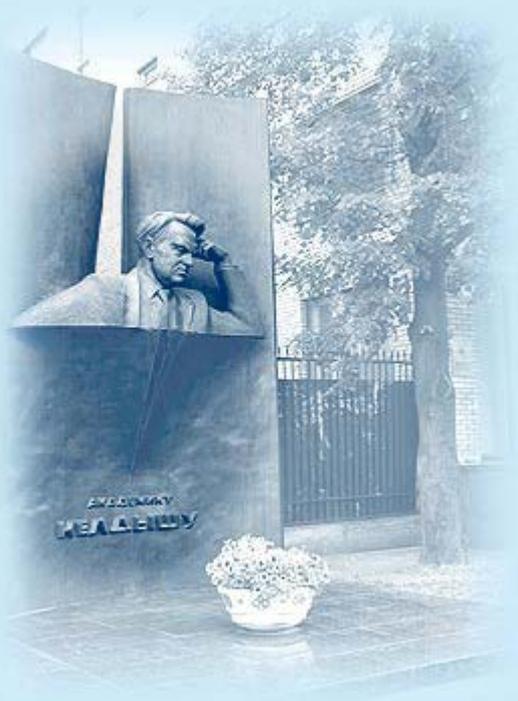




ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 2 за 2021 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**Ю.Ф. Голубев, А.В. Грушевский,**  
**В.В. Корянов, А.Г. Тучин,**  
**Д.А. Тучин**

Гравитационное рассеяние  
при совершении  
гравитационных манёвров и  
пертурбационные кольца в  
Солнечной системе

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Гравитационное рассеяние при совершении гравитационных манёвров и пертурбационные кольца в Солнечной системе / Ю.Ф. Голубев [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. № 2. 26 с.  
<https://doi.org/10.20948/prepr-2021-2>  
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-2>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В. Келдыша  
Российской академии наук**

**Ю.Ф. Голубев, А.В. Грушевский,  
В.В. Корянов, А.Г. Тучин, Д.А. Тучин**

**Гравитационное рассеяние при  
совершении гравитационных манёвров  
и пертурбационные кольца  
в Солнечной системе**

**Москва — 2021**

**Ю.Ф. Голубев, А.В. Грушевский, В.В. Корянов, А.Г. Тучин,  
Д.А. Тучин**

## **Гравитационное рассеяние при совершении гравитационных манёвров и пертурбационные кольца в Солнечной системе**

В результате анализа различных ограничений на проведение гравитационных маневров (ГМ) получены обобщённые оценки размеров околопланетных областей – «пертурбационных колец» – в которых для произвольных пучков траекторий небесных тел гарантируется проведение ГМ. Они могут быть представлены как потоками транспланетных комет и метеороидов, так и пучками виртуальных траекторий космических аппаратов в массовых расчётах проектного баллистического анализа межпланетных полетов.

Проведённый анализ показывает, что характерными «пертурбационными кольцами» наибольших размеров обладают Нептун и Сатурн, а Юпитер занимает лишь четвертое место в Солнечной системе.

**Ключевые слова:** гравитационное рассеяние, фазовые пучки, эффективный радиус планеты, гравитационный манёвр, пертурбационное кольцо, транспланетные метеороидные потоки, транспланетные кометные потоки

**Golubev Yu.F., Grushevskii A.V., Koryanov V.V., Tuchin A.G.,  
Tuchin D.A.**

## **Gravity assists gravitational scattering and the perturbation rings in the Solar system**

As a result of the analysis of various restrictions on the gravity assists maneuvers (GM) conduction, the generalized estimates of near-planetary regions sizes, the “perturbation rings”, are conducted, in which GM realization for the arbitrary celestial bodies trajectory beams is guaranteed. They can be represented by the transplanetary comets and meteoroids streams, as well as beams of virtual spacecraft trajectories in the mass calculations of the interplanetary mission design.

The analysis shows that the characteristic “perturbation rings” of the largest size have Neptune and Saturn, and the Jovian “perturbation ring” occupies only the fourth place in the Solar system.

**Keywords:** gravitational scattering, phase beams, the planetary effective radius, gravity assist, perturbation ring, transplanetary meteoroid streams, transplanetary comet showers

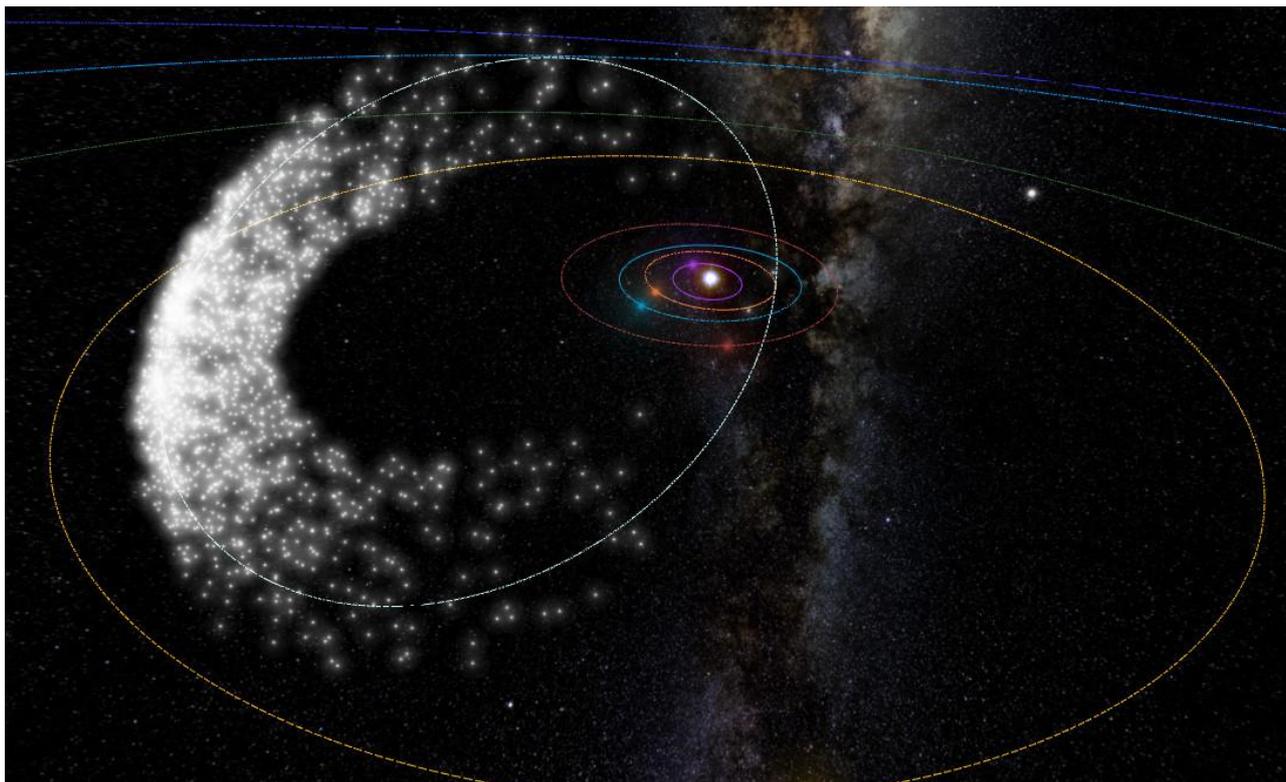
## Введение

Одним из типов гравитационного рассеяния в Солнечной системе в рамках модели ограниченной задачи трёх тел (ОЗТТ) являются гравитационные манёвры (ГМ). Для их описания оказывается полезной физическая аналогия с пучковым рассеиванием заряженных  $\alpha$ -частиц в кулоновском поле. Однако, в отличие от рассеивания заряженных частиц, существуют внешние ограничения на область возможности проведения ГМ. Одновременно из литературы по ОЗТТ известны внутренние оценки полных эффективных радиусов действия планет, обуславливающие возможность гравитационного захвата планетой, а также и попадания в неё траекторий «частиц ничтожной массы» (КА, астероиды, кометы и т.д.). По понятным причинам их нарушение отсекает возможность проведения эффективных ГМ.

