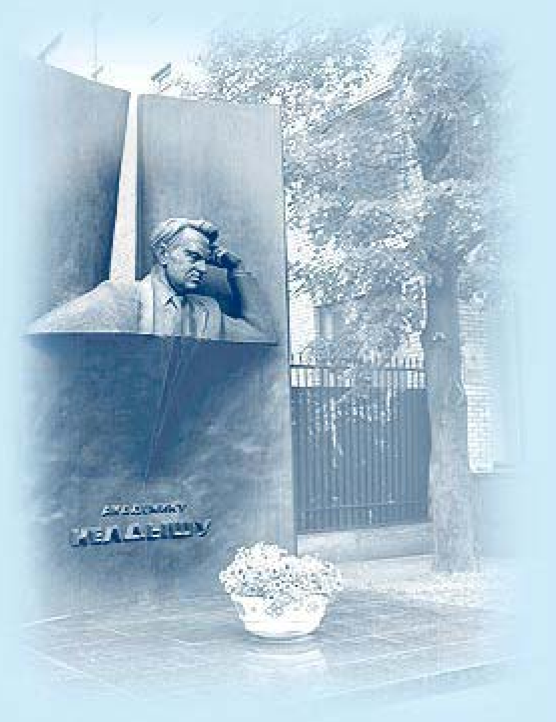
ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 3 за 2021 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

А.В. Колесниченко

Двухпараметрический энтропийный функционал Шарма−Миттал как основа семейства нелинейных уравнений Фоккера−Планка −Колмогорова

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Колесниченко А.В. Двухпараметрический энтропийный функционал Шарма−Миттал как основа семейства нелинейных уравнений Фоккера−Планка−Колмогорова // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. № 3. 35 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2021-3
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-3

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

А.В. Колесниченко

Двухпараметрический энтропийный функционал Шарма−Миттал как основа семейства нелинейных уравнений Фоккера−Планка−Колмогорова

Москва — 2021

Колесниченко Александр Владимирович

Двухпараметрический энтропийный функционал Шарма−Миттал
как основа семейства нелинейных уравнений Фоккера−Планка−Колмогорова.

Аннотация. В работе анализируется важный аспект, связанный с выводом нелинейных степенных уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова, коррелирующих с неэкстенсивной двухпараметрической энтропией Шарма–Миттал для неэкстенсивных систем. При этом получаемые диффузионные уравнения записаны таким образом, что их стационарные решения являются вероятностными распределениями, максимизирующими энтропию ШМ для неэкстенсивных систем. С целью получения точных решений нелинейных нестационарных одномерных уравнений ФПК, связанных с энтропиями Тсаллиса, Реньи и Шарма−Миттал, использован анзац-подход.

Ключевые слова: принципы неэкстенсивной статистической механики, энтропия Шарма−Миттал, степенной закон распределения.

Aleksandr Vladimirovich Kolesnichenko

Two-parameter entropy the Sharma−Mittal functional as core family of nonlinear Fokker−Planck−Kolmogorov equations.

Summary. An important aspect related to the derivation of nonlinear power-law equations of Fokker–Planck–Kolmogorov correlated with the Sharma–Mittal entropy is analyzed in this work. In this case, the obtained diffusion equations are written in such a way that their stationary solutions are probability distributions that maximize the ShM entropy for non-extensive systems. The ansatz approach is used to obtain exact solutions of nonlinear nonstationary one-dimensional FPK equations associated with the Tsallis, Renyi, and Sharma–Mittal entropies.

Key words: principles of nonextensive statistical mechanics, Sharma-Mittal entropy, power law of distribution**.**

ВВЕДЕНИЕ

Статистическая энтропия Больцмана–Гиббса–Шеннона и основанная на ней классическая статистическая механика является чрезвычайно полезным инструментарием при изучении широкого круга простых физических систем. Эти системы, для которых, безусловно, целесообразно использовать классическую статистику и разработанные на её основе теории, можно условно охарактеризовать малым диапазоном пространственно-временных корреляций, эвклидовостью геометрии фазового пространства, марковостью случайных процессов, локальностью силового взаимодействия между элементами системы, эргодичностью динамических процессов и т.п. Такие системы хорошо описываются энтропией Больцмана–Гиббса–Шеннона и, как правило, следуют экспоненциальному закону вероятностных распределений.

Существует, однако, целый круг сложных систем (природных, искусственных и социальных), которые, в отличие от простых, характеризуются большой дальностью пространственно-временных корреляций, глобальностью силовых взаимодействий между элементами системы, иерархичностью (обычно мультифрактальностью) геометрии фазового пространства, немарковостью процессов (длинной памятью), неэргодичностью динамических процессов, наличием асимптотически степенных вероятностных распределений. Довольно широкий класс подобных систем (хотя далеко не всех) адекватно описывается неэкстенсивной (неаддитивной) статистической механикой, основанной, в частности, на параметрических энтропиях Тсаллиса (см. Havrda, Charvat, 1967; Daroczy, 1970; Tsallis, 1988) и Реньи (Renyi, 1961, 1970), которые сохраняют гносеологическую структуру (логическую схему построения) классической статистики (см., например, Curado, Tsallis, 1991; Beck, Schlogl,1993**;** Borges, Roditi, 1998; Tsallis и др., 1998; Naudts, 2004; Tsallis, 2009; Plastino and Plastino, 1997; Tirnakli, Torres, 2000; Lenzi, Mendes, 2001; Abe, 2001; Wada,. Scarfone, 2005; Scarfone, Wada, 2007; Hanel и др., 2009; Зарипов, 2002, 2010; Колесниченко, 2019). Важным преимуществом неэкстенсивных статистик по сравнению с классической статистикой Гиббса является асимптотический степенной закон распределения вероятностей (проявляющийся при максимизации соответствующих параметрических энтропий), который не зависит от экспоненциального поведения, обусловленного распределением Гиббса.

Неэкстенсивная статистика Тсаллиса успешно применяется ко многим системам, начиная от нелинейных диффузионных уравнений (Plastino и др., 2000), обобщенных кинетических уравнений (Boghosian, 1999; Kolesnichenko, Chetverushkin, 2013), систем Фоккера-Планка (Frank, Daffertshofer, 2001b), *H*-

теоремы Больцмана (Mariz, 1992; Ramshaw, 1993a,b; Shiino, 1998; Frank, Daffertshofer, 2001a), удельной теплоемкости гармонического осциллятора (Ito, Tsallis, 1989), квантовой статистики (Büyükkılıç и др., 1995), до изучения космических систем с дальним силовым взаимодействием (Chavanis, Delfini, 2009; Колесниченко, 2016), межзвездной турбулентности (Esquivel, Lazarian, 2010), эволюции астрофизических дисков (Kolesnichenko, Marov, 2013, 2014), скорости солнечного звука (Du, 2006), релаксации спинового стекла (Pickup и др., 2009), городской транспортной системы (Kolesnichenko, 2014), биофизики, экономики, нейрофизики и много другого

Одновременно, наличие степенного закона в неэкстенсивной статистике позволило сконструировать неаддитивные термодинамики, в частности, на основе энтропии Тсаллиса (см. Beck, SchloËgl,1993; Tsallis, 1999, 2001, 2002, 2009; Колесниченко, 2018a,b) и энтропии Реньи (Zaripov, 2005; Parvan, Biro, 2005; Зарипов, 2010).

С другой стороны, энтропия Реньи с успехом используется не только в физике фракталов и в теории информации (см. Mandelbrot, 1974, 1975, 1977, 1982; Beck, Schlögl, 1993; Grassberger,1981,1985; Grassberger, Procaccia, 1984; Halsey и др.,1986; Hentschel, Procaccia,1983; Beck, Schlogl, 1993; Мандельброт, 2002; Зарипов, 2002, 2010; Jizba, Arimitsu, 2004; Bialas, Czyz, 2008), но и в различных областях статистической механики, связанных с динамическим поведением сложных хаотических систем. Последнее связано с тем, что между теорией фракталов, опирающейся на геометрию и теорию размерности, с одной стороны, и теорией хаоса существует глубокая связь. Использование статистики Реньи привело к значительному прогрессу в исследованиях ряда аномальных физических явлений, в частности, в ядерной физике (Nagy, Romera, 2009), в теории черных дыр (Bialas, Czyz, 2008), при изучении фрактальных и мультифрактальных систем в космологии (Mandelbrot, 1977, 1982; Колесниченко 2016, 2019), в квантовой статистике (Aptekarev и др., 2012a,b, 2016) и т.д.

Несколько позднее в статистическую механику был введён новый функционал энтропии − двухпараметрическая энтропия Шарма−Миттал (*SM*) (Sharma, Mittal, 1975), которая, в частности, обобщает энтропии Больцмана−Гиббса−Шеннона, Реньи и Тсаллиса посредством манипулирования двумя параметрами, тем самым рассматривая эти энтропии как некоторые предельные однопараметрические случаи (Frank, Plastino, 2002; Scarfone, Wada, 2005; Scarfone, 2006; Akturk и др., 2007, 2008). Свойства энтропии Шарма−Миттал были тщательно исследованы рядом авторов (см., например, Masi, 2005; Scarfone, 2006; Lenzi, Scarfone, 2012; Kaniadakis и др., 2005; Nielsen, Nock, 2012). Многие неэкстенсивные однопараметрические энтропии, введённые в литературе в рамках обобщённой статистической механики, относятся к *SM* и, таким образом, часто могут изучаться по единообразной схеме. Среди них, упомянутые выше энтропии Больцмана−Гиббса− Шеннона, Реньи и Тсаллиса, а также энтропия Ландсберга−Ведрала (Landberg, Vedral, 1998), Гауссова энтропия (Frank, Plastino, 2002) и некоторые другие.

Энтропия Шарма−Миттал, введённая первоначально в теории информации, в работе (Frank, Plastino, 2002) также была использована для построения обобщенной термостатистики. В работах (Fa, Lenzi, 2004; Scarfone, 2006) для получения обобщенных термодинамических соотношений на базе энтропии *SM* учитывалась гипотеза мультипликативности вероятностного распределения совместной вероятности двух независимых систем.

В данной работе также приведено построение обобщённых неэкстенсивных термодинамик, соответствующих однопараметрическим энтропиям, принадлежащим к семейству Шарма−Миттал. При этом также используются осреднённые значения параметров системы, полученные по нормированному эскортному распределению $f_j = p_j / \sum_j p_j^{\,q}$, которое обычно используется при рассмотрении хаотических, фрактальных и мультифрактальных систем. Однако в отличие от ряда известных работ (см., например, Czachor, Naudts, 2002; Scarfone, 2006; Kaniadakis и др., 2005), в которых подобные исследования по термостатике проведены с привлечением двукратно деформированных экспоненты и логарифма (введённых первоначально в теории информации Шарма и Миттал в 1975 г.), особенность данной работы состоит в том, что проведено построение обобщённых неэкстенсивных термодинамик с помощью более простых и хорошо изученных однократно деформированных функций − логарифма и экспонента Тсаллиса.

