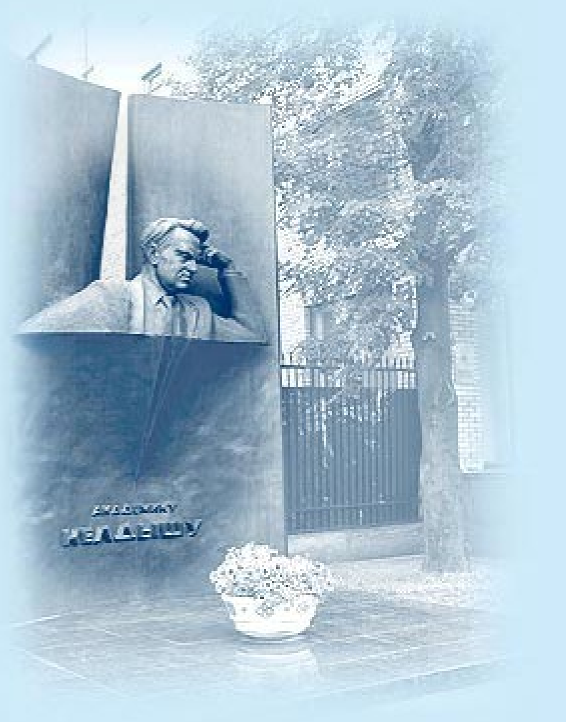
ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 19 за 2021 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)



Е.В. Зипунова, Е.Б. Савенков

Неизотермическая консервативная модель динамики развития канала электрического пробоя типа «диффузной границы»

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Зипунова Е.В., Савенков Е.Б. Неизотермическая консервативная модель динамики развития канала электрического пробоя типа «диффузной границы» // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. № 19. 34 с.
https://doi.org/10.20948/prepr-2021-19
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-19

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. КЕЛДЫША

Е.В. Зипунова, Е.Б. Савенков

Неизотермическая консервативная модель динамики развития канала электрического пробоя типа «диффузной границы»

Москва, 2021

Е.В. Зипунова, Е.Б. Савенков, Неизотермическая консервативная модель динамики развития канала электрического пробоя типа «диффузной границы»

Аннотация

В настоящей работе предложена модель типа «диффузной границы» для описания динамики развития канала электрического пробоя, которая обобщает качественную модель процесса, предложенную ранее в работах других авторов. В отличии от них, предложенная в настоящей работе модель включает в себя уравнение закона сохранения энергии и является энергетически консервативной, самосогласованным образом учитывая процессы преобразования энергии в ходе развития канала электрического пробоя. Вывод модели основан на применении методов рациональной механики сплошных сред, в частности, теории микросил и микронапряжений М. Гуртина.

Ключевые слова: модели типа диффузной границы, фазовое поле, параметр порядка, электрический пробой

E.V. Zipunova, E.B. Savenkov, Nonisothermal conservative phase-field model for electric breakdown process

Abstract

In this paper we consider phase-field model which describes electric breackdown process in solid dielectrics. The presented model extends the earlier presented one. The derived model includes energy conservation equation, accounts for nonisothermal effects (e.g., Joule heating) and consistently describes energy transformation during breakdown channel propagation. The consistent derivaton of the model is performed in the context of rational thermomechanics framework and M. Gurtin therory of microstresses and microforces.

Key words and phrases: diffuse interface models, phase field, order parameter, electric breakdown.

1 Введение

Настоящая работа является продолжением работы авторов [Зипунова2020], которая посвящена анализу модели типа «диффузной границы», предложенной в работе [Pitike2014] и использованной в работах [Cai2017a, Cai2017b, Cai2019a, Cai2019b, Cai2019c]. Было показано, что предложенная в [Pitike2014] модель не вполне корректна с математической точки зрения, и указаны способы ее исправления.

Предложенная в работе [Pitike2014] модель построена как формальное, «механистическое» обобщение известных моделей типа диффузной границы для анализа распространения трещин в упругой среде. Авторы работы не приводят термодинамически обоснованный вывод предложенной ими модели, а используют формальную аналогию между процессом распространения трещины и процессом распространения канала пробоя, см. [Зипунова2020, Zipunova2020].

Описанная в работе [Pitike2014] модель канала пробоя не является консервативной. Ее первичными переменными, описывающими состояние среды, являются потенциал электрического поля и непосредственно поле параметра порядка. Такие термодинамические параметры системы, как температура (а следовательно, и энтропия) не являются параметрами модели и не входят в ее определяющие соотношения.

Вместе с тем процесс развития канала пробоя существенно связан с преобразованием энергии электромагнитного поля в тепловую и механическую энергию. Поэтому неконсервативность предложенной в [Pitike2014] модели является ее существенным недостатком и принципиально мешает ее практическому применению.

Поэтому целью настоящей работы является:

- термодинамически обоснованный вывод модели в рамках методов рациональной термомеханики сплошных сред, конкретно,— в рамках теории микросил и микронапряжений М. Гуртина;

- вывод модели в неизотермической постановке.

Построенная модель устраняет основные качественные недостатки предложенной в [Pitike2014] модели: она учитывает неизотермические эффекты, в частности, нагрев среды за счет джоулева тепла, и включает в себя уравнение закона сохранения энергии с учетом как тепловых эффектов, так и динамики фазового поля. Помимо этого, построенная модель является термодинамически корректной в смысле выполнения второго начала термодинамики в виде неравенства Клазиуса-Дюгема нужного вида.

2 Электродинамика

Описанная в последующих разделах модель использует квази(электро)стационарную модель распространения электромагнитного поля. В настоящем разделе кратко рассмотрены основные уравнения квази(электро)стационарного приближения и их следствия, необходимые для дальнейщего изложения.

В общем случае распределение электромагнитного поля описывается полной системой уравнений Максвелла в среде. В настоящей работе, как минимальном обобщении модели из работы [Pitike2014], также будет рассматриваться модель эволюции электромагнитного поля в квази(электро)стационарном приближении. На обоснованности применения такой модели пока останавливаться не будем.

Известно три основных квазистационарных приближения полной системы уравнений Максвелла: квази(электро)стационарное, квази(магнито)стационарное и приближение Дарвина см. [Degond1992, Kruger2019, Larsson2007, LeBellac1973, Rapetti2014, Raviart1995, Raviart1996, Rousseaux2013, vanRienen2003].

В дальнейшем будем использовать квази(электро)стационарное приближение. В этом случае система уравнений, описывающая динамику электромагнитного поля, состоит из следующих уравнений [Larsson2007]:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_{\mathrm{E}}, \tag{1a}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \tag{1b}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0, \tag{1c}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}. \tag{1d}$$

Здесь $\boldsymbol{H}$ — вектор напряженности магнитного поля, $\boldsymbol{B}$ — вектор электромагнитной индукции, $\boldsymbol{E}$ — вектор напряженности электрического поля, $\boldsymbol{D}$ — вектор электрической индукции, ρ_{E} — плотность зарядов, $\boldsymbol{j}$ — вектор плотности электрического тока.

Система уравнений записана в системе единиц СИ.

Следствием системы уравнений (1) является закон сохранения заряда в форме:

$$\frac{\partial \rho_{\mathrm{E}}}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0. \tag{2}$$

Определяющие соотношения для векторов индукции электромагнитного поля в простейшем имеют вид:

$$\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H},$$

где
$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_{\mathrm{r}}, \quad \mu = \mu_0 \mu_{\mathrm{r}}.$$
Здесь ϵ — диэлектрическая проницаемость среды, ϵ_0 — электрическая постоянная, ϵ_{r} — относительная диэлектрическая проницаемость, μ — магнитная проницаемость, μ_0 — магнитная постоянная, μ_{r} — относительная магнитная проницаемость, $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c$, c — скорость света в вакууме.

Вектор плотности электрического тока в простейшем случае определяется выражением
$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E},$$
где σ — электропроводность. Это соотношение выражает закон Ома.

Система уравнений Максвелла в квази(электро)стационарной постановке (1) допускает закон сохранения энергии в виде
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}\right) + \nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) = -\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}. \tag{3}$$

Выражение в правой части уравнения (3) описывает выделение энергии при протекании в среде электрического тока («джоулево тепло»),
$$Q_{\mathrm{J}} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}. \tag{4}$$
Выражение под временной производной представляет собой плотность энергии электромагнитного поля в рассматриваемом приближении,
$$W_{\mathrm{EM}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D},$$
аргумент оператора «∇» — вектор плотности потока энергии электромагнитного поля (вектор Умова-Пойнтинга),
$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\mathrm{EM}} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}.$$
В силу того, что рассмотренная модель далее будет включена, в нужном виде, в модель типа диффузной границы, далее будем считать, что в области Ω, в которой рассматриваются эти уравнения, нет «чистых» проводников и диэлектриков. Другими словами, все поля-параметры, которые описывают электрофизические свойства среды (ϵ, μ, σ), ограничены положительным значением снизу и конечным значением сверху.

