}u^2 f_{eq}(u)\,du\Big/\int_0^{\infty}f_{eq}(u)\,du=$$

$$= \frac{1}{m} k_{\mathcal{B}} T \ \frac{1}{|2\kappa|} \frac{2+|\kappa|}{2+3|\kappa|} \ \frac{\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1} - 3/4\right]\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1} + 1/4\right]}{\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1} + 3/4\right]\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1} - 1/4\right]}, \quad |\kappa| < 2/3). \qquad (10)$$

Тогда, с учетом κ- теоремы о равнораспределении энергии, выражение для среднего значения кинетической энергии всех частиц аномального вещества протозвездного облака, состоящего из N газовых частиц, будет иметь вид:

$$E_\kappa = N \frac{m\langle u^2 \rangle_\kappa}{2} = \frac{1}{2} N k_{\mathcal{B}} \mathcal{B}_\kappa T = \frac{1}{2} N k_{\mathcal{B}} T_\kappa, \qquad (11)$$

где

$$\mathcal{B}_\kappa := \frac{1}{|2\kappa|} \frac{2+|\kappa|}{2+3|\kappa|} \ \frac{\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1} - 3/4\right]\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1} + 1/4\right]}{\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1} + 3/4\right]\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1} - 1/4\right]}. \qquad (12)$$

(Заметим, что из свойств Гамма-функции следует, что $\lim_{\kappa \to 0} \mathcal{B}_{\{\kappa\}} = 1$).

Поскольку определение температуры в κ-статистике достаточно произвольно (оно зависит от довольно произвольного определения температуры с точки зрения множителей Лагранжа (Колесниченко, 2020a)), то далее мы будем интерпретировать величину $T_\kappa := \mathcal{B}_\kappa T$ как обобщённую температуру сложной неаддитивной κ-системы. Естественно, что эта температура в корне отличается от абсолютной термодинамической температуры T, характеризующей интенсивность хаотизации (беспорядочного движения) частиц системы.

Используя (12), определим используемые далее удельную (на единицу массы) внутреннюю κ-энергию и κ-давление вещества протозвездного облака соотношениями

$$\varepsilon_\kappa := \frac{3E_\kappa}{mN} = \frac{3k_{\mathcal{B}}}{2m} T_\kappa, \quad p_\kappa = \frac{2}{3}\rho\varepsilon_\kappa = \frac{k_{\mathcal{B}}}{m}\rho T_\kappa = k_{\mathcal{B}} T_\kappa n. \qquad (13)$$

Здесь $n := N / V$, $\rho := mN / V$ – соответственно числовая плотность и массовая плотность вещества облака. Заметим, что формула (13) для внутренней энергии экстенсивного вещества в случае $\kappa \to 0$ принимает вид $\varepsilon = (3/2) k_{\mathcal{B}} T / m$, что соответствует выражению для энергии идеального газа в статистике Больцмана−Гиббса.

Деформированная термодинамика на основе каппа-статистики. Далее в работе будут использованы результаты работ (Scarfone, Wada, 2006; Колесниченко, 2020a,b), в которых выполнено конструирование на основе параметрической κ-энтропии статистической термодинамики неэкстенсивных систем. Проведенное в них исследование базировалось на свойствах негиббсового канонического κ-распределения, полученного из принципа Джейнса (Jaynes,1963) максимума κ-энтропии при заданности усредненной внутренней энергии системы, и вероятностной нормировке для функции κ-распределения. Было показано, что все важнейшие термодинамические характеристики системы, такие как энтропия, полная и свободная энергия, могут быть выражены с использованием только равновесной функции κ-распределения. Полученные при этом дифференциальные уравнения равновесной термодинамики для средних величин имеют следующую почти классическую форму:

$$F_\kappa = -k_{\mathcal{B}} T \ln_\kappa Z_\kappa, \quad E_\kappa = -T^2 \left(\partial (T^{-1} F_\kappa) / \partial T \right)_V, \tag{14}$$

$$TS_\kappa = E_\kappa - F_\kappa, \quad S_\kappa = -\left(\partial F_\kappa / \partial T \right)_V, \tag{15}$$

$$C_{V,\kappa} = \left(\partial E_\kappa / \partial T \right)_V = \frac{3}{2} N \mathcal{B}_\kappa k_{\mathcal{B}}, \tag{16}$$

$$p_\kappa = -\left(dF_\kappa / dV \right)_T. \tag{17}$$

Здесь Z_{κ}, F_{κ}, $C_{V,\kappa}$ – соответственно обобщенные статистический интеграл, свободная энергия и теплоемкость (при постоянном объеме) системы.

2.ТЕРМОДИНАМИКА ИЗЛУЧЕНИЯ ЧЕРНОГО ТЕЛА В КАППА-СТАТИСТИКЕ

Электромагнитное излучение, находящееся в тепловом равновесии (черное излучение), можно рассматривать как фотонный газ. В силу целочисленности момента импульса фотонов этот газ подчиняется статистике Бозе−Эйнштейна. Поскольку фотоны не взаимодействуют друг с другом (принцип суперпозиции для электромагнитного поля), то состоящий из фотонов газ можно считать идеальным. Однако при этом необходимо наличие хотя бы небольшого количества материальной среды (например, газа) для самой возможности установления теплового равновесия в излучении. В этом случае механизм, обеспечивающий установление равновесия, заключается в поглощении и испускании фотонов веществом. Это обстоятельство приводит к специфической особенности фотонного газа − число частиц N в нем не сохраняется и само должно определиться из условий теплового равновесия, что приводит к равенству нулю химического потенциала μ фотонного газа (см. Ландау, Лифшиц, 1976).

Из-за важности радиации для моделирования различных астрофизических объектов излучение абсолютно черного тела исследовалось в первую очередь в рамках неэкстенсивной q-статистики Тсаллиса (см., например, Tsallis и др. 1995; Колесниченко, 2020c). В данном разделе мы получим термодинамические свойства чернотельного излучения в рамках κ-статистики Каниадакиса.