Встаёт вопрос о размерах околопланетных областей, осуществляющих гравитационное рассеяние пучков траекторий небесных тел при заданной асимптотической скорости. Ими могут быть как потоки транспланетных комет и метеороидов (рис. 1) [1], так и пучки виртуальных траекторий космических аппаратов, используемые при массовых расчётах проектного баллистического анализа. Движение всех частиц в пучке сонаправлено и происходит с одинаковой асимптотической скоростью.

Цель данного препринта состоит в том, чтобы дать обобщённые оценки размеров околопланетных областей («пертурбационных колец»), попадание в которые является необходимым условием реализации пучковых ГМ.

Проведённый детальный анализ показывает, что характерными «пертурбационными кольцами» наибольших размеров обладают Нептун и Сатурн, а Юпитер занимает лишь четвертое место в списке. По всей видимости, именно под их влиянием происходит естественное рассеивание метеороидных облаков в Солнечной системе.



**Рис. 1.** Внеэклиптический метеороидный поток персеид в Солнечной системе (взят из [1]). Жёлтым обозначена орбита Юпитера.

### **1. Кулоновское и гравитационное рассеяние**

В астродинамике баллистический анализ полетов КА в дальнем космосе с использованием гравитационных маневров (с использованием гравитационного рассеяния массивными телами Солнечной системы) проводится обычно с помощью традиционного исследования конечного набора задач Коши и Ламберта. Изучение и описание аналогичных процессов в физике (кулоновское рассеяние заряженных частиц) проводится в ином ключе – с введением в рассмотрение пучка заряженных частиц – сонаправленного компактного потока однородных частиц [2]. В последние годы при решении задач баллистического анализа и построения адаптивных сценариев проведения КА гравитационных маневров в астродинамике также наметился тренд по использованию пучковых алгоритмов с целью синтеза точных требуемых траекторий КА в полных эфемеридах [3, 4]. Здесь уже вместо ансамбля заряженных частиц фигурирует

пучок – набор виртуальных траекторий КА с почти совпадающей скоростью [4]. В этом контексте представляет интерес совместное применение обоих подходов при решении конкретных задач баллистического анализа с гравитационным рассеянием: гравитационного [3, 4] и кулоновского [2].

Сначала рассмотрим кулоновское рассеяние [2].

Выпишем силовую функцию  $U_{Coulomb}$  кулоновского взаимодействия частиц [2]:

$$U_{Coulomb} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_\alpha q_{aim}}{r}, \text{ где } \epsilon_0 \approx 8,85418781762 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м} - \text{ электрическая}$$

постоянная,  $q_\alpha, q_{aim}$  – одноименно заряженные заряды частицы и рассеивающей мишени,  $r$  – расстояние между их центрами масс.

Для угла рассеяния  $\varphi$  (угла между исходным и отражённым векторами асимптотической скорости заряженной альфа-частицы  $\mathbf{V}_{\infty,in}$  и  $\mathbf{V}_{\infty,out}$ ) будет верно соотношение (рис. 2, а):

$$tg \frac{|\varphi|}{2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_\alpha q_{aim}|}{m b V_\infty^2}, \quad (1.1)$$

где  $V_\infty = \|\mathbf{V}_{\infty,in}\| = \|\mathbf{V}_{\infty,out}\|$ ,  $m$  – приведённая масса,  $m = \frac{m_\alpha m_{aim}}{m_\alpha + m_{aim}}$ ,  $b$  – величина прицельной дальности [2].

Учитывая, что в случае  $m_{aim} \gg m_\alpha$  приведённая масса

$m = \frac{m_\alpha}{1 + m_\alpha/m_{aim}} \approx m_\alpha$ ,  $m \approx m_\alpha$ , для угла рассеяния  $\varphi$  будет выполнено:

$$tg \frac{|\varphi|}{2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_\alpha q_{aim}|}{m_\alpha b V_\infty^2}. \quad (1.2)$$

Заметим, что формулы (1.1), (1.2) остаются справедливыми и в том случае, когда заряды разноименные.

Поскольку структуры силовой функции гравитационного взаимодействия двух массивных тел  $U_{grav}$  и кулоновского электрического поля для двух

заряженных частиц  $U_{Coulomb}$  оказываются идентичным, появляется возможность применения аналогов формул (1.1) и (1.2) в случае гравитационного рассеяния. Аналогом альфа-частицы с зарядом  $q_\alpha$  становится космический аппарат (КА) с массой  $m_{sc}$ , аналогом рассеивающей мишени  $a_{aim} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{aim}}{r}$  становится гравитационное воздействие малого тела  $a_p = -\frac{\mu_p}{r}$  (планеты, спутника планеты или астероида) с массой  $m_p$  и гравитационным параметром  $\mu_p = Gm_p$ , где  $G$  – гравитационная постоянная.

Аналог формулы (1.2) в случае *гравитационного рассеяния* формально может быть получен из (1.2) с помощью замены:

$$m_\alpha \rightarrow m_{sc}, q_\alpha \rightarrow -m_{sc}, q_{aim} \rightarrow m_p, \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rightarrow G.$$

В результате можно получить аналог (1.2) – выражение для угла гравитационного рассеяния  $\varphi$  при совершении гравитационного манёвра:

$$\operatorname{tg} \frac{|\varphi|}{2} = \frac{\mu_p}{b V_\infty^2}, \quad (1.3)$$

где  $\mu_p = Gm_p$ ,  $G$  – гравитационная постоянная.

*Замечание.* В астродинамике  $\varphi$  называется углом поворота вектора асимптотической скорости при совершении гравитационного манёвра. При его вычислении вместо прицельной дальности  $b$  чаще используется минимальное расстояние до КА от центра планеты  $R_\pi$  (очевидно – расстояние перигея пролётной гиперболы) [2-5], при этом вместо (1.3) чаще используется выражение

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{e} = \frac{1}{1 + \frac{R_\pi V_\infty^2}{\mu_p}}, \quad (1.4)$$

где  $e$  – эксцентриситет пролётной гиперболы.

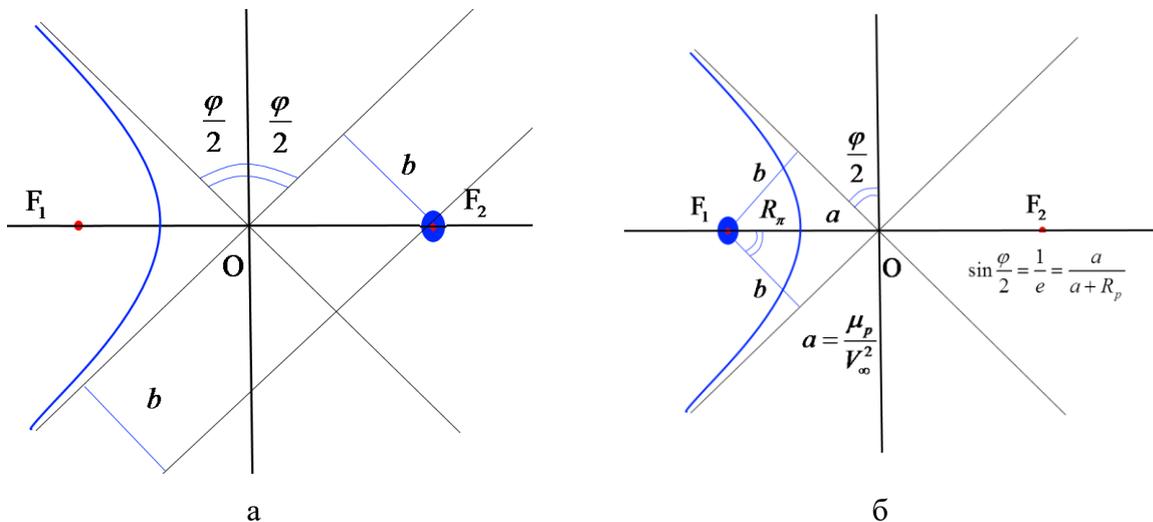
Выражение (1.4) не используется в физике элементарных частиц по понятным причинам: в отличие от прицельной дальности  $b$ , экспериментальное определение  $R_\pi$  для  $\alpha$ -частиц труднореализуемо.