В силу того, что в рассматриваемой модели вектор напряженности электрического поля является безвихревым, см. уравнение (1c), она допускает введение потенциала Φ электрического поля так, что
$$\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi.$$

В этом случае уравнение (1a) может быть записано в виде

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla \Phi) = \rho_{\mathrm{E}}.$$

Таким образом, следствием системы уравнений (1) является следующая система уравнений относительно электрического потенциала Φ и плотности заряда ρ_{E}

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla \Phi) = \rho_{\mathrm{E}}, \quad \frac{\partial \rho_{\mathrm{E}}}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0, \quad \boldsymbol{j} = -\sigma \nabla \Phi.$$

Аналогично, в силу (1b) можно ввести потенциал магнитного поля, откуда

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A},$$

где $\boldsymbol{A}$ — векторный потенциал (как показано в [Larsson2007], в случае квази(электро)статического приближения естественно использовать калибровку Кулона).

Преобразуем закон сохранения энергии электромагнитного поля (3) с учетом тождества

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{E} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H}) - (\nabla \times \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{H}.$$

Отсюда, с учетом (3) и уравнений (1c) и (1d), получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D} \right) = \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{D}. \tag{5}$$

Это выражение является балансом энергии электромагнитного поля. В его левой части стоит выражение для скорости изменения энергии, в правой — мощность соответствующих сил. На языке термодинамики оно может быть записано в виде (см. также [Rosensweig1989])

$$dW_{\mathrm{EM}} = \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{D}. \tag{6}$$

3 Основные идеи концепции микросил и микронапряжений М. Гуртина

Традиционная механика и термодинамика сплошной среды имеет дело с «макроскопическими» силами, под которыми будем понимать силы, связанные с относительным макроскопическим движением точек среды или изменением ее состояния. К таким силам можно отнести, например, традиционные поля напряжений, давление и обобщенные силы, характерные для неравновесной термодинамики. Макроскопические силы описывают поведение среды «в целом» и не учитывают структуру среды на микроуровне и механизмы, связанные с ее изменением.

В некоторых задачах, однако, возникает необходимость описания на макроскопическом уровне процессов и соответствующих механизмов, связанных с эволюцией микроструктуры среды и не связанных с макроскопическим относительным движением материальных точек, составляющих тело. В контексте настоящей работы такими эффектами являются эффект разделения фаз в смеси жидкостей с различными свойствами (или, наоборот, эффект слияния капель одной фазы в более крупные), учет сил поверхностного натяжения на границе раздела фаз и др. В этом случае возникающие в среде напряжения или термодинамические силы, которые приводят, например, к разделению фаз, не связаны с макроскопическими силами. Эти напряжения и силы обусловлены характером взаимодействия частиц среды на микроуровне и проявляют себя даже в том случае, если на тело не действуют никакие внешние нагрузки.

Для описания микроструктуры среды на макроскопическом уровне используются физические поля (скалярные, векторные или тензорные математические функции точки пространства). Примерами таких полей могут быть плотность дефектов в единице объема твердого тела или индикаторная функция фазы при анализе многофазных течений жидкости и др.

Задающая микроструктуру среды функция в математических моделях такого типа обычно называется «параметром порядка» или «фазовым полем».

Параметр порядка может быть, в зависимости от задачи, как физически осмысленной величиной типа плотности или концентрации, так и «новой», по отношению к традиционно используемым термодинамическим полям, функцией состояния. В случае описания, например, однокомпонентной жидкости с фазовыми переходами («жидкость»/«пар») в качестве параметра порядка может выступать плотность среды. Для двухкомпонентных двухфазных сред (например, смесь «вода»/«масло») в качестве параметра порядка может выступать объемная или массовая концентрация одной из фаз.

Полная система уравнений, описывающих динамику процесса в рамках моделей подобного типа, обычно состоит из двух связанных групп уравнений. Первая группа описывает макроскопическую динамику среды и соответствующие поля (макроскопические поля деформаций и скоростей деформаций, температуру, давление и т.д.). Вторая группа уравнений описывает динамику непосредственно микроструктуры среды, а точнее, соответствующего параметра порядка. Так, например, возвращаясь к гидродинамике многофазной жидкости, эволюция формы жидкой капли одной жидкости внутри другой и ее макроскопическое движение описываются макроскопическими уравнениями Навье–Стокса, в которые добавляются специальные члены, описывающие силы поверхностного натяжения.

Так же как динамика макроскопического движения описывается системой действующих в среде внешних и внутренних макроскопических сил и напряжений, можно представить, что динамика параметра порядка описывается системой микросил и микронапряжений. Более детально формализм математических моделей с использованием концепции микросил и микронапряжений и его приложения для построения математических моделей в различных областях физики описан в [Fried1993, Gurtin1994, Gurtin1995, Gurtin1996, Gurtin2010].

Приведем теперь основные уравнения термодинамики систем микросил и микронапряжений, используемых в настоящей работе. Будем считать, что в среде действуют:

- (векторное) поле внутренних микронапряжений $\boldsymbol{\xi}$;
- (скалярное) поле внутренних микросил π;
- (скалярное) поле внешних микросил γ.

Здесь термин «внутренний» означает, что значения соответствующих величин определяются внутренними процессами в среде (фактически — набором тех или иных определяющих соотношений, связывающих микросилы и микронапряжения с параметром порядка и макроскопическими термодинамическими полями), «внешний» — поле описывает внешнее воздействие (то есть его величина и природа не связаны с протекающими в среде процессами и определяющими соотношениями относительно тех или иных параметров, описывающих состояние среды; значение этого поля может быть задано до некоторой степени произвольно).

Для указанной системы микросил и микронапряжений *постулируется* выполнение следующих соотношений, справедливых для произвольного материального объема $V = V(t)$:

- уравнение баланса микросил и микронапряжений, которое в интегральном виде имеет вид:

  $$\int\limits_{\partial V(t)} \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{n} \, d\sigma + \int\limits_{V(t)} \pi \, dV + \int\limits_{V(t)} \gamma \, dV = 0,$$

  и, как следствие, в дифференциальном:

  $$\operatorname{div} \boldsymbol{\xi} + \pi + \gamma = 0;$$

- выражение для работы микронапряжений (здесь и далее $d(\cdot)/dt$ — полная (субстанциональная, лагранжева) производная по времени) при изменении параметра порядка φ:

$$\int\limits_{\partial V(t)} \left(\boldsymbol{\xi}\frac{d\varphi}{dt}\right) d\sigma$$

и работы внутренних и внешних микросил:

$$\int\limits_{V(t)} f\frac{d\varphi}{dt}\, dV, \quad f = \pi, \gamma.$$

По сути, если считать φ «кинематической» переменной, последние выражения для работы означают, что

$$[\text{работа}] = [\text{скорость изменения } \varphi] \times [\text{сила, вызывающая изменение } \varphi].$$

При этом выражение для работы микросил и микронапряжений, которая совершается *над объемом* $V(t)$ *его окружением*, имеет вид:

$$W = \int\limits_{\partial V(t)} \left(\boldsymbol{\xi}\frac{d\varphi}{dt}\right) \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma + \int\limits_{V(t)} \gamma\frac{d\varphi}{dt}\, dV.$$

Отметим, что в этом выражении не присутствуют внутренние микросилы. Более подробное изложение этого вопроса представлено в [Gurtin1995, Gurtin1996];

- диссипативное неравенство, содержащее работу микросил и микронапряжений. В том случае, если в среде не происходят никакие процессы, кроме как связанные с наличием микросил и микронапряжений, это неравенство имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} \Psi\, dV \leqslant \int\limits_{\partial V(t)} \frac{d\varphi}{dt}\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma + \int\limits_{V(t)} \frac{d\varphi}{dt}\gamma\, dV,$$

где Ψ — свободная энергия системы (в данном случае связанная только с микронапряжениями и микросилами). Для более сложных процессов, в частности рассматриваемых в настоящей работе, в правой части последнего неравенства должны присутствовать слагаемые, отвечающие за работу других сил, присутствующих в системе (внешние силы, напряжения в жидкости и т.д.).

Приведенные выше уравнения определяют основные балансовые законы для микросил и микронапряжений, но не определяют вид зависимостей этих величин от параметров, описывающих среду. Для построения этих зависимостей используется широко распространенная в рациональной термомеханике сплошной среды процедура Колмана-Нолла [Coleman1963]. Она основана на том, что одновременно с основными уравнениями, описывающими эволюцию системы, постулируется (а) вид энропийного неравенства в нужной форме (обычно оно записывается или приводится к диссипативному неравенству для свободной энергии системы) и (б) множество параметров состояния системы. Далее, как только определен факт наличия функциональных связей между параметрами, описывающими процесс, неравенство для свободной энергии можно рассматривать не как ограничение на термодинамический процесс, а как ограничение на замыкающие соотношения, определяющие, помимо основных уравнений законов сохранения, модель процесса.

Другими словами, неравенство для свободной энергии используется не для того, чтобы «отобрать» допустимые с точки зрения термодинамики процессы, а для того, чтобы «отобрать» такие определяющие соотношения, которые сделают допустимым любой процесс, описываемый с их помощью.

4 Неизотермическая модель в неподвижной среде

4.1 Основные соотношения

Описанная в работе [Pitike2014] (см. также [Zipunova2020]) модель канала пробоя не является консервативной. Более того, такие термодинамические параметры системы, как температура (а следовательно, и энтропия), не являются параметрами модели и не входят в ее определяющие соотношения. В этом случае связь между свободной энергией ψ и внутренней энергией e оказывается «потерянной» — указанные виды энергии не связаны между собой преобразованием Лежандра (см. [Alberty2001]) по соответствующим переменным. Другими словами, выражение для внутренней энергии не может быть получено из выражения для свободной энергии — и наоборот.