Распределение фотонов по различным уровням энергии $\varepsilon = h\nu$ (где ν − частота фотонов; $h = 6.626176(36)\times 10^{-27}\,\text{эрг}\cdot c$ – постоянная Планка) в статистике Каниадакиса имеет следующий вид (Aliano и др., 2003)

$$f(\varepsilon)=\frac{1}{\exp_{\kappa}(\varepsilon/k_{\mathcal{B}}T)-1}. \qquad (18)$$

В предельном случае к→ 0 обобщенное распределение (18) сводится к классическому распределению Бозе–Эйнштейна.

Умножая распределение (18) на плотность квантовых состояний фотонов с частотами собственных колебаний в интервале между ν и $\nu+d\nu$ (Ландау, Лифшиц,1976)

$$d\Omega=V(8\pi\nu^2c^3)d\nu, \qquad (19)$$

(где V – объем системы; $c=2.99792458\times10^{10} см/сек$ – скорость света в вакууме), получим следующую формулу для полного числа фотонов в этом участке спектра:

$$dN_{\kappa}^{rad}(\nu)=V\frac{8\pi}{c^3}\frac{\nu^2}{\exp_{\kappa}(\frac{h\nu}{k_{\mathcal{B}}T})-1}d\nu, \qquad (20)$$

а при умножении (20) еще и на $h\nu$ приходим к выражению для полной энергии излучения в данном интервале частот:

$$dE_{\kappa}^{rad}(\nu)=V\frac{8\pi}{c^3}\frac{h\nu^3}{\exp_{\kappa}(\frac{h\nu}{k_{\mathcal{B}}T})-1}d\nu. \qquad (21)$$

Соотношение (21) представляет собой обобщенный в рамках статистики Каниадакиса закон излучения Планка. При $\kappa\to0$ он сводится к классическому закону чернотельного излучения.

Термодинамика чернотельного излучения. Если теперь ввести переменную интегрирования $x:=h\nu/k_{\mathcal{B}}T$ и проинтегрировать (21) по всем частотам, то в результате получим полную энергию излучения в данном объеме среды

$$E_\kappa^{rad} := \int\limits_0^\infty dE_\kappa^{rad}(\nu) = V\frac{8\pi}{c^3}\int\limits_0^\infty \frac{h\nu^3}{\exp_\kappa(\frac{h\nu}{k_{\mathcal{B}}T})-1}d\nu =$$

$$= V\frac{8h\pi}{c^3}\left(\frac{k_{\mathcal{B}}T}{h}\right)^4\int\limits_0^\infty \frac{x^3}{\exp_\kappa(x)-1}dx. \tag{22}$$

В выражение (22) входит интеграл вида $\int\limits_0^\infty \frac{x^3dx}{\exp_\kappa(x)-1}$, который при $\kappa \to 0$ равен $\pi^4/15 \simeq 6.49394$ (Ландау, Лифшиц,1976). Введем обозначение для интеграла[1)]

$$J_\kappa(n) := \frac{15}{\pi^4}\int\limits_0^\infty \frac{x^n dx}{\exp_\kappa(x)-1}. \tag{23}$$

Тогда для полной энергии излучения черного тела в формализме Каниадакиса будем иметь (обобщенный закон Больцмана)

$$E_\kappa^{rad}(T) = V\frac{8\pi^5 k_{\mathcal{B}}^4}{15c^3h^3}J_\kappa(3)T^4 = Va_\kappa T^4. \tag{24}$$

Здесь

$$a = \frac{8}{15}\frac{\pi^5 k_{\mathcal{B}}^4}{c^3h^3} = 7.56566(71)\times 10^{-15}\,\textit{эрг}\,\textit{см}^{-3}\,K^{-4}, \quad a_\kappa := aJ_\kappa(3) \tag{25}$$

– соответственно классическая и модифицированная постоянная плотности излучения Планка.

[1)] Формула для вычисления этого интеграла получена в работе (Колесниченко, 2020c); в частности, $J_\kappa^{(3)} = \frac{15}{\pi^4(1-\kappa)^3}\sum_{j=0}^{3}\left[C_3^j B\big(1-\kappa,\ (1-\kappa)(3-j)+1\big)\right]$, где $B(x,y)$ – Бета-функция.

При использовании соотношений (15) и (24) легко получить следующее выражение для свободной энергии излучения черного тела:

$$F_{\kappa}^{rad}(T) = -T\int E_{\kappa}^{rad}\frac{dT}{T^2} = -\frac{4V}{3c}\frac{2\pi^5 k_{\mathcal{B}}^4}{15c^2h^3}J_{\kappa}(3)T^4 =$$

$$= -\frac{V}{3}aJ_{\kappa}(3)T^4 = -\frac{V}{3}a_{\kappa}T^4 = -\frac{1}{3}E_{\kappa}^{rad}. \qquad (26)$$

Согласно формуле (14), энтропия черного излучения в статистике Каниадакиса равна

$$S_{\kappa}^{rad} = -\left(\frac{\partial F_{\kappa}^{rad}}{\partial T}\right)_V = \frac{16V}{3c}\frac{2\pi^5 k_{\mathcal{B}}^4}{15c^2h^3}J_{\kappa}(3)T^3 = \frac{4V}{3}a_{\kappa}T^3. \qquad (27)$$

Тогда из (24)-(26) следует соотношение

$$T\,S_{\kappa}^{rad}(T) = E_{\kappa}^{rad}(T) - F_{\kappa}^{rad}(T), \qquad (28)$$

которое доказывает инвариантность величины полной энергии чернотельного излучения $E_{\kappa}^{rad}(T)$ и в каппа-статистике.

Давление и теплоемкость (при постоянном объеме) для черного излучения в статистике Каниадакиса могут быть определены, согласно формулам (16) и (17), соотношениями:

$$C_{V,\kappa}^{rad} = \left(\frac{\partial E_{\kappa}^{rad}}{\partial T}\right)_V = 4Va_{\kappa}T^3, \quad p_{\kappa}^{rad} = -\left(\frac{dF_{\kappa}^{rad}}{dV}\right)_T = \frac{1}{3}a_{\kappa}T^4 = \frac{1}{3V}E_{\kappa}^{rad} \qquad (29)$$

Таким образом, несмотря на зависимость термодинамических величин от параметра деформации κ, уравнение для полной энергии излучения (28) и уравнение состояния лучевого давления

$$Vp_{\kappa}^{rad} = \frac{V}{3} a_{\kappa} T^4 = \frac{1}{3} E_{\kappa}^{rad} \tag{30}$$

остаются неизменными и в формализме Каниадакиса.