Очевидно, что  $R_\pi$  не может быть меньше радиуса планеты  $R_p$ . Подставляя в (1.3) выражение для прицельной дальности  $b$  [4, 6]

$$b = R_\pi \sqrt{1 + 2 \frac{\mu_p}{R_\pi V_\infty^2}} \quad (1.5)$$

и воспользовавшись тождеством  $\operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} = \sec^2 \frac{\varphi}{2} - 1$ , приходим к классическому «астродинамическому» результату (1.4), что лишний раз подтверждает эквивалентность обоих способов описания угла поворота  $\varphi$ : «кулоновского» и гравитационного [2, 4-6].

Отличие геометрии рассеяния заряженных частиц и гравитационного рассеяния виртуальных траекторий КА на гравитационном манёвре иллюстрируют рис. 2, а и рис. 2, б. Практически разница заключается в инверсии номера фокуса, в котором расположено возмущающее тело. При этом прицельная дальность гравитационного рассеяния всегда больше расстояния от КА до планеты, тогда как для кулоновского рассеяния – всегда меньше расстояния от  $\alpha$ -частицы до центра рассеивания.



**Рис. 2.** Геометрия кулоновского и гравитационного рассеяния

## 2. Эффективный радиус планеты

В предельном случае пролёта над планетой на нулевой высоте (случай «касательного пролёта») из (1.3) следует, что для максимального угла поворота вектора асимптотической скорости КА  $\varphi_{\max}$  выполнено:

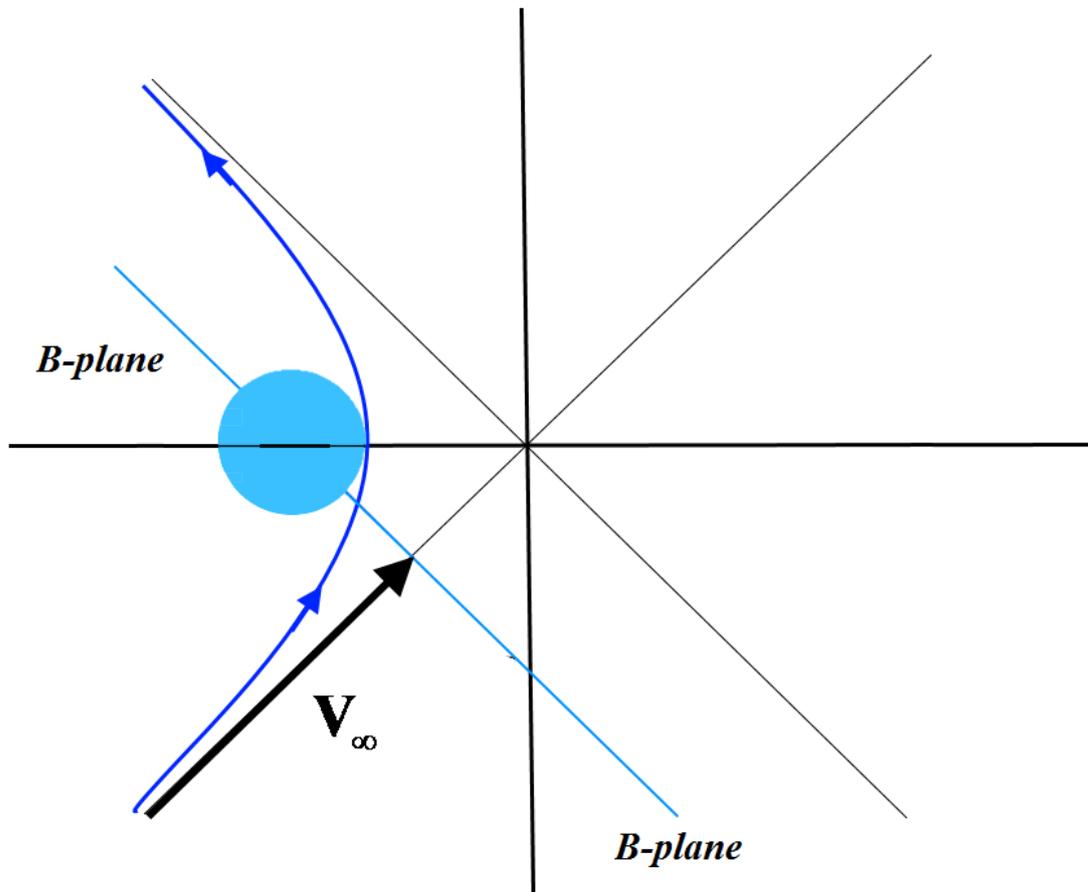
$$\sin \frac{\varphi_{\max}}{2} = \frac{1}{1 + \frac{V_{\infty}^2}{V_{pc}^2}}, \quad (2.1)$$

где  $V_{pc} = \sqrt{\frac{\mu_p}{R_p}}$  – первая космическая скорость около поверхности планеты.

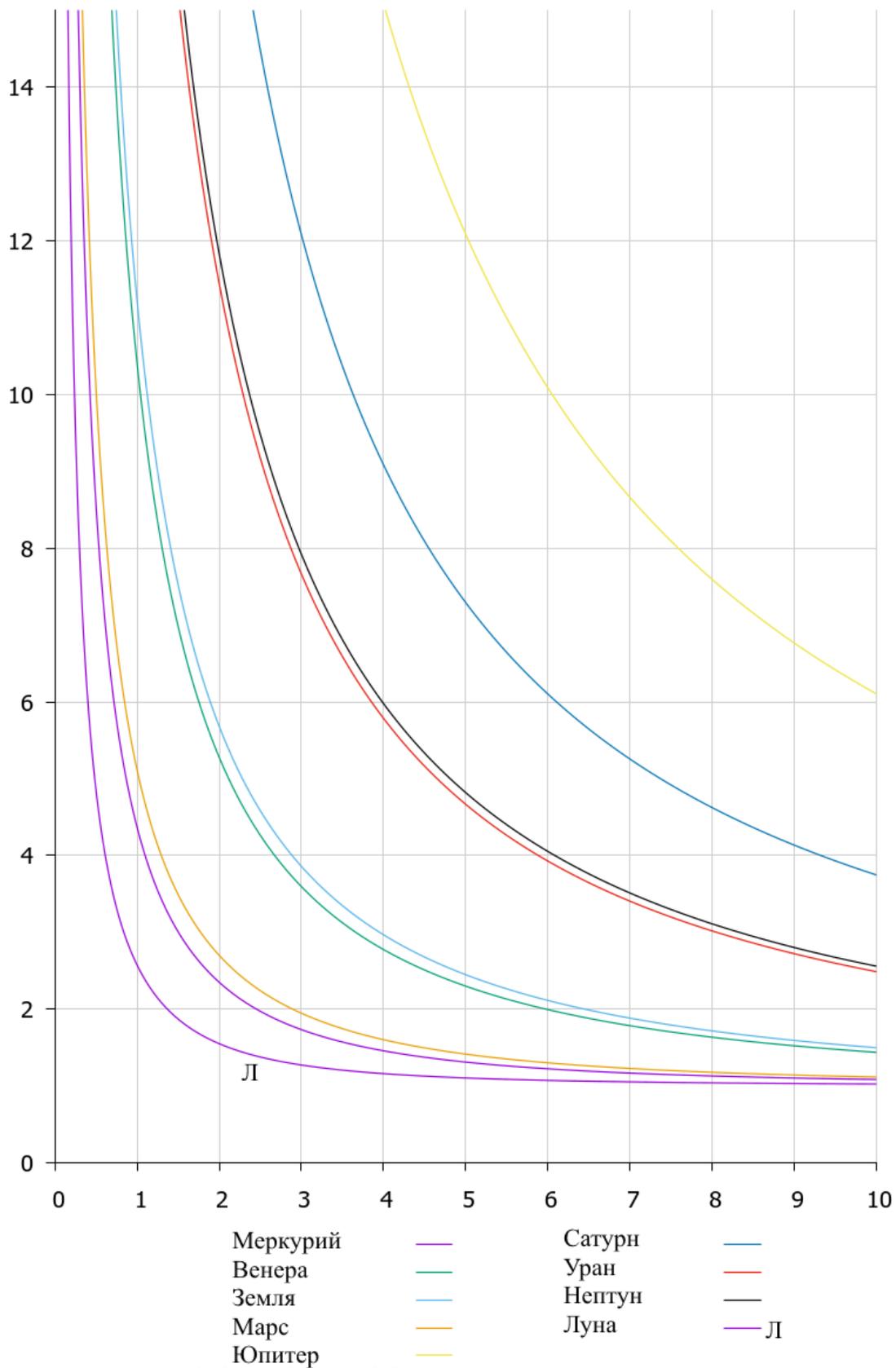
Указанному случаю соответствует минимальное допустимое значение прицельной дальности  $b_{\min}$ . Касательному пролёту отвечает граничное значение эффективного радиуса планеты [4, 6] – «полный эффективный радиус» планеты  $R_{\text{эф}}^{\text{полн}}$  – максимальная прицельная дальность, обеспечивающая попадание КА в планету,