Вместе с тем процесс развития канала пробоя существенно связан с преобразованием энергии электромагнитного поля в тепловую и механическую энергию. Поэтому неконсервативность предложенной в [Pitike2014] модели является ее существенным недостатком. По этой причине в настоящем разделе будет выведен более полный вариант модели, включающий в себя закон сохранения энергии. Очевидно, что он должен учитывать уравнение баланса электромагнитного поля (3). В правой части (3) стоит член (4), который описывает изменение внутренней энергии среды за счет выделения джоулева тепла. Поэтому температура и зависящие от нее параметры состояния среды будут изменяться. В частности, изменяться будет «тепловая» часть энергии среды (то есть та ее часть, которая не связана с наличием в среде электромагнитного поля и не зависит от параметра порядка и/или его производных).

Перейдем к выводу уравнений модели. Предварительно сделаем ряд допущений.

Будем считать, что среда неподвижна. То есть вне зависимости от ее термодинамического состояния и возникающих при его изменении внутренних массовых сил, действующих на среду, скорость ее частиц равна нулю. В этом случае в модель необходимо включить только уравнения закона сохранения массы и энергии. Уравнения закона сохранения импульса не будут входить в число уравнений модели, а полная энергий системы не будет включать в себя слагаемые, соответствующие кинетической энергии материальных частиц среды.

Далее рассмотрим закон сохранения массы. Так как среда неподвижна, то изменение материального объема среды в ходе соответствующих термодинамических процессов не происходит, то есть

$$\frac{d\rho}{dt} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \frac{dv}{dt} = 0,$$

где ρ — плотность массы (масса единицы объема среды), $v = 1/\rho$ — удельный объем (объем единицы массы). Это означает, что *термодинамическое* давление в такой системе не определено как параметр состояния.

Такое допущение выглядит искусственным — «физическая интуиция» подсказывает, что при изменении температуры как-то изменяются плотность и давление в среде — однако рассматриваемая модель это исключает. Точнее, как уже было сказано выше, ни давление, ни удельный объем не входят в число параметров модели, не «являются постоянными параметрами», а просто отсутствуют в модели. Такое упрощение очень условно соответствует модели несжимаемой жидкости в гидродинамике — несмотря на то, что давление присутствует в системе уравнений Навье-Стокса течения несжимаемой жидкости, входящее в эти уравнения давление не является термодинамическим давлением (в некоторых книгах его называют «механическим»; на самом деле, его смысл является чисто математическим — это множитель Лагранжа, обеспечивающий выполнение условия несжимаемости вида $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$, где $\boldsymbol{u}$ — скорость движения среды).

Учет эффектов сжимаемости приведет к тому, что модель должна будет учитывать изменение объема материальных частиц среды, как следствие — в среде должно возникнуть движение (то есть перемещение материальных точек среды в пространстве). Такая модель является значительно более сложной; ее построение — предмет будущей работы.

Рассмотрим теперь закон сохранения энергии. При сделанных выше допущениях, без учета параметра порядка и в отсутствие электромагнитного поля, внутренняя энергия e удовлетворяет тождеству Гиббса

$$de = Td\eta,$$

где T — температура, η — энтропия. Последнее уравнение может считаться записанным для единицы объема или для единицы массы среды — в силу сделанных выше допущений это не важно.

При наличии поля, в рамках квази(электро)статического приближения, тождество Гиббса будет иметь вид

$$de = Td\eta + \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{D},$$

см. раздел 2 и [Rosensweig1989].

В этом случае внутренняя энергия определяется зависимостью

$$e = \hat{e}(\eta, \boldsymbol{D}),$$

причем η и $\boldsymbol{D}$ являются естественными переменными e как термодинамического потенциала.

В рассматриваемом случае модели с диффузной границей будем считать, что энергия e среды определяется множеством переменных (параметров состояния)

$$\xi_e = \{\eta, \boldsymbol{D}, \phi, \nabla\phi\},$$

то есть

$$e = e(\xi_e) = \hat{e}(\eta, \boldsymbol{D}, \phi, \nabla\phi). \tag{7}$$

Эта зависимость (точнее — множество ее аргументов) постулируется.

В присутствии электромагнитного поля (сравнить с уравнением (3.5) в [Fried1993]) и выражений для работы микросил и микронапряжений (см. раздел 3) закон сохранения энергии может быть записан в виде

$$\dot{e} = -\nabla \cdot \boldsymbol{q} - \nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) + \nabla \cdot (\dot{\phi}\boldsymbol{\xi}) + \dot{\phi}\gamma + r, \tag{8}$$

где $\boldsymbol{q}$ — вектор плотности теплового потока (вид которого будет определен ниже); остальные переменные уже были определены.

Если представить «полную» энергию e в виде

$$e = e_{\mathrm{EM}} + e_{\mathrm{INT}}, \quad e_{\mathrm{EM}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D}, \tag{9}$$

где энергия e_{INT} не зависит от электромагнитного поля, и использовать уравнения баланса электромагнитного поля (3), то закон сохранения энергии может быть записан в более привычном (не считая слагаемых, связанных с работой микросил и микронапряжений) виде

$$\dot{e}_{\mathrm{INT}} = -\nabla \cdot \boldsymbol{q} + \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E} + \nabla\dot{\phi} \cdot \boldsymbol{\xi} + \dot{\phi}\gamma + r, \tag{10}$$

где второе слагаемое — изменение энергии за счет джоулева тепла. Последнее уравнение имеет вид, типичный, например, для задач магнитной гидродинамики плазмы.

Далее энергию e будем назвать *полной*, энергию e_{INT} — *внутренней*, энергию

$$e_{\mathrm{EM}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} \tag{11}$$

— энергией (электромагнитного) *поля*. Вид последней постулируется и соответствует случаю квази(электро)статического приближения, см. раздел 2.

Для дальнейшего нам понадобится закон неубывания энтропии в виде энтропийного неравенства в форме Клазиуса-Дюгема, которое постулируется в виде:

$$\dot{\eta} \geqslant -\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{q}}{\theta}\right) + \frac{r}{\theta}, \tag{12}$$

где θ — абсолютная (термодинамическая) температура, η — энтропия.

Уравнения баланса для микросил и микронапряжений имеет стандартный вид (см. раздел 3):

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\xi} + \pi + \gamma = 0. \tag{13}$$

Таким образом, полная система уравнений, описывающих модель, состоит из следующих групп уравнений:

- системы уравнений Максвелла (1), совместно с ее *следствиями* — уравнениями (3) и (2);
- закона сохранения полной энергии (8). Следствием его и уравнения баланса энергии электромагнитного поля является уравнение баланса внутренней энергии (10). При этом зависимость полной энергии от параметров состояния определяется соотношениями (7), (9) и (11);
- уравнения баланса микросил и микронапряжений (13);
- второго закона термодинамики в форме неравенства Клазиуса-Дюгема (12).

Первым шагом в выводе модели, как и ранее, является переход к диссипативному неравенству для свободной энергии Гельмгольца. Для этого нужно сначала определить ее.

Традиционно переход от внутренней энергии e к свободной энергии ψ осуществляется с помощью преобразования Лежандра по паре параметров (η,θ), см. [Alberty2001, Rosensweig1989]. В этом случае для e в форме (7) имеем

$$\tilde{\psi} = \tilde{\psi}(\theta, \boldsymbol{D}, \phi, \nabla\phi), \quad \tilde{\psi} = e - T\eta.$$

Однако для задач электродинамики более удобно определить свободную энергию Гелмьгольца путем преобразования Лежандра по двум парам переменных (η, T) и $(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{E})$. В этом случае для e в форме (7) имеем

$$\psi = \hat{\psi}(\theta, \boldsymbol{E}, \phi, \nabla\phi), \tag{14}$$

$$\psi = e - \theta\eta - \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D}, \tag{15}$$

см. [Rosensweig1989, раздел 13.6]. Далее будем использовать последний способ.

4.2 Процедура Колмана-Нолла

Перейдем непосредственно к выводу модели. Общая схема вывода повторяет работы [Gurtin1994, Fried1993].

Как и ранее, сначала получим диссипативное неравенство для свободной энергии, которое является следствием энтропийного неравенства (12) и закона сохранения энергии. Отметим, что при выводе оригинальной модели в [Pitike2014] вид диссипативного неравенства для свободной энергии постулировался.