В заключение этого раздела следует отметить, что все приведенные здесь величины восстанавливают свои стандартные выражения в пределе $\kappa \to 0$. Пересмотр термодинамических свойств излучения черного тела в каппа-формализме показывает, что оно излучает больше энергии с увеличением значения параметра деформации $|\kappa|$ по сравнению со стандартным законом излучения Планка. Кроме этого, было установлено, что эффекты деформированной статистики Каниадакиса более заметны при высоких температурах (Lourek, Tribeche, 2016).

3. ЭФФЕКТИВНАЯ ГРАВИТАЦИОННАЯ ПОСТОЯННАЯ В РАМКАХ ФОРМАЛИЗМОВ ВЕРЛИНДЕ И КАНИАДАКИСА

В соответствии с теорией ускоренного расширения Вселенной (Verlinde, 2011) центральным понятием, необходимым для возникновения гравитации является информация, которая подчиняется голографическому принципу (см., например, Susskind, 1995), и хорошо известный закон равнораспределения энергии. Здесь под голографией понимается информация о Вселенной, закодированная на экране (устройстве хранения информации), который трактуется как некая двумерная поверхность Вселенной. Согласно голографическому принципу рост информации, связанный с увеличением поверхности Вселенной, занимаемой материальными телами, приводит к увеличению энтропии, хранящейся на голографических экранах; отсюда возникновение градиента энтропии (энтропийная сила), направленного против увеличения радиуса указанной площади поверхности. А это и есть гравитация (см. Колесниченко, Маров, 2020).

В работах (Abreua др., 2013; Abreua др.,2016) с учетом формализма Верлинде дан вывод модифицированной гравитационной постоянной в рамках статистики Тсаллиса. Повторим кратко здесь этот вывод в рамках формализма Каниадакиса. С этой целью рассмотрим поверхность сферы радиуса R (играющую роль голографического экрана), которая находится в состоянии теплового равновесия и в центре которой находится масса M. Будем предполагать, что число битов, которые являются наименьшей единицей измерения информации на экране, пропорционально площади голографического экрана $A = 4\pi R^2$; тогда полное число битов N может быть записано в виде

$$N = A / L_{Pl}^2 = 8\pi^2 R^2 c^3 / hG. \tag{31}$$

Здесь $L_{Pl} = \sqrt{Gh / 2\pi c^3} = 1.616225 \times 10^{-35}\,\textit{м}$, $G = 6.6720(41) \times 10^{-8}\,\textit{дин}\,\textit{см}^2\textit{г}^{-2}$, – соответственно панковская длина и гравитационная постоянная. В формализме Верлинде предполагается, что полная энергия битов на голографическом экране задается законом равнораспределения энергии $E = N\,k_{\mathcal{B}}T / 2$, который выводится в классической статистике Больцмана–Гиббса. Как было показано выше, этот закон в статистике Каниадакиса модифицируется следующим образом

$$E_\kappa = \frac{N}{2}\frac{1}{|2\kappa|}\frac{2+|\kappa|}{2+3|\kappa|}\;\frac{\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1} - 3/4\right]\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1} + 1/4\right]}{\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1} + 3/4\right]\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1} - 1/4\right]} k_{\mathcal{B}}T = \frac{N}{2} k_{\mathcal{B}} T_\kappa. \tag{32}$$

Отсюда с учетом того, что энергия тестовой частицы внутри голографического экрана делится поровну на все биты, можно записать следующее соотношение

$$Mc^2 = E_{\text{к}} = \frac{N}{2}\mathcal{B}_{\text{к}} k_{\mathcal{B}} T \ , \qquad (33)$$

где M – масса, которая в голографическом принципе возникает в области пространства, ограниченного экраном. Тестовая частица с массой m воспринимает всю энергию, распределенную по занятым битам, что следует из соотношения (33), которое представляет собой полную энергию, сосредоточенную на голографическом экране.

Важно отметить, что наблюдатель в системе покоя этой тестовой частицы, которая представляет собой ускоренную систему координат, зарегистрирует за счет эффекта Унру[2)] (Unruh, 1970) наличие следующей температуры чернотельного излучения космологического горизонта:

$$k_B T := \frac{1}{4\pi^2}\frac{a_{ac}\, h}{c}, \qquad (34)$$

которая зависит только от ускорения и выбора естественных единиц. Здесь a_{ac} – местное равномерное ускорение связанного с тестовой частицей кадра. Поэтому в энтропийной теории Верлинде температуру Унру можно принять за температуру голографического экрана[3)]. Важно отметить, что при использова-

---

[2]) Эффект Унру (Unruh effect) – предсказываемый квантовой теорией поля эффект наблюдения теплового излучения в ускоряющейся системе отсчёта при отсутствии этого излучения в инерциальной системе отсчёта.

3) Температура Унру имеет тот же вид, что и температура Хокинга $T_H = gh / 4\pi^2 c k_B$, где g обозначает поверхностную гравитацию черной дыры, которая была получена С. Хокингом (Hawking, 1975). Поэтому в свете принципа эквивалентности ее иногда называют температурой Хокинга–Унру.

