ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 25 за 2021 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

А.К. Алексеев, А.Е. Бондарев

О методе Прагера-Синга оценки погрешности аппроксимации

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Алексеев А.К., Бондарев А.Е. О методе Прагера-Синга оценки погрешности аппроксимации // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. № 25. 22 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2021-25
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-25

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

А.К.Алексеев, А.Е.Бондарев

О методе Прагера-Синга оценки погрешности аппроксимации

Москва — 2021

Алексеев А.К., Бондарев А.Е.

О методе Прагера-Синга оценки погрешности аппроксимации

Классический метод Прагера и Синга (Prager&Synge, "hypercircle") для апостериорной оценки погрешности аппроксимации рассмотрен с точки зрения расширения области его применимости (круга анализируемых задач и методов реализации). Показано, что можно построить неинтрузивный вариант оценки погрешности аппроксимации, реализующий метод Прагера и Синга для решения произвольной системы ЧДУ. Полуэвристическая версия предлагаемого варианта метода Прагера и Синга может быть соотнесена с разрабатываемыми в настоящее время методами оценки погрешности аппроксимации на ансамбле решений, полученных алгоритмами различной внутренней структуры.

Ключевые слова: метод Прагера-Синга, апостериорная оценка, погрешность аппроксимации, верификация

Alexey Kirillovich Alexeev, Alexander Evgenyevich Bondarev

On the Prager-Synge method for a posteriori error

The classic method by Prager and Synge ("hypercircle" method) for a posteriori error estimation in addressed from the viewpoint of the extension of the applicability domain (the range of analyzed problems and methods of the realization). The nonintrusive version of the approximation error estimation that implements the method by Prager and Synge for the arbitrary PDE system is presented. The semiheuristical variant of the Prager and Synge method may be related with the modern approaches for approximation error estimation on the ensemble of solutions obtained by the algorithms of different inner structure.

Key words: Prager&Synge method, a posteriori error estimation, approximation error, verification

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 19-01-00402 и 20-01-00358).

Введение

Верификация численных решений и программ аэрогазодинамики, требуемая современными стандартами [1-3], подразумевает наличие вычислимой оценки погрешности аппроксимации, которую мы обозначим как Δu_h. Ниже мы используем также следующие обозначения: $A\tilde{u} = \rho$ – операторная форма уравнений, описывающих течение газа, $A_h u_h = \rho_h$ – дискретный оператор, аппроксимирующий данную систему, $u_h \in R^M$ - численное решение (сеточная функция), $\tilde{u}_h \in R^M$ – проекция точного решения на расчетную сетку, $\Delta\tilde{u}_h = u_h - \tilde{u}_h$ – истинная погрешность аппроксимации. Методы оценки погрешности аппроксимации можно разделить на две основные группы: *априорная* и *апостериорная* оценка.

Априорная оценка погрешности аппроксимации $\|\Delta\tilde{u}_h\| \le Ch^n$ (h шаг сетки, n порядок аппроксимации) не зависит от конкретного решения и содержит неизвестную константу C, что делает эту оценку важной при анализе свойств дискретных алгоритмов, но обесценивает с точки зрения практических приложений. В рамках этого асимптотического подхода к сходимости решения расчеты на последовательности сгущающихся сеток позволяют сделать вычислимую оценку погрешности Δu_h^R по Ричардсону [4]. Однако эта оценка не имеет формы строгого неравенства, к тому же она очень затратна с вычислительной точки зрения, так как требует отдельного определения порядка сходимости для течений с разрывами. Все вместе это создает существенные затруднения при анализе задач вычислительной аэрогазодинамики с помощью этого метода [5,6]. Поэтому основной областью применения экстраполяции Ричардсона являются линейные задачи, обладающие достаточной гладкостью решений.

Другой вариант оценки погрешности аппроксимации, а именно *апостериорная оценка*, имеет вид $\|\Delta\tilde{u}_h\| \le I(u_h)$ и содержит вычислимую величину $I(u_h)$, зависящую от конкретного численного решения u_h. Такая оценка исключительно ценна с точки зрения практических приложений. К сожалению, единого универсального подхода, пригодного ко всем классам задач в апостериорной оценке погрешности, на данный момент нет. Наибольший успех наблюдается в конечно-элементном анализе применительно к достаточно гладким решениям уравнений эллиптического типа [7,8,9].

История получения *апостериорных* оценок началась с работ Прагера и Синга [10,11], в которых применен чисто геометрический подход, не связанный с асимптотиками решений при мельчении сетки. В настоящее время *апостериорная* оценка погрешности достигла большого совершенства в конечно-элементном анализе, однако на основе совершенно других идей [7,8,9]. Однако метод Прагера и Синга [10,11,12] представляется в значительной степени недооцененным как с идейной точки зрения, так и с точки зрения

области применимости. Здесь мы обсудим возможности исправления этой ситуации.

1. Метод Прагера-Синга

Метод Прагера-Синга, разработанный в [10,11] и обозначенный в этих работах как “hypercircle method” (метод гиперцикла, гиперкруга), обычно используется при анализе погрешности аппроксимации конечно-элементных решений уравнения Пуассона. За прошедшее время термин "hypercircle" ("гиперцикл") прочно закрепился в других разделах науки, поэтому мы, во избежание недоразумений, везде обозначаем “hypercircle method” [10,11] как "метод Прагера-Синга".

В настоящее время, к сожалению, метод Прагера-Синга малоизвестен. Имеется некоторое число современных публикаций [8,13,14,15,16], которые касаются отдельных приложений метода (в основном его реализации для решения уравнения Пуассона) и дают лишь ограниченное представление обо всем богатстве идей, подробно описанном в [11]. Русскоязычных публикаций на эту тему авторам неизвестно, а доступ к оригинальным публикациям [10-12] затруднен. Поэтому для удобства читателей мы приведем частичное изложение метода Прагера-Синга с некоторыми разъяснениями, иллюстрациями и цитатами.

В рамках метода Прагера-Синга для уравнения Пуассона

$$\nabla^2 \tilde{u} = \rho, \; u_\Gamma = f \tag{1}$$

используются два дополнительных линейных подпространства функций:

- подпространство градиентов $\partial v / \partial x_i$ функций $v \in H^1$, удовлетворяющих граничным условиям $v_\Gamma = f$,
- подпространство вектор-функций $q \in H^1$, таких, что выполняется

$$div(q) = \rho . \tag{2}$$

Пересечение этих подпространств дает градиент истинного решения. Можно показать, что для уравнения Пуассона выполняется следующее условие ортогональности ($((\nabla v - \nabla \tilde{u}),(q - \nabla \tilde{u})) = 0$):

$$\int_\Omega (\partial v / \partial x_i - \partial \tilde{u} / \partial x_i) \cdot (q - \partial \tilde{u} / \partial x_i) d\Omega = 0, \tag{3}$$

которое можно получить интегрированием по частям, “перебросив дифференцирование на правую часть” и учтя (1) и (2).