Для этого подставим в уравнение баланса энергии (8) уравнение баланса микросил и микронапряжений (13) и получим:

$$\dot{e} = -\nabla \cdot \boldsymbol{q} - \nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla\dot{\phi} - \pi\dot{\phi} + r. \tag{16}$$

Выразим внутреннюю энергию e через свободную энергию ψ в соответствии с (15) и подставим результат в (16):

$$\dot{\psi} + \dot{\theta}\eta + \theta\dot{\eta} + \dot{\boldsymbol{E}} \cdot \boldsymbol{D} + \boldsymbol{E} \cdot \dot{\boldsymbol{D}} = -\nabla \cdot \boldsymbol{q} - \nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla\dot{\phi} - \pi\dot{\phi} + r.$$

Складывая последнее уравнение с энтропийным неравенством (12), умноженным на $-\theta$, получим:

$$\begin{aligned}\dot{\psi} + \dot{\theta}\eta + \theta\dot{\eta} + \dot{\boldsymbol{E}} \cdot \boldsymbol{D} + \boldsymbol{E} \cdot \dot{\boldsymbol{D}} - \theta\dot{\eta} \leqslant \\ - \nabla \cdot \boldsymbol{q} - \nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla\dot{\phi} - \pi\dot{\phi} + r + \theta\nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{q}}{\theta}\right) - r,\end{aligned}$$

или, после упрощения,

$$\dot{\psi} + \dot{\theta}\eta + \dot{\boldsymbol{E}} \cdot \boldsymbol{D} + \boldsymbol{E} \cdot \dot{\boldsymbol{D}} \leqslant -\nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla\dot{\phi} - \pi\dot{\phi} - \left(\frac{\boldsymbol{q}}{\theta}\right) \cdot \nabla\theta.$$

Вычисляя в последнем выражении член $\nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H})$ и используя систему уравнений Максвелла (1), получим:

$$\dot{\psi} + \dot{\theta}\eta + \dot{\boldsymbol{E}} \cdot \boldsymbol{D} + \boldsymbol{E} \cdot \dot{\boldsymbol{D}} \leqslant -\boldsymbol{E} \cdot (\boldsymbol{j} - \dot{\boldsymbol{D}}) + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla\dot{\phi} - \pi\dot{\phi} - \frac{\boldsymbol{q}}{\theta} \cdot \nabla\theta,$$

или, после упрощения:

$$\dot{\psi}+\dot{\theta}\eta+\dot{\boldsymbol{E}}\cdot\boldsymbol{D}-\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}-\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\dot{\phi}+\pi\dot{\phi}+\frac{\boldsymbol{q}}{\theta}\cdot\nabla\theta\leqslant 0. \tag{17}$$

Последнее неравенство является неравенством Клазиуса-Дюгема в форме диссипативного неравенства для свободной энергии.

Теперь непосредственно перейдем к реализации процедуры Колмана-Нолла.

Пусть свободная энергия ψ зависит от множества параметров

$$\chi=\left\{\theta,\nabla\theta,\boldsymbol{E},\phi,\nabla\phi,\dot{\phi}\right\},$$

то есть

$$\psi=\hat{\psi}(\chi)=\hat{\psi}(\theta,\nabla\theta,\boldsymbol{E},\phi,\nabla\phi,\dot{\phi}).$$

Далее, для упрощения обозначений, положим

$$\boldsymbol{p}=\nabla\phi,\quad \boldsymbol{g}=\nabla\theta,\quad h=\dot{\phi},$$

и, таким образом,

$$\chi=\{\theta,\boldsymbol{g},\boldsymbol{E},\phi,\boldsymbol{p},h\}.$$

Соответственно, зависимости микросил π, микронапряжений $\boldsymbol{\xi}$ и вектора электрической индукции зададим как:

$$\boldsymbol{\xi}=\hat{\boldsymbol{\xi}}(\chi),\quad \pi=\hat{\pi}(\chi),\quad \boldsymbol{D}=\hat{\boldsymbol{D}}(\chi),\quad \eta=\hat{\eta}(\chi).$$

Тогда из (17) следует, что:

$$\begin{aligned}(\hat{\psi}_\theta+\hat{\eta})\dot{\theta}+\hat{\psi}_{\boldsymbol{g}}\cdot\dot{\boldsymbol{g}}+(\hat{\psi}_{\boldsymbol{E}}+\hat{\boldsymbol{D}})\cdot\dot{\boldsymbol{E}}+\left(\hat{\psi}_\phi+\hat{\pi}\right)\dot{\phi}&\\ +\left(\hat{\psi}_{\boldsymbol{p}}-\hat{\boldsymbol{\xi}}\right)\cdot\nabla\dot{\phi}+\hat{\psi}_h\ddot{\phi}+\frac{\boldsymbol{q}}{\theta}\cdot\nabla\theta-\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}\leqslant 0.&\end{aligned} \tag{18}$$

Последнее неравенство должно выполняться для любых происходящих в системе процессов. В силу того, что (а) $\dot{\boldsymbol{E}}$, $\nabla\dot{\phi}$ и $\ddot{\phi}$ входят в него линейно и (б) существуют такие состояния системы, что $\nabla\dot{\phi}\neq 0$ и $\ddot{\phi}\neq 0$, из (18) следует, что:

$$\hat{\psi}_{\boldsymbol{g}}=0,\quad \hat{\psi}_h=0,\quad \hat{\psi}_\theta=-\hat{\eta},\quad \hat{\psi}_{\boldsymbol{E}}=-\hat{\boldsymbol{D}},\quad \hat{\psi}_{\boldsymbol{p}}=\hat{\boldsymbol{\xi}}, \tag{19}$$

и неравенство (18) сводится к

$$\left(\hat{\psi}_\phi+\hat{\pi}\right)\dot{\phi}+\frac{\boldsymbol{q}}{\theta}\cdot\nabla\theta-\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}\leqslant 0. \tag{20}$$

Положим:

$$\begin{aligned}\hat{\pi}(\chi) &= -\hat{\psi}_{\phi}(\theta, \boldsymbol{E}, \phi, \nabla\phi) - \boldsymbol{k_\pi}(\chi)\cdot\nabla\theta - \beta_\pi(\chi)\dot{\phi} - \boldsymbol{\tau_\pi}(\chi)\cdot\boldsymbol{E},\\ \hat{\boldsymbol{q}}(\chi) &= -\boldsymbol{K_q}(\chi)\cdot\nabla\theta - \boldsymbol{\beta_q}(\chi)\dot{\phi} - \boldsymbol{T_q}(\chi)\cdot\boldsymbol{E},\\ \hat{\boldsymbol{j}}(\chi) &= \quad \boldsymbol{K_j}(\chi)\cdot\nabla\theta + \boldsymbol{\beta_j}(\chi)\dot{\phi} + \boldsymbol{T_j}(\chi)\cdot\boldsymbol{E},\end{aligned} \tag{21}$$

где величины $\boldsymbol{K_q}$, $\boldsymbol{T_q}$, $\boldsymbol{K_j}$, $\boldsymbol{T_j}$, — заданные тензоры; $\boldsymbol{k_\pi}$, $\boldsymbol{\tau_\pi}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\beta_q}$, $\boldsymbol{\beta_j}$ — заданные векторные функции; β_π — скалярная функция. Они описывают взаимное влияние процессов различной природы (например, распространения тепла и динамики электрического поля) друг на друга.

С учетом (21) из (20) получаем:

$$\begin{aligned}&\beta_\pi\dot{\phi}^2 + \frac{1}{\theta}\nabla\theta\cdot\boldsymbol{K_q}(\chi)\cdot\nabla\theta + \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{T_j}(\chi)\cdot\boldsymbol{E}\\ &+\dot{\phi}\left[\boldsymbol{k_\pi}(\chi) + \frac{\boldsymbol{\beta_q}(\chi)}{\theta}\right]\cdot\nabla\theta + \dot{\phi}\left[\boldsymbol{\tau_\pi}(\chi) + \boldsymbol{\beta_j}(\chi)\right]\cdot\boldsymbol{E} + \nabla\theta\cdot\left[\frac{\boldsymbol{T_q}(\chi)}{\theta} + \boldsymbol{K_j}(\chi)\right]\cdot\boldsymbol{E} \geqslant 0.\end{aligned} \tag{22}$$

Для выполнения этого неравенства достаточно положить, что $\beta_\pi \geqslant 0$, тензоры второго ранга $\boldsymbol{K_q}$ и $\boldsymbol{T_j}$ — симметричные и неотрицательно определенные (в данном случае — тензоры коэффициентов теплопроводности и электропроводности, соответственно). Определение тензоров $\boldsymbol{T_q}$ и $\boldsymbol{K_j}$, векторов $\boldsymbol{k_\pi}$, $\boldsymbol{\tau_\pi}$, $\boldsymbol{\beta_q}$, $\boldsymbol{\beta_j}$ — должно гарантировать выполнение неравенства (22) для произвольных $\nabla\theta$ и $\boldsymbol{E}$.

Представим поле микросил π в виде суммы двух слагаемых, «равновесного» и «неравновесного»:

$$\pi = \pi_{\mathrm{eq}} + \pi_{\mathrm{non}}.$$

Здесь под термином «неравновесный» понимается величина, которая равна нулю при $\nabla\theta = 0$ и $\dot{\phi} = 0$.