К сожалению, обобщенные термодинамики, основанные на базе каких-либо неэкстенсивных статистик, предназначены в основном для описания равновесных состояний физических систем, и не вполне применимы к описанию их неравновесных состояний (см. Amigy и др., 2018). Вместе с тем, одним из основных феноменологических уравнений статистической механики, описывающим, в частности, динамическую эволюцию неравновесной системы, является нелинейное диффузионное уравнения Фоккера−Планка−Колмогорова. Степенные уравнения ФПК нашли применение в различных областях науки, таких как астрофизика, физика плазмы, гидродинамика, биофизика и др. (см., например, Tsallis, Bukman, 1996; Ribeiro и др.,2012; Curado и др., 2014; Combe и др. 2015; Chavanis, 2003; Livadiotis, McComas, 2013; Beck, 2009). Кроме этого, они использовались для моделирования распространения энергии в сильно нелинейных неупорядоченных решетках (Mulansky, Pikovsky, 2013). Нелинейная диффузия и уравнения ФПК тесно связаных также с нелинейными версиями уравнений Шредингера, Дирака и Клейна–Гордона (Nobre и др., 2013), допускающими сложные солитоноподобные аналитические решения, а также с нелинейными волновыми уравнениями, имеющими экспоненциальные плоские волновые решения, модулированные q-гауссианами (Plastino, Wedemann, 2017). Нелинейные диффузионные процессы важны также при изучении распространения биологических популяций (см. Newman, Sagan. 1981; Colombo, Anteneodo, 2018). В частности, основанные на каппа-статистике нелинейные диффузионные уравнения ФПК могут быть использованы в эпидемиологии при предсказании распространения эпидемий и пандемий (Kaniadakis и др., 2020; Клочкова и др., 2020).

Следует отметить, что, несмотря на большое разнообразие исследований в указанных научных областях, все они имеют много общего благодаря кооперативному взаимодействию между отдельными подсистемами рассматриваемой совокупной системы. Эти взаимодействия приводят к уменьшению большого числа степеней свободы систем многих тел и тем самым допускают низкоразмерное описание в терминах нелинейного нестационарного уравнения Фоккера–Планка−Колмогорова, которое раскрывает динамику, лежащую в основе многих наблюдаемых физических явлений.

В последнее время был разработан эффективный подход, позволяющий сконструировать нелинейные уравнения ФПК таким образом, чтобы их стационарные решения были согласованы с соответствующими равновесными (каноническими) распределениями плотности вероятности, полученными из условия экстремальности энтропий для рассматриваемых систем (см. Plastino A.R., Plastino A., 1995; Frank, 2002, 2005). Этот подход, дающий связь энтропии системы с нелинейными уравнениями ФПК, описывающими эволюцию неравновесных явлений, является одним из полезных приложений неэкстенсивной статистической механики. Использование диффузионных уравнений, соотнесенных с энтропийным методом, позволяет найти временную зависимость функции распределения плотности вероятности для неравновесных неэкстенсивных систем.

В данной работе показано, как эффективный термодинамический подход Франка к построению степенных уравнений ФПК может быть применим для относительно большой категории энтропий, являющихся частными случаями двухпараметрической энтропии Шарма−Миттал.

1. ЭНТРОПИЙНЫЙ ФУНКЦИОНАЛ ШАРМА−МИТТАЛ КАК РОДОНАЧАЛЬНИК СЕМЕЙСТВА ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЭНТРОПИЙ

Введённая Шарма и Миттал двухпараметрическая энтропийная мера для функции распределения $P(x,t)$ определяется формулой (Sharma, Mittal, 1975)

$$S_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}}[P] := \frac{1}{r-1}\left[1-\left(\int P(x,t)^q dx\right)^{(r-1)/(q-1)}\right], \quad (q,r>0;\ q,r\neq 1;\ q\neq r). \quad (1)$$

Энтропийная мера (1) включает в себя как классическую энтропию Больцмана−Гиббса−Шеннона, так и деформированные однопараметрические энтропии, хорошо известные в литературе, в частности:

- энтропию Тсаллиса (Havrda, Charvat, 1967; Daroczy, 1970; Tsallis, 1988)

$$S_{\{q\}}^{\mathcal{TS}}[P] := \frac{1}{q-1}\left[1-\int P(x,t)^q dx\right], \quad (q>0,\ q\neq 1); \quad (2)$$

- энтропию Реньи (Renyi, 1961, 1970)

$$S_q^{\mathcal{R}}[P] := \frac{1}{1-q}\ln\left[\int P(x,t)^q dx\right], \quad (q>0,\ q\neq 1); \quad (3)$$

- энтропию Гаусса (Frank, Plastino, 2002)

$$S_{1,r}^{\mathcal{G}}[P] := \frac{1}{r-1}\left\{1-\exp\left[(r-1)\int P(x,t)\ln[P(x,t)]\,dx\right]\right\}, \quad (q>0,\ q\neq 1); \quad (4)$$

- энтропию Ландсберга–Ведрала (Landberg, Vedral, 1998)

$$S_q^{\mathcal{LV}}[P] := \frac{1}{1-q}\left[1-\left(\int P(x,t)^q dx\right)^{-1}\right], \quad (q>0,\ q\neq 1); \quad (5)$$

- энтропию Больцмана−Гиббса−Шеннона

$$S^{\mathcal{BGS}}[P] := -\int P(x,t)\ln[P(x,t)]\,dx. \quad (6)$$

Легко показать, что имеют место следующие равенства (см., например, Колесниченко, 2018):

$$\lim_{q\to 1} S^{\mathcal{R}}_{\{q\}}[P] = S^{\mathcal{BGS}}[P] = \lim_{q\to 1} S^{\mathcal{TS}}_{\{q\}}[P]\,, \qquad S^{\mathcal{SM}}_{\{q,r=q\}}[P] = S^{\mathcal{TS}}_{\{q\}}[P]\,, \tag{7}$$

$$\lim_{r\to 1} S^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}[P] = S^{\mathcal{R}}_{q}[P]\,, \qquad \lim_{q=1,r\to 1} S^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}[P] = S^{\mathcal{BGS}}[P]\,, \tag{8}$$

$$\lim_{r\to 2-q} S^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}[P] = S^{\mathcal{LV}}_{\{q\}}[P]\,, \ \lim_{q\to 1} S^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}[P] = S^{\mathcal{G}}_{\{1,r\}}[P]\,. \tag{9}$$

Экспонента Тсаллиса и деформированный логарифм. Далее мы будем широко использовать так называемые деформированные функции, в частности, деформированный логарифм $\ln_q(y)$ и деформированную экспоненциальную функцию (экспоненту Тсаллиса) $\exp_q(y)$, которые определяются следующим образом (см. Tsallis, 2007, 2009):

$$\ln_q(y) := \frac{y^{1-q}-1}{1-q}, \quad y \in R^+, \quad q \in R; \qquad \ln_{q=1}(y) := \ln y\ ,$$

$$\exp_q(y) := [1+(1-q)y]_+^{\frac{1}{1-q}} = \begin{cases} 0, & \textit{если}\ q<1\ \textit{и}\ y < -1/1-q; \\ [1+(1-q)y]^{1/1-q}, & \textit{если}\ q<1\ \textit{и}\ y \geq -1/1-q; \\ [1+(1-q)y]^{1/1-q}, & \textit{если}\ q>1\ \textit{и}\ y < -1/1-q, \end{cases}$$

где $y \in R$, $q \in R$; выражение, стоящее в квадратных скобках, либо положительно, либо равно нулю, $[Y]_+ \equiv \max(Y,0)$. Из определения деформированной экспоненты Тсаллиса следует, что для $q<1$, экспонента $\exp_q(y)$ исчезает для $y \leq -1/(1-q)$, непрерывна и монотонно увеличивается от 0 до ∞, когда x увеличивается от $-1/(1-q)$ до ∞; для $q>1$, функция $\exp_q(y)$непрерывна и монотонно увеличивается от 0 до ∞, когда x увеличивается от $-\infty$ до $1/(1-q)$, оставаясь расходящейся для $y > 1/(q-1)$.

Можно убедиться, что для деформированных экспоненты и логарифма справедливы используемые далее соотношения:

$$\exp_q\left[\ln_q(y)\right]=\ln_q\left[\exp_q(y)\right]=y\,,\quad (\forall x;\forall q), \tag{10}$$

$$\frac{1}{\exp_q(y)}=\exp_{2-q}(-y)=\left[1-(q-1)y\right]_+^{\frac{1}{q-1}}\;,\quad \ln_{2-q}\left(\frac{1}{y}\right)=-\ln_q(y), \tag{11}$$

$$\exp_q(y)\cdot\exp_q(z)=\exp_q\left[y+z+(1-q)yz\right],\ (\forall(y,z);\forall q), \tag{12}$$

$$\ln_q(yz)=\ln_q(y)+\ln_q(z)+(1-q)\ln_q(y)\ln_q(z)\,,(\forall(y,z);\forall q), \tag{13}$$

$$\frac{d}{dy}\exp_q(y)=\left[\exp_q(y)\right]^q,\qquad \frac{d}{dy}\ln_q(y)=\frac{1}{y^q}\ \ (y>0;\forall q). \tag{14}$$

Продемонстрируем теперь, что определяющие формулы для энтропий (1)-(6) связаны равенствами, представляющими чередования обычных и деформированных логарифмов и экспонент.

Используя обозначение

$$c_q(t):=\int P(x,t)^q\,dx\equiv\langle 1\rangle_q \tag{15}$$

для так называемой обобщённой статистической суммы, перепишем выражения (2) и (3) для энтропий Тсаллиса и Реньи и в виде

$$S^{\mathcal{TS}}_{\{q\}}[P]:=\frac{\left[\left(\int P(x,t)^q dx\right)^{1/(1-q)}\right]^{1-q}-1}{1-q}=\ln_q\left[c_q^{1/(1-q)}\right], \tag{2*}$$

$$S^{\mathcal{R}}_{\{q\}}[P]:=\frac{1}{1-q}\ln\left[\int P(x,t)^q dx\right]=\frac{1}{1-q}\ln c_q=\ln\left[c_q\right]^{1-q}. \tag{3*}$$

Из сопоставления этих выражений получим соотношения

$$c_q^{1/(1-q)}=\exp\left(S^{\mathcal{R}}_{\{q\}}[P]\right)=\exp_q\left(S^{\mathcal{TS}}_{\{q\}}[P]\right), \tag{16}$$

позволяющие переписать энтропии (14) и (15) в виде

$$S_{\{q\}}^{\mathcal{R}}[P]=\ln\left\{\exp_q\left(S_{\{q\}}^{\mathcal{TS}}[P]\right)\right\},\quad S_{\{q\}}^{\mathcal{TS}}[P]=\ln_q\left\{\exp\left(S_{\{q\}}^{\mathcal{R}}[P]\right)\right\}. \tag{17}$$

Формула (16) позволяет также получить равенства, связывающие энтропии Шарма−Миттал и Ландсберга–Ведрала с энтропиями Тсаллиса и Реньи:

$$S_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}}[P]=\frac{\left[\left(\int P(x,t)^q dx\right)^{1/(1-q)}\right]^{(1-r)}-1}{1-r}=\ln_r\left[c_q^{1/(1-q)}\right]=$$

$$=\ln_r\left\{\exp_q\left(S_{\{q\}}^{\mathcal{TS}}[P]\right)\right\}=\ln_r\left\{\exp\left(S_{\{q\}}^{\mathcal{R}}[P]\right)\right\}, \tag{18}$$

$$S_{\{q\}}^{\mathcal{LV}}[P]=\frac{1-\left[\left(\int P(x,t)^q dx\right)^{1/(q-1)}\right]^{1-q}}{1-q}=$$

$$=-\ln_q\left[c_q^{1/(q-1)}\right]=-\ln_q\left\{\exp\left(-S_{\{q\}}^{\mathcal{R}}[P]\right)\right\}. \tag{19}$$

Таким образом, при использовании q-деформированных логарифма и экспоненты Тсаллиса возможно записать все перечисленные меры в компактной форме (16)-(19). Кроме этого, лаконичные соотношения (17)-(19) для энтропий облегчают нахождение предельных значений функционалов (1)-(6), по сравнению с их записью в явном виде. В частности, при использовании формулы (16)-(19) легко получить предельные соотношения (7)-(9).