А именно

$\int_\Omega (\partial v / \partial x_i - \partial \tilde{u} / \partial x_i) \cdot (q - \partial \tilde{u} / \partial x_i) d\Omega = -\int_\Omega (v - \tilde{u}) \partial / \partial x_i (q - \nabla \tilde{u}) d\Omega + \int_\Gamma (v - \tilde{u})(q - \nabla \tilde{u}) d\Gamma = 0$, так как

член $\int\limits_{\Omega} (v-\tilde{u})\partial/\partial x_i (q-\nabla\tilde{u})d\Omega$ трансформируется в $div(q)-\nabla^2\tilde{u}=\rho-\nabla^2\tilde{u}=0$, а равенство $\int\limits_{\Gamma} (v-\tilde{u})(q-div(\tilde{u}))=0$ выполняется вследствие (2).

Здесь $v\in H^1(R^N)$ трактуется как численное решение, рассматриваемое не как сеточная функция, а как элемент пространства функций (полученный с помощью некоторой процедуры интерполяции). В дальнейшем изложении нормы и скалярные произведения соответствуют пространству функций L_2 и его конечномерному аналогу. Мы пожертвуем строгостью ради краткости и прозрачности, поэтому опустим формально необходимые операторы интерполяции и проектирования на дискретную сетку и не будем различать v и $u_h, \nabla u_h$ и $\nabla_h u_h$, а также соответствующие произведения и нормы.

По теореме Пифагора условие ортогональности (3) для $\nabla u_h-\nabla\tilde{u}$ и $q-\nabla\tilde{u}$ приводит к соотношению

$$\|\nabla u_h-\nabla\tilde{u}\|^2+\|q-\nabla\tilde{u}\|^2=\|\nabla u_h-q\|^2. \tag{4}$$

Три точки (концы векторов) $\nabla\tilde{u}$, ∇u_h и q лежат на поверхности гиперсферы с центром $(\nabla u_h+q)/2$ и радиусом $\|(\nabla u_h-q)/2\|$:

$$\|\nabla\tilde{u}-(\nabla u_h+q)/2\|=\|(\nabla u_h-q)/2\|=R. \tag{5}$$

Соответствующая геометрия представлена на рис. 1.

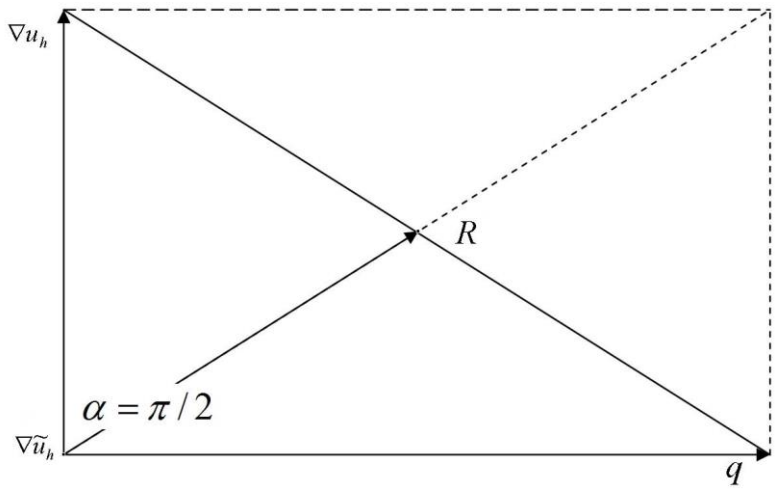

Рис. 1

Этот метод позволяет получить решение и оценить погрешность аппроксимации из чисто геометрических идей и без неизвестных констант.

Соотношение ортогональности (4) позволяет также получить оценку погрешности в форме неравенства

$$\|\nabla(\tilde{u} - u_h)\| < \|\nabla u_h - q\|. \qquad (6)$$

Все эти соотношения (4), (5), (6) верны для ортогональных (в L_2) векторов как в конечномерном, так и в бесконечномерном пространстве.

На рис. 2 представлена иллюстрация из работы [12] для “задачи двух слепых”, определяющих неизвестное расстояние до перекрестка ортогональных улиц.

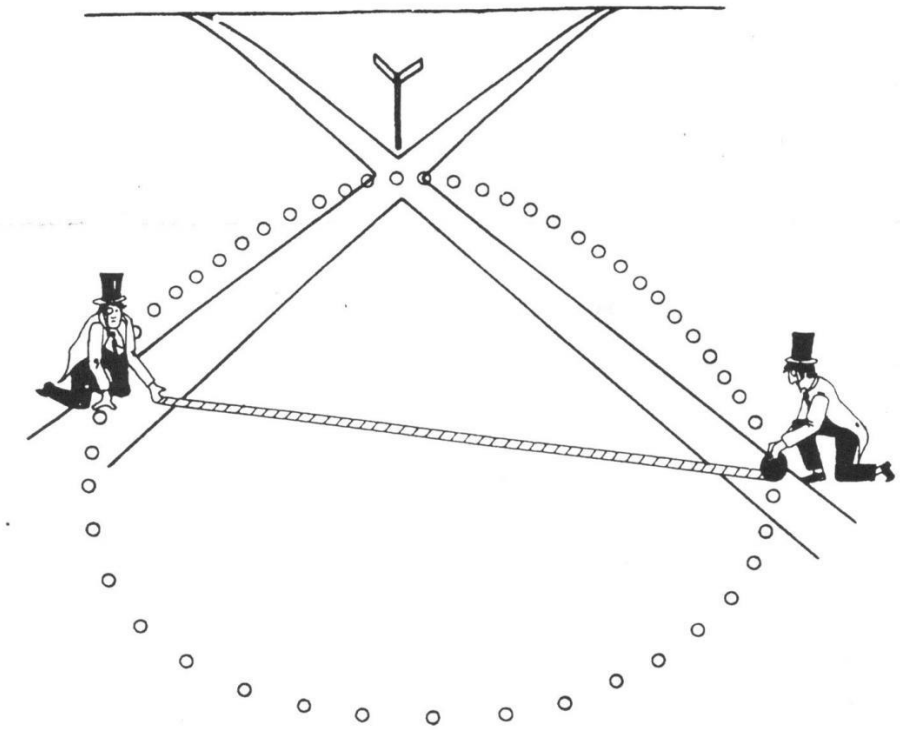

Рис. 2. “Two blind men and their hypercircle [12]”

Поскольку нам сложно тягаться с авторами метода в образности, приведем обширную цитату из [12], поясняющую рисунок, в авторском переводе:

«…*Представьте себе плоскую часть сельской местности. Представьте в ней две прямые узкие дороги, пересекающиеся под прямым углом. Представьте себе двух слепых мужчин, высадившихся на вертолете по одному на каждую дорогу. Снабдите их длинной измерительной лентой, протягивая ее от одного мужчины к другому. Пусть лента будет тисненой, чтобы они могли ее прочитать, невзирая на слепоту. Пусть они, не сдвигаясь с места, натянут ленту и прочтут ее. Предположим, расстояние составит 100 ярдов.*

Мы должны спросить каждого из них, как далеко он находится от перекрестка.

Эти люди, невзирая на слепоту, очень умны и знают, что гипотенуза прямоугольного треугольника больше, чем две другие стороны. Поэтому

каждый из мужчин говорит, что расстояние от него до перекрестка меньше (или, возможно, равно) 100 ярдов…».

Этот рисунок прекрасно показывает, что основная идея метода Прагера-Синга имеет чисто геометрическую природу. В нашей работе мы будем соотносить перекресток дорог с неизвестным точным решением, а положение слепых с известными численными (или вспомогательными) решениями. Соответственно, нашей целью будет оценить возможности применения геометрических методов к оценке погрешности численного решения (погрешности аппроксимации).