Тогда:

$$\pi_{\mathrm{eq}}(\theta, \boldsymbol{E}, \phi, \nabla\phi) = -\hat{\psi}_{\phi}(\theta, \boldsymbol{E}, \phi, \nabla\phi), \quad \pi_{\mathrm{non}}(\chi) = -\boldsymbol{k_\pi}(\chi)\nabla\theta - \beta_\pi(\chi)\dot{\phi} - \boldsymbol{\tau_\pi}(\chi)\boldsymbol{E}.$$

Теперь, используя (19) и (15), получим следующие уравнения Гиббса (термин основан на аналогии с «тождеством Гиббса», которое выражает дифференциал термодинамического потенциала через дифференциалы его естественных переменных):

$$\dot{\psi}(\theta, \boldsymbol{E}, \phi, \nabla\phi) = -\eta\dot{\theta} - \boldsymbol{D}\cdot\dot{\boldsymbol{E}} - \pi_{\mathrm{eq}}(\theta, \boldsymbol{E}, \phi, \nabla\phi)\dot{\phi} + \boldsymbol{\xi}\cdot\dot{\boldsymbol{p}}$$

и

$$\dot{e} = \dot{\eta}\theta + \dot{\boldsymbol{D}}\cdot\boldsymbol{E} - \pi_{\mathrm{eq}}(\theta, \boldsymbol{E}, \phi, \nabla\phi)\dot{\phi} + \boldsymbol{\xi}\cdot\dot{\boldsymbol{p}}.$$

Используя (16), перепишем последнее уравнение относительно энтропии:

$$\dot{\eta}\theta + \dot{\boldsymbol{D}} \cdot \boldsymbol{E} - \pi_{\mathrm{eq}}(\theta, \boldsymbol{E}, \phi, \nabla\phi)\dot{\phi} + \boldsymbol{\xi} \cdot \dot{\boldsymbol{p}} = -\nabla \cdot \boldsymbol{q} + \boldsymbol{E} \cdot (\boldsymbol{j} + \boldsymbol{D}) + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla\dot{\phi} - \pi\dot{\phi} + r,$$

или, после упрощения,

$$\theta\dot{\eta} = -\nabla \cdot \boldsymbol{q} + \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j} - \pi_{\mathrm{non}}(\chi)\dot{\phi} + r. \tag{23}$$

Далее, с учетом (19) имеем

$$\dot{\eta} = -\dot{\psi}_\theta = -\psi_{\theta\theta}\dot{\theta} - \psi_{\theta\boldsymbol{E}}\dot{\boldsymbol{E}} - \psi_{\theta\phi}\dot{\phi} - \psi_{\theta\boldsymbol{p}}\dot{\boldsymbol{p}}. \tag{24}$$

Величину

$$c = c(\theta, \boldsymbol{H}, \phi, \boldsymbol{p}) = -\psi_{\theta\theta}\theta \tag{25}$$

в правой части последнего уравнения естественно отождествить с теплоемкостью.

Подставляя теперь (24) в (23), приходим к:

$$c\dot{\theta} = -\nabla \cdot \boldsymbol{q} + \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j} + \theta\psi_{\theta\boldsymbol{E}}\dot{\boldsymbol{E}} + \theta\psi_{\theta\boldsymbol{p}}\dot{\boldsymbol{p}} + (\theta\psi_{\theta\phi} - \pi_{\mathrm{non}}(\chi))\dot{\phi} + r.$$

Это уравнение является уравнением баланса внутренней энергии в форме уравнения теплопроводности.

Теперь получим уравнение для эволюции параметра порядка как следствие уравнения баланса микросил и микронапряжений (13). Для этого подставим (19) и (21) в (13):

$$\nabla \cdot \hat{\psi}_{\boldsymbol{p}}(\theta, \boldsymbol{E}, \phi, \nabla\phi) + \Big[-\hat{\psi}_\phi(\theta, \boldsymbol{E}, \phi, \nabla\phi) - \boldsymbol{k}_{\boldsymbol{\pi}}(\chi)\nabla\theta - \beta_\pi(\chi)\dot{\phi} - \boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{\pi}}(\chi)\boldsymbol{E}\Big] + \gamma = 0,$$

откуда после перегрупировки слагаемых получим:

$$\beta_\pi(\chi)\dot{\phi} = \nabla \cdot \hat{\psi}_{\boldsymbol{p}}(\theta, \boldsymbol{E}, \phi, \nabla\phi) - \boldsymbol{k}_{\boldsymbol{\pi}}(\chi)\nabla\theta - \hat{\psi}_\phi(\theta, \boldsymbol{E}, \phi, \nabla\phi) - \boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{\pi}}(\chi)\boldsymbol{E} + \gamma.$$

В результате, система уравнений относительно температуры θ и параметра порядка ϕ, описывающая эволюцию внутренней энергии системы и параметра порядка, примет вид:

$$\begin{aligned} c\dot{\theta} &= -\nabla \cdot \boldsymbol{q} + \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j} + \theta\psi_{\theta\boldsymbol{E}}\dot{\boldsymbol{E}} + \theta\psi_{\theta\boldsymbol{p}}\dot{\boldsymbol{p}} + (\theta\psi_{\theta\phi} - \pi_{\mathrm{non}}(\chi))\dot{\phi} + r, \\ \beta_\pi(\chi)\dot{\phi} &= \quad \nabla \cdot \hat{\psi}_{\boldsymbol{p}}(\theta, \boldsymbol{E}, \phi, \nabla\phi) - \boldsymbol{k}_{\boldsymbol{\pi}}(\chi)\nabla\theta - \hat{\psi}_\phi(\theta, \boldsymbol{E}, \phi, \nabla\phi) - \boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{\pi}}(\chi)\boldsymbol{E} + \gamma. \end{aligned} \tag{26}$$

Первое уравнение этой системы выражает закон сохранения энергии в форме уравнения теплопроводности. Второе — имеет вид уравнения типа Алена-Кана и описывает эволюцию параметра порядка. Отметим, что система уравнений (26) зависит от напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}$ и должна быть дополнена уравнением, описывающим его эволюцию. Этот вопрос будет рассмотрен ниже.

Система уравнений (26) соответствует наиболее общему случаю задания свободной энергии системы. Ее упрощение связано с конкретизацией выражения для свободной энергии.

Примем следующий вид зависимости свободной энергии:

$$\hat{\psi}(\theta,\boldsymbol{E},\phi,\boldsymbol{p}) = \psi_0(\theta,\boldsymbol{E},\phi) + \frac{1}{2}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\Lambda}(\theta,\boldsymbol{E},\phi)\cdot\boldsymbol{p} + \frac{1}{2(k+1)}\lambda_k(\theta,\boldsymbol{E},\phi)\left\|\boldsymbol{p}\right\|^{2(k+1)}. \tag{27}$$

Первые два слагаемых соответствуют ранее предложенной в [Pitike2014] модели. Последнее слагаемое необходимо для обеспечения математической корректности постановки задачи, см. [Zipunova2020]. Отметим, что в соответствии с [Zipunova2020], наиболее общий вид выражения (27) требует наличия в нем слагаемых вида

$$\psi_{q,2} \sim \Delta^q\phi,$$

где $q = 2s$, $s = 1, 2, \ldots$. Учет слагаемого такого вида требует применения теории микросил и микронапряжений второго порядка, см. [Espath2017, Espath2020] и является предметом будущей работы.

С учетом сделанных допущений из (21) получим:

$$\begin{aligned}
\hat{\pi}(\theta,\boldsymbol{g},\boldsymbol{E},\phi,\boldsymbol{p},h) &= -\hat{\psi}_\phi(\theta,\boldsymbol{E},\phi,\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{k}_{\boldsymbol{\pi}}(\theta,\phi)\boldsymbol{g} - \beta_\pi(\theta,\phi)h - \boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{\pi}}(\theta,\phi)\boldsymbol{E},\\
\hat{\boldsymbol{\xi}}(\theta,\boldsymbol{E},\phi,\boldsymbol{p}) &= \quad \boldsymbol{\Lambda}(\theta,\boldsymbol{E},\phi)\boldsymbol{p} + \lambda_k(\theta,\boldsymbol{E},\phi)\boldsymbol{p}\left\|\boldsymbol{p}\right\|^{2k},\\
\hat{\boldsymbol{q}}(\theta,\boldsymbol{g},\boldsymbol{E},\phi,h) &= -\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{q}}(\theta,\phi)\boldsymbol{g} - \boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{q}}(\theta,\phi)h - \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{q}}(\theta,\phi)\boldsymbol{E},\\
\hat{\boldsymbol{j}}(\theta,\boldsymbol{g},\boldsymbol{E},\phi,h) &= \quad \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{j}}(\theta,\phi)\boldsymbol{g} + \boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{j}}(\theta,\phi)h + \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{j}}(\theta,\phi)\boldsymbol{E}.
\end{aligned} \tag{28}$$

Помимо этого, для простоты будем считать, что

$$\boldsymbol{\Lambda}_\phi(\theta,\boldsymbol{E},\phi) = 0, \quad \lambda_{k\phi}(\theta,\boldsymbol{E},\phi) = 0,$$

то есть коэффициенты $\boldsymbol{\Lambda}$ и λ_k не зависят от ϕ. Таким образом,

$$\hat{\psi}_\phi(\theta,\boldsymbol{E},\phi,\boldsymbol{p}) = \psi_{0\phi}(\theta,\boldsymbol{E},\phi).$$

Отметим, что сделанные допущения эквивалентны тому, что $\hat{\pi}(\theta,\boldsymbol{g},\boldsymbol{E},\phi,\boldsymbol{p},h)$ является линейной комбинацией величин $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}\left\|\boldsymbol{p}\right\|^{2k}$ и h при фиксированных θ, $\boldsymbol{E}$ и ϕ. Это условие отличается от использованного в [Fried1993] условия аффинности зависимости микросил и микронапряжений от $\boldsymbol{p}$, которое эквивалентно квадратичной зависимости ψ от $\boldsymbol{p}$ — указанное допущение здесь не может быть сделано в силу более сложной полиномиальной зависимости свободной энергии от $\boldsymbol{p}$, см. (27).