нии принципа эквивалентности, ускорение a_{ac}, фигурирующее в формуле (34), является также модифицированным абсолютным ускорением свободного падения, связанным с массивным телом в формализме Верлинде–Каниадакиса. Действительно, подставляя формулу (31) в соотношение (33) и используя выражение (34) получим, что

$$k_B T = \frac{1}{4\pi^2}\frac{a_{ac}h}{c} = \frac{2Mc^2 hG}{8\pi^2 R^2 c^3 B_\kappa},$$

откуда следует модифицированная формула для ускорения

$$a_{ac} = \frac{M}{R^2}\frac{G}{\mathcal{B}_\kappa} = \frac{M}{R^2}G_\kappa. \tag{35}$$

Здесь

$$G_\kappa = \frac{G}{\mathcal{B}_\kappa} = |2\kappa|\frac{2+3|\kappa|}{2+|\kappa|}\times\frac{\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1}+3/4\right]\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1}-1/4\right]}{\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1}-3/4\right]\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1}+1/4\right]}G \tag{36}$$

– эффективная гравитационная постоянная, полученная в рамках формализмов Верлинде и Каниадакиса. Заметим, что при $\kappa = 2/3$ (критическое значение параметра деформации) величину G_κ нельзя вычислить из соотношения (36), поскольку в его знаменателе находится расходящаяся для этого значения Гамма-функция. Таким образом, число $\kappa = 2/3$ является верхним пределом, когда мы имеем дело с голографическим экраном (сравни с результатами работы (Tsallis, Cirto, 2013).

4. РАВНОВЕСНОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОТОЗВЕЗДНОГО ОБЛАКА С ЧЕРНОТЕЛЬНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

Будем далее предполагать, что протозвездное облако является квазиравновесным, сферически симметричным и оптически толстым, причем распределение поля излучения также близко к равновесному. Пусть r означает радиусвектор, измеренный от центра конфигурации, принятого за начало координат. Для сферически симметричного распределения космического вещества все физические параметры будут функциями только от одного параметра r. Пусть $M(r)$ – масса, заключенная внутри сферы радиуса r. Тогда

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r)\,dr, \qquad dM(r) = 4\pi r^2 \rho dr. \tag{37}$$

Будем обозначать через $\bar\rho(r)$ среднюю плотность внутри сферы радиуса r, а через $\bar\rho$ средняя плотность всей конфигурации протозвездного облака

$$\bar\rho(r) = \frac{M(r)}{\tfrac{4}{3}\pi r^3}, \quad \bar\rho = \frac{M}{\tfrac{4}{3}\pi R^3}. \tag{38}$$

Здесь M – масса всей конфигурации, а R – радиус конфигурации, который равен радиус-вектору точки, в которой все термодинамические параметры космического вещества обращаются в нуль.

Условие механического равновесия неэкстенсивного протозвездного сферически симметричного облака имеет вид

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dP_\kappa}{dr} = G_\kappa \frac{M(r)}{r^2}. \tag{39}$$

Здесь введены следующие обозначения: $P_\kappa(r) = p_\kappa + p_\kappa^{rad} \equiv p_\kappa + a_\kappa T^4/3$ – полное давление космического вещества, состоящего из идеального κ-газа и чёрнотельного κ-излучения; $p_\kappa(r) = \frac{2}{3}\rho\varepsilon_\kappa = \frac{k_{\mathcal{B}}}{m}\mathcal{B}_\kappa T\rho$ – газовое давление в неэкстенсивной протозвездной конфигурации (определяемое формулой (13)); $p_\kappa^{rad} \equiv a_\kappa T^4/3$ – лучевое давление (определяемое формулой (29)); $G_\kappa = G/\mathcal{B}_\kappa$ – эффективная гравитационная постоянная (см. формулу (36)).

Введем уже здесь необходимую для дальнейших целей величину

$$\beta_\kappa := \frac{p_\kappa}{P_\kappa} = \frac{p_\kappa}{p_\kappa + p_\kappa^{rad}} = \left[1 + \frac{a_\kappa}{3\mathcal{B}_\kappa}\frac{1}{k_{\mathcal{B}}n}T^3\right]^{-1}, \tag{40}$$

характеризующую долю вещества в полном давлении системы[4)].

Из (38) и (39) следует фундаментальное уравнение равновесия:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dP_\kappa}{dr}\right) = -4\pi G_\kappa \rho,$$

которое может быть записано в виде

$$\frac{dP_\kappa}{dr} = -\frac{G_\kappa M(r)}{4\pi r^4}\frac{dM(r)}{dr}. \tag{41}$$

Так как

$$\frac{d}{dr}\left[P_\kappa + \frac{G_\kappa M^2(r)}{8\pi r^4}\right] = \frac{dP_\kappa}{dr} + \frac{G_\kappa M(r)}{4\pi r^4}\frac{dM(r)}{dr} - \frac{G_\kappa M^2(r)}{2\pi r^5},$$

то, с учетом уравнения (41), получим:

$$\frac{d}{dr}\left[P_\kappa(r) + \frac{G_\kappa M^2(r)}{8\pi r^4}\right] = -\frac{G_\kappa M^2(r)}{2\pi r^5} < 0, \tag{42}$$

что означает уменьшение функции $\left(P_\kappa(r) + G_\kappa M^2(r)/8\pi r^4\right)$ от центра к периферии для любой равновесной конфигурации неэкстенсивного протозвездного

[4)] На особую важность отношения $(1-\beta)$ для классической теории звездной структуры впервые указал Эддингтон. В известном отрывке из его книги «Внутреннее строение звезд» Эддингтон связывал это отношение с «явлением звезды» («happening of the stars»).

облака. Если $P_{\kappa,ce}$ означает центральное давление, то для него справедливо следующее интегральное неравенство

$$P_{\kappa,ce} > P_\kappa(r) + \frac{G_\kappa M^2(r)}{8\pi r^4} > \frac{GM^2}{8\pi \mathcal{B}_\kappa R^4}. \tag{43}$$

(ср. Чандрасекар, 1950 Теорема 1, стр.106).

5. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО ВЕЩЕСТВА И ЧЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В СТАТИСТИКЕ КАНИАДАКИСА

Приступим теперь к основной цели данной работы – выводу в рамках каппа-статистики модифицированного интегрального критерия устойчивости Чандрасекара для «материнской» звёздной туманности (небулы). Далее мы будем исходить из гипотезы Ф. Хойла (Hoyle,1960) о совместном образовании звезды и допланетного облака из вещества единой вращающейся звёздной туманности.