Строго говоря, в случае более чем двух таких ортогональных векторов (например, нескольких численных решений) реализуется пересечение нескольких гиперсфер, что соответствует довольно сложной геометрической конфигурации. Прагер и Синг [10,11] нашли блестящее решение этой трудности, продемонстрировав эквивалентность пересечения набора гиперсфер пересечению гиперсферы и гиперплоскости (класса (коразмерности) n [11]). В конечномерном пространстве сеточных функций пересечение гиперсферы и гиперплоскости порождает гиперсферу меньшей размерности [11]. В бесконечномерном случае такое пересечение бесконечномерно (именно это обстоятельство породило несколько неожиданный термин “*hypercircle”* в [11]). Однако в обоих случаях положение центра сдвигается, а радиус уменьшается, соответствующие выражения приведены в [11].

Впрочем, во всех известных авторам примерах применения метода Прагера-Синга использовались только два ортогональных вектора, поэтому простая геометрия (рис. 1 и рис. 2) вполне достаточна для нужд практики, по крайней мере на данном этапе.

Однако главная (и сильно недооцененная) идея Прагера-Синга касается самого понятия численного решения. Для иллюстрации этого нам придется сравнить традиционное определение численного решения (условно говоря, формулу “аппроксимация+устойчивость=сходимость” и численное решение по Прагеру-Сингу.

Численное решение в общепринятой постановке (Runge-Richardson-Lax [4,8,17,18]) является элементом последовательности сеточных функций u_{h_m}, сходящейся к точному решению $\left\| u_{h_m} - \tilde{u}_{h_m} \right\| \to 0$ при уменьшении шага дискретизации $h_m \to 0$ ($m \to \infty$). С современной точки зрения мельчение сетки и ее адаптация под решение являются основными элементами, обеспечивающими близость приближенного и точного решений. Основой этого анализа является асимптотическая сходимость решения $\left\| \Delta \tilde{u}_{h_m} \right\| \le C h_m^n$ с некоторым порядком n. Однако этот подход дает только качественную оценку точности результата. Никакого внутреннего механизма оценки погрешности аппроксимации в его рамках нет. Более того, теорема Лакса-Рихтмайера [17,18] доказана только для линейных задач. Для нелинейных задач и при наличии разрывов решений реальный порядок сходимости может иметь локальный характер и очень сильно

отличаться от номинального [19,20,21]. Численное определение реального порядка сходимости n является совсем нетривиальной и вычислительно затратной задачей [5,6].

Метод Прагера-Синга качественно отличается от стандартного подхода. Чтобы подчеркнуть это отличие, процитируем [11] (с. 97) в авторском переводе:

«В общем, предельный процесс не используется, и мы фактически не находим решение ... Но хотя мы его не находим, мы узнаем кое-что о его положении, а именно, что он расположен на определенном гиперкруге в пространстве функций».

Этой фразой можно описать выражение (5) и рис. 2. Термин "гиперкруг" (hypercircle) по указанным ранее причинам удобнее заменить на термин "гиперсфера". Переходя от (5) к (6), легко увидеть, что численное решение по Прагеру-Сингу рассматривается как центр u_h гиперсферы с радиусом R_h, внутри которой находится истинное решение $\|\tilde{u} - u_h\| < R_h$ (u_h и R_h вычислимы и не содержат неизвестных констант).

Нужно подчеркнуть, что для решения по Прагеру-Сингу наличие последовательности сеток и соответствующая сходимость численного решения не являются обязательными ***(«…предельный процесс не используется…»)***. В рамках этого подхода мельчение/сгущение сетки должно выполняться, только если величина R_h неприемлема с практической точки зрения (что можно проверить с помощью неравенства Коши-Буняковского для ценных функционалов, используемых на практике (см. например [22])).

Таким образом, решение в смысле Прагера-Синга позволяет в значительной степени ослабить "тиранию" мельчения и адаптации сетки, которая определяет основные трудности большинства современных приложений в вычислительной аэрогазодинамике.

В целом понятие численного решения по Прагеру-Сингу идеально соответствует идеологии апостериорной оценки погрешности.

Следует отметить, что с вычислительной точки зрения определение вспомогательной функции q (уравнение (2)) является достаточно сложной задачей. Кроме того, изначально, область применения метода Synge была ограничена уравнением Пуассона [10-13] и близкими задачами, такими как бигармоническое уравнение [14]. Это достаточно узкий набор задач, не включающий основные для вычислительной аэрогазодинамики уравнения, такие как уравнения Эйлера или Навье-Стокса. Вероятно, по этим причинам основное направление при апостериорной оценке погрешности аппроксимации в настоящее время основывается на совсем других идеях [7-9].

Тем не менее мы полагаем, что диапазон применимости метода Прагера-Синга сильно недооценен, и рассмотрим возможность применения данного подхода к решениям произвольных систем ЧДУ. Представляется также, что расчет вспомогательной ортогональной ошибки можно реализовать достаточно

просто, на основе специального постпроцессора, действующего на оценку ошибки усечения.

2. Расширение области применимости метода Прагера-Синга

Рассмотрим возможность обобщения метода Прагера-Синга на решения произвольных систем ЧДУ. Мы будем использовать ансамбль численных решений $u_h^{(i)}$ $(i=1,...,I)$, полученных независимыми численными алгоритмами $A_{(i)}u_h^{(i)}=\rho_h$. Обсуждение таких ансамблей решений представлено в работах [22-25]. В дальнейшем, как правило, мы не будем различать операторы $A_{(i)}$ и $A_{(k)}$, считая, что их нормы (которые мы в основном используем) близки, и будем обозначать их единообразно как A_h. Если построить такое вспомогательное решение $u_\perp$, что ошибки $\Delta u_\perp, \Delta u_h^{(i)} \in R^N$ ортогональны

$$(u_h^{(i)}-\tilde{u}_h, u_\perp-\tilde{u}_h)_\Omega=(\Delta\tilde{u}_h^{(i)},\Delta\tilde{u}_\perp)_\Omega=0\,, \tag{7}$$

тогда существует мажоранта ошибки для i-го решения (катет меньше гипотенузы)

$$\left\|u_h^{(i)}-\tilde{u}_h\right\| \le (\left\|\Delta\tilde{u}_\perp\right\|^2+\left\|\Delta\tilde{u}_h^{(i)}\right\|^2)^{1/2}=\left\|u_h^{(i)}-u_\perp\right\|. \tag{8}$$

Этот вариант метода Прагера-Синга иллюстрирован на рис. 3. Пусть $u_h^{(1)} \in R^M$ и $u_h^{(2)} \in R^M$ численные решения (сеточные функции) с ортогональными погрешностями аппроксимации $\Delta u_h^{(i)}=u_h^{(i)}-\tilde{u}_h$ ($\Delta u_h^{(1)} \perp \Delta u_h^{(2)}$).