$$R_{\text{эф}}^{\text{полн}} = R_p \sqrt{1 + 2 \frac{V_{pc}^2}{V_{\infty}^2}} = \sqrt{R_p^2 + 2 R_p \frac{\mu_p}{V_{\infty}^2}} = b_{\min}. \quad (2.2)$$

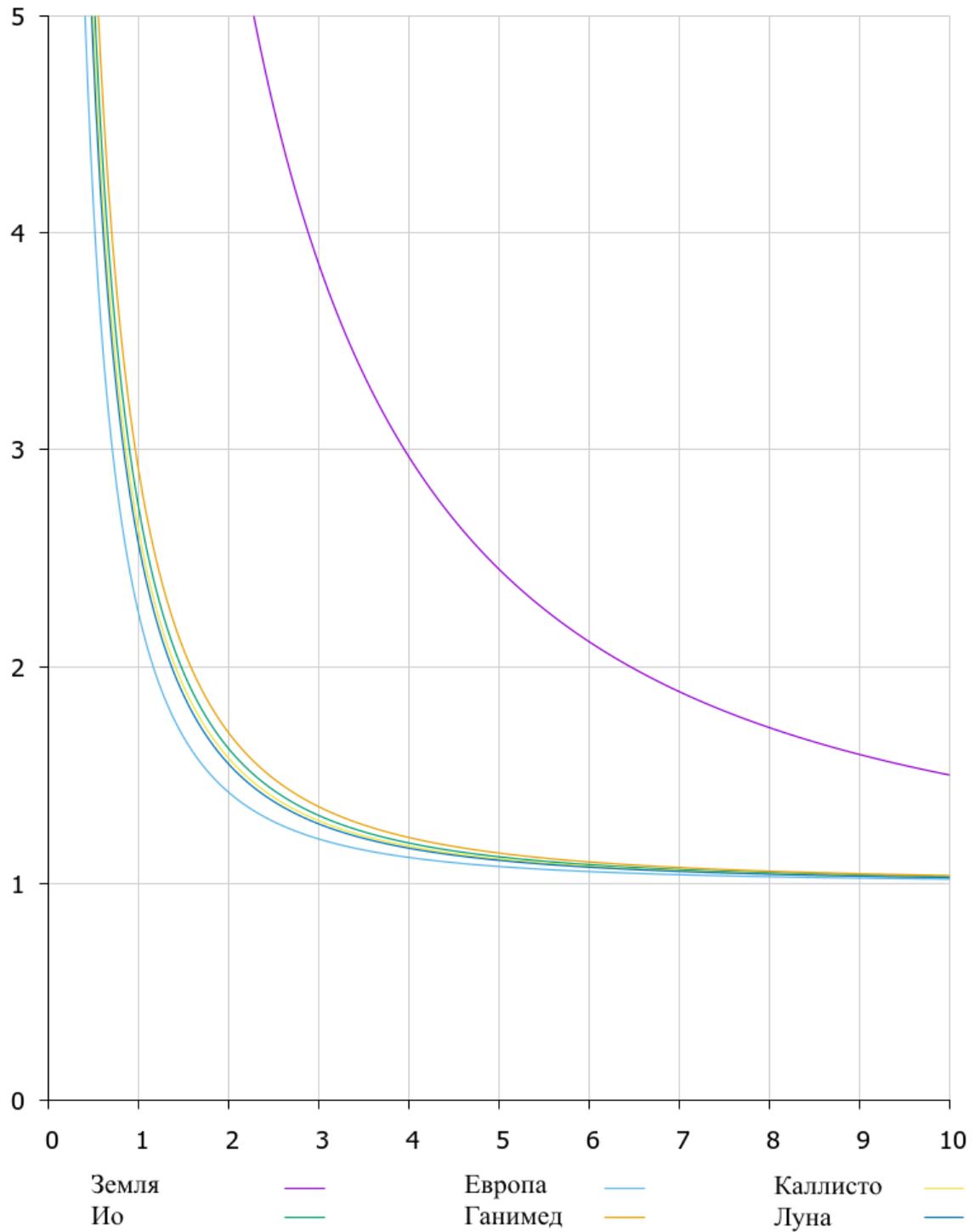
Введем картинную плоскость *B-plane* планеты [4, 7-8] как плоскость, проходящую через ее центр перпендикулярно вектору асимптотической скорости КА. Тогда касание траектории КА с планетой происходит после ее прохождения картинной плоскости (рис. 3). Графики нормированной по  $R_p$  зависимости полного эффективного радиуса  $R_{\text{эф}}^{\text{полн}}$  от асимптотической скорости КА для Луны и некоторых планет Солнечной системы можно найти, например, в [6]. Для всех планет Солнечной системы функциональная зависимость  $R_{\text{эф}}^{\text{полн}} / R_p$  представлена на рис. 4. а. На рис. 4, б представлена зависимость  $R_{\text{эф}}^{\text{полн}} / R_p$  от асимптотической скорости КА для системы Юпитера.



**Рис. 3.** Касание траектории КА с планетой после прохождения картинной плоскости *B-plane*



**Рис. 4, а.** Зависимости от асимптотической скорости соотношения полного эффективного  $R_{эф}^{полн}$  и истинного радиусов  $R_p$  для небесных тел Солнечной системы



**Рис. 4, б.** Зависимости от асимптотической скорости соотношения полного эффективного  $R_{эф}^{полн}$  и истинного радиусов  $R_p$  для Земли и галилеевых спутников Юпитера

### 3. Утверждение «о пертурбационном кольце»

Подведем итоги вышесказанному применительно к ограниченной круговой задаче трех тел (ОЗТТ): Солнце, планета, КА.

Будем предполагать, что влияние планеты на КА осуществляется посредством ньютоновского центрального поля тяготения, но не распространяется за пределы ее сферы действия (СДП). Рассмотрим граничную картинную плоскость (ГКП), касающуюся планеты (СДП) и перпендикулярную  $V_\infty$ . В рамках указанного предположения за пределами СДП при отсутствии других воздействий траектория КА должна представлять собой прямую линию. Касающаяся СДП траектория также окажется прямой, т.к. действие конечной силы лишь в одной точке не может сказаться на типе траектории. В таком случае прицельная дальность траектории будет совпадать с радиусом ее перицентра.