Псевдоаддитивность энтропии Шарма−Миттал для независимых систем. Покажем, что подобно энтропии Тсаллиса, энтропия Шарма−Миттал подчиняется псевдоаддитивному закону для двух статистически независимых систем. Пусть совокупная система характеризуется нормированным распределением вероятностей микросостояний $P_{12}(x,t)$ и энтропией Шарма−Миттал

$$S_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}}[P_{12}]=\ln_r\left\{\exp_q\left(S_{\{q\}}^{\mathcal{TS}}[P_{12}]\right)\right\}. \tag{20}$$

Будем предполагать, что распределения $P_{12}(x,t)$ является мультипликативным; тогда $P_{12}(x,t)=P_1(x,t)P_2(x,t)$, где распределения $P_1(x)$ и $P_2(x)$ относятся соответственно к первой и второй подсистемам. Подставим распределение $P_{12}(x,t)$ в (20). Учитывая формулы (12), (13), а также псевдоаддитивность энтропии Тсаллиса (см., например, Колесниченко, 2018), легко получить следующее выражение

$$S_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}}[P_{12}]=\ln_r\left\{\exp_q\left(S_{\{q\}}^{\mathcal{TS}}[P_1]+S_{\{q\}}^{\mathcal{TS}}[P_2]+(1-q)S_{\{q\}}^{\mathcal{TS}}[P_1]S_{\{q\}}^{\mathcal{TS}}[P_2]\right)\right\}=$$

$$=\ln_r\left\{\exp_q\left(S_{\{q\}}^{\mathcal{TS}}[P_1]\right)\cdot\exp_q\left(S_{\{q\}}^{\mathcal{TS}}[P_2]\right)\right\}=\ln_r\left\{\exp_q\left(S_{\{q\}}^{\mathcal{TS}}[P_1]\right)\right\}+$$

$$+(1-r)\ln_r\left\{\exp_q\left(S_{\{q\}}^{\mathcal{TS}}[P_1]\right)\right\}\ln_r\left\{\exp_q\left(S_{\{q\}}^{\mathcal{TS}}[P_2]\right)\right\}+\ln_r\left\{\exp_q\left(S_{\{q\}}^{\mathcal{TS}}[P_2]\right)\right\}=$$

$$=S_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}}[P_1]+S_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}}[P_2]+(1-r)S_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}}[P_1]S_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}}[P_2], \qquad (21)$$

из которого следует свойство псевоаддитивности энтропии Шарма−Миттал для двух независимых систем. Параметр r в (21) определяет степень неаддитивности энтропий из семейства Шарма−Миттал. Из (21) следует, что только для энтропий Реньи $(r=1)$ и Больцмана−Гиббса−Шеннона $(r,q=1)$ выполняется закон аддитивности.

2. ЭКСТРЕМУМ ЭНТРОПИИ ШАРМА−МИТТАЛ И НЕГИББСОВОЕ РАВНОВЕСНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Пусть статистическая система с мерой Шарма−Миттала описывается распределением плотности вероятностей $P(x,t)$ и множеством структурных параметров $\mathcal{T}_k[P(x,t)]$ характеризующих неэкстенсивную систему. Будем далее считать, что средневзвешенное каждой случайной величины $\mathcal{T}_k$ определяется по формуле

$$\langle\mathcal{T}_k\rangle_q:=\int\mathcal{T}_k(x,t)\mathcal{P}(x,t)dx\,, \qquad (22)$$

где

$$\mathcal{P}(x,t) := \frac{P(x,t)^q}{\int P(x,t)^q dx} = \frac{P(x,t)^q}{c_q} \tag{23}$$

– так называемое эскортное (нормированное на единицу) распределение, которое обычно используется при рассмотрении хаотических, фрактальных и мультифрактальных неэкстенсивных систем (см. Abe, 2000).

Для отыскания равновесного распределения системы найдём безусловный экстремум энтропии Шарма–Миттала (18) при постоянстве среднего значения энергии $\mathcal{E}_q$ и сохранении нормировки распределения $P(x,t)$

$$\mathcal{E}_{\{q\}} := \int \varepsilon(x,t)\mathcal{P}(x,t)\,dx = const, \quad \int P(x,t) = 1.$$

Согласно вариационному принципу Джейнса (Jaynes, 1963), для этого необходимо вычислить безусловный экстремум функционала

$$\mathcal{L}[P] := \ln_r \left[c_q\right]^{\frac{1}{q-1}} - \beta\int \varepsilon(x,t)P(x,t)^q / c_q - \alpha\int P(x,t)dx. \tag{24}$$

Здесь параметры β и α являются неопределёнными множителями Лагранжа. Из условия равенства нулю первой вариации $\delta\mathcal{L}$ функционала $\mathcal{L}[P]$ получим равенство

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta P} = \frac{q}{1-q}(P^{eq})^{q-1}(c_q^{eq})^{\frac{r-q}{q-1}} - q\frac{\beta}{\tilde{c}_q}(P^{eq})^{q-1}\left[\varepsilon(x) - \mathcal{E}_{\{q\}}^{eq}\right] - \alpha = 0,$$

из которого следует

$$(P^{eq})^{q-1}\left\{1-(1-q)\frac{\beta}{\Gamma_{\{q,r\}}}\left[\varepsilon(x) - \mathcal{E}_{\{q\}}^{eq}\right]\right\} = \left(\frac{1-q}{q}\alpha\right) / \boldsymbol{\Gamma}_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}} . \tag{25}$$

Здесь и далее знак «тильды» у параметров системы означает их вычисление для равновесного распределения вероятностей $P^{eq}(x)$; фигурирующая здесь величина $\boldsymbol{\Gamma}_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}}$ определяется соотношением

$$\boldsymbol{\Gamma}_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}} := \left[c_q^{eq}\right]^{(r-1)/(q-1)}, \quad c_q^{eq} := \int P^{eq}(x)^q dx . \tag{26}$$

Заметим, что для энтропии Тсаллиса величина $\boldsymbol{\Gamma}^{\mathcal{TS}}_{\{q\}} = \boldsymbol{\Gamma}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r=q\}} = c^{eq}_q$; для энтропии Реньи величина $\boldsymbol{\Gamma}^{\mathcal{R}}_{\{q\}} = \boldsymbol{\Gamma}^{\mathcal{SM}}_{\{q,1\}} = 1$; а для энтропии Ландсберга–Ведрала имеем $\boldsymbol{\Gamma}^{\mathcal{LV}}_{\{q\}} = \boldsymbol{\Gamma}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r=2-q\}} = 1/c^{eq}_q$.

Поскольку множители Лагранжа β и α имеют, вообще говоря, произвольные значения, то можно положить

$$\alpha \equiv \frac{q}{1-q}[c^{eq}_q]^{(r-1)/(q-1)} = \frac{q\boldsymbol{\Gamma}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}}{1-q}. \tag{27}$$

Тогда соотношение (25) приобретает следующий вид негиббсового равновесного распределения с параметром $\beta_{\{q,r\}}$:

$$(P^{eq})^{\mathcal{SM}}(x) = \frac{1}{\boldsymbol{Z}^{\mathcal{SM}}}\left[1-(1-q)\beta_{\{q,r\}}\left[\varepsilon(x)-\mathcal{E}^{eq}_{\{q\}}\right]\right]_+^{\frac{1}{1-q}} =$$

$$= \frac{1}{\boldsymbol{Z}^{\mathcal{SM}}}\exp_q\left\{-\beta_{\{q,r\}}\left[\varepsilon(x)-\mathcal{E}^{eq}_{\{q\}}\right]\right\}. \tag{28}$$

Здесь

$$\boldsymbol{Z}^{\mathcal{SM}} = [c^{eq}_q]^{1/(1-q)} = \int \exp_q\left\{-\beta_{\{q,r\}}\left[\varepsilon(x)-\mathcal{E}^{eq}_{\{q\}}\right]\right\} dx \tag{29}$$

– статистический интеграл, определяемый из условия нормировки распределения $P^{eq}(x)$; параметр $\beta_{\{q,r\}} := \beta/\boldsymbol{\Gamma}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}$ играет роль обратной физической температуры в статистике Шарма–Миттал (см. Колесниченко, 2018).

При условии $r = q$ из (28) следует выражение для равновесного распределения $(P^{eq})^{\mathcal{TS}}(x)$ в статистике Тсаллиса

$$(P^{eq})^{\mathcal{TS}}(x) = \frac{1}{\boldsymbol{Z}^{\mathcal{TS}}}\exp_q\left\{-\beta_q\left[\varepsilon(x)-\mathcal{E}^{eq}_{\{q\}}\right]\right\}, \tag{30}$$

где

$$\boldsymbol{Z}^{\mathcal{TS}} = \int \exp_q\left\{-\beta_q\left[\varepsilon(x)-\mathcal{E}^{eq}_{\{q\}}\right]\right\} dx \tag{31}$$

− статистический интеграл в статистике Тсаллиса; параметр $\beta_q \equiv \beta / \tilde{c}_q$ является обратной физической температурой системы, $T_{ph} \equiv 1/\beta_q$; β − множитель Лагранжа, который связан с ограничением на среднюю энергию в неэкстенсивной статистической механике. При $1-(1-q)\beta_q\left[\varepsilon(x)-\mathcal{E}^{eq}_{\{q\}}\right]<0$ имеем $(P^{eq})^{\mathcal{TS}}=0$, а при $q=1$ из (30) и (31) следует классическое каноническое распределение Гиббса

$$(P^{eq})^{\mathcal{BGS}}(x)=\frac{\exp\left\{-\beta\left[\varepsilon(x)-\mathcal{E}^{eq}\right]\right\}}{\int\exp\left\{-\beta\left[\varepsilon(x)-\mathcal{E}^{eq}\right]\right\}dx}. \qquad (32)$$

В случае, когда $r=1$, из (28) следует равновесное распределение в статистике Реньи

$$(P^{eq})^{\mathcal{R}}(x)=\frac{1}{\boldsymbol{Z}^{\mathcal{R}}}\left\{1-\beta(1-q)\left[\varepsilon(x)-\mathcal{E}^{eq}_{\{q\}}\right]\right\}_{+}^{\frac{1}{1-q}}=\frac{1}{\boldsymbol{Z}^{\mathcal{R}}}\exp_q\left\{-\beta\left[\varepsilon(x)-\mathcal{E}^{eq}_{\{q\}}\right]\right\}. \qquad (33)$$

Здесь

$$\boldsymbol{Z}^{\mathcal{R}}(\beta)=[c^{eq}_q]^{1/(1-q)}=\int\exp_q\left\{-\beta\left[\varepsilon(x)-\mathcal{E}^{eq}_{\{q\}}\right]\right\}dx>0 \qquad (34)$$

− статистический интеграл; $\beta=1/T$ − обратная температура (изменяющаяся в пределах допустимых значений). Таким образом, распределение вероятностей состояния статистического ансамбля неэкстенсивных систем с мерой Реньи, которые находятся в тепловом равновесии с внешней средой (термостатом) и могут обмениваться с ней энергией при постоянном объёме и постоянном числе частиц, соответствует обобщённому каноническому ансамблю Гиббса (33).