Модифицированное в рамках каппа- статистики неравенство, которому удовлетворяют давление $P_{\kappa,ce}$ и плотность ρ_{ce} в центре притяжения гравитирующего облака массы M, средняя плотность $\bar{\rho}$ вещества звезды и эффективная гравитационная постоянная G_κ, принимает вид:

$$\frac{1}{2\mathcal{B}_\kappa} G \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} \bar{\rho}^{4/3} M^{2/3} \le P_{\kappa,ce} \le \frac{1}{2\mathcal{B}_\kappa} G \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} \rho_{ce}^{4/3} M^{2/3}. \tag{44}$$

Классическая форма этого неравенства было получено Чандрасекаром (1950) в предположении, что средняя плотность $\rho(r)$ внутри сферы радиуса r, выделенной из общей массы протозвездного облака, не увеличивается от центра к поверхности. Согласно этому неравенству, давление, действующее в центре облачной конфигурации массы M, является промежуточным между давлениями в центрах двух конфигураций с однородной плотностью – одна с плотностью, равной средней плотности $\overline{\rho}$ конфигурации, а другая с плотностью, равной плотности вещества ρ_{ce} в ее центре. Случай существования областей, в которых неравенство (50) нарушается, означает неустойчивости всего протозвездного облака (Чандрасекар, 1985).

Для вывода неравенства (44) используем соотношение (41), из которого, с учетом соотношения $r^4 = \left[M(r) / \frac{4}{3}\pi\overline{\rho}(r) \right]^{4/3}$ (см. уравнение (38)), будем иметь

$$P_{\text{к},ce} - P_{\text{к}} = \frac{G_{\text{к}}}{4\pi}\int_0^r \frac{M(r)}{r^4} dM(r) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{4/3} G_{\text{к}} \int_0^r \overline{\rho}^{4/3}(r) M^{-1/3}(r) dM(r). \quad (45)$$

Так как по предположению $\overline{\rho}(r)$ не увеличивается с увеличением r, то из (45) следует, что

$$P_{\text{к},ce} - P_{\text{к}} \geq \frac{1}{4\pi}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{4/3} G_{\text{к}} \overline{\rho}^{4/3}(r) \int_0^r M^{-1/3}(r) dM(r). \quad (46)$$

Вычисляя интеграл в правой части (46), получим

$$P_{\text{к},ce} - P_{\text{к}} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} G_{\text{к}} \overline{\rho}^{4/3}(r) M^{2/3}(r) \quad (47)$$

Обращаясь снова к выражению (45), в согласии с принятой гипотезой имеем:

$$P_{\text{к},ce} - P_{\text{к}} \leq \frac{1}{4\pi}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{4/3} G_{\text{к}} \overline{\rho}_{ce}^{4/3} \int_0^r M^{-1/3}(r) dM(r),$$

или

$$P_{\kappa,ce}-P_{\kappa}\le\frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3}G_{\kappa}\,\bar{\rho}^{4/3}(r)M^{2/3}(r)\,. \qquad (48)$$

Объединяя (47) и (48), получим

$$\frac{1}{2\mathcal{B}_{\kappa}}G\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3}\bar{\rho}^{4/3}(r)M^{2/3}(r)\le P_{\kappa,ce}-P_{\kappa}\le\frac{1}{2\mathcal{B}_{\kappa}}G\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3}\rho_{ce}^{4/3}M^{2/3}(r)\,. \qquad (49)$$

Наконец, полагая в неравенстве (49) $r=R$, получим модифицированное неравенство Чандрасекара (44).

Если теперь в левую часть неравенства (44) вместо плотности $\bar{\rho}$ подставить ее выражение $M/\frac{4}{3}\pi R^3$, то получим

$$\frac{3}{8\pi}\frac{GM^2}{\mathcal{B}_{\kappa}R^4}\le P_{\kappa,ce}\le\frac{1}{2\mathcal{B}_{\kappa}}G\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3}\rho_{ce}^{4/3}M^{2/3}\,. \qquad (50)$$

Таким образом, добавочное ограничение, наложенное на распределение плотностей, а именно, что $\bar{\rho}(r)$ не увеличивается от центра к поверхности, дает возможность улучшить неравенство (43), полученное для $P_{\kappa,ce}$ в предыдущем разделе.

Модифицированная теорема Чандрасекара №7. Исходя из правой части неравенства (44) получим теперь модифицированное в рамках статистики Каниадакиса соотношение (2), т.е. модифицированную теорему 7 (см. Чандрасекар,1950; Теорема 7, стр.113).

Используя для этого определение (40) параметра β_{κ}, уравнения состояния для лучевого давления (30), а также определение давления κ-газа (15), получим $P_{\kappa}=p_{\kappa}/\beta_{\kappa}=p_{\kappa}^{rad}/(1-\beta_{\kappa})$, или

$$P_\kappa = \frac{1}{\beta_\kappa}\frac{k_{\mathcal{B}}}{m}\rho B_\kappa T = \frac{1}{1-\beta_\kappa}\frac{1}{3}a_\kappa T^4, \tag{51}$$

где

$$B_\kappa := \frac{1}{|2\kappa|}\frac{2+|\kappa|}{2+3|\kappa|}\,\frac{\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1}-3/4\right]\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1}+1/4\right]}{\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1}+3/4\right]\Gamma\left[(2|\kappa|)^{-1}-1/4\right]},$$

$$a_\kappa = 8\frac{\pi k_{\mathcal{B}}^4}{c^3h^3}\int_0^\infty \frac{x^3dx}{\exp_\kappa(x)-1}.$$

Отсюда следует, что

$$\beta_\kappa = \left[1+\frac{a_\kappa}{B_\kappa}\frac{1}{3k_{\mathcal{B}}}\frac{T^3}{n}\right]^{-1}, \tag{52}$$

$$T = \left[\frac{3k_{\mathcal{B}}}{m}\frac{(1-\beta_\kappa)}{\beta_\kappa}\frac{B_\kappa}{a_\kappa}\right]^{1/3}\rho^{1/3}. \tag{52}$$