**Утверждение 1 («О пертурбационном кольце»).** Область возможного гравитационного рассеяния траекторий КА на граничной картинной плоскости *B-plane*, построенной на границе СДП, образуется её пересечением траекториями с одинаковыми начальными скоростями  $V_\infty$ . Она является «пертурбационным» кольцом, перпендикулярным к  $V_\infty$ , с внутренним радиусом  $R_{\text{эф}}^{\text{полн}}$  (2.2), и внешним радиусом – радиусом СДП  $r_d$ , то есть максимальным расстоянием, на котором планета способна повернуть вектор  $V_\infty$  асимптотической скорости КА (рис. 5):

$$r_{\text{disp}} \in [R_{\text{эф}}^{\text{полн}}, r_d] = \left[ R_p \sqrt{1 + 2 \frac{V_{pc}^2}{V_\infty^2}}, r_0 \sqrt[5]{\frac{4\mu_p^2}{\mu_\odot^2}} \right], \quad (3.1)$$

где  $r_0$  – средний радиус орбиты планеты,  $\mu_\odot$  – гравитационный параметр центрального притягивающего тела (Солнца).

Из (3.1) следует, что для ширины  $L_{\text{disp}}$  пертурбационного кольца верно:

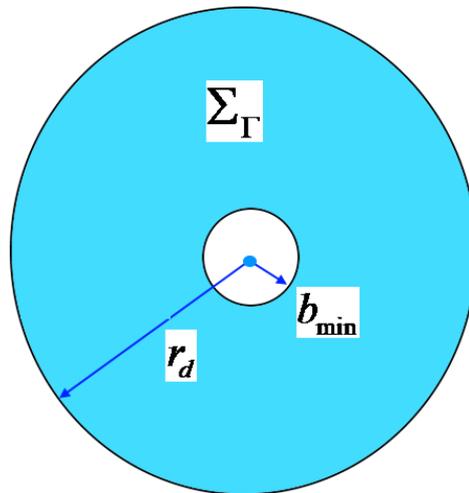
$$L_{disp} = r_0 \sqrt[5]{\frac{4\mu_p^2}{\mu_\odot^2}} - R_p \sqrt{1 + 2 \frac{V_{pc}^2}{V_\infty^2}}. \quad (3.2)$$

Отметим, что площадь пертурбационного кольца  $\Sigma_\Gamma$ , характеризующая общее число захватываемых в ГМ траекторий в равномерной трубке траекторий, составляет величину:

$$\Sigma_\Gamma = \pi r_0^2 \left( \frac{2\mu_p}{\mu_\odot} \right)^{4/5} - \pi R_p^2 - 2\pi R_p^2 \frac{V_{pc}^2}{V_\infty^2}. \quad (3.3)$$

Нетрудно видеть, что  $\Sigma_\Gamma$  возрастает с ростом  $V_\infty$ .

*Замечание 1.* Согласно (2.2), (3.2) при малых значениях величины  $V_\infty / V_{pc}$  полость (круг радиуса  $b_{\min}$ ) внутри пертурбационного кольца расширяется, и пертурбационное кольцо становится тоньше, что может существенно уменьшить его эффективную площадь. На рис. 6 в качестве примера представлена зависимость  $L_{disp}$  от  $V_\infty$  для планет земной группы и Луны.



**Рис. 5.** «Пертурбационное кольцо» на картинной плоскости, где происходит гравитационное рассеяние (область гравитационных манёвров)

*Замечание 2.* Учтем, что, согласно закону Кеплера,  $\mu_{\odot} = \omega_0^2 r_0^3$ , где  $\omega_0$  – среднее орбитальное движение планеты. Тогда для  $r_d$  верно:

$$r_d = r_0 (2\mu_p / \mu_{\odot})^{2/5} = (4\mu_p^2 / r_0)^{1/5} \omega_0^{-4/5} \quad (3.4)$$

и выражение (3.1) можно переписать как

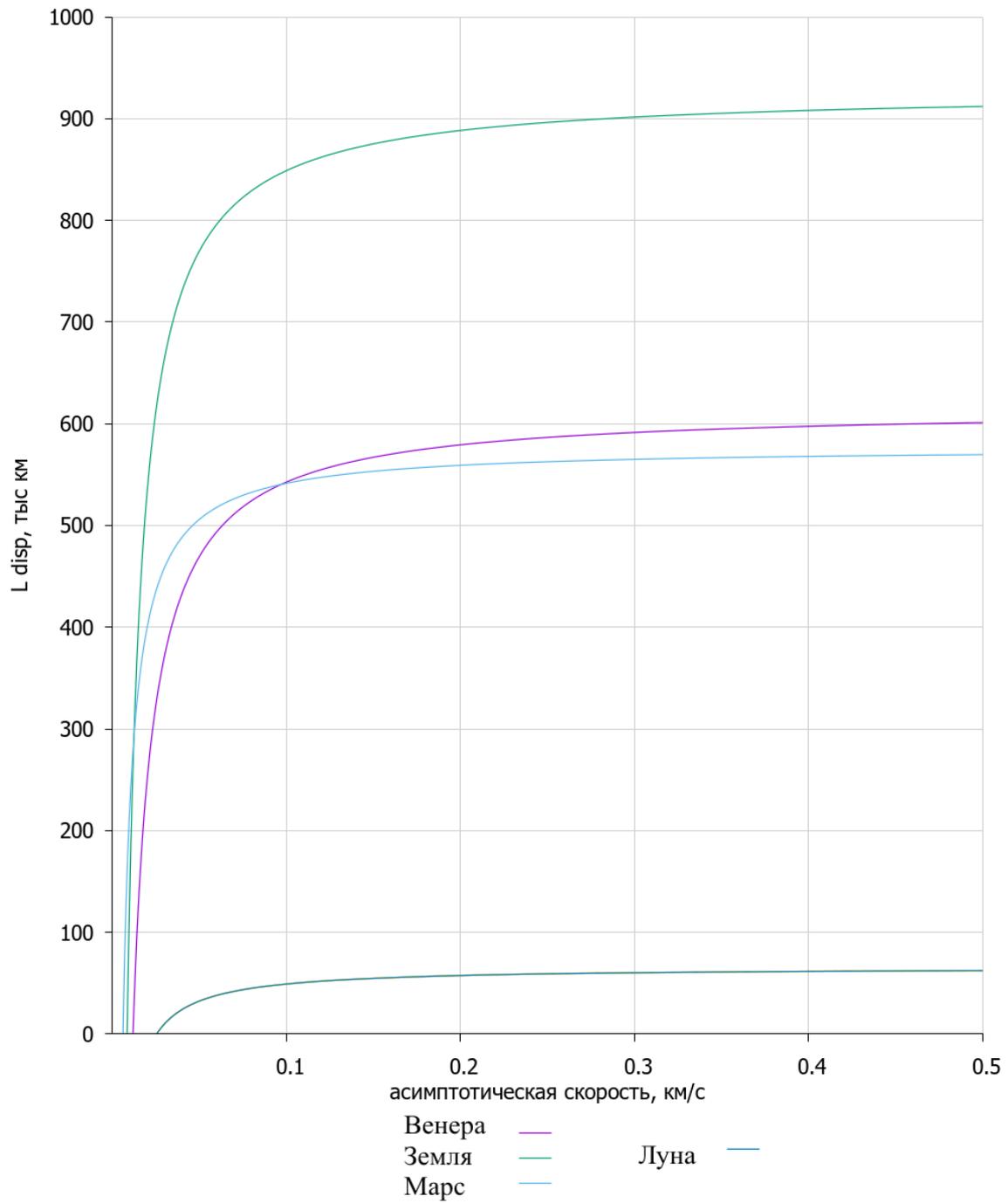
$$r_{disp} \in \left[ R_p \sqrt{1 + 2 \frac{V_{pc}^2}{V_{\infty}^2}}, \sqrt[5]{\frac{4\mu_p^2}{r_0 \omega_0^4}} \right]. \quad (3.5)$$

В табл. 1 приведены характерные размеры области гравитационных манёвров для планет Солнечной системы и Луны.