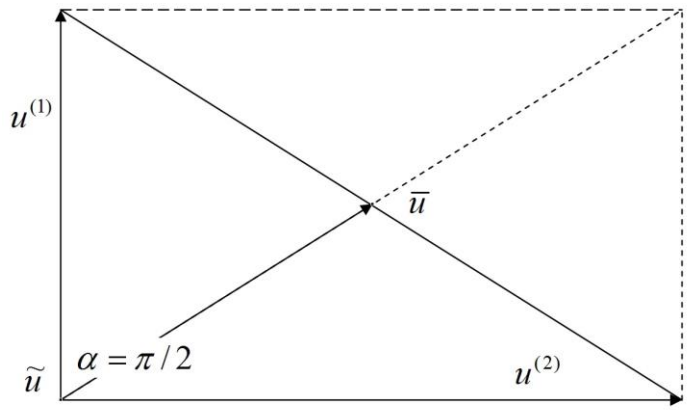

Рис. 3

Легко видеть, что точное решение $\tilde{u}_h$ и погрешность аппроксимации $\Delta u_h^{(i)}=u_h^{(i)}-\tilde{u}_h$ определяются двумя решениями $u_h^{(1)}, u_h^{(2)}$: $\left\|\tilde{u}_h-\bar{u}\right\|=\left\|u_h^{(1)}-u_h^{(2)}\right\|/2$, $\left\|\tilde{u}_h-u_h^{(1)}\right\|<\left\|u_h^{(1)}-u_h^{(2)}\right\|$.

Мы здесь для простоты и иллюстративности используем $\Delta u_h^{(2)}=\Delta u_\perp$, что, вообще говоря, необоснованно, т.к. по данным [23] $\Delta u_h^{(i)}$ далеки от ортогональности. В соответствии с

результатами работ [22,23] более естественно ожидать ортогональность погрешностей усечения $\delta u_h^{(i)}$. Погрешности усечения $\delta u_h^{(i)}$ вычислимы (например, в [26] это выполнено с помощью специального постпроцессора, неинтрузивно действующего на результаты расчета (поле параметров течения)). Безусловно, полученные погрешности усечения можно использовать для оценки $\Delta\tilde{u}_h^{(i)}$

$$\Delta\tilde{u}_h^{(i)} \approx \Delta u_h^{(i)} = A_h^{-1}\delta u_h^{(i)}, \tag{9}$$

но для этого нужно решить специальную задачу для возмущений (как, например, в [27]), в то время как погрешность усечения $\delta u_h^{(i)}$ можно оценить неинтрузивно, с помощью постпроцессора.

Поэтому есть смысл переформулировать соотношение ортогональности (7) в терминах неинтрузивно вычислимых величин (погрешностей усечения).

Итак, проведем анализ ортогональности погрешностей аппроксимации, используя погрешность усечения $\delta u_h^{(i)}$. Выберем некоторый вектор $\theta \perp \delta u_h^{(i)}$ и преобразуем его:

$$\delta u_\perp = A_h A_h^* \theta, \tag{10}$$

соответственно, θ можно записать как

$$\theta = A_h^{-1*} A_h^{-1} \delta u_\perp. \tag{11}$$

Можно показать, что условие ортогональности $\theta \perp \delta u_h^{(i)}$ эквивалентно соотношению ортогональности (7)

$$(\delta u_h^{(i)}, \theta)_\Omega = (\delta u_h^{(i)}, A_h^{-1*} A_h^{-1} \delta u_\perp)_\Omega = (A_h^{-1}\delta u^{(i)}, A_h^{-1}\delta u_\perp)_\Omega = (\Delta u_h^{(i)}, \Delta u_\perp)_\Omega = 0, \tag{12}$$

если принять

$$\Delta u_\perp = A_h^{-1}\delta u_\perp. \tag{13}$$

Из (11) с учетом (13) получим

$$\theta = A_h^{-1*}\Delta u_\perp. \tag{14}$$

$\Delta u_\perp$ вычисляем действием сопряженного постпроцессора (неинтрузивно)

$$\Delta u_\perp = A_h^* \theta. \tag{15}$$

Выражение (15) является в данной работе ключевым, так как позволяет построить возмущение, ортогональное погрешности аппроксимации, и оправдывает использование выражений типа (8). В конечномерном пространстве сеточных функций эта операция ($\Delta u_{\perp} = A_h^* \theta$) законна. С технической точки зрения сопряженный постпроцессор легко реализовать с использованием любого солвера, реализующего дискретизацию сопряженных уравнений. Однако оператор A^* в нашем случае дифференциальный, поэтому в непрерывном пределе (или при достаточно мелкой сетке) возможны проблемы с регулярностью решения для произвольного нерегулярного θ.

При реализации этого подхода построить θ, ортогональную $\delta u_h^{(i)}$, можно следующими способами:

1. выбрав произвольную $\theta \perp \delta u_h^{(i)}$ (при этом норма $\|\theta\|$ и $\|\Delta u_{\perp}\|$ не определена);
2. выбрав в качестве θ погрешность усечения некоторого дополнительного расчета

$$\theta = \delta u_h^{(k)}. \tag{16}$$

Второй способ обусловлен тем, что из численных экспериментов [23] известно, что погрешности усечения для решений, полученных с помощью независимых алгоритмов, бывают практически ортогональны. В таком случае можно получить оценку нормы

$$\|\Delta u_{\perp}\| \le \|A_h^*\| \cdot \|\delta u_h^{(k)}\| \tag{17}$$

(из $\Delta u_{\perp} = A_h^* \delta u_h^{(k)}$).

Таким образом, построение вспомогательного возмущения $\Delta u_{\perp}$, ортогонального погрешности аппроксимации $\Delta u_h^{(i)}$, возможно. Вычислять его целесообразно с использованием погрешности усечения некоторого вспомогательного решения $\delta u_h^{(k)}$.

3. Свойства оценки погрешности аппроксимации, полученной с помощью вспомогательного ортогонального возмущения

3.1 Сходимость ортогонального возмущения

Можно показать, что норма ортогонального возмущения $\|\Delta u_{\perp}\|$ убывает коррелированно с нормами погрешности аппроксимации $\|\Delta u_h^{(i)}\|$ и $\|\delta u_h^{(i)}\|$.

Из (15) и (16) получим $\Delta u_{\perp} = A_h^* \delta u_h^{(k)}$. Соответствующее неравенство Коши-Буняковского имеет вид $\|\Delta u_{\perp}\| \le \|A_h^*\| \cdot \|\delta u_h^{(k)}\|$. Для погрешностей усечения и аппроксимации справедливы похожие выражения $A_h \Delta u_h^{(i)} = \delta u_h^{(i)}$, $\|\delta u_h^{(i)}\| \le \|A_h\| \cdot \|\Delta u_h^{(i)}\|$.