3. СООТНОШЕНИЯ РАВНОВЕСНОЙ ТЕРМОДИНАМИКИ, ПОСТРОЕННОЙ НА БАЗЕ ЭНТРОПИИ ШАРМА−МИТТАЛ

Приступим теперь к конструированию равновесной термодинамики, основанной на неэкстенсивной статистике Шарма−Миттал. Поскольку соотношение (28) справедливо и для равновесного распределения $P^{eq}(x)$, то для максимального значения энтропии Шарма−Миттал имеем

$$S_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}}(\max) \equiv (S_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}})^{eq} = \frac{[c_q^{eq}]^{(1-r)/(1-q)} - 1}{1-r} = \frac{(Z^{\mathcal{SM}})^{1-r} - 1}{1-r} = \ln_r Z^{\mathcal{SM}}. \quad (35)$$

Квазиравновесную свободную энергию Гельмгольца $\mathcal{F}_{\{q,r\}}^{eq}$ определим соотношением

$$\mathcal{F}_{\{q,r\}}^{eq} := \mathcal{E}_{\{q\}}^{eq} - \frac{1}{\beta}(S_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}})^{eq} = \mathcal{E}_{\{q\}}^{eq} - \frac{1}{\beta}\ln_r Z^{\mathcal{SM}}, \quad Z^{\mathcal{SM}} = [c_q^{eq}]^{1/(1-q)}. \qquad (36)$$

Учитывая соотношения (33) и (36), можно переписать выражение для статистического интеграла $Z^{\mathcal{SM}}$ в следующем виде

$$Z^{\mathcal{SM}}(\beta) = \int \exp_q \left\{ -\frac{\beta}{\left(Z^{\mathcal{SM}}\right)^{1-r}} \left[\varepsilon(x) - \mathcal{E}_{\{q\}}^{eq} \right] \right\} dx. \qquad (37)$$

Дифференцируя (37) по β с учётом формулы (14), получим

$$\frac{\partial}{\partial\beta} Z^{\mathcal{SM}} = -\int \left\{ \exp_q \left[-\left(Z^{\mathcal{SM}}\right)^{r-1} \beta\left(\varepsilon(x) - \mathcal{E}_{\{q\}}^{eq}\right) \right] \right\}^q \times$$

$$\times \left\{ \left(Z^{\mathcal{SM}}\right)^{r-1} \left(\varepsilon - \mathcal{E}_{\{q\}}^{eq}\right) + \beta\left(\varepsilon - \mathcal{E}_{\{q\}}^{eq}\right) \frac{\partial\left(Z^{\mathcal{SM}}\right)^{r-1}}{\partial\beta} - \left(Z^{\mathcal{SM}}\right)^{r-1} \beta \frac{\partial\mathcal{E}_{\{q\}}^{eq}}{\partial\beta} \right\} dx =$$

$$= -\left(Z^{\mathcal{SM}}\right)^{r+q-1} \int (P^{eq})^q \left\{ \left(\varepsilon - \mathcal{E}_{\{q\}}^{eq}\right) + \beta\left(\varepsilon - \mathcal{E}_{\{q\}}^{eq}\right) \frac{\partial}{\partial\beta} \ln\left(Z^{\mathcal{SM}}\right)^{r-1} - \beta \frac{\mathcal{E}_{\{q\}}^{eq}}{\partial\beta} \right\} dx =$$

$$= \left(Z^{\mathcal{SM}}\right)^{r+q-1} c_q^{eq} \beta \frac{\partial\mathcal{E}_{\{q\}}^{eq}}{\partial\beta} = \left(Z^{\mathcal{SM}}\right)^{r} \beta \frac{\partial\mathcal{E}_{\{q\}}^{eq}}{\partial\beta}. \qquad (38)$$

С учётом формулы дифференцирования деформированного логарифма (14), из (38) следует

$$\frac{\partial}{\partial\beta} \ln_r Z^{\mathcal{SM}} = \left(Z^{\mathcal{SM}}\right)^{-r} \frac{\partial}{\partial\beta} Z^{\mathcal{SM}} = \beta \frac{\partial\mathcal{E}^{eq}}{\partial\beta}. \qquad (39)$$

С другой стороны, используя выражение (35) и (37), получим

$$(S^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}})^{eq} = \ln_r \left\{ \int \exp_q \left[-\left(\mathbf{Z}^{\mathcal{SM}}\right)^{r-1} \beta\left(\varepsilon(x) - \mathcal{E}^{eq}_{\{q\}}\right)\right] dx \right\}, \tag{40}$$

откуда

$$\frac{\partial (S^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}})^{eq}}{\partial \mathcal{E}^{eq}_{\{q\}}} = \frac{\partial \ln_r \mathbf{Z}^{\mathcal{SM}}}{\partial \mathcal{E}^{eq}_{\{q\}}} =$$
$$= \frac{\beta}{\mathbf{Z}^{\mathcal{SM}}} \int \left\{ \exp_q \left[-\left(\mathbf{Z}^{\mathcal{SM}}\right)^{r-1} \beta\left(\varepsilon - \mathcal{E}^{eq}_{\{q\}}\right)\right]\right\}^q dx = \beta c^{eq}_q \left(\mathbf{Z}^{\mathcal{SM}}\right)^{r-1} = \beta. \tag{41}$$

Таким образом, для равновесной термодинамики, построенной на базе энтропии Шарма–Миттала, справедливы следующие соотношения:

$$(S^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}})^{eq} = \ln_r \mathbf{Z}^{\mathcal{SM}}, \quad \mathcal{F}^{eq}_{\{q,r\}} = \mathcal{E}^{eq}_{\{q\}} - \frac{1}{\beta}(S^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}})^{eq} = \mathcal{E}^{eq}_{\{q\}} - \frac{1}{\beta}\ln_r \mathbf{Z}^{\mathcal{SM}},$$

$$\beta = \frac{\partial (S^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}})^{eq}}{\partial \mathcal{E}^{eq}_{\{q\}}} = \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}^{eq}_{\{q\}}} \ln_r \mathbf{Z}^{\mathcal{SM}}, \quad \mathcal{E}^{eq}_{\{q\}} = \frac{\partial(\beta \mathcal{F}^{eq}_{\{q,r\}})}{\partial \beta}, \quad \beta \frac{\partial \mathcal{E}^{eq}_{\{q\}}}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} \ln_r \mathbf{Z}^{\mathcal{SM}}. \tag{42}$$

4. ДИВЕРГЕНЦИЯ БРЕГМАНА. ОБОБЩЕННАЯ *H*-ТЕОРЕМА

Покажем теперь, что при спонтанном переходе между произвольным состоянием системы с распределением $P(x,t)$ и равновесным состоянием с распределением $P^{eq}(x)$ энтропия системы может только убывать, т.е. $S^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}\left[P^{eq}(x)\right] \geq S^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}[P(x,t)]$.

С этой целью введем в рассмотрение так называемую дивергенцию Брегмана (см. Bregman, 1967; Cichocki, Amari, 2010)

$$\mathcal{B}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}\left[P:U\right] := -\frac{1}{1-r}\left\{\left[\int P(x,t)^q U(x,t)^{1-q} dx\right]^{\frac{1-r}{1-q}} - 1\right\} =$$
$$= -\ln_r \left\{\left[\int P(x,t)^q U(x,t)^{1-q} dx\right]\right\}^{\frac{1}{1-q}}, \tag{43}$$

которая относится к существенным статистическим характеристикам неэкстенсивной динамической системы Шарма−Миттал. Являясь функционалом, она характеризует переход системы от состояния $P(x,t)$ в состояние $U(x,t)$, когда статистические наблюдения ведутся относительно состояния $P(x,t)$. При этом выражение (43) представляет собой функционал для двух нормированных распределений $\int P(x,t)dx = \int U(x,t)dx = 1$.

Различные свойства общего вида дивергенции Брегмана можно найти в работе (Cichocki, Amari, 2010). Здесь же мы отметим, что величина $\mathcal{B}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}$ является вещественным, положительным, выпуклым (в первом аргументе) функционалом. Кроме этого, поскольку при $P(x,t) = U(x,t)$ имеет место равенство $\mathcal{B}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}\left[P:U\right] = 0$, то дивергенция Брегмана является функцией Ляпунова[1].