Теперь

$$P_\kappa = \frac{1}{\beta_\kappa}\frac{k_{\mathcal{B}}}{m}\rho B_\kappa T = \left[\left(\frac{k_{\mathcal{B}}}{m}B_\kappa\right)^4\frac{3}{a_\kappa}\frac{(1-\beta_\kappa)}{\beta_\kappa^4}\right]^{1/3}\rho^{4/3}. \tag{53}$$

Следовательно, в центре облачной конфигурации

$$P_{\kappa,ce} = \left[\left(\frac{k_{\mathcal{B}}}{m}B_\kappa\right)^4\frac{3}{a_\kappa}\frac{(1-\beta_{\kappa,ce})}{\beta_{\kappa,ce}^4}\right]^{1/3}\rho_{ce}^{4/3}. \tag{54}$$

С другой стороны, согласно неравенству (50) имеем

$$P_{\kappa,ce} \le \frac{1}{2} G_{\kappa} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} M^{2/3} \rho_{ce}^{4/3} . \tag{55}$$

Сравнивая (54) и (55) и учитывая (36), получим:

$$\left[\left(\frac{k_{\mathcal{B}}}{m} \right)^4 B_{\kappa}^7 \frac{3}{a_{\kappa}} \frac{(1-\beta_{\kappa,ce})}{\beta_{\kappa,ce}^4} \right]^{1/3} \le G \left(\frac{\pi}{6} \right)^{1/3} M^{2/3} , \tag{56}$$

или

$$\left[\frac{B_{\kappa}^7}{J_{\kappa}(3)} \frac{(1-\beta_{\kappa,ce})}{\beta_{\kappa,ce}^4} \right]^{-1/2} M \ge \frac{\mu^{-2}}{G^{3/2}} \left(\frac{18}{a\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{k_{\mathcal{B}}}{m_H} \right)^2 =$$

$$= \left(\frac{ch}{G} \right)^{3/2} \mu^{-2} m_H^{-2} \frac{\sqrt{135}}{2\pi^3} = 5.48 M_{\odot} \mu^{-2} . \tag{57}$$

Здесь использованы соотношения: $a_{\kappa} = a J_{\kappa}(3) = J_{\kappa}(3)\, 8\pi^5 k_B^4 / 15 h^3 c^3$ – модифицированная постоянная плотности излучения Планка; $m = \mu m_H$, где μ – средний молекулярный вес; $\left(hc / G \right)^{3/2} m_H^{-2} \approx 29.2 M_{\odot}$; m_H – масса атома водорода; $M_{\odot}$ – масса Солнца.

Из (57) следует неравенство

$$M \ge 5.48 M_{\odot} \mu^{-2} \left[\frac{B_{\kappa}^7}{J_{\kappa}(3)} \frac{(1-\beta_{\kappa,ce})}{\beta_{\kappa,ce}^4} \right]^{1/2} , \tag{58}$$

которое и дает нижний предел устойчивости гравитирующего облака (сферической газовой конфигурации) с массой M в рамках неэкстенсивной кинетики Каниадакиса.

С другой стороны, если ввести параметр $\beta_{\text{к}}^{*}$, который однозначно определяется массой M облачной конфигурации и молекулярным весом μ_{ce} в ее центре при помощи уравнения четвертого порядка (см. Чандрасекар, 1985)

$$G^{-3/2}\left(\frac{18}{\pi}\right)^{1/2}\left[\left(\frac{k_{\mathcal{B}}}{\mu_{ce}m_H}\right)^4 \frac{B_{\text{к}}^7}{a_{\text{к}}}\frac{(1-\beta_{\text{к}}^{*})}{\beta_{\text{к}}^{*4}}\right]^{1/2} = M, \tag{59}$$

то неравенство (58) может быть переписано в виде

$$\frac{(1-\beta_{\text{к}}^{*})}{\beta_{\text{к}}^{*4}} \geq \frac{(1-\beta_{\text{к},ce})}{\beta_{\text{к},ce}^{4}}, \tag{60}$$

или, поскольку функция $(1-\beta)\beta^{-4}$ монотонно увеличивается с увеличением $(1-\beta)$, то справедливо неравенство:

$$1-\beta_{\text{к}}^{*} \geq 1-\beta_{\text{к}ce}. \tag{61}$$

Таким образом, устойчивость сферического протозвездного неэкстенсивного облака с массой M определяется следующей модифицированной теоремой: отношение лучевого давления к полному давлению в центре конфигурации, находящейся в равновесии, $1-\beta_{\text{к},ce}$, в которой $\overline{\rho}(r)$ не увеличивается от центра к периферии, удовлетворяет неравенству (61), где параметр $\beta_{\text{к}}^{*}$ удовлетворяет уравнению четвертой степени (59).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные этапы эволюции околозвездных аккреционных газопылевых дисков в настоящее время все более проясняются и уточняются. Однако проблема построения непротиворечивой картины образования самих звезд и околозвездных облаков до сих пор полностью не решена. Разбор современных гипотез их образования показывает, что все эти гипотезы встречаются со значительными трудностями (см., например, Сафронов, 1969). Наиболее предпочтительной и перспективной сейчас представляется гипотеза совместного образования и эволюции звезды и протозвездного облака из единой конечной вращающейся туманности в результате потери ею гравитационной устойчивости (Hoele, 1960).

Большинство обнаруженных на сегодня экзопланетных дисков вокруг солнечноподобных звезд сильно отличаются от протопланетного диска Солнца. По этой причине современная теория происхождение Солнечной системы, является одной лишь из многих, и для моделирования эволюции любой другой конечной протозвездной туманности подходящая теория может быть, вообще говоря, более сложной. Об этом, в частности, свидетельствует коллекция обнаруженных во Вселенной экзопланет, которые весьма разнообразны. В связи со сказанным возникает, по мнению автора, необходимость в разработке нестандартного подхода, объясняющего до известной степени многообразие открытых экзопланетных аккреционных дисков вокруг звезд и экзопланет.

В настоящей работе в рамках такого подхода на основе неэкстенсивной статистической механики Каниадакиса получено обобщение интегральной теоремы устойчивости Чандрасекара сферически симметричного распределения материи и черного излучения в протозвездном облаке, находящемся в состоянии гравитационного равновесия.