**Таблица 1.** Размеры области гравитационных манёвров для планет Солнечной системы.

Планета	$r_0$ , млн км	$R_p$ , тыс. км	$V_{pc}$ , км/сек	$r_{disp,min}$ , тыс. км			$r_{disp,max}$ , тыс. км
				$V_{\infty} = 1$	$V_{\infty} = 5$	$V_{\infty} = 10$	
Меркурий	58	2.44	3.01	11	3	3	112
Венера	108	6.05	7.33	63	14	9	616
Земля	150	6.38	7.91	72	16	10	928
Марс	228	3.49	3.55	18	5	4	577
Юпитер	778	71.3	42.58	4294	862	435	48200
Сатурн	1429	60.10	25.54	2172	438	225	<b>54495</b>
Уран	2871	26.50	16.12	605	124	66	51667
Нептун	4504	24.75	16.67	584	119	63	<b>86783</b>
Луна	384	1.74	1.68	4	2	2	66

Анализ таблицы показывает, что характерными «пертурбационными кольцами» наибольших размеров обладают Нептун и Сатурн, а Юпитер занимает лишь четвёртое место в списке пертурбационных объектов Солнечной системы.



**Рис. 6.** Зависимость  $L_{disp}$  от  $V_{\infty}$  для Луны и планет земной группы

## Заключение

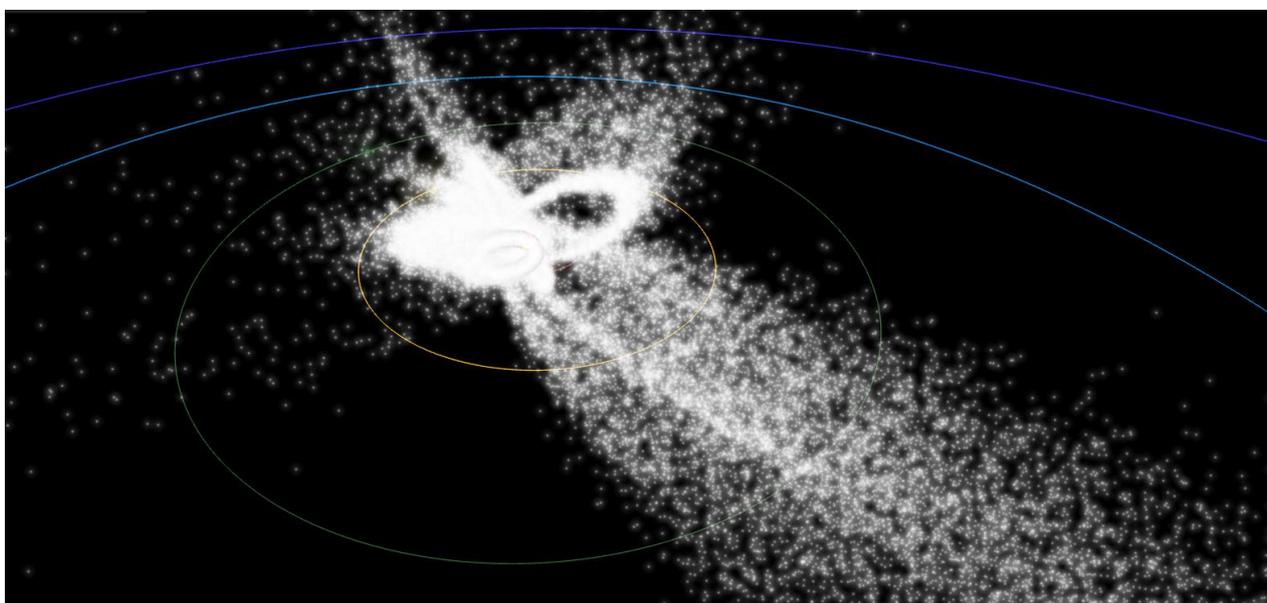
Гравитационные манёвры (ГМ) около планет Солнечной системы и их массивных спутников являются важнейшим инструментарием современного освоения дальнего космоса. Из классики астродинамики известны оценки полных эффективных радиусов планет, обеспечивающих гравитационный захват планетой и попадание в неё траекторий «частиц ничтожной массы» (КА, астероиды, кометы и т.д.). Гравитационные маневры вдоль таких траекторий невозможны. Гравитационное рассеяние (одним из типов которого в рамках ОЗТТ представляются ГМ) является аналогом кулоновского рассеяния заряженных  $\alpha$ -частиц. Для кулоновского рассеяния известны оценки области пространственной локализации возмущения [2], которые могут быть описаны в рамках пучковых процедур. Специалисты из *Kennedy Space Center NASA* сравнивают гравитацию планет, определяющую направление движения метеорного потока, с садовником, направляющим поливочный шланг на дальнее растение (“The gravitational pull of the planets determines where the dust trail would pass by Earth orbit, much like a gardener directing a hose to water a distant plant”) [9, 10]. Однако, вероятно, лучше говорить о том, что именно планеты служат подобными дальними растениями, а поток частиц из поливочного шланга направляет садовник – центральное тело (рис. 7). Целесообразно отметить, что сам фактор гравитационного рассеяния в структурах гравитирующих объектов далеко не ограничен масштабами Солнечной системы (например – эффект гравитационного микролинзирования в кратных звездных системах [11, 12]).

В препринте представлены обобщённые оценки размеров околопланетных областей («пертурбационных колец»), гарантирующих проведение в них гравитационных манёвров, и выявлены наиболее эффективные планеты Солнечной системы для их проведения.

Установлено, что, хотя габариты «пертурбационных колец» определяются сферами действия планет в ОЗТТ, их толщина может

значительно уменьшаться из-за расширения своей внутренней границы при малых значениях характерной асимптотической скорости. При стандартных значениях асимптотической скорости пучка траекторий небесных тел более 1 км/с характерными «пертурбационными кольцами» наибольших размеров обладают Нептун и Сатурн, причём Юпитер занимает лишь четвертое место в Солнечной системе.

Эффективный метод построения ансамбля траекторий для проектирования гравитационных маневров с учетом полученных результатов обсуждается в приложении.



**Рис. 7.** Метеороидные потоки в эпоху 2021 г. из внеэклиптического положения Солнечной системы (взяты из [13]). Синим и голубым отмечены орбиты Нептуна и Урана

**Библиографический список**

1. Perseid meteor shower URL: <https://www.meteorshowers.org/view/Perseids>
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. — Издание 4-е, исправленное. — М.: Наука, 1988. — 215 с. — («Теоретическая физика», том I). ISBN 5-02-013850-9.
3. Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г. Гравитационные маневры космического аппарата в системе Юпитера. Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2014. № 3. С. 149.
4. Боровин Г.К., Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Заславский Г.С., Захваткин М.В., Корянов В.В., Лавренов С.М., Морской И.М., Симонов А.В., Степаньянц В.А., Тучин А.Г., Тучин Д.А., Ярошевский В.С. Баллистико-навигационное обеспечение полетов автоматических космических аппаратов к телам Солнечной системы // Под ред. А.Г. Тучина. МО., Химки, «НПО Лавочкина», 2018, 336 с. ISBN 978 5-905646-12-6.
5. Labunsky A.V., Papkov O.V., Sukhanov K.G. Multiple Gravity Assist Interplanetary Trajectories // ESI Book Series. L.: Gordon and Breach Publishers, 1998. P. 9-266.
6. Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полета. М.: Наука, 1990. 448 с. ISBN 5-02-014090-2.
7. Платонов А.К. О построении движений в баллистике и мехатронике / В сб. «Прикладная небесная механика и управление движением», посвященном 90-летию со дня рождения Д.Е. Охоцимского / М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2010. С. 127-222.
8. Келдыш М.В., Власова З.П., Лидов М.Л., Охоцимский Д.Е., Платонов А.К. Исследование траекторий облета Луны и анализ условий фотографирования и передачи информации / В сб. «Келдыш М.В. Избр. труды. Ракетная техника и космонавтика». М.: Наука, 1988. С. 261-309.