В результате, с учетом (19),(21),(27) приходим к следующим соотношениям:

$$
\begin{aligned}
\hat{\psi}(\theta, \boldsymbol{E}, \phi, \boldsymbol{p}) = {} & \psi_0(\theta, \boldsymbol{E}, \phi) + \frac{1}{2}\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\Lambda}(\theta, \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{p} \\
& \qquad + \frac{1}{2(k+1)}\lambda_k(\theta, \boldsymbol{E}) \left\|\boldsymbol{p}\right\|^{2(k+1)}, \\
\hat{\eta}(\theta, \boldsymbol{E}, \phi, \boldsymbol{p}) = {} & -\psi_{0\theta}(\theta, \boldsymbol{E}, \phi) - \frac{1}{2}\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\Lambda}_\theta(\theta, \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{p} \\
& \qquad - \frac{1}{2(k+1)}\lambda_{k\theta}(\theta, \boldsymbol{E}) \left\|\boldsymbol{p}\right\|^{2(k+1)}, \\
\hat{\boldsymbol{D}}(\theta, \boldsymbol{E}, \phi, \boldsymbol{p}) = {} & -\psi_{0\boldsymbol{E}}(\theta, \boldsymbol{E}, \phi) - \frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{p}\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{E}}(\theta, \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{p} \\
& \qquad - \frac{1}{2(k+1)}\lambda_{k\boldsymbol{E}}(\theta, \boldsymbol{E}) \left\|\boldsymbol{p}\right\|^{2(k+1)}, \\
\hat{\boldsymbol{\xi}}(\theta, \boldsymbol{E}, \phi, \boldsymbol{p}) = {} & \boldsymbol{\Lambda}(\theta, \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{p} + \lambda_k(\theta, \boldsymbol{E}, \phi)\boldsymbol{p} \left\|\boldsymbol{p}\right\|^{2k}, \\
\hat{\pi}(\theta, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{E}, \phi, \boldsymbol{p}, h) = {} & -\psi_{0_\phi}(\theta, \boldsymbol{E}, \phi) - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\omega}_\phi(\theta, \boldsymbol{E}, \phi) - \boldsymbol{k}_{\boldsymbol{\pi}}(\theta, \phi) \cdot \boldsymbol{g} \\
& \qquad - \beta_\pi(\theta, \phi)h - \boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{\pi}}(\theta, \phi) \cdot \boldsymbol{E}, \\
\hat{\boldsymbol{q}}(\theta, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{E}, \phi, h) = {} & -\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{q}}(\theta, \phi) \cdot \boldsymbol{g} - \boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{q}}(\theta, \phi)h - \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{q}}(\theta, \phi) \cdot \boldsymbol{E}, \\
\hat{\boldsymbol{j}}(\theta, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{E}, \phi, h) = {} & \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{j}}(\theta, \phi) \cdot \boldsymbol{g} + \boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{j}}(\theta, \phi)h + \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{j}}(\theta, \phi) \cdot \boldsymbol{E}.
\end{aligned} \tag{29}
$$

Далее для простоты будем считать, что $\boldsymbol{D}$ — аффинная функция $\boldsymbol{E}$ при фиксированных θ и ϕ, и положим:

$$
\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{E}}(\theta, \boldsymbol{E}) = 0, \quad \lambda_{k\boldsymbol{E}}(\theta, \boldsymbol{E}) = 0.
$$

Отсюда следует, что

$$
\hat{\boldsymbol{D}}(\theta, \boldsymbol{E}, \phi) = \epsilon(\theta, \phi)\boldsymbol{E} + \boldsymbol{D}_0(\theta, \phi), \quad \psi_{0\boldsymbol{E}}(\theta, \boldsymbol{E}, \phi) = -\epsilon(\theta, \phi)\boldsymbol{E} - \boldsymbol{D}_0(\theta, \phi),
$$

и, как следствие,

$$
\psi_0(\theta, \boldsymbol{E}, \phi) = -\frac{1}{2}\epsilon(\theta, \phi)\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{D}_0(\theta, \phi) \cdot \boldsymbol{E} + \psi_{00}(\theta, \phi).
$$

Более того, будем считать, что внешние источники энергии и внешние микросилы отсутствуют, то есть:

$$
r = \gamma = 0,
$$

и пренебрежем «перекрестными» эффектами, положив

$$
\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{\pi}} = \boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{\pi}} = \boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{j}} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{j}} = \boldsymbol{0}.
$$

В этом случае неравенство (22) примет вид:

$$\beta_\pi\dot{\phi}^2 + \frac{1}{\theta}\nabla\theta\cdot\boldsymbol{K_q}(\chi)\cdot\nabla\theta + \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{T_j}(\chi)\cdot\boldsymbol{E} \geqslant 0.$$

Оно всегда выполняется в силу сделанных выше допущений о неотрицательности β_π и симметричности и неотрицательной определенности тензоров $\boldsymbol{K_q}$ и $\boldsymbol{T_j}$.

В результате, с учетом полученных определяющих соотношений (29) система уравнений (26) примет вид:

$$\begin{aligned} c\dot{\theta} = & -\nabla\cdot(-\boldsymbol{K_q}\nabla\theta) + \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{T_j}\cdot\boldsymbol{E} + \theta\psi_{\theta\boldsymbol{E}}\cdot\dot{\boldsymbol{E}} \\ & \qquad + \theta\psi_{\theta\boldsymbol{p}}\cdot\dot{\boldsymbol{p}} + \theta\psi_{\theta\phi}\dot{\phi} + \beta_\pi(\varsigma)\dot{\phi}^2, \\ \beta_\pi(\chi)\dot{\phi} = & \quad \nabla\cdot\hat{\psi}_{\boldsymbol{p}}(\theta,\boldsymbol{E},\phi,\nabla\phi) - \hat{\psi}_\phi(\theta,\boldsymbol{E},\phi,\nabla\phi). \end{aligned} \tag{30}$$

Если считать свойства среды изотропными, то есть принять

$$\boldsymbol{\Lambda} = \lambda\boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{K_q} = k(\theta,\phi)\boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{T_j} = \tau(\theta,\phi)\boldsymbol{I},$$

и дополнительно положить

$$\omega = 0, \quad \beta_\pi = \beta(\theta,\phi), \quad \boldsymbol{D}_0 = 0,$$

то получим следующее выражение для свободной энергии:

$$\hat{\psi}(\theta,\boldsymbol{E},\phi,\boldsymbol{p}) = -\frac{1}{2}\epsilon(\theta,\phi)\boldsymbol{E}^2 + \psi_{00}(\theta,\phi) + \frac{1}{2}\lambda\boldsymbol{p}^2 + \frac{1}{2(k+1)}\lambda_k\left\|\boldsymbol{p}\right\|^{2(k+1)},$$

и, как следствие, определяющие соотношения

$$\hat{\eta}(\theta,\boldsymbol{E},\phi) = \quad \frac{1}{2}\epsilon(\theta,\phi)_\theta\boldsymbol{E}^2 - \psi_{00\theta}(\theta,\phi), \tag{31a}$$

$$\hat{\boldsymbol{D}}(\theta,\boldsymbol{E},\phi) = \quad \epsilon(\theta,\phi)\boldsymbol{E}, \tag{31b}$$

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{p}) = \quad \lambda\boldsymbol{p} + \lambda_k\boldsymbol{p}\left\|\boldsymbol{p}\right\|^{2k}, \tag{31c}$$

$$\hat{\pi}(\theta,\boldsymbol{E},\phi,h) = \quad \frac{1}{2}\epsilon_\phi(\theta,\phi)\boldsymbol{E}^2 - \psi_{00_\phi}(\theta,\phi) - \beta(\theta,\phi)h, \tag{31d}$$

$$\hat{\boldsymbol{q}}(\theta,\boldsymbol{g},\phi) = -k(\theta,\phi)\boldsymbol{g}, \tag{31e}$$

$$\hat{\boldsymbol{j}}(\theta,\boldsymbol{E},\phi) = \quad \tau(\theta,\phi)\boldsymbol{E}. \tag{31f}$$

Система уравнений (30) в этом случае примет вид:

$$\begin{aligned} c(\theta,\phi)\dot{\theta} = & -\nabla\cdot(-k(\theta,\phi)\nabla\theta) + \tau(\theta,\phi)\boldsymbol{E}^2 - \theta\epsilon_\theta(\theta,\phi)\boldsymbol{E}\cdot\dot{\boldsymbol{E}} \\ & + \theta\dot{\phi}\left(\psi_{00\theta\phi}(\theta,\phi) - \frac{1}{2}\epsilon_{\theta\phi}(\theta,\phi)\boldsymbol{E}^2\right) + \beta(\theta,\phi)\dot{\phi}^2, \end{aligned} \tag{32a}$$

$$\beta(\theta,\phi)\dot{\phi} = \lambda\Delta\phi + \lambda_k\nabla\cdot\left(\left\|\nabla\phi\right\|^{2k}\nabla\phi\right) - \psi_{00_\phi}(\theta,\phi) + \frac{1}{2}\epsilon_\phi(\theta,\phi)\boldsymbol{E}^2. \tag{32b}$$

Дальнейшее уточнение модели связано с конкретизацией выражений для зависимостей $\psi_{00} = \psi_{00}(\theta, \phi)$ — аддитивной части свободной энергии, не зависящей от напряженности поля и градиента параметра порядка, $\psi_{00}(\theta, \phi) = \psi(\theta, \phi, \boldsymbol{E} = 0, \boldsymbol{p} = 0)$; $\tau = \tau(\theta, \phi)$ — коэффициента электропроводности, $\epsilon = \epsilon(\theta, \phi)$ — коэффициента диэлектрической проницаемости, $\kappa = \kappa(\theta, \phi)$ — коэффициента теплопроводности; «кинетического» коэффициента β — подвижности, которая имеет смысл скорости процесса при приложенной единичной обобщенной термодинамической силе; формальных коэффициентов β, λ и λ_k, которые определяют характер пространственного распределения параметра порядка в стационарном состоянии, см. [Zipunova2020].