Предположив $\|\delta u_h^{(k)}\| \sim \|\delta u_h^{(i)}\|$ (что проверяемо и, согласно численным расчетам [23], гарантированно реализуется на достаточно большом ансамбле алгоритмов) получим соотношение $\|\Delta u_{\perp}\| \le \|A_h^*\| \cdot \|\delta u_h^{(k)}\| \le \|A_h^*\| \cdot \|A_h\| \cdot \|\Delta u_h^{(i)}\|$. Учтя $\|A_h^*\| = \|A_h\|$, получим

$$\|\Delta u_{\perp}\| \le \|A_h\|^2 \cdot \|\Delta u_h^{(i)}\|. \tag{18}$$

Используя $\|\Delta u_h^{(i)}\| \le \|A_h^{-1}\| \cdot \|\delta u_h^{(i)}\|$, можно получить

$$\|\Delta u_{\perp}\| \le \|A_h\| \cdot \|A_h\| \cdot \|A_h^{-1}\| \cdot \|\delta u_h^{(i)}\| = \|A_h\| \cdot cond(A_h) \cdot \|\delta u_h^{(i)}\|. \tag{19}$$

Соответственно, при $\|\delta u_h^{(i)}\| \to 0$ выполняется $\|\Delta u_{\perp}\| \to 0$, что демонстрирует одновременную сходимость ортогонального возмущения при уменьшении погрешности усечения (уменьшении шага дискретизации).

3.2 Оценка нормы погрешности аппроксимации с помощью вспомогательного ортогонального возмущения

Если оценить погрешность $\Delta u_h^{(i)}$ с помощью $\Delta u_{\perp}$, можно создать полностью неинтрузивный подход к оценке погрешности аппроксимации.

Пусть выполняются соотношения $\Delta u_h^{(i)} = A_h^{-1} \delta u_h^{(i)}$, $\|\Delta u_h^{(i)}\| \le \|A_h^{-1}\| \cdot \|\delta u_h^{(i)}\|$, $\Delta u_{\perp} = A_h^* \delta u_h^{(k)}$ и, соответственно, $\|\delta u_h^{(k)}\| \le \|A_h^{*-1}\| \cdot \|\Delta u_{\perp}\|$.

Предположив $\|\delta u_h^{(k)}\| \sim \|\delta u_h^{(i)}\|$ (как говорилось выше, это можно проверить и обеспечить подбором), получим неравенство

$$\|\Delta u_h^{(i)}\| \le \|A_h^{-1}\| \cdot \|A_h^{*-1}\| \cdot \|\Delta u_{\perp}\| = C \cdot \|\Delta u_{\perp}\|, \tag{20}$$

которое демонстрирует сходимость оценки погрешности аппроксимации при сходимости ортогонального возмущения.

С учетом (17) можно показать, что (20) эквивалентно следующей оценке нормы погрешности аппроксимации

$$\|\Delta u_h^{(i)}\| \le \|A_h^{-1}\| \cdot \|A_h^{*-1}\| \cdot \|A_h^*\| \cdot \|\delta u_h^{(k)}\|. \tag{21}$$

От очевидной оценки $\left\|\Delta u_h^{(i)}\right\| \le \left\|A_h^{-1}\right\| \cdot \left\|\delta u_h^{(i)}\right\|$ неравенство (21) $\left\|\Delta u_h^{(i)}\right\| \le cond(A_h^*) \cdot \left\|A_h^{-1}\right\| \cdot \left\|\delta u_h^{(k)}\right\|$ отличается наличием числа обусловленности $cond(A_h^*) = \left\|A_h^{*-1}\right\| \cdot \left\|A_h^*\right\| \ge 1$.

3.3 Двухсторонняя оценка погрешности аппроксимации с помощью вспомогательного ортогонального возмущения

Объединяя (18) и (20), можно получить неинтрузивную двухстороннюю оценку нормы погрешности аппроксимации $\left\|\Delta u_h^{(i)}\right\|$:

$$\left\|A_h\right\|^{-2} \cdot \left\|\Delta u_\perp\right\| \le \left\|\Delta u_h^{(i)}\right\| \le \left\|A_h^{-1}\right\|^2 \cdot \left\|\Delta u_\perp\right\|. \tag{22}$$

На языке погрешностей усечения и норм операторов это соответствует оценке:

$$\left\|A_h\right\|^{-2} \cdot \left\|A_h\right\| \cdot cond(A_h) \cdot \left\|\delta u_h^{(i)}\right\| \le \left\|\Delta u_h^{(i)}\right\| \le \left\|A_h^{-1}\right\|^2 \cdot \left\|A_h\right\| \cdot cond(A_h) \cdot \left\|\delta u_h^{(i)}\right\|. \tag{23}$$

4. Оценка оператора и его нормы с помощью разложения по динамическим модам

Оценка норм используемых здесь операторов ($\left\|A_h^{-1}\right\|, \left\|A_h\right\|$) является достаточно сложной проблемой, тем более что для нелинейных задач они зависят от решения. Тем не менее, в ряде работ такие нормы определялись. Например, для уравнения Лапласа нормы определялась в [28], для сингулярных векторов (наиболее быстро растущих возмущений поле течения) – в [29].

Мы предполагаем, что на ансамбле численных решений, полученных независимыми методами, можно применить разложение по динамическим модам (DMD) [30-32], чтобы восстановить оператор и его норму.

Сформируем набор “срезов” (snapshots) из ансамбля численных решений:

$X = (u_h^{(1)}, u_h^{(2)}, u_h^{(3)} ...)$ – вектора близки и почти коллинеарны

и ансамбля погрешностей усечения

$Y = (\delta u_h^{(1)}, \delta u_h^{(1)}, \delta u_h^{(1)} ...)$ – вектора почти ортогональны [23].

Близость векторов в ансамбле решений должна создать серьезные вычислительные трудности, поэтому мы рассмотрим альтернативную постановку через разности решений (в соответствии с [23] вектора разностей решений достаточно далеки от коллинеарности). В этом случае

$$X = (u_h^{(i)} - u_h^{(k)}, ...) = (Du_h^{(1)}, ..., Du_h^{(M)}), \tag{24}$$

$$Y = (\delta u_h^{(i)} - \delta u_h^{(k)}, ...) = (du_h^{(1)}, ..., du_h^{(M)}). \tag{25}$$

Здесь мы используем супериндекс $i,k \to j$, $j = 1...M$ для векторизации разности решений и погрешностей.

Наборы срезов связаны соотношением $Y = A_h X$, соответственно, оператор можно выразить как

$$A_h = YX^+, \tag{26}$$

где $X^+ = (X^* X)^{-1} X^*$ – псевдообратный оператор.

Обратный оператор A_h^{-1} можно получить в том же стиле, через соотношения сдвига $\Delta u_h^{(i)} - \Delta u_h^{(k)} = u_h^{(i)} - u_h^{(k)} = A_h^{-1}(\delta u_h^{(i)} - \delta u_h^{(k)})$, $Y = A_h^{-1} X$ с использованием “срезов” (snapshots):

$$X = (\delta u_h^{(i)} - \delta u_h^{(k)}, ...) = (du_h^{(1)}, ..., du_h^{(M)}), \tag{27}$$

$$Y = (u_h^{(i)} - u_h^{(k)}, ...) = (Du_h^{(1)}, ..., Du_h^{(M)}). \tag{28}$$

Для нелинейных задач расчет оператора и его нормы зависит от конкретного решения и неуниверсален. Впрочем, ансамбль расчетов для конкретной задачи получить вполне реально, соответственно, реально получить и оценки норм операторов.

Таким образом, по крайней мере формально, на ансамбле решений операторы A_h, A_h^{-1} и их нормы $\|A_h\|$, $\|A_h^{-1}\|$ могут быть вычислены с помощью DMD. Численная проверка точности и работоспособности такого алгоритма является отдельной темой и может быть проведена в рамках последующих работ.