9. [https://en.wikipedia.org/wiki/Meteor\\_shower](https://en.wikipedia.org/wiki/Meteor_shower)
10. <https://wikiwho.ailef.tech/page/157819>
11. Сажин М.В., Черепашук А.М. Микролинзирование двойных и кратных звезд // Письма в «Астрон. журн.». 1994. Т. 20, № 9. С. 613-619.
12. Wambsganss J., Gravitational lensing in astronomy, Living Rev. Relativity. 1998, №1. [Online Article]: cited on January 26, 2004, <https://link.springer.com/article/10.12942/lrr-1998-12>
13. All major meteor showers. URL: <https://www.meteorshowers.org/view/all>
14. Fukushima T. System of astronomical units and constants. IAU – WGRS /SGAC, 1990, Circ. 13.
15. Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г., Тучин Д.А. Методика формирования больших наклонений орбит космических аппаратов с использованием гравитационных маневров // Доклады Академии наук. 2017. Т. 472. № 4. С. 403-406.
16. Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г., Тучин Д.А. Формирование орбит космического аппарата с большим наклонением к эклиптике посредством многократных гравитационных маневров // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2017. № 2. С. 108-132.
17. Grushevskii A., Golubev Yu., Koryanov V., Tuchin A., Tuchin D. Advanced Methods of Low Cost Mission Design for Jovian Moons Exploration // Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences, Aerospace Technology. 2018. V. 16. № 7. P. 679-686.
18. Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г., Тучин Д.А. Гравитационные манёвры около Венеры для выхода на внеэклиптические положения. Резонансная асимптотическая скорость // Астрономический вестник. Исследования Солнечной системы, 2019. Т. 53. № 4. С. 256-264.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Виртуальные сферы действия планеты и конечное подпокрытие ими ее орбиты

Расчет распространения пучка траекторий небесных тел требует большого объема вычислений [3, 4, 14-18]. Рассмотрим прием, позволяющий сократить этот объем за счет селекции перспективных траекторий.

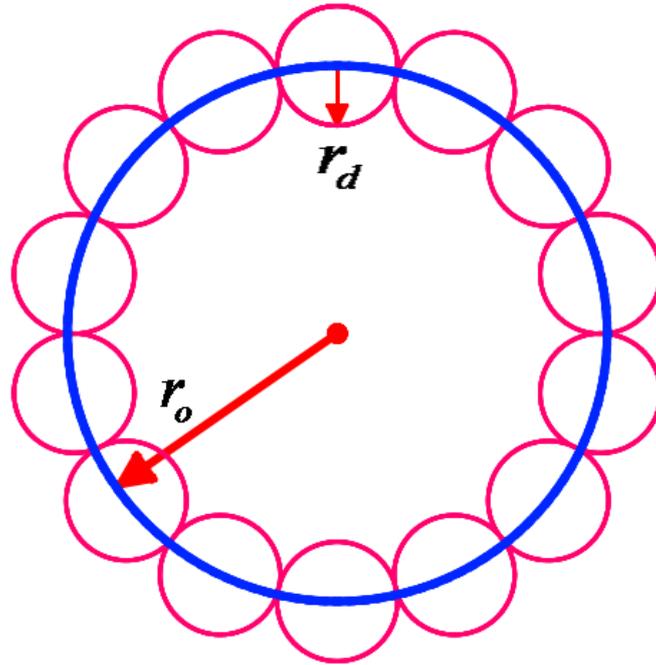
Рассмотрим планету с гравитационным параметром  $\mu_p$  и сферой действия  $r_d$ , движущуюся по круговой орбите радиуса  $r_0$  вокруг центрального тела с гравитационным параметром  $\mu_\odot$ . Любое прохождение КА сферы действия планеты (СДП) будет приводить к гравитационному манёвру (ГМ) и изменению орбитальных параметров КА. Специально формируемые последовательности таких манёвров являются важнейшим инструментом баллистического проектирования современных малозатратных межпланетных космических экспедиций.

В качестве начального приближения для поиска инициирующего попадания в СДП возьмем отдельный закон движения  $\mathbf{f}_0(t_0, \mathbf{r}_{Lamb}, \mathbf{V}_\infty)$ , полученный как решение краевой задачи Ламберта-Эйлера [4-6] для невозмущенного движения с заданным вектором асимптотической скорости  $\mathbf{V}_\infty$  в центральном ньютоновском поле. Здесь  $t_0$  – начальный момент времени, значительно предшествующий времени совершения ГМ. Последующее использование эфемерид для уточнения движения КА может привести к разрушению решения – промаху уточненного движения КА мимо номинального положения СДП, принятого при решении задачи Ламберта-Эйлера. Частично эту проблему позволяет устранить использование пучка виртуальных траекторий  $\Phi\{t_0, \mathbf{r}_{Lamb} + \delta\mathbf{r}_{i=1, \dots, N_1}, \mathbf{V}_\infty\}$ , построенных на опорном решении  $\mathbf{f}_0(t_0, \mathbf{r}_{Lamb}, \mathbf{V}_\infty)$ . Однако в таком случае требуется обеспечение достаточной плотности пучка, гарантирующей после уточнения попадание хотя бы одной траектории пучка в целевую эфемеридную СДП. Укажем также на то

обстоятельство, что и последующая итерационная процедура поиска точного решения с требуемой высотой пролёта КА может не сойтись. Вопрос о нахождении гарантирующего набора виртуальных траекторий для многоходовых вариантов осложняется их гиперболическим рассеиванием после совершения каждого ГМ (в том числе и – стартового). В ряде случаев приходится использовать миллионы вариантов [3, 4, 14-18], что в значительной степени замедляет поиск решения.

В процессе периодического движения планеты во времени всевозможные положения её СДП будут образовывать, очевидно, двумерный тор, являющийся компактным топологическим пространством. Компактность этой поверхности позволяет говорить о существовании её конечного подпокрытия, дискретное множество которого поможет идентифицировать факт совершения ГМ для каждой виртуальной траектории КА значительно экономнее. Обсудим этот вопрос подробнее.

Одним из способов конечного покрытия орбиты планеты её сферами действия может служить, очевидно, система  $\sigma_1$  попарно касающихся «бусин» – виртуальных сфер действия ( $\sigma$  от слова σφαίρα – шарик). Поэтому может случиться так, что первая и последняя бусины не касаются. Тогда следует добавить дополнительную бусину. Рассмотрим для простоты двумерный случай (плоскости орбиты планеты и КА совпадают). Тогда следом сферы действия планеты будет круг с радиусом сферы действия  $r_d$ , с центром, совпадающим с точкой текущего орбитального положения центра масс планеты (рис. 8).



**Рис. 8.** «Бусы» – система  $\sigma_1$  конечного покрытия орбиты планеты её виртуальными сферами действия.

Общее число элементов  $\sigma_1$ , необходимых для покрытия, находится (для круговой орбиты планеты) из соотношения:

$$N_d = \left\lceil \frac{l_{orb}}{2 r_d} \right\rceil = \left\lceil \frac{2\pi r_o}{2 r_o (2\mu_p/\mu_\odot)^{\frac{2}{5}}} \right\rceil = \left\lceil \pi (2\mu_p/\mu_\odot)^{\frac{2}{5}} \right\rceil, \quad (P.1)$$

где знак  $\lceil \cdot \rceil$  обозначает операцию взятия целой части числа по избытку (функция “ceiling”, потолок),  $l_{orb}$  – длина орбиты планеты. Нахождение эфемеридной траектории КА, сближающейся с одной из «бусин», очевидно, является достаточным для вычисления ГМ и может проверяться дискретным перебором.