Рассмотрим их последовательно.

4.3 Замыкание уравнений модели

Далее будем считать, аналогично [Pitike2014],что

- неповрежденной среде соответствует значение параметра порядка $\phi = 1$, соответствующие значения величин будем обозначать индексом «d» («dielectric»);

- полностью поврежденной среде в канале пробоя соответствует значение параметра порядка $\phi = 0$, соответствующие значения величин будем обозначать индексом «br» («breakdown»).

4.3.1 Свободная энергия ψ_{00}

Для случая модели пробоя зависимость свободной энергии от параметра порядка выберем в виде, аналогичном [Pitike2014]:

$$\psi_{00}(\theta, \phi) = \psi_{\mathrm{mix}}(\theta, \phi) + \frac{\Gamma}{2} \frac{1 - f(\phi)}{l^2}. \tag{33}$$

Здесь первое слагаемое отвечает за свободную энергию смеси «чистых» фаз, то есть соответствует «традиционной» свободной энергии среды. При $\phi = 1$ величина ψ_{00} определяет зависимость свободной энергии неповрежденной среды от температуры θ; при $\phi = 0$ она определяет аналогичную зависимость для полностью «поврежденной» среды, которую можно отождествить с плазмой канала пробоя.

Второе слагаемое специфично для моделей диффузной границы трещин в упругой среде и модели электрического пробоя. Входящий в него параметр Γ может быть связан с количеством энергии, необходимой для образования единицы длина канала пробоя, см. [Pitike2014, Zipunova2020].

Функция $f = f(\phi)$ — это так называемая «интерполирующая функция» (или, в другой терминологии, «функция деградации», см., например, [Sargado2018]), которая интерполирует между значениями $\phi = 0$ и $\phi = 1$. В работе [Pitike2014] она выбрана как $f(\phi) = 4\phi^3 - 3\phi^4$. Необходимость использования такой функции типична для моделей типа диффузной границы, см., например, [Sargado2018].

Общие свойства, которым обычно удовлетворяет функция деградации, могут быть определены как [Sargado2018][1]:

$$f'(s) \geqslant 0; \quad f(0) = 0,\ f(1) = 1; \quad f'(0) = 0; \quad f'(1) \geqslant 0.$$

Первое из этих свойств гарантирует монотонную зависимость свойств от значений параметра порядка. Второе обеспечивает корректное задание свойств в предельных случаях $\phi = 0, 1$. Третье — гарантирует положительность ϕ в ходе эволюции. Четвертое — отвечает за «степень устойчивости» полностью неповрежденной среды к внешнему воздействию и, таким образом, за скорость образования канала пробоя.

Результирующее выражение для свободной энергии (33) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}(\theta, \boldsymbol{E}, \phi, \boldsymbol{p}) = {} & \psi_{\text{mix}}(\theta, \phi) && \text{(«тепловая» энергия)} \\
& + \frac{\lambda}{2}\frac{1 - f(\phi)}{l^2} && \text{(«разделяющая» энергия)} \\
& - \frac{1}{2}\epsilon(\theta, \phi)\boldsymbol{E}^2 && \text{(энергия ЭМ поля)} \\
& + \frac{1}{2}\lambda \boldsymbol{p}^2 + \frac{1}{2(k+1)}\lambda_k \left\|\boldsymbol{p}\right\|^{2(k+1)} && \text{(«градиентная» энергия).}
\end{aligned} \tag{34}$$

Из этого выражения могут быть получены все остальные определяющие соотношения, см. уравнения (29) и (31).

Обратим внимание, что если (а) в среде отсутствует электромагнитное поле и (б) среда является полностью неповрежденной ($\phi = 1$) или полностью поврежденной ($\phi = 0$), то единственным отличным от нуля слагаемым в (34), зависящим от оставшихся параметров состояния, является первое, то есть

$$\hat{\psi}(\theta, \boldsymbol{E}, \phi, \boldsymbol{p}) = \psi_{\text{mix}}(\theta, \phi) + \text{const}.$$

Это «классическая» часть свободной энергии, которая присутствует в среде. Она определяется традиционным уравнением состояния вещества. Ее вид может быть определен различными способами, рассмотренными ниже.

[1] Отметим, что в этой работе полностью поврежденной среде соответствует случай $\phi = 1$, полностью неповрежденной — $\phi = 0$. В [Pitike2014] и настоящей работе — наоборот.

«Смесевая» свободная энергия $\psi_{\mathbf{mix}}$. Построенная выше модель является законченной в том смысле, что ее уравнения и определяющие соотношения полностью определены, как только задан вид «смесевой» свободной энергии ψ_{mix}. С практической точки зрения, ее нужно задать каким-то конкретным образом. В моделях фазового поля соответствующее выражение обычно строится исходя из того, как устроена свободная энергия для «чистых» фаз, соответствующих значениям $\phi = 0$ и $\phi = 1$.

Для построения выражения для «смесевой» части свободной энергии могут быть рассмотрены несколько основных способов.

Термин «смесь» или «смесевая» ниже означает конкретно следующее. В рамках классических (с «четкой границей») моделей развития канала пробоя он рассматривается как цилиндрическая область, заполненная проводящей средой («плазмой канала пробоя»). Эта область отделена от неповрежденной среды «четкой» границей, которая является двумерной поверхностью. Вещество в канале пробоя и в неповрежденной среде может быть рассмотрено как две фазы одного и того же вещества. Образование канала пробоя, таким образом, описывается процессом перехода фазы «неповрежденная среда» в фазу «вещество канала пробоя». Эти фазы далее называются «чистыми» фазами. Для каждой из этих «чистых» фаз, вообще говоря, могут быть написаны выражения для свободной энергии — либо одно единое выражение, верное в нужном диапазоне термодинамических свойств.

В рамках моделей типа диффузной границы четкая граница между фазами отсутствует — в соответствии с идеями рассматриваемого подхода фазы разделены диффузной границей, то есть тонкой областью, в пределах которой свойства фаз меняются быстро, но непрерывно. Соответственно, в этой же области диффузной границы должна быть задана и свободная энергия системы, которая, по понятным причинам, здесь называется «смесевой». Это может быть сделано различными способами.

Способ 1. Первый способ основан на том, что для «чистых» фаз известны значения термодинамических коэффициентов и параметров среды (например, теплоемкости и так далее). В рамках формального подхода, используемого в настоящей работе, эти параметры определяются как те или иные производные свободной энергии. Выражение для свободной энергии может быть получено интегрированием соответствующих соотношений.

Поясним это на примере коэффициента теплоемкости, который определятся, в соответствии с (25) и с учетом сделанных допущений, как

$$c(\phi) = -\theta\psi_{\mathrm{mix},\theta\theta}. \tag{35}$$

Отметим, что в этом выражении принято, что теплоемкость c не зависит от температуры. Зависимость $c = c(\phi)$ от параметра порядка ϕ отражает тот факт, что c принимает известные заданные значения для полностью неповрежденной ($c_{\mathrm{d}} = c(1)$) и полностью поврежденной среды ($c_{\mathrm{br}} = c(0)$). Считается, что промежуточные значения при $0 < \phi < 1$ могут быть определены подходящей интерполяцией между значениями c_{d} и c_{br} или известны исходя из физических соображений.

Интегрирование выражения (35) дважды по температуре θ приводит к следующей зависимости:

$$\psi_{\mathrm{mix}}(\theta, \phi) = -c(\phi)\theta \ln \theta + \theta \left[c(\phi) + c_1(\phi)\right], \tag{36}$$

где $c_1(\phi)$ — заданная функция параметра порядка ϕ. Это выражение при фиксированном значении ϕ (точнее, характер зависимости соответствующего выражения от температуры θ) с точностью до обозначений параметров совпадает с выражением для свободной энергии совершенного газа, модель которого характеризуется независимостью теплоемкости от температуры, см. [Helrich2009].

Далее, в соответствии с (19) энтропия системы для свободной энергии вида (36) (без учета остальных параметров в (34)) имеет вид:

$$\eta = c(\phi) \ln \theta - c_1(\phi).$$

Положим формально $c_1(\phi) = c(\phi) \ln \theta_0 - \eta_0$, где $\theta_0 = \theta_0(\phi)$ и $\eta_0 = \eta_0(\phi)$ — параметры, интерпретируемые как «опорные» значение температуры и энтропии при фиксированном значении ϕ. Тогда придем к хорошо известному в классической термодинамике выражению

$$\eta = c(\phi) \ln \frac{\theta}{\theta_0} + \eta_0 \tag{37}$$

для энтропии совершенного газа, см. [Helrich2009]. Здесь η_0 — значение энтропии при $\theta = \theta_0$. Соответственно, для свободной энергии имеем

$$\psi_{\mathrm{mix}}(\theta, \phi) = \theta \left[c(\phi) - \eta_0 - c(\phi) \ln \frac{\theta}{\theta_0}\right], \tag{38}$$

что снова с точностью до постоянных, повторяет выражение для свободной энергии совершенного газа [Helrich2009].