Выпуклость. Величина $\mathcal{B}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}\left[P:U\right]$ является вещественным, выпуклым и положительным функционалом с минимумом (максимумом) в зависимости от сочетания знаков параметров деформации r и q. Покажем это. Для некоторого действительного числа $n > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{\Upsilon^{q-1}-1}{q-1} &\geq 1-\frac{1}{\Upsilon}, \quad \text{если}\, q > 0, \\ &= 1-\frac{1}{\Upsilon}, \quad \text{если}\, q = 0, \\ &\leq 1-\frac{1}{\Upsilon}, \quad \text{если}\, q < 0. \end{aligned} \tag{44}$$

Поэтому, например, для $q > 1$ (см. (1)) справедливо неравенство

$$\left(P/U\right)^{q-1} \geq q + (1-q)(U/P),$$

при учете которого получаем

[1] Напомним, что функцией Ляпунова называется знакоопределённая функция, которая обращается в нуль в точке равновесия системы. Состояние равновесия является аттрактором, когда производная по времени от функции Ляпунова имеет знак, противоположный знаку самой функции.

$$\mathcal{B}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}\left[P:U\right]=\frac{1}{r-1}\left\{\left[\int P\left(\frac{P}{U}\right)^{q-1}dx\right]^{\frac{r-1}{q-1}}-1\right\}\leq$$
$$\leq\frac{1}{r-1}\left\{\left[\int P\left(q+(1-q)\frac{U}{P}\right)dx\right]^{\frac{r-1}{q-1}}-1\right\}\equiv 0 \qquad (45)$$

когда $r<1$. Легко показать, что

$$\mathcal{B}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}\left[P:U\right]\geq 0,\ \text{ если } q>1,\ r<1\ ,\ \text{ или }\ 0<q<1, r>1. \qquad (46)$$

Обобщённая *H*-теорема в статистике Шарма-Миттала. Рассмотрим теперь замкнутую систему, для которой распределение $P(x,t)$ является произвольным, а распределение $U(x,t)$ является равновесным, $U\equiv P^{eq}(x)$

$$P^{eq}(x)=\left\{\frac{1-(q-1)\beta_{q,r}\left[\varepsilon(x)-\mathcal{E}^{eq}_{q}\right]}{c^{eq}_{q}}\right\}^{\frac{1}{1-q}}. \qquad (47)$$

При использовании соотношений (15), (29), и (35) легко показать, что спонтанный переход между этими состояниями описывается следующей дивергенцией Шарма-Миттала

$$\mathcal{B}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}\left[P:P^{eq}\right]\equiv\frac{1}{1-r}\left[1-\left(\int P(x,t)^{q}P^{eq}(x)^{1-q}dx\right)^{\frac{1-r}{1-q}}\right]=$$

$$=-\frac{1}{1-r}\left[\left(c_q/c^{eq}_q\right)^{\frac{1-r}{1-q}}\left[1-(1-q)\beta^{eq}_{\{q,r\}}\left(\mathcal{E}_{\{q\}}(t)-\mathcal{E}^{eq}_{\{q\}}\right)\right]^{\frac{1-r}{1-q}}-1\right]=$$

$$=-\ln_r\left\{\frac{c_q^{\ 1/(1-q)}\exp_q\left[-\beta^{eq}_{\{q,r\}}\left(\mathcal{E}_{\{q\}}(t)-\mathcal{E}^{eq}_{\{q\}}\right)\right]}{(c^{eq}_q)^{1/(1-q)}}\right\}=$$

$$= -\frac{1}{c_q^{eq}} \ln_r \left\{ c_q^{1/(1-q)} \exp_q \left[-\beta_{\{q,r\}}^{eq} \left(\mathcal{E}_{\{q\}}(t) - \mathcal{E}_{\{q\}}^{eq} \right) \right] \right\} + \frac{1}{\tilde{c}_q} \ln_r (c_q^{eq})^{1/(1-q)} =$$

$$= \frac{1}{\tilde{c}_q} \left\{ -\left[S_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}}(t) - (S_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}})^{eq} \right] - c_q \ln_r \exp_q \left[-\beta_{\{q,r\}}^{eq} \left(\mathcal{E}_{\{q\}}(t) - \mathcal{E}_{\{q\}}^{eq} \right) \right] \right\} \quad (48)$$

с равенством $\mathcal{B}_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}} \left[P : P^{eq} \right] = 0$ при распределении $P \equiv P^{eq}$.

При выполнении условия Гиббса $\mathcal{E}_q = \mathcal{E}_{\{q\}}^{eq}$ (см. Климонтович,1990) и с учётом свойства знакоопределённости (46) дивергенции Брегмана $\mathcal{B}_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}} \left[P{:}P^{eq} \right]$ из (48) следует справедливое при $q > 1,\ r < 1$, или $0 < q < 1, r > 1$ неравенство:

$$\mathcal{B}_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}} \left[P(t){:}\, P^{eq} \right] c_q^{eq} = -\left[S_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}}(t) - (S_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}})^{eq} \right] > 0\,, \quad (49)$$

Это неравенство обобщает теорему Гиббса на неэкстенсивную статистику Шарма−Миттала. Согласно этой теореме, для замкнутой системы энтропия Шарма−Миттала $S_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}}(t) = (S_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}})^{eq} - c_q^{eq} \mathcal{B}_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}}$ возрастает до экстремального её значения $(S_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}})^{eq}$ при $q > 0$ одновременно с уменьшением положительной дивергенции $\mathcal{B}_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}} \left[P : P^{eq} \right]$. Таким образом, дивергенция Брегмана здесь в виде отрицательного вклада в текущую энтропию Шарма−Миттал и потому может быть названа негэнтропией (Шредингер, 1947).

Поскольку информация различия Шарма−Миттал является знакоопределенной функцией Ляпунова, то для того, чтобы состояние равновесия $(S_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}})^{eq}$ было устойчивым, необходимо выполнение следующих неравенств

$$c_q^{eq} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{B}_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}} \left[P : P^{eq} \right] = -\frac{\partial}{\partial t} \left[S_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}}(t) - (S_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}})^{eq} \right] < 0\,, \quad (50)$$

когда $q > 1,\ r < 1$, или $0 < q < 1, r > 1$.

Из этих соотношений следует неравенство для энтропии Шарма−Миттал:

$$\frac{\partial S_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}}(t)}{\partial t} > 0 \quad \text{при } q > 1,\ r < 1, \text{ или } 0 < q < 1, r > 1, \tag{51}$$

которое выражат H-теорему для стохастической (q,r)-системы, описываемой энтропией Шарма−Миттал: при временной эволюции к равновесному состоянию энтропия замкнутой системы $S_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}}(t)$ должна возрастать до экстремального её значения $(S_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}})^{eq}$, так и убывать в зависимости от выбора численных значений параметров неэкстенсивности q и r.

5. СТРУКТУРА УРАВНЕНИЙ ФОККЕРА−ПЛАНКА− КОЛМОГОРОВА, СВЯЗАННЫХ С ЭНТРОПИЕЙ ШАРМА−МИТТАЛ

Аномально-диффузионные явления весьма распространены в природе и могут быть адекватно описаны с помощью нелинейных уравнений Фоккера−Планка−Колмогорова, которые нашли широкое применение в различных естественно-научных областях, таких как астрофизика, физика плазмы, квантовая механика, общая и специальная теории относительноти, нелинейная гидродинамика, биофизика и т.п. Рассматриваемые в них явления имеют общий физический механизм, возникающий благодаря кооперативному взаимодействию между отдельными подсистемами совокупной системы. Кооперативные взаимодействия приводят к уменьшению большого числа степеней свобода систем многих тел и тем самым связывают отдельные подсистемы посредством процесса самоорганизации в синергетические объекты. Подобные синергетические системы допускают низкоразмерные описания в терминах нелинейных уравнений ФП, которые характеризуются специфическими типами нелинейных диффузионных вкладов.

Подобные вклады могут быть связаны, в частности, с неэкстенсивной статистической механикой. В научной литературе наиболее подробно изучены ситуации, когда диффузионные вклады записываются как степень плотности вероятности $P(x,t)$ (см., например, Plastino, A. Plastino, 1995; Tsallis, Bukman, 1996; Comptey, Jou, 1996; Shiino, 2001, 2003; Scarfone, Wada, 2007; Schwämmle и др., 2007; Wada, Scarfone, 2007, 2009; Casas, Nobre, 2019; Plastino, Wedemann, 2020).

В последнее время широкое распространение получил метод конструирования уравнения ФПК для любой неэкстенсивной физической системы, связанный с учетом локального производства ее энтропии. Этот метод был разработан на основе линейной неравновесной термодинамики Т. Франком (см. *Frank, 2000, 2002*), и его содержание подробно изложено в монографии (*Frank, 2005*). Сущность этого метода состоит в следующем:

Исходным является локальное уравнение непрерывности для плотности вероятности для распределения вероятности состояния $P(\boldsymbol{r})$ системы в фазовом пространстве $\boldsymbol{r} := \{\boldsymbol{x}_1, ...\boldsymbol{x}_n; \boldsymbol{v}_1, ...\boldsymbol{v}_n\}$ физического статистического ансамбля Гиббса (описывающего микросостояние хаотической системы)

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\boldsymbol{r}, t) + \nabla_{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}, t) = 0, \tag{52}$$

которое имеет место как в физическом пространстве $\boldsymbol{x}$, так и в векторном пространстве скоростей $\boldsymbol{v}$. При этом нелинейный поток вероятности $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}, t)$ задается соотношением

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}, t) := -P(\boldsymbol{r}, t) \nabla_{\boldsymbol{r}} \left(\frac{\delta \mathcal{F}(P)}{\delta P} \right), \tag{53}$$

в котором величина $\nabla_{\boldsymbol{r}} \left(\delta \mathcal{F}(P) / \delta P \right)$ является термодинамической силой, а $\mathcal{F}(P)$ − свободная энергия для рассматриваемой системы (Frank, 2005).

Далее при построении уравнения ФПК на основе энтропийного функционала ШМ мы для простоты ограничимся рассмотрением классического стохастического марковского процесса в пространстве скоростей $\boldsymbol{v}$, которое описывается функцией распределения $P^{\mathcal{SM}}(\boldsymbol{v}, t)$, информационной энтропией $S^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}[P]$ и средней энергией $\mathcal{E}^{\mathcal{SM}}_{\{q\}}$. Тогда функционал $\mathcal{F}^{\mathcal{SM}}$ задается выражением (42)

$$\mathcal{F}^{eq}_{\{q,r\}} = \mathcal{E}^{eq}_{\{q\}} - D^{\mathcal{SM}} (S^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}})^{eq} , \tag{54}$$

в котором

$$\mathcal{E}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}(P) = \int \varepsilon(\boldsymbol{v}) P(\boldsymbol{v}) d\boldsymbol{v}, \quad S^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}[P] := \ln_{2-r} \left(\int P^q d\boldsymbol{v} \right)^{1/(q-1}, \tag{55}$$

где $\ln_{2-r}(x) = \dfrac{x^{r-1} - 1}{r - 1}$; $\quad D^{\mathcal{SM}} \equiv 1/\beta$ − коэффициент диффузии (или коэффициент интенсивности шума), играющий роль температуры в пространстве скоростей (в общем случае $D^{\mathcal{SM}} \neq 1/\beta$); $\varepsilon(\boldsymbol{v}) = \frac{m}{2}\boldsymbol{v}^2$ — кинетическая энергия частицы (далее предполагается, что $m = 1$).