Следует заметить, что исследования в области статистической механики неэкстенсивных систем приобретают в настоящее время значительный общетеоретический интерес в связи с проявлениями неэкстенсивных аномальных свойств в ряде физических явлений и важностью практических приложений. Диапазон применения различных неэкстенсивных статистик в настоящее время постоянно расширяется, охватывая различные направления в науке, такие как космология и космогония, квантовая механика и статистика, специальная и общая теории относительности, стохастическая динамика и фракталы, геофизика, биомедицина и многие другие. Среди всех параметрических неэкстенсивных энтропий особый интерес представляет энтропия Каниадакиса, введенная впервые в работах (Kaniadakis, 2001a,b; 2005; Kaniadakis, Scarfone, 2002; Kaniadakis и др., 2002). Основанная на каппа-энтропии неэкстенсивная статистика пригодна для описания очень большого класса аномальных явлений в целом ряде прикладных областей.

В первых разделах представленной работы изложены кратко, без математических деталей и выводов, те новые результаты статистической теории Каниадакиса, которые использованы для вывода модифицированного интегрального критерия устойчивости Чандрасекара. При этом ссылки на литературные источники минимальны и служат в основном для указания работ, в которых затрагиваются элементы рассматриваемой проблемы. Последний раздел посвящен основной цели данной работы – выводу в рамках статистики Каниадакиса интегрального условия устойчивости для сферически симметричного распределения вещества и излучения в протозвездной туманности.

Развитый в работе подход предназначен для конструирования целого ряда моделей неэкстенсивных космологических и космогонических сред (звезд, протозвездных туманностей, экзопланетных аккреционных дисков и др.), отличительной чертой которых является наличие динамических структур с нецелой топологической размерностью, дальнодействующего силового взаимодействия, а также неэкстенсивного чернотельного излучения.

Автор признателен правительству Российской Федерации и Министерству высшего образования и науки РФ за поддержку по Гранту 075-15-2020-780 (N13.1902.21.0039).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Зарипов Р.Г. Самоорганизация и необратимость в неэкстенсивных системах // Казань: Фэн. 2002. 251 с.

Зарипов Р.Г. Принципы неэкстенсивной статистической механики и геометрия мер беспорядка и порядка. Казань: Изд-во Казан. Гос. техн. ун-та. 2010. 404 с.

Колесниченко А.В. Двухпараметрический энтропийный функционал Шарма-Миттала, как основа семейства обобщенных термодинамик неэкстенсивных систем // Mathematica Montisnigri. 2018. V. 42. P. 74-101.

Колесниченко А.В. Статистическая механика и термодинамика Тсаллиса неаддитивных систем. Введение в теорию и приложения. М.: ЛЕНАНД. (Синергетика: от прошлого к будущему. № 87). 2019a. 360 с.

Колесниченко А.В. Вывод в рамках неэкстенсивной кинетики критерия неустойчивости Джинса для допланетного облака с учетом радиации и магнитного поля // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2019b. № 95. 32 с.

Колесниченко А.В. К построению статистической термодинамики неэкстенсивных систем на основе каппа-энтропии Каниадакиса // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2020a. № 17. 36 с.

Колесниченко А.В. Двухпараметрическая энтропия Шарма−Танеджа −Миттал как основа семейства равновесных термодинамик неэкстенсивных систем // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2020b. № 36. 35 с.

Колесниченко А.В., Маров М.Я. Сценарий ускоренного расширения Вселенной под воздействием энтропийных сил, связанных с энтропиями Барроу и Тсаллиса-Чирто // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2020. № 105. 38 с.

Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая механика. Ч. I. М.: Наука. 1976. 588 с.

Сафронов В.С. Эволюция допланетного облака и образование Земли и планет. М.: Наука. 1969. 244 с.

Чандрасекар С. О звездах, их эволюции и устойчивости // УФН. 1985. Т.145. № 3. С. 489-506.

Чандрасекар С. Введение в учение о строении звезд. М.: Изд-во ИЛ. 1950. 476 с.

Abe S. A note on the q-deformation-theoretic aspect of the generalized entropies in nonextensive physics // Physics Letters A. 1997. V. 224. P. 326-330.

Abreua E.M.C., Neto J. A., Mendes A. C.R. Oliveira W. New bounds for Tsallis parameter in a noncommutative phase–space entropic gravity and nonextensive Friedmann equations // Physica A. 2013. V. 392. P. 5154-5163.

Abreu E. M.C., Neto J. A., Barboza Jr. E. M., Nunes R. C. Holographic considerations on non-gaussian statistics and gravothermal catastrophe // Physica A. 2016. V. 441. P. 141-150.

Aliano A., Kaniadakis G., Miraldi E. Bose–Einstein condensation in the framework of κ-statistics // Physica B. 2003. V. 325. P. 35-40.

Bento E. P., Silva J.R.P., Silva R. Non-Gaussian statistics, Maxwellian derivation and stellar polytropes // Physica A. 2013. V 392. P. 666-672.

Carvalho J. C., Silva R., do Nascimento J. D. Jr., De Medeiros J. R. Power law statistics and stellar rotational velocities in the Pleiades // Europhys. Lett. 2008. V. 84. № 5. P. 59001 (pp.5).

Carvalho J. C., do Nascimento J. D. Jr., Silva R., De Medeiros J. R. Non-Gaussian Statistics and Stellar Rotational Velocities of Main-Sequence Field Stars// Astrophys. Journ. Lett. 2009. V. 696. P. L48-L51.

Hawking S. W. Particle Creation By Black Holes // Commun Math. Phys. 1975. V. 43. 199-220.

Hoele F. On the origin of the solar nebula // Quart J. Roy. Astron. Soc. 1960. V. 1. P. 28-55.

Jaynes E.T. Information theory and statistical mechanics // В сб. «Statistical Physics». Brandeis Lectures. 1963. V. 3. P.181.

Kaniadakis, G. Non-linear kinetics underlying generalized statistics // Physica A 2001a. V. 296. P. 405-425.