5. Полуэвристические оценки нормы операторов

В качестве альтернативы вышеприведенному алгоритмически достаточно громоздкому подходу рассмотрим упрощенные нестрогие варианты оценки норм операторов. Из $\delta u_h^{(k)} - \delta u_h^{(i)} = A_{(k)} \Delta u_h^{(k)} - A_{(i)} \Delta u_h^{(i)}) \approx A_h (\Delta u_h^{(k)} - \Delta u_h^{(i)}) = A_h (u_h^{(k)} - u_h^{(i)})$ получим $\|\delta u_h^{(k)} - \delta u_h^{(i)}\| \le \|A_h\| \cdot \|u_h^{(k)} - u_h^{(i)}\|$ и оценку нижней границы нормы оператора

$$\frac{\|\delta u_h^{(k)} - \delta u_h^{(i)}\|}{\|u_h^{(k)} - u_h^{(i)}\|} \le \|A_h\|. \tag{29}$$

Предположив (это достаточно грубое предположение)

$$\|A_h\| \sim \frac{\left\|\delta u_h^{(k)} - \delta u_h^{(i)}\right\|}{\left\|u_h^{(k)} - u_h^{(i)}\right\|} \tag{30}$$

и учтя, что $\|A_h^*\| = \|A_h\|$, получим оценку нормы ортогонального возмущения:

$$\|\Delta u_\perp\| \le \|A_h^*\| \cdot \|\delta u_h^{(k)}\| \sim \frac{\left\|\delta u_h^{(k)} - \delta u_h^{(i)}\right\|}{\left\|u_h^{(k)} - u_h^{(i)}\right\|} \cdot \|\delta u_h^{(k)}\|. \tag{31}$$

Из $\|\Delta u_h^{(i)}\| \le \|A_h^{-1}\| \cdot \|\delta u_h^{(i)}\|$ и $\|\delta u_h^{(k)}\| \le \|A_h^{*-1}\| \cdot \|\Delta u_\perp\|$ ($\delta u_h^{(k)} = A_h^{*-1}\Delta u_\perp$), предположив (или подобрав) $\|\delta u_h^{(i)}\| \approx \|\delta u_h^{(k)}\|$, можно получить

$$\|\Delta u_h^{(i)}\| \le \|A_h^{-1}\| \cdot \|A_h^{*-1}\| \cdot \|\Delta u_\perp\|. \tag{32}$$

Из $A_h^{-1}(\delta u_h^{(k)} - \delta u_h^{(i)}) = (\Delta u_h^{(k)} - \Delta u_h^{(i)}) = (u_h^{(k)} - u_h^{(i)})$ получим $\|u_h^{(k)} - u_h^{(i)}\| \le \|A_h^{-1}\| \cdot \|\delta u_h^{(k)} - \delta u_h^{(i)}\|$ и

$$\frac{\left\|u_h^{(k)} - u_h^{(i)}\right\|}{\left\|\delta u_h^{(k)} - \delta u_h^{(i)}\right\|} \le \|A_h^{-1}\|. \tag{33}$$

Это дает оценку нижней границы нормы оператора.
Предположив (опять достаточно грубо, на эвристическом уровне)

$$\|A_h^{-1}\| \sim \frac{\left\|u_h^{(k)} - u_h^{(i)}\right\|}{\left\|\delta u_h^{(k)} - \delta u_h^{(i)}\right\|}, \tag{34}$$

получим вычислимую (к сожалению, эвристическую) оценку погрешности аппроксимации:

$$\|\Delta u_h^{(i)}\| \le \left(\frac{\left\|u_h^{(k)} - u_h^{(i)}\right\|}{\left\|\delta u_h^{(k)} - \delta u_h^{(i)}\right\|}\right)^2 \cdot \|\Delta u_\perp\| = \left(\frac{\left\|u_h^{(k)} - u_h^{(i)}\right\|}{\left\|\delta u_h^{(k)} - \delta u_h^{(i)}\right\|}\right)^2 \cdot \|A_h^* \delta u_h^{(k)}\|. \tag{35}$$

С учетом использования постпроцессора для расчета погрешности усечения оценка нормы погрешности аппроксимации приобретает вид $\|\Delta u_h^{(i)}\| \le \left(\frac{\left\|u_h^{(k)} - u_h^{(i)}\right\|}{\left\|\delta u_h^{(k)} - \delta u_h^{(i)}\right\|}\right)^2 \cdot \|A_h^* A_h u_h^{(k)}\|$.

Полученная неинтрузивная полуэвристическая оценка погрешности аппроксимации (с использованием двух последовательных постпроцессоров и

ансамбля решений) вызывает определенный интерес, однако может быть упрощена еще далее.

6. Связь с оценкой погрешности на ансамбле решений

Комбинация выражений (31) и (35) с учетом выражений (30) и (34) дает следующую оценку погрешности аппроксимации

$$\left\|\Delta u_h^{(i)}\right\| \le \frac{\left\|u_h^{(k)} - u_h^{(i)}\right\|}{\left\|\delta u_h^{(k)} - \delta u_h^{(i)}\right\|} \cdot \left\|\delta u_h^{(k)}\right\|. \tag{36}$$

Если $\delta u_h^{(k)} \perp \delta u_h^{(i)}$ и $\left\|\delta u_h^{(k)}\right\| \sim \left\|\delta u_h^{(i)}\right\|$, то получаем исключительно простое выражение

$$\left\|\Delta u_h^{(i)}\right\| \le \sqrt{2}\left\|u_h^{(k)} - u_h^{(i)}\right\|. \tag{37}$$

Оно очень близко к выражениям для оценки погрешности аппроксимации на ансамбле [22-25] (отличается только коэффициентом).

Дело здесь, видимо, в том, что методика, использующая оценки на ансамбле решений, связана с концентрацией меры и алгоритмической случайностью [22], порождающей ортогональность погрешностей. Поэтому неудивительно, что подход Прагера-Синга (использующий ортогональность погрешностей и возмущений по построению) дает аналогичные результаты.

В итоге, на полуэвристическом уровне оценки погрешности аппроксимации, полученные с помощью метода Прагера-Синга, эквивалентны оценкам, получаемым на ансамбле независимых решений [22-25].

7. Обсуждение

Рассматриваемый алгоритм оценки апостериорной ошибки на основе модификации метода Прагера-Синга в сравнении с методом коррекции погрешности (Defect correction [27]) имеет то преимущество, что является неинтрузивным. Он требует сравнимых вычислительных ресурсов, однако существенно сложнее, так как использует два различных постпроцессора, причем сопряженный сопроцессор является особенно сложным в отладке и случаи его использования авторам неизвестны.

Метод Прагера-Синга также алгоритмически существенно сложнее метода Ричардсона, однако требует несравненно меньших вычислительных ресурсов. Это вызвано тем, что обобщенный метод Ричардсона, пригодный для течений с разрывами, требует запредельно больших ресурсов с точки зрения памяти и быстродействия, что вызвано использованием большого количества уровней мельчения сетки. По указанным выше причинам метод Ричардсона для уравнений аэрогазодинамики применяется только в исключительных случаях.