Принимая во внимание формулу $d\ln_{2-r}(x)/dx = 1/x^{2-r}$, при вычислении вариационной производной $\delta\mathcal{F}(P)/\delta P$ получим:

$$\frac{\delta}{\delta P}\mathcal{F}^{\mathcal{SM}}(P) = \varepsilon(P) + D^{\mathcal{SM}}\left\{\frac{q}{q-1}P^{q-1}\left(\int P^q dv\right)^{(r-q)/q-1}\right\}. \tag{56}$$

Соответственно, для потока вероятности, с учетом (56), будем иметь

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{v},t) = -P(\boldsymbol{v},t)\nabla_{\boldsymbol{v}}\left(\frac{\delta\mathcal{F}^{\mathcal{SM}}(P)}{\delta P}\right) =$$

$$= -P(\boldsymbol{v},t)\nabla_{\boldsymbol{v}}\varepsilon(\boldsymbol{v}) - D^{\mathcal{SM}}\frac{q}{q-1}\left(\int P(\boldsymbol{v},t)^q d\boldsymbol{v}\right)^{\frac{r-q}{q-1}} P(\boldsymbol{v},t)\nabla_{\boldsymbol{v}}\left[P(\boldsymbol{v},t)^{q-1}\right] =$$

$$= P(\boldsymbol{v},t)F(\boldsymbol{v}) - D^{\mathcal{SM}}\left(\int P(\boldsymbol{v},t)^q dv\right)^{\frac{r-q}{q-1}} \nabla_{\boldsymbol{v}}P^q(\boldsymbol{v},t). \tag{57}$$

Здесь $F(\boldsymbol{v}) = -\nabla_{\boldsymbol{v}}\varepsilon(\boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{v}$ − коэффициент линейного дрейфа. Таким образом, нелинейное степенное уравнение ФПК в кинетике Шарма−Миттал имеет вид:

$$\frac{\partial P^{\mathcal{SM}}(\boldsymbol{v},t)}{\partial t} = -\nabla_{\boldsymbol{v}}\left[F(\boldsymbol{v})P^{\mathcal{SM}}(\boldsymbol{v},t)\right] +$$

$$+\frac{1}{\beta(t)}\left(\int P^{\mathcal{SM}}(\boldsymbol{v},t)^q dv\right)^{\frac{r-q}{q-1}} \nabla_{\boldsymbol{v}}\left[\nabla_{\boldsymbol{v}}^2 P^{\mathcal{SM}}(\boldsymbol{v},t)\right]. \tag{58}$$

Здесь и далее для простоты будем предполагать, что коэффициент диффузии $D^{\mathcal{SM}}(t) = 1/\beta(t)$ зависит только от времени.

Из (58) следует, что одномерные нелинейные степенные уравнения ФПК, принадлежащие семейству Шарма−Миталл, имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}P(v,t) = \frac{\partial}{\partial v}\left[vP(v,t)\right] + \frac{1}{\beta(t)}\Upsilon^{SM}[P]\frac{\partial^2}{\partial v^2}\left[P^q(v,t)\right]. \tag{59}$$

Здесь коэффициент $\Upsilon^{\mathcal{SM}}[P]:=\left[\int P(v,t)^q\,dv\right]^{(r-q)/(q-1)}$ зависит только от времени; при этом для различных уравнений ФПК, принадлежащих семейству Шарма−Миттал, имеем:

$$\Upsilon^{\mathcal{TS}}[P]=\lim_{r\to q}\Upsilon^{\mathcal{SM}}[P]=\lim_{r\to q}\left[\int P^q dv\right]^{\frac{r-q}{q-1}}=1,\ q\neq 1,\quad q>1/3; \qquad (60)$$

$$\Upsilon^{\mathcal{R}}[P]=\lim_{r\to 1}\Upsilon^{\mathcal{SM}}[P]=\lim_{r\to 1}\left[\int P^q dv\right]^{\frac{r-q}{q-1}}=\left[\int P^q dv\right]^{-1}, \qquad (61)$$

$$\Upsilon^{\mathcal{G}}[P]=\lim_{q\to 1}\Upsilon^{\mathcal{SM}}[P]=\exp\left[(r-1)\int P\ln P dv\right], \qquad (62)$$

$$\Upsilon^{\mathcal{BGS}}[P]=\lim_{q\to 1,r\to 1}\Upsilon^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}[P]=\lim_{q\to 1,r\to 1}\left[\int P^q dv\right]^{\frac{r-q}{q-1}}=1. \qquad (63)$$

6. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ФОККЕРА−ПЛАНКА−КОЛМОГОРОВА, ПРИНАДЛЕЖАЩИХ К СЕМЕЙСТВУ ШАРМА−МИТТАЛ

Уравнение ФПК в рамках статистики Шарма-Миттал. Стационарная плотность вероятности $P^{\mathcal{SM}}(v)\Big|_{st}$ удовлетворяет уравнению

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{v})=-v\,P^{\mathcal{SM}}(v)\Big|_{st}-\frac{1}{\beta(t)}\boldsymbol{\Gamma}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}\frac{\partial}{\partial v}\left(P^{\mathcal{SM}}(v)\Big|_{st}\right)=const, \qquad (64)$$

решение которого имеет вид

$$P^{\mathcal{SM}}(v)\Big|_{st}=\frac{1}{\boldsymbol{Z}^{\mathcal{SM}}}\exp_{2-q}\left\{-\frac{\alpha_{\{q\}}}{\boldsymbol{\Gamma}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r\}}(\boldsymbol{Z}^{\mathcal{SM}})^{1-q}}v^2\right\}=$$

$$= \frac{1}{Z^{\mathcal{SM}}} \exp_{2-q}\left\{ -\left(\frac{z_{\{q\}}}{Z^{\mathcal{SM}}} \right)^2 v^2 \right\}, \tag{65}$$

где

$$\boldsymbol{\Gamma}_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}} := \left[\int P^{eq}(v)^q dv \right]^{\frac{r-q}{q-1}} = \frac{\alpha_{\{q\}} (\boldsymbol{Z}^{\mathcal{SM}})^{q+1}}{(z_{\{q\}})^2}, \quad \boldsymbol{Z}_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}} := \left[\frac{2q (z_{\{q\}})^2 \mathcal{K}_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}}}{\beta} \right]^{\frac{1}{1+r}}, \tag{66}$$

$$\alpha_{\{q\}} := \frac{\beta}{2q}, \quad \mathcal{K}_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}} := \begin{cases} \left[\dfrac{3q-1}{2q} \right]^{\frac{r-q}{1-q}}, & q \neq 1; \\ \left[\sqrt{e} \right]^{1-r}, & q \to 1. \end{cases}, \tag{67}$$

$$z_q := \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1}{1-q}}\, \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1+q}{2(1-q)} \right) = \sqrt{\dfrac{\pi}{1-q}}\, \dfrac{\Gamma\left(\frac{1+q}{2(1-q)} \right)}{\Gamma\left(\frac{1}{1-q} \right)}, & q \in (1/3, 1); \\ \sqrt{\pi}, \quad q = 1; \\ \sqrt{\dfrac{1}{q-1}}\, \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{q}{q-1} \right) = \sqrt{\dfrac{\pi}{q-1}}\, \dfrac{\Gamma\left(\frac{q}{q-1} \right)}{\Gamma\left(\frac{3q-1}{2(q-1} \right)}, & q > 1. \end{cases} \tag{68}$$

В (65) использована формула $\exp_{2-q}(x) := \left[1 + (q-1)x \right]_+^{1/(q-1)}$, в которой выражение, стоящее в квадратных скобках, либо положительно, либо равно нулю, $[X]_+ := \max(X, 0)$.

Уравнение ФПК в рамках статистики Тсаллиса. Стационарная плотность вероятности $P^{\mathcal{TS}}(v)\Big|_{st}$ имеет вид:

$$P^{\mathcal{TS}}(v)\Big|_{st} = \frac{1}{\mathbf{Z}^{\mathcal{TS}}} \exp_{2-q}\left\{-\left(\frac{z_{\{q\}}}{\mathbf{Z}^{\mathcal{TS}}}\right)^2 v^2\right\}, \tag{69}$$

где

$$\mathcal{K}^{\mathcal{TS}}_{\{q\}} = \mathcal{K}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r=q\}} = 1,\ \ \mathbf{Z}^{\mathcal{TS}}_{\{q\}} = \mathbf{Z}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r=q\}} = \left[\frac{(z_{\{q\}})^2}{\alpha_q}\right]^{\frac{1}{1+q}} = \left[\frac{2q(z_{\{q\}})^2}{\beta}\right]^{\frac{1}{1+q}}. \tag{70}$$

Уравнение ФПК в рамках статистики Реньи. Стационарная плотность вероятности $P^{\mathcal{R}}(v)\Big|_{st}$ имеет вид:

$$P^{\mathcal{R}}(v)\Big|_{st} = \frac{1}{\mathbf{Z}^{\mathcal{R}}} \exp_{2-q}\left\{-\left(\frac{z_{\{q\}}}{\mathbf{Z}^{\mathcal{R}}}\right)^2 v^2\right\}, \tag{71}$$

где

$$\mathcal{K}^{\mathcal{R}}_{\{q\}} = \mathcal{K}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r=1\}} := \begin{cases} \left[(3q-1)/2q\right], & q \neq 1; \\ 1, & q \to 1. \end{cases} \tag{72}$$

$$\mathbf{Z}^{\mathcal{R}}_{\{q\}} = \mathbf{Z}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r=q\}} = \left[\frac{2q(z_{\{q\}})^2 \mathcal{K}^{\mathcal{SM}}_{\{q,r=q\}}}{\beta}\right]^{\frac{1}{1+q}} = \begin{cases} \left[\dfrac{(z_{\{q\}})^2(3q-1)}{\beta}\right]^{\frac{1}{1+q}}, & q \neq 1; \\ \sqrt{2\pi/\beta}, & q \to 1. \end{cases} \tag{73}$$

Уравнение ФПК в рамках статистики Ландсберг–Ведрала. Стационарная плотность вероятности $P^{\mathcal{LV}}(v)\Big|_{st}$ имеет вид:

$$P^{\mathcal{LV}}(v)\Big|_{st} = \frac{1}{\mathbf{Z}^{\mathcal{LV}}} \exp_{2-q}\left\{-\left(\frac{z_{\{q\}}}{\mathbf{Z}^{\mathcal{LV}}}\right)^2 v^2\right\}, \tag{74}$$

$$\boldsymbol{Z}_{\{q\}}^{\mathcal{LV}} = \lim_{r\to 2-q} \boldsymbol{Z}_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}} = \left[\frac{2q(z_{\{q\}})^2 \mathcal{K}_{\{q\}}^{\mathcal{LV}}}{\beta}\right]^{\frac{1}{3-q}}, \ \mathcal{K}_{\{q\}}^{\mathcal{LV}} := \begin{cases} \left[\dfrac{3q-1}{2q}\right]^2, & q \neq 1; \\ \left[\sqrt{e}\right]^{q-1}, & q \to 1. \end{cases} \tag{75}$$

7. РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ ФПК, СВЯЗАННЫХ С ЭНТРОПИЕЙ ШАРМА−МИТТАЛ

Для решения нестационарного диффузионного уравнений ФПК (59) (записанного в одномерном пространстве скоростей v) с начальным условием $P^{\mathcal{SM}}(v,0) = \delta(v - v_0)$, используем анзац-подход. В качестве пробной функции выберем функцию

$$P^{\mathcal{SM}}(v,t) = \frac{1}{\boldsymbol{Z}_{\{q,s\}}^{\mathcal{SM}}(t)} \exp_{\{2-q\}}\left\{-\beta_{\{q,s\}}^{\mathcal{SM}}(t)\left[v - v_m(t)\right]^2\right\}, \tag{76}$$