Kaniadakis, G. H-theorem and generalized entropies within the framework of nonlinear kinetics // Phys. Lett. A. 2001b, V. 288. P. 283-291.

Kaniadakis G. Maximum entropy principle and power-law tailed distributions // Eur. Phys. J. B. 2009. V. 70. № 1. P. 3-13.

Kaniadakis G., Scarfone A.M. A new one-parameter deformation of the exponential function // Physica A. 2002. V. 305. P. 69-75.

Kaniadakis G., Quarati P., Scarfone A. M. Kinetical foundations of nonconventional statistics // Physica A. 2002. V. 305 P. 76-83.

Kaniadakis, G. Statistical mechanics in the context of special relativity II. // Phys. Rev. E. 2005. V. 72. P. 036108.

Kaniadakis G. Statistical origin of quantum mechanics // Physica A. 2002. V. 307 P. 172-184.

Kaniadakis G. Theoretical Foundations and Mathematical Formalism of the Power-Low Tailed Statistical Distributions // Entropy. 2013. V. 15. P. 3983-4010.

Kolesnichenko A.V Modeling the Linear Response from a Quantum Nonextensive System to a Dynamic External Disturbance // Mathematical Models and Computer Simulations. 2020a. V. 12. № 5. P. 647-659.

Kolesnichenko A.V. Jeans Instability of a Protoplanetary Gas Cloud with Radiation in Nonextensive Tsallis Kinetics // Solar System Research, 2020b. V. 54. №. 2. P. 137-149.

Kolesnichenko A.V. Thermodynamics of the Bose Gas and Blackbode Radiation in Non-Extensive Tsallis Statistics // Solar System research. 2020c. V. 54. № 5. P. 420-431.

Kolesnichenko A.V., Chetverushkin B.N. Kinetic derivation of a quasi-hydrodinamic system of equations on the base of nonextensive statistics”, RJNAMM (Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling). 2013. V.28. № 6. P. 547-576.

Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. Renyi Thermodynamics as a Mandatory Basis to Model the Evolution of a Protoplanetary Gas–Dust Disk with a Fractal Structure // Sol. Syst. Res. 2019a. V. 53. № 6. P. 443-461.

Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. Modeling of Aggregation of Fractal Dust Clusters in a Laminar Protoplanetary Disk // Solar System Research. 2013. V. 47. № 2. P. 80-98.

Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. Modification of the jeans instability criterion for fractal-structure astrophysical objects in the framework of nonextensive statistics // Solar System Research. 2014. V. 48, № 5. P. 354-365.

Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. Modification of the Jeans and Toomre Instability Criteria for Astrophysical Fractal Objects Within Nonextensive Statistics// Solar System Research. 2016. V. 50. № 4. P. 251-261.

Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. Streaming Instability in the Gas–Dust Medium of the Protoplanetary Disc and the Formation of Fractal Dust Clusters // Solar System Research. 2019b. V. 53. № 3. P. 181-198.

Landsberg P.T., Vedral V. Distributions and channel capacities in generalized statistical mechanics // Phys. Lett. A. 1998. V. 247. P. 211-216.

Lourek I., Tribeche M. Thermodynamic properties of the blackbody radiation: A Kaniadakis approach // Physics Letters A. 2017. V. 381. P. 452-456.

Nonextensive statistical mechanics and thermodynamics: Bibliography/ http://tsallis.cat.cbpf.br/biblio.htm.

Ourabah K., Tribeche M. Plank radiation law and Einstein coefficients reexamined in Kaniadakis κ statistics // Physical Review T. 2014. V. 89. P. 062130 (pp 5).

Renyi A. On Measures of Entropy and Information, in Proc. 4th Berkeley Symp. on Math. Stat. Prob. 1960. V. 1. University of California Press. Berkeley, Los Angeles. 1961. P. 547-561.

Rossani A., Scarfone A. M. Generalized kinetic equations for a system of interacting atoms and photons: theory and simulations // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2004. V. 37. № 18. P. 4955-4975.

Scarfone A. M., Wada T. Canonical partition function for anomalous systems described by the κ-entropy // Prog. Theor. Phys. Suppl. 2006. V.162. P. 45 -52.

Silva R. The H-theorem in κ-statistics: influence on the molecular chaos hypothesis // Physics Letters A. 2006. V. 352. P. 17-20.

Silva J. M., Silva R., Lima J.A.S. Conservative force fields in non-Gaussian statistics // Physics Letters A. 2008. V. 372. P. 5754-5757.

Sharma B.D., Mittal D.P. New Non-additive Measures of Relative Information // J. Comb. Inform. and Syst. Sci. 1977. V. 2. P.122-133.

Soares B. B., Silva J. R. P. On the rotation of ONC stars in the Tsallis formalism context // Europhys. Lett. 2011. V. 96. P. 19001 (pp.6).

Susskind L. The World as a hologram // J. Math. Phys. 1995. V. 36. № 11. P. 6377-6396.

Taneja I.J. On Generalized Information Measures and Their Applications. Chapter in: Advances in Electronics and Electron Physics, ed. P.W. Hawkes. London: Academic Press. 1989. V.76. P. 327-413.

Tsallis C. Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs-Statistics // J. Stat. Phys. 1988. V.52. № 1-2. P.479-487. (a regular updated bibliography is accessible at http://tsallis.cat.cbpf.br/biblio.htm).

Tsallis C., Sa Barreto F.C., Loh E.D. Generalization of the Planck radiation law and application to the cosmic microwave background radiation // Physical Rev. E. 1995. V. 52. № 2. P. 1448-1451.

Tsallis C., Cirto L. J. L. Black hole thermodynamical entropy. 2013. The European Physical Journal C. 2013. V. 73. №7. P. 2487 (pp.5).

Unruh W.G. Notes on black-hole evaporation. Phys. Rev. D. 1976. V. 14. № 4. P. 870-892.

Verlinde E. On the origin of gravity and the laws of Newton // J. High Energy Phys. 2011. V. 4. P. 1-26.

ОГЛАВЛЕНИЕ