Обычная же практика вычислений восходит к идеям Рунге [8], в соответствии с которыми в предположении существования асимптотики $\|\Delta u\| \le Ch^m$ мельчение сетки останавливается “по слипанию” $\|u_{h_m} - u_{h_{m-1}}\| << \|u_{h_m}\|$, что определяется на практике при решении конкретных задач “на глаз”, без количественных критериев, и вносит в алгоритм элементы субъективности.

Сходимость по сетке соответствует последовательности сеточных функций $u_{h_m} \to \tilde{u}_{h_m}$, сходящейся к истинному решению (его проекции на сетку) при уменьшении шага дискретизации $h_m \to 0, (m \to \infty)$.

В противоположность этому общепринятому подходу сходимость по Прагеру и Сингу соответствует последовательности гиперсфер в пространстве сеточных функций $\{u_h, R_h\}$ (вычислимый радиус $R_h(h) \to 0$ при $h \to 0$). Мельчение шага сетки останавливается, когда погрешность практически ценных функционалов $|\Delta\varepsilon_m|$ становится меньше некоторой критичной погрешности $|\Delta\varepsilon_m| \le \|\nabla\varepsilon_m\| \cdot R_h(h) \le |\Delta\varepsilon_m|_{cr}$. Строго говоря, при удачном выборе начальной сетки можно проверить, что никакого дополнительного сгущения не потребуется ([11]: ***(«…предельный процесс не используется…»)***.

Классический метод Прагера-Синга [10-12] опирается на соотношение ортогональности вида $(Bu_h^{(i)} - B\tilde{u}_h)(q - B\tilde{u}_h) = 0$ для уравнений, имеющих специальную форму ($A\tilde{u} = \rho$, $A = B^* B$), что резко ограничивает область его применимости.

Универсальный вариант метода Прагера-Синга, предлагаемый в данной работе, имеет другой вид соотношения ортогональности:

$$(A_h(u_h^{(i)} - \tilde{u}_h), A_h^{-1*}(u_\perp - \tilde{u}_h)) = 0, \tag{38}$$

который не предполагает каких-то ограничений на форму оператора A.

Выражение (38) следует из уравнения (12) с учетом выражения (15): $(\delta u_h^{(i)}, \theta) = (\delta u_h^{(i)}, \delta u_h^{(k)}) = (A_h \Delta u_h^{(i)}, A_h^{-1*} \Delta u_\perp) = (A_h(u_h^{(i)} - \tilde{u}_h), A_h^{-1*}(u_\perp - \tilde{u}_h)) = 0$.

В таблице 1 представлено детальное сравнение обоих вариантов метода Прагера-Синга.

Таблица 1

Сравнение классического и универсального вариантов метода Прагера-Синга

1	Классический $A\tilde{u} = \rho$, ($A = B^* B$)	Универсальный $A\tilde{u} = \rho$
2	$((Bu_h - B\tilde{u}_h), (q - B\tilde{u}_h)) = 0$	$(u_h - \tilde{u}_h)(u_\perp - \tilde{u}_h) = 0$

	Для уравнения Пуассона $\nabla^2\tilde{u}=\rho$: $((\nabla u_h-\nabla\tilde{u}_h),(q-\nabla\tilde{u}_h))=0$	
3	$((u_h-\tilde{u}_h),(B^*q-B^*B\tilde{u}_h))=0$, если $B^*q=\rho$	
4	$(\Delta u_h, Du_S)=0$	$(\Delta u_h,\Delta u_\perp)=0$
5	$\Delta u_h=(u_h-\tilde{u}_h)$, $Du_S=(B^*q-B^*B\tilde{u}_h)$	$\Delta u=(u_h-\tilde{u}_h)$, $\Delta u_\perp=(u_\perp-\tilde{u}_h)$
6		$\Delta u_\perp=A_h^*\delta u_h^{(k)}=A_h^*A_hu_h^{(k)}$
7		$(A_h(u_h^{(i)}-\tilde{u}_h),A_h^{-1*}(u_\perp-\tilde{u}_h))=0$
8	$\|\nabla u_h-\nabla\tilde{u}_h\|^2+\|q-\nabla\tilde{u}_h\|^2=\|\nabla u_h-q\|^2$	$\|u_h-\tilde{u}_h\|^2+\|u_\perp-\tilde{u}_h\|^2=\|u_\perp-u_h\|^2$
9	$\|\nabla u_h-\nabla\tilde{u}_h\|\le\|\nabla u_h-q\|$	$\|u_h-\tilde{u}_h\|\le\|u_\perp-u_h\|$
10	-	$\|\Delta u_h^{(i)}\|\le\|A_h^{-1}\|\cdot\|A_h^{*-1}\|\cdot\|\Delta u_\perp\|$
11	-	$\|\Delta u_h^{(i)}\|\le\sqrt{2}\|u_h^{(k)}-u_h^{(i)}\|$

В обоих случаях основные вычислительные трудности связаны с определением вспомогательных величин q и $\Delta u_\perp$. Основой реализации рассматриваемой версии универсального варианта метода Прагера-Синга является ортогональность погрешностей усечения $\delta u_h^{(k)}\perp\delta u_h^{(i)}$ для численных алгоритмов разной внутренней структуры. При этом выражения под номерами 6, 10, 11 в табл. 1 для классического варианта метода Прагера-Синга аналогов не имеют.

Строго говоря, универсальный вариант метода Прагера-Синга верен для любых сеточных функций $\theta\perp\delta u_h^{(i)}$, но при этом возникают проблемы с нормировкой оценок погрешности, которые проще всего обойти используя дополнительный алгоритм, дающий ортогональность $\delta u_h^{(k)}\perp\delta u_h^{(i)}$ (при этом не обязательно абсолютно точно, так как оценки типа (8) ($\|u_h-\tilde{u}_h\|\le\|u_\perp-u_h\|$) достаточно робастны относительно отклонения угла между векторами $u_h-\tilde{u}_h$ и $u_\perp-u_h$ от прямого, см. рис. 3).

Действие сопряженного постпроцессора $\Delta u_\perp=A_h^*\delta u_h^{(k)}$ можно реализовать аналогично построению постпроцессоров в [26]. Отличие будет в том, что в [26] постпроцессор определялся шаблоном повышенной точности, действующим на численное решение, а здесь предполагается действие шаблона того же порядка аппроксимации, но соответствующего сопряженной системе уравнений. Сопряженный постпроцессор можно достаточно просто реализовать с помощью любого имеющегося в наличии сопряженного солвера, реализующего каким-то образом дискретизацию сопряженных уравнений, например, в соответствии с [33].

Выводы

Существует возможность построить универсальный вариант метода Прагера и Синга, пригодный для анализа погрешности аппроксимации любых ЧДУ.

В полуэвристическом варианте универсальный метод Прагера и Синга близок к методам оценки погрешности на ансамбле численных решений, представленным в [22-25]. В этом случае отсутствие строгой ортогональности ошибок аппроксимации компенсируется дополнительной информацией о свойствах ансамбля решений или увеличением числа решений в ансамбле.

Универсальный метод Прагера и Синга для решения произвольной системы ЧДУ можно реализовать в неинтрузивной форме с использованием постпроцессоров, соответствующих прямому (действующему на решение и дающему погрешность усечения) и сопряженному (действующего на погрешность усечения) операторам, если имеется информация о величине нормы прямого и обратного операторов.