где

$$\beta_{\{q,s\}}^{\mathcal{SM}}(t) := \left(z_{\{q\}} / \boldsymbol{Z}_{\{q,s\}}^{\mathcal{SM}}(t)\right)^2, \quad \boldsymbol{Z}_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}}(t) := \left[\frac{2q(z_{\{q\}})^2 \mathcal{K}_{\{q,r\}}^{\mathcal{SM}}}{\beta} t\right]^{1/(1+r)}. \tag{77}$$

Подставляя (76) в уравнение (59), получим следующие дифференциальные уравнения первого порядка для величин $\boldsymbol{Z}_{\{q,s\}}^{\mathcal{SM}}(t)$ и $v_m(t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{Z}_{\{q.r\}}^{\mathcal{SM}} = -\boldsymbol{Z}_{\{q.r\}}^{\mathcal{SM}} + \frac{2q}{\beta} z_{\{q\}}^2 K_{q.r} \left(\boldsymbol{Z}_{\{q.r\}}^{\mathcal{SM}}\right)^{-r}, \tag{78}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} v_m(t) = -v_m(t). \tag{79}$$

Отсюда следует решение (Plastino, Plastino,1995)

$$\boldsymbol{Z}_{\{q.r\}}^{\mathcal{SM}} = \left\{\frac{2q}{\beta} z_{\{q\}}^2 K_{\{q.r\}} \left[1 - \exp\left(1 - (1+r)t\right)\right]\right\}^{1/(1+r)}, \tag{80}$$

$$\mathcal{E}(t) = -\mathcal{E}_0 \exp(-t). \tag{81}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследования в области статистической механики и термодинамики неэкстенсивных систем приобрели в последнее время значительный общетеоретический интерес в связи с проявлениями неэкстенсивных свойств во многих аномальных физических явлениях и важностью практических приложений. Диапазон применения разнообразных неэкстенсивных параметрических энтропий постоянно расширяется, охватывая различные направления в науке, такие как космология и космогония, квантовая механика и статистика, специальная и общая теории относительности, стохастическая динамика и фракталы, геофизика, биомедицина и многие другие. Среди неэкстенсивных энтропий двухпараметрическая энтропия Шарма−Миттал (ШМ) занимает особое место, поскольку она позволяет получить ряд однопараметрических распределений, которые наблюдаются в различных физических, природных и искусственных системах.

В представленной работе функционал Шарма-Миттал рассматривается как форматор семейства классической и деформированных однопараметрических энтропий, состоящего из энтропий Реньи, Тсаллиса, Ландсберга−Ведрала, Гаусса и Гиббса. Все эти энтропии связаны равенствами, представляющими чередования обычных $(\ln, \exp)$ и деформированных $(\ln_q, \exp_q)$ логарифмов и экспонент.

В работе показано, что энтропия Шарма−Миттал подчиняется псевдоаддитивному закону для двух статистически независимых систем. Найдено универсальное распределение степенного закона на основе максимизации двухпараметрической энтропии Шарма−Миттал при заданных ограничениях на осредненные значения параметров системы, полученные по нормированному эскортному распределению вероятностей. Построена двухпараметрическая термодинамика неэкстенсивных систем для этой энтропии и показана её взаимосвязь с обобщёнными однопараметрическими термодинамиками, основанными на указанных выше деформированных энтропиях семейства ШМ. С учетом свойства выпуклости дивергенции Брегмана показано, что для энтропии ШМ сохраняется принцип максимума равновесной энтропии и доказаны теорем Гиббса и *H*-теорема, описывающая эволюцию хаотической системы во времени.

Рассмотрен вывод степенных уравнений Фоккера−Планка−Колмогорова, соотнесенных с энтропией ШМ. При этом получаемые диффузионные уравнения записаны таким образом, что их стационарные решения являются вероятностными распределениями, максимизирующими энтропию ШМ для неэкстенсивных систем. Использован анзац-метод для получения нестационарного решении одномерного уравнения ФПК. Сконструированные указанным способом степенные уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова могут найти применение в различных областях науки. В частности, выведенные здесь нелинейные диффузионные уравнения ФПК могут быть использованы в эпидемиологии при предсказании распространения эпидемий и пандемий.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 21-01- .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Зарипов Р.Г. Самоорганизация и необратимость в неэкстенсивных системах. Казань: Фэн. 2002. 251 с.

Зарипов Р.Г. Принципы неэкстенсивной статистической механики и геометрия мер беспорядка и порядка. Казань: Изд-во Казан. Гос. техн. ун-та. 2010. 404 с.

Клочкова Л.В., Орлов Ю.Н., Тишкин В.Ф. Математическое моделирование стохастических процессов распространения вирусов в среде обитания людей // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2020. № 114. 17 с.

Колесниченко А.В. Критерий термической устойчивости и закон распределения частиц для самогравитирующих астро-физических систем в рамках статистики Тсаллиса // Mathematica Montisnigri. 2016. Т. 37. С. 45-75.

Колесниченко А.В. К построению неаддитивной термодинамики сложных систем на основе статистики Курадо-Тсаллиса // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018a. № 25. 40 с.

Колесниченко А.В. К конструированию термодинамики неаддитивных сред на основе статистики Тсаллиса–Мендеса–Пластино // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018b. № 23. 28 с.

Колесниченко А.В. Статистическая механика и термодинамика Тсаллиса неаддитивных систем. Введение в теорию и приложения. М.: ЛЕНАНД. 2019. 360 с.

Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. - М.: Институт компьютерных исследований. 2002. 656 с.

Abe S. Heat and entropy in nonextensive thermodynamics: transmutation from Tsallis theory to Rényi-entropy-based theory // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2001. V. 300. № 3. P. 417-423.

Aktürk E., Bagci G. B., Sever R. Is Sharma-Mittal entropy really a step beyond Tsallis and Renyi entropies? // 2007. Eprint arXiv: cond-mat/0703277.

Aktürk O., Aktürk E., Tomak M. Can Sobolev Inequality Be Written for Sharma-Mittal Entropy?// Intern. J. Theor.l Phys. 2008. V. 47. № 12, P. 3310-3320.

Amigy J.M., Balogh S.G., Hernändez S.A. Brief Review of Generalized Entropies // Entropy. 2018. V. 20. P. 813.

Aptekarev A. I., Dehesa J. S., Sanchez-Moreno P., Tulyakov D. N. Asymptotics of L_p-norms of Hermite polynomials and Renyi entropy of Rydberg oscillator states // Contemp. Math. 2012a. V. 578. P. 19-29.

Aptekarev A. I., Dehesa J. S., Sanchez-Moreno P., Tulyakov D. N. Rényi entropy of the infinite well potential in momentum space and Dirichlet-like trigonometric functionals // J Math. Chem. 2012b. № 50. P. 1079-1090.

Aptekarev A. I.,, Tulyakov D. N., Toranzo I. V., Dehesa J. S. Renyi entropies of the highly-excited states of multidimensional harmonic oscillators by use of strong Laguerre asymptotics // Eur. Phys. J. B. 2016. V. 89. P. 85-97.

Beck C., Schlogl F. Thermodynamics of chaotic systems: an introduction. Cambridge: Cambridge University Press. 1993. 286 p.

Beck C. Generalised information and entropy measures in physics // Contemp. Phys. 2009. V. 50. P. 495-510.

Bialas A., Czyz W. Renyi entropies of a black hole from Hawking radiation // EPL (Europhysics Letters). 2008. V. 83. № 6. P. 60009 (Peebles, 1980;

Büyükkılıç F.,Demirhan D., Güleç A. A statistical mechanical approach to generalized statistics of quantum and classical gases // Phys. Lett. A 1995. V. 197. № 3. P. 209-220.

Boghosian B. M. Navier-Storts Equations for Generalized Thermostatistics// Bras. J. Phys. 1999. V. 29. № 1. P. 91-107.

Borges E., Roditi I. A family of nonextensive entropies // Phys. Lett. A. 1998. V. 246. P.399-402.

Casas G.A., Nobre F.D. Nonlinear Fokker-Planck equations in super-diffusive and sub-diffusive regimes // J. Math. Ph. 2019. V. 60. P. 053301 (1-13).

Chavanis P.H. Generalized thermodynamics and Fokker-Planck equations: applications to stellar dynamics and two-dimensional turbulence // Phys. Rev. E 2003. V. 68. P. 036108

Chavanis P.H., Delfini L. Dynamical stability of systems with long-range interactions: application of the Nyquist method to the HMF model // Eur. Phys. J. B. 2009. V. 69. № 3. P. 389-429.

Curado E. M. F, Tsallis C. Generalized statistical mechanics: connection with thermodynamics// J. Phys. A : Mathematical and General.1991. V. 24. № 2. P. L69-72

Colombo E.H., Anteneodo C. Nonlinear population dynamics in a bounded habitat // J. Theor. Biol. 2018. V. 446. P.11-18.

Combe G., Richefeu V., Stasiak M., Atman A.P.F. Experimental validation of a nonextensive scaling law in confined granular media // Phys. Rev. Lett. 2015. V. 115. P. 238301.

Comptey A., Jou D. Non-equilibrium thermodynamics and anomalous diffusion // J. Phys. A: Math. Gen. 1996. V. 29 P. 4321-4329.

Curado E.M.F., Souza A.M.C., Nobre F.D., Andrade R.F.S. Carnot cycle for interacting particles in the absence of thermal noise // Phys. Rev. E. 2014. V. 89. P. 022117.

Czachor M., Naudts J. Thermostatistics based on Kolmogorov-Nagumo averages: unifying framework for extensive and nonextensive generalizations //Phys. Lett. A. 2002. V. 298. № 5-6. P 369 -374.

Daroczy Z. Generalized information functions // Inf. Control. 1970. V. 16. № 1. P. 36–51.

Du J. Test of nonextensive statistical mechanics by solar sound speeds // Europhys. Lett. 2006. V. 75 .№ 6. P. 861-867.

Esquivel A., Lazarian A. Tsallis Statistics as a Tool for Studying Interstellar Turbulence // Astrophys. J. 2010. V. 710. № 1. P. 125-132.

Fa K.S., Lenzi E.K Thermostatistical aspects of generalized entropies // Chaos, Solitons and Fractals. 2004. V.20. № 2. P 227 -.233.

Frank T. D. On Nonlinear and Nonextensive Diffusion and the Second Law of Thermodynamics // Physics Letters A. 2000. V. 267. № 5-6. P. 298-304.

Frank T. D. Stability Analysis of Stationary States of Mean Field Models Described by Fokker-Planck Equations // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2002. V. 189. №. 3-4. P.199-218.

Frank, T.D. Nonlinear Fokker-Planck Equations: Fundamentals and Applications. Springer: Berlin/Heidelberg, Germany. 2005. 404 p.

Frank T.D., Daffertshofer A. Multivariate nonlinear Fokker-Planck equations and generalized thermostatistics // Phys. A.: Statistical Mechanics and its Applications. 2001b. V. 292. № 1. P. 392-410.