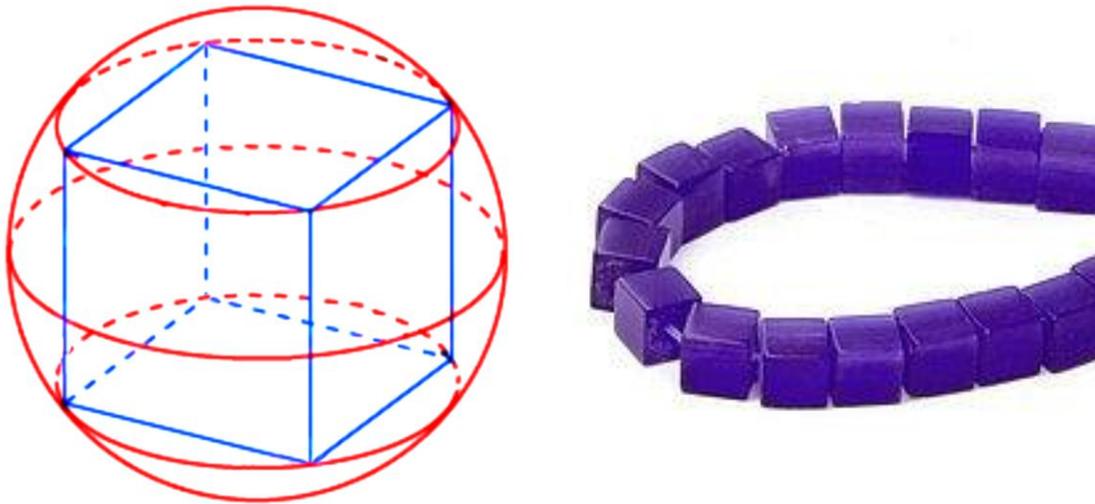
Представленная конструкция шаровых покрытий  $\sigma_1$  не является эффективной в силу своей негладкости (часть виртуальных траекторий КА, сблизившихся с СДП в «оврагах» между соседними СДП и даже совершающих ГМ, может быть не идентифицирована). Для получения эффективного

гарантированного условия совершения ГМ можно воспользоваться гладкой конструкцией кубических С-покрытий (*Cube covers*): сплошного слоя, состоящего из дискретного набора «кубических» бусин – кубов, вписанных и описанных в виртуальные сферы действия (рис. 9). В отличие от сферических бусин, кубы практически соприкасаются и создают вокруг орбиты достаточно плотную односвязную оболочку. Учитывая, что, очевидно, ребро куба  $r_k$  выражается через радиус описанного шара  $r_d$  как  $r_k = \frac{2}{\sqrt{3}} r_d$ , получим для  $N_k$  – числа элементов покрытия («опорных кубов») следующее выражение:

$$N_k = \left\lceil \frac{l_{orb}}{r_k} \right\rceil = \left\lceil \frac{2\pi r_o}{\frac{2}{\sqrt{3}} r_0 (2\mu_p/\mu_\odot)^{\frac{2}{5}}} \right\rceil = \left\lceil \pi\sqrt{3} (2\mu_p/\mu_\odot)^{\frac{2}{5}} \right\rceil = \left\lceil \sqrt{3} (N_d - 1) \right\rceil. \quad (P.2)$$

Нетрудно видеть, что оценка для внешнего  $K_{out}$ -покрытия из описывающих СДП кубов получается с помощью соотношения для длины его ребер  $r_{k,out} = 2 R_d = \sqrt{3} r_k$ .

Сближение эфемеридной виртуальной траектории КА с одним из опорных кубов является достаточным для проектирования соответствующего ГМ и может проверяться дискретным перебором виртуальных вариантов с заведомо обеспеченным соответствующим минимальным зазором между соседними виртуальными траекториями КА, не превышающим, очевидно, размеры  $r_k$ .



**Рис. 9.** Куб, вписанный в сферу действия планеты, и образец кубического покрытия траектории

Формулы (Р.1), (Р.2) выражают универсальное свойство инвариантности минимального числа «опорных» в выборке точек положения планеты в некоторые фиксированные моменты времени, для которых набор кубов, вписанных и описанных около СДП, является покрытием орбиты планеты. **Число элементов компактного покрытия орбиты планеты её виртуальными СДП оказывается инвариантом, не зависящим от радиуса её орбиты  $r_o$ .** В табл. 2 приведены параметры минимального числа «опорных элементов покрытия» для планет Солнечной системы и Луны. В табл. 3 приведены параметры минимального числа «опорных элементов покрытия» для системы спутников Юпитера.

**Таблица 2.** Минимальное число опорных элементов на орбите для выявления ГМ в Солнечной системе.

Планета	$\mu_p / \mu_\odot$ согласно [14]	$r_d$ , а.е.	$r_o$ , а.е.	$N_d$	$N_k$
Меркурий	$1.660137 \cdot 10^{-7}$	0.001	0.387	1216	2106
Венера	$2.4478383 \cdot 10^{-6}$	0.004	0.723	568	984
Земля	$3.0034896 \cdot 10^{-6}$	0.006	1	524	907
Марс	$3.2271514 \cdot 10^{-7}$	0.004	1.52	1193	2066
Юпитер	$9.5459429 \cdot 10^{-4}$	0.322	5.2	51	88

Сатурн	$2.85815 \cdot 10^{-4}$	0.364	9.53	82	142
Уран	$4.365785 \cdot 10^{-5}$	0.346	19.19	174	301
Нептун	$5.150314 \cdot 10^{-5}$	0.580	30.07	52	90
Луна		0.00044	0.0026	18	31

**Таблица 3.** Минимальное число опорных элементов на орбите для выявления ГМ в системе Юпитера.

Спутник	$\mu_s / \mu_p$	$r_d$ , км	$r_o$ , км	$N_d$	$N_k$
Ио	$4.7 \cdot 10^{-5}$	7834	421800	169	293
Европа	$2.5 \cdot 10^{-5}$	9722	671100	217	376
Ганимед	$7.8 \cdot 10^{-5}$	24350	1070400	138	239
Каллисто	$5.7 \cdot 10^{-5}$	37681	1882700	157	272

Анализ таблиц показывает, что наиболее трудоёмким (согласно числу опорных элементов) является поиск ГМ в Солнечной системе для Марса и Меркурия, и для галилеевой луны Европы – в системе Юпитера.

*Замечание.* Таблицы 2, 3, помимо прочего, имеют следующую важную астродинамическую интерпретацию. При прохождении через орбиту планеты достаточно протяженного во времени пучка (роя) малых тел (астероидов, комет) вероятность совершения с планетой ГМ частью элементов этого пучка имеет существенно ненулевую величину  $p_{ga}$ , равную:

$$p_{ga} = \frac{1}{N_k} = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} (2\mu_p / \mu_\odot)^{\frac{2}{5}}. \quad (\text{P.3})$$

Характерным значением достаточной длительности прохождения пучка малых тел может служить величина орбитального периода планеты.

В частности, для планет Юпитер и Нептун  $p_{ga} = 0.011 = 1.1\%$ . Это означает, что каждый сотый элемент проходящего «насквозь» равномерного пучка виртуальных траекторий будет рассеиваться посредством ГМ. Для Луны этот же показатель составляет  $p_{ga}^\wedge = 0.32 = 3.2\%$ .

*Замечание.* При математическом моделировании (особенно для случая протяжённых межпланетных полётов) непрерывная траектория КА

аппроксимируется последовательностью дискретных точек в фазовом пространстве. Для достоверного обнаружения встречи с СДП в конкретный момент времени  $\tau_{ГМ}$  и предотвращения неотслеженных «проскоков» траектории КА через орбиту планеты необходимо также одновременно обеспечивать малость расстояния между соседними точками интегрирования  $\rho_{int}$  в пределах размеров СДП  $r_d$  и опорных элементов  $r_k$ :

$$\rho_{int} < r_d < r_k = \frac{2}{\sqrt{3}} r_d. \quad (P.4)$$

Укажем на ещё одну важную формулу для времени прохождения  $\tau_{ga}$  планетой своей разовой «фиксированной» сферы действия. Её можно получить из (P.1), выразив  $\tau_{ga}$  через отношение орбитального периода планеты  $T_0$  и  $N_d$ :

$$\tau_{ga} = T_0 / N_d. \quad (P.5)$$

Согласно этой формуле и таблице 2 можно получить, например, что планеты Венера и Земля пролетают через свои «разовые» сферы действия *меньше чем за сутки*: за 9.5 часов и 16.7 часов соответственно – тогда как Юпитер проходит через свою «разовую» сферу действия за 84 дня.

## Оглавление

Введение .....	3
1. Кулоновское и гравитационное рассеяние .....	4
2. Эффективный радиус планеты.....	8
3. Утверждение «о пертурбационном кольце».....	12
Заключение.....	16
Библиографический список.....	18
Приложение. Сфера действия планеты и конечное подпокрытие её орбиты.....	20