Анализ показывает, что формально прямой и обратный операторы и их нормы можно построить с помощью разложения по динамическим модам на ансамбле численных решений, полученных независимыми алгоритмами. Однако предположение о том, что такое построение даст необходимую точность, нуждается в проверке численными экспериментами.

Библиографический список

1. Guide for the Verification and Validation of Computational Fluid Dynamics Simulations. American Institute of Aeronautics and Astronautics. AIAA-G-077-1998, Reston, VA. 1998.
2. Standard for Verification and Validation in Computational Fluid Dynamics and Heat Transfer. ASME V&V 20-2009. 2009.
3. ГОСТ Р 57700.12–2018. Численное моделирование сверхзвуковых течений невязкого газа. Верификация ПО // Национальный стандарт РФ по численному моделированию физических процессов. 2018. 20 с.
4. Richardson L.F. The Approximate Arithmetical Solution by Finite Differences of Physical Problems Involving Differential Equations with an Application to the Stresses in a Masonry Dam // Transactions of the Royal Society of London, Series A. 1908. V. 210. P. 307-357.
5. Roy Ch.J. Grid Convergence Error Analysis for Mixed-Order Numerical Schemes // AIAA Journal. 2003. V. 41. №. 4. P. 595-604. https://doi.org/10.2514/2.2013
6. Alexeev A.K., Bondarev A.E. On Some Features of Richardson Extrapolation for Compressible Inviscid Flows // Mathematica Montisnigri. 2017. V. XL. P. 42-54.

7. Babuska I. and Rheinboldt W. A posteriori error estimates for the finite element method // Int. J. Numer. Methods Eng. 1978. V. 12. P. 1597-1615. https://doi.org/10.1002/nme.1620121010
8. Repin S.I. A posteriori estimates for partial differential equations // Walter de Gruyter, 2008. V. 4.
9. Ainsworth M. and Oden J.T. A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis // Wiley, NY. 2000. https://doi.org/10.1002/9781118032824
10. Prager W. and Synge J.L. Approximation in elasticity based on the concept of function spaces // Quart. Appl. Math. 1947. № 5. P. 241-269. https://doi.org/10.1090/qam/25902
11. Synge J.L. The Hypercircle in Mathematical Physics // CUP, London. 1957.
12. Synge J.L. The Hypercircle method // In Studies in Numerical Analysis, Academic Press, London. 1974. P. 201-217.
13. Bertrand B., Boffi D. The Prager Synge theorem in reconstruction based a posteriori error estimation // 2019. arXiv:1907.00440v1
14. Braess D., Pechstein A., and Schoberl J. An Equilibration Based a Posteriori Error Estimate For The Biharmonic Equation and Two Finite Element Methods // 2017. arXiv:1705.07607v1
15. Zhiqiang Cai, Cuiyu He, Shun Zhang. Generalized Prager-Synge Inequality and Equilibrated Error Estimators for Discontinuous Elements // 2020. arXiv:2001.09102v1
16. Braess D., Schoberl J. Equilibrated Residual Error Estimator for Maxwell's Equations // RICAM-Report 2006-19.
17. Lax P.D., Richtmyer R.D. Survey of the Stability of Linear Finite Difference Equations // Comm. Pure Appl. Math. 1956. 9: 267-293. https://doi.org/10.1002/cpa.3160090206
18. Richtmyer R.D. and Morton K.W. Difference Methods for Initial Value Problems // John Wiley and Sons, NY. 1967.
19. Carpenter M.H. and Casper J.H. Accuracy of Shock Capturing in Two Spatial Dimensions // AIAA J. 1999. 37(9): 1072-1079.
20. Babushka I., Osborn J. Can a finite element method perform arbitrarily badly? // Math. Comp. 2000. 69(230): 443-462. https://doi.org/10.1090/s0025-5718-99-01085-6
21. Banks J.W., Aslam T. and Rider W. J. On Sub-Linear Convergence for Linearly Degenerate Waves in Capturing Schemes // JCP. 2008. 227: 6985-7002. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2008.04.002
22. Alekseev A.K., Bondarev A.E., Kuvshinnikov A.E. On Uncertainty Quantification via the Ensemble of Independent Numerical Solutions // J. Comput. Sci. 2020. V. 42. 10114. https://doi.org/10.1016/j.jocs.2020.101114
23. Алексеев А.К., Бондарев А.Е. Использование ансамбля численных решений для оценки погрешностей усечения и аппроксимации // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 107. 24 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2019-107

24. Алексеев А.К., Бондарев А.Е. Об апостериорной оценке нормы погрешности численного расчета на ансамбле независимых решений // СибЖВМ. 2020. Т. 23. № 3. С. 233-246.
25. Алексеев А.К., Бондарев А.Е. Об оценке расстояния между истинным и численными решениями // ЖВМ и МФ. 2019. Т. 59. № 6. С. 913-919. https://doi.org/10.1134/s0044466919060036
26. Алексеев А.К., Журин С.В. О постпроцессоре для апостериорной оценки погрешности расчета параметров течения // ЖВМ и МФ. 2006. Т. 46. № 9. С. 1703-1708.
27. Linss T. and Kopteva N. A Posteriori Error Estimation for a Defect-Correction Method Applied to Convection-Diffusion Problems // Int. J. of Numerical Analysis and Modeling. 2009. V. 1. № 1. P. 1-16.
28. Репин С.И., Фролов М.Е. Об апостериорных оценках точности приближенных решений краевых задач для уравнений эллиптического типа // ЖВМ и МФ. 2002. Т. 42. № 12. С. 1774-1787.
29. Farrell B.F. and A.M. Moore. An adjoint method for obtaining the most rapidly growing perturbation to oceanic flows // J. Phys. Oceanogr. 1992. V. 22. Issue 4. P. 338-349. https://doi.org/10.1175/1520-0485(1992)022<0338:aamfot>2.0.co;2
30. Schmid P. Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data // Journal of Fluid Mechanics. 2010. 656.1: 5-28.
31. Alekseev A.K., Bistrian D.A., Bondarev A.E., Navon I.M. On Linear and Nonlinear Aspects of Dynamic Mode Decomposition // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2016. V. 82. Issue 6. P. 348-371. https://doi.org/10.1002/fld.4221
32. Алексеев А.К., Бондарев А.Е. О применении разложения по динамическим модам в задачах вычислительной газовой динамики // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 154. 30 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2018-154
33. Алексеев А.К. Апостериорная оценка погрешности конечно-разностного решения с помощью сопряженных уравнений и дифференциального представления // ЖВМ. 2005. Т. 45. № 7. С. 1213-1225.

Оглавление

Введение 3
1. Метод Прагера-Синга 4
2. Расширение области применимости метода Прагера-Синга 9

3. Свойства оценки погрешности аппроксимации, полученной с помощью вспомогательного ортогонального возмущения 11
3.1 Сходимость ортогонального возмущения 11
3.2 Оценка нормы погрешности аппроксимации с помощью вспомогательного ортогонального возмущения 12
3.3 Двухсторонняя оценка погрешности аппроксимации с помощью вспомогательного ортогонального возмущения 13
4. Оценка оператора и его нормы с помощью разложения по динамическим модам 13
5. Полуэвристические оценки нормы операторов 14
6. Связь с оценкой погрешности на ансамбле решений 16
7. Обсуждение 16
Выводы 19
Библиографический список 19