Frank T.D., Daffertshofer A. *H*-theorem for nonlinear Fokker-Planck equations related to generalized thermostatistics // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2001a. V. 295. № 3. P. 455-474.

Frank T.D., Plastino A.R. Generalized thermostatics based on the Sharma-Mittal entropy and escort mean value // Eur. Phys. J. B. 2002. V. 30. P. 543–549.

Grassberger P. On the Hausdorff dimension of fractal attractors // J. Statist. Phys. 1981. V. 26. № 1. P. 173-179.

Grassberger P. Generalizations of the Hausdorff dimension of fractal measures // Physics Letters A. 1985. V. 107. № 3. P. 101-105.

Grassberger P., Procaccia I. Dimensions and entropies of strange attractors from a fluctuating dynamics approach // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1984. V. 13. № 1-2. P. 34-54.

Halsey T.C., Jensen M.H., Kadanoff L.P., Procaccia I., Shraiman B.I. Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets // Phys. Rev. A. 1986. V. 33. P. 1141–1151.

Hanel R., Thurner S., Tsallis C. Limit distributions of scale-invariant probabilistic models of correlated random variables with the *q*-Gaussian as an explicit example // Eur. J. Phys. B. 2009. V. 72. № 2. P. 263-268.

Havrda J., Charvat F. Quantiication method of classiication processes. Concept of structural α-entropy // Kybernetika. 1967. V. 3. P. 30–35.

Hentschel H.G.E., Procaccia I. The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1983. V. 8. № 3. P. 435-444.

Ito N., Tsallis C. Specific heat of the harmonic oscillator within generalized equilibrium statistics // Nuovo Cimento D. 1989. V. 11. № 6. P. 907-911.

Jaynes E.T. Information theory and statistical mechanics // В сб. «Statistical Physics». Brandeis Lectures. 1963. V.3. P.160.

Jizba P., Arimitsu T. Observability of Renyi's entropy // Physical Review E. 2004. V. 69. № 2. id. 026128

Kaniadakis G., Lissia M., Scarfone A. M. Two-parameter deformations of logarithm, exponential, and entropy: A consistent framework for generalized statistical mechanics // Physical Review E, 2005. V. 71. №4. id. 046128.

Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. Modification of the jeans instability criterion for fractal-structure astrophysical objects in the framework of nonextensive statistics // Solar System Research. 2014. V. 48. № 5. P 354–365.

Kolesnichenko A. V. On construction of the entropy transport model based on the formalism of nonextensive statistics // Mathematical Models and Computer Simulations. 2014. V.6. № 6 P. 587-597.

Kolesnichenko A. V., Chetverushkin B. N. Kinetic derivation of a quasihydrodinamic system of equations on the base of nonextensive statistics // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2013. V. 28: P.547-576.

Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. Modeling of aggregation of fractal dust clusters in a laminar protoplanetary disk // Solar System Research. 2013. V. 47. № 2. P. 80-98.

Landberg P.T., Vedral V. Distributions and channel capacities in generalized statistical mechanics // Phys. Lett. A. 1998. V. 247. P. 211-217.

Livadiotis G., McComas D.J. Understanding Kappa Distributions: A Toolbox for Space Science and Astrophysics // Space Sci. Rev. 2013. V. 175. P. 183-214.

Lenzi E.K., Mendes R.S. Collisionless Boltzmann equation for systems obeying Tsallis distribution // Eur. J. Phys. B. 2001. V. 21. № 3. P. 401-406.

Lenzi E. K., Scarfone A. M. Extensive-like and intensive-like thermodynamical variables in generalized thermostatistics // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2012. V. 391. № 8. P. 2543-2555.

Mandelbrot B.B. Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier // J. Fluid. Mech. 1974. V. 62. P. 331-358.

Mandelbrot B.*B*. Les Objects Fractals. Forms, Hazard et Dimension. Paris: Flammarion. 1975. 195 p.

Mandelbrot B.B. Fractals: Form, Change and Dimension. San Francisco: Freeman. 1977. 365 p.

Mandelbrot B.B. The Fractals Geometry of Nature. New York: Freeman, 1982. 460 p.

Mariz A.M. On the irreversible nature of the Tsallis and Renyi entropies // Phys. Lett. A. 1992. V. 165. № 5-6. P. 409-411.

Masi M. A step beyond Tsallis and Renyi entropies // Phys. Lett. A. 2005. V. 338. P. 3–5.

Mulansky M., Pikovsky A. Energy spreading in strongly nonlinear disordered lattices // N. Journ. Phys. 2013. V.15. P. 053015.

Nagy Á., Romera E. Maximum Rényi entropy principle and the generalized Thomas-Fermi model // Physics Letters A. 2009. V. 373. № 8-9. P. 844-846.

Naudts J. Continuity of a class of entropies and relative entropies // Rev. Math.Phys. 2004. V.16. P. 809822; Errata. Rev. Math. Phys. V.21, P. 947-948.

Newman W.I., Sagan C. Galactic civilizations: Population dynamics and interstellar diffusion // Icarus 1981. V. 46. P. 293-327.

Nielsen F., Nock R. A closed-form expression for the Sharma-Mittal entropy of exponential families // J. Phys. A: Mathematical and Theoretical. 2012. V. 45. № 3, id. 032003.

Nobre F.D., Rego-Monteiro M.A., Tsallis C. Nonlinear relativistic and quantum equations with a common type of solution // Phys. Rev. Lett. 2011. V. 106. P. 140601.

Parvan A. S., Biro T. S. Thermodynamical limit in non-extensive Renyi statistics // Physics Letters A. 2005. V. 340. № 5-6. P. 375-387.

Pickup R.M., Cywinski R., Pappas C., Farago B., Fouquet P. Generalized Spin-Glass Relaxation // Phys. Rev. Lett. 2009. V.102. № 9. id. 097202.

Plastino A.R. Plastino A.Non-Extensive Statistical Mechanics and Generalized Fokker-Planck Equation // Physica A: Statis. Mech. & Appl. 1995. V. 222. P. 347-354.

Plastino A., Plastino A.R. On the universality of thermodynamics' Legendre transform structure // Phys. Lett. A . 1997. V. 226. № 5. P. 257-263.

Plastino A.R., Casas M., Plastino A. A nonextensive maximum entropy approach to a family of nonlinear reaction-diffusion equations // Phys. A.: Statistical Mechanics and its Applications. 2000. V. 280. № 3. P. 289-303.

Plastino A.R., Wedemann R. S. Nonlinear Fokker–Planck Equation Approach to Systems of Interacting Particles: Thermostatistical Features Related to the Range of the Interactions // Entropy. 2020. V. 22. P.163 (1-13).

Ramshaw J.D. H-theorems for the Tsallis and Renyi entropies // Phys. Lett. A. 1993a. V. 175. № 3-4. P. 169-170.

Ramshaw J.D. Irreversibility and generalized entropies // Phys. Lett. A. 1993b. V. 175. № 3-4. P. 171-172.

Renyi A. On measures of entropy and information // In: Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematics, Statistics and Probability. University California Press. Berkeley. 1961. V. 1. P. 547-561.

Renyi A. Probability Theory. Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1970. 573 p.

Ribeiro M.S., Nobre F.D., Curado, E.M.F. Time evolution of interacting vortices under overdamped motion // Phys. Rev. E. 2012. V. 85. P. 021146.

Scarfone A. M. Thermal and mechanical equilibrium among weakly interacting systems in generalized thermostatistics framework // Physics Letters A. 2006.V. 355. № 4-5. P. 404-412.

Scarfone A. M. Legendre structure of the thermostatistics theory based on the Sharma Taneja Mittal entropy //Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2006. V. 365. № 1. P. 63-70.

Scarfone A. M., Wada T. Thermodynamic equilibrium and its stability for microcanonical systems described by the Sharma-Taneja-Mittal entropy // Physical Review E. 2005. V. 72 № 2. id. 026123.

Scarfone A. M., Wada T. Equivalence among different formalisms in the Tsallis entropy framework // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2007. V. 384. № 2. P. 305-317.

Schwämmle V., Curado E. M. F., Nobre F. D. Nonlinear Fokker-Planck Equations Related to Standard Thermostatistics // Complexity, Metastability and Nonextensivity 2007. V. 84. P. 152-156.

Sharma B.D., Mittal D.P. New non-additive measures of relative information // J. Comb. Inform. & Syst. Sci. 1975. V.2. P. 122-133.

Shiino M. *H*-theorem with generalized relative entropies and the Tsallis statis Tics //. J. Phys. Soc. Jpn. 1998. V.67. № 11. P. 3658-3660.

Shiino M. Free energies based on generalized entropies and h-theorems for nonlinear Fokker–Planck equations // J. Math. Ph. 2001 V. 42, № 6 . P. 2540-2553.

Shiino M. Stability analysis of mean-field-type nonlinear Fokker-Planck equations associated with a generalized entropy and its application to the self-gravitating system // Phys. Rev. E. 2003. V. 67. P. 056118 (1-16).

Tirnakli U., Torres D.F. Exact and approximate results of non-extensive quantum statistics // Eur. J. Phys. B. 2000. V. 14. № 4. P. 691-698.

Tsallis C., Bukman D.J. Anomalous diffusion in the presence of external forces: Exact time-dependent solutions and their thermostatistical basis // Phys. Rev. E 1996. V.54. P. R2197-R2200.

Tsallis C., Mendes R., Plastino A. The role of constraints within generalized nonextensive statistics // Physica A. 1998. V. 261. P.543-554.

Tsallis C. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics // J. Stat. Phys. 1988. V. 52. № 1-2. P. 479-487.

Tsallis C. Nonextensive Statistics: Theoretical, Experimental and Computational Evidences and Connections // Brazilian Journal of Physics. 1999. V. 29. № 1. P.1-35.

Tsallis C. Nonextensive statistical mechanics and thermodynamics: Historical background and present status//In: S. Abe and Y. Okamoto (Eds.), Nonextensive Statistical Mechanics and Its Applications. Series Lecture Notes in Physics. Springer. Heidelberg. 2001. 277p.

Tsallis C. Classical and Quantum Complexity and Nonextensive Thermodynamics // Chaos, Solitons and Fractals. 2002. V. 13. P. 371-391.

Tsallis C. Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics. Approaching a Complex World. New York: Springer. 2009. 382 p.

Wada T., Scarfone A.M. A non self-referential expression of Tsallis' probability distribution function // Eur. J. Phys. B. 2005. V. 47. № 4. P. 557-561.

Wada T., Scarfone A.M. Connections between Tsallis' formalisms employing the standard linear average energy and ones employing the normalized *q*-average energy // Physics Letters A. 2005. V. 335. P. 351-362.

Wada T., Scarfone A.M. On the non-linear Fokker-Planck equation associated with κ-entropy// American Institute of Physics / AIP Conference Proceedings 2007. V. 965. P. 177-181.

Zaripov R. Evolution of the Entropy and Renyi Difference Information during Self-Organization of Open Additive Systems // Russian Physics Journal. 2005. V. 48. № 3. P. 267-274.

ОГЛАВЛЕНИЕ