В свою очередь, считая, что теплоемкость неповрежденной среды равняется c_{d}, поврежденной — c_{br}, можно, в соответствии разделом 4.3.3, определить теплоемкость смеси как

$$c = c(\phi) = c_{\mathrm{d}} \tilde{f}(\phi) + c_{\mathrm{br}}(1 - \tilde{f}(\phi)),$$

где $\tilde{f}$ — подходящая функция, интерполирующая между 0 и 1, см. раздел 4.3.3. При таком построении свободной энергии в «чистых» фазах имеем выражения свободной энергии, такие же, как для совершенного газа при заданных и не зависящих от температуры значениях теплоемкостей c_{br} и c_{d}.

Отметим, что такой подход может быть использован и в том случае, когда теплоемкости чистых фаз являются функциями температуры θ. В этом случае теплоемкость неповрежденной среды $c_{\mathrm{d}} = c_{\mathrm{d}}(\theta)$, поврежденной — $c_{\mathrm{br}} = c_{\mathrm{br}}(\theta)$, и теплоемкость смеси определяется как

$$c = c(\theta, \phi) = c_{\mathrm{d}}(\theta)\tilde{f}(\phi) + c_{\mathrm{br}}(\theta)(1 - \tilde{f}(\phi)).$$

Описанный способ построения «смесевого» уравнения состояния является искусственным — в самом деле, в реалистичной ситуации поврежденное и неповрежденное вещество являются поврежденным и неповрежденным состоянием одного и того же вещества, претерпевающего фазовые превращения. Однако с точки зрения формальной термодинамики выполненные построения являются корректными и могут быть использованы при рассмотрении модельных постановок задач с целью качественного исследования модели.

Способ 2. Второй способ основан на допущении, что для «чистых» фаз (то есть при $\phi = 0$ и при $\phi = 1$) выражение для свободной энергии известно и задано как

$$\psi_\alpha = \psi_\alpha(\theta), \quad \alpha = «\mathrm{d}», «\mathrm{br}».$$

В этом случае свободную энергию системы при $\phi \neq 0, 1$ определим как (см. [Boettinger2002]):

$$\psi(\phi, \theta) = \psi_{\mathrm{d}}(\theta)\tilde{f}(\phi) + \psi_{\mathrm{br}}(\theta)(1 - \tilde{f}(\phi)).$$

Другими словами, «взвешиваются» не параметры модели (с последующим выводом, если это необходимо, выражения для свободной энергии), а непосредственно выражения для свободной энергии. Отметим, что в общем случае способы 1 и 2 не эквиваленты.

Способ 3. Рассмотрим, по всей видимости, наиболее корректный способ построения «смесевой» части свободной энергии. В отличие от рассмотренных выше способов, которые основаны на использовании той или иной процедуры «сшивки» уравнений состояния или параметров среды с помощью функции деградации, он основан на непосредственном задании свободной энергии для всего диапазона температур и определяется зависимостью

$$\psi_{\mathrm{mix}} = \psi_{\mathrm{mix}}(\theta).$$

Такой способ соответствует заданию *широкодиапазонного уравнения состояния*. Наиболее распространенным на практике способом его задания является табличный. Наиболее удобным с точки зрения теории — использование многопараметрических уравнений состояния, которые обычно формулируются как заданная эмпирическая зависимость, аппроксимирующая значение для свободной энергии в естественных переменных. Непосредственным дифференцированием такого уравнения состояния могут быть получены все термодинамические параметры задачи. Вместе с ним должны быть заданы зависимости для таких параметров, как диэлектрическая проницаемость, электропроводность и так далее. Таким образом, единственными зависящими от параметра порядка ϕ слагаемыми в (34) являются «разделяющая» и «градиентная» части свободной энергии.

4.3.2 Внутренняя энергия

Как только выражение для свободной энергии определено, появляется возможность получить выражение для внутренней энергии. Для этого перепишем выражение (34) в виде:

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(\theta, \boldsymbol{E}, \phi, \boldsymbol{p}) &= \psi_{\mathrm{mix}}(\theta, \phi) - \frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} + \frac{\lambda}{2}\frac{1-f(\phi)}{l^2} + \frac{1}{2}\lambda\boldsymbol{p}^2 + \frac{1}{2(k+1)}\lambda_k\left\|\boldsymbol{p}\right\|^{2(k+1)}\\ &= \psi_{\mathrm{mix}}(\theta, \phi) + \frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} + \psi_{\mathrm{pp}},\end{aligned}$$

где

$$\psi_{\mathrm{pp}} = \frac{\lambda}{2}\frac{1-f(\phi)}{l^2} + \frac{1}{2}\lambda\boldsymbol{p}^2 + \frac{1}{2(k+1)}\lambda_k\left\|\boldsymbol{p}\right\|^{2(k+1)}.$$

Используя преобразование Лежандра (15) по переменным θ и $\boldsymbol{D}$, из последнего уравнения получим:

$$\begin{aligned} e &= \psi + \theta\eta + \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}\\ &= \psi_{\mathrm{mix}} - \frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} + \psi_{\mathrm{pp}} + \theta\eta + \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}\\ &= \psi_{\mathrm{mix}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} + \psi_{\mathrm{pp}} + \theta\eta,\end{aligned} \tag{39}$$

где все переменные должны быть выражены через естественные переменные внутренней энергии как термодинамического потенциала, то есть через

$$\chi_e = \{\eta, \boldsymbol{D}, \phi, \boldsymbol{p}\}, \quad \boldsymbol{p} \equiv \nabla\phi.$$

Для этого выразим $\boldsymbol{E}$ через $\boldsymbol{D}$ как

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{\epsilon}\boldsymbol{D}, \tag{40}$$

и температуру через энтропию.

Для частного случая уравнения состояния совершенного газа в этом случае имеем из (37):

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \exp\left[\frac{\eta - \eta_0}{c(\phi)}\right].$$

Подставляя последнее выражение в (38), получим:

$$\psi_{\text{mix}}(\theta, \phi) = \theta\left[c(\phi) - \eta_0 - c(\phi)\frac{\eta - \eta_0}{c(\phi)}\right] = c(\phi)\theta - \theta\eta. \tag{41}$$

Подставляя теперь выражения (40) и (41) в (39), получим

$$e = c(\phi)\theta + \frac{1}{2\epsilon(\phi)}\boldsymbol{D}^2 + \frac{\lambda}{2}\frac{1 - f(\phi)}{l^2} + \frac{1}{2}\lambda\boldsymbol{p}^2 + \frac{1}{2(k+1)}\lambda_k\left\|\boldsymbol{p}\right\|^{2(k+1)}.$$

Как только выражение для внутренней энергии указано, задача может решаться с использованием уравнения закона сохранения энергии в консервативной форме (8) или (16).

4.3.3 Другие коэффициенты

Наконец, необходимо задать определяющие соотношения для диэлектрической проницаемости $\epsilon = \epsilon(\theta, \phi)$ и электропроводности $\tau = \tau(\theta, \phi)$. В простейшем случае это можно сделать аналогично заданию коэффициента теплоемкости выше.

А именно, будем считать, что $a = a(\theta, \phi)$, где $a = \epsilon$ или $a = \tau$, определено как

$$a = a(\theta, \phi) = a_{\text{d}}(\theta)\tilde{f}(\phi) + a_{\text{br}}(\theta)(1 - \tilde{f}(\phi)),$$

где f — подходящая интерполирующая функция. В простейшем случае можно принять

$$a_{\text{d}}(\theta) = \text{const}, \quad a_{\text{br}}(\theta) = \text{const}.$$

5 Полная модель

В настоящем разделе приведена формулировка полной модели развития канала электрического пробоя в консервативной неизотермической постановке в замкнутом виде. Формулировка и вывод отдельных групп уравнений приведены в предыдущих разделах. Ниже используется наиболее простая формулировка определяющих соотношений, когда термодинамическое состояние фаз описывается уравнением состояние идеального совершенного газа и не учитывается зависимость от температуры электрофизических и ряда термодинамических свойств среды.

В соответствии с содержанием предыдущих разделов, модель включает в себя следующие группы уравнений и определяющих соотношений.

- Группа уравнений Максвелла в квази(элетро)статическом приближении (раздел 2):

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_{\mathrm{E}}, \quad \frac{\partial \rho_{\mathrm{E}}}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0,$$
$$\boldsymbol{D} = \epsilon(\phi)\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{j} = \tau(\phi)\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{E} = -\nabla\Phi.$$

  Здесь ϵ — диэлектрическая проницаемость, τ — коэффициент электропроводности, $\Phi = \Phi(\boldsymbol{x}, t)$ — потенциал электрического поля.

  Приведенные уравнения образуют замкнутую систему уравнений относительно потенциала электрического поля Φ и плотности электрического заряда ρ_{E} при заданных распределении параметра порядка $\phi = \phi(\boldsymbol{x}, t)$ и температуре $\theta = \theta(\boldsymbol{x}, t)$.

- Кинетическое уравнение типа Аллена-Кана, описывающее эволюцию параметра порядка ϕ:

$$\beta\dot{\phi} = \lambda\Delta\phi + \lambda_k \nabla \cdot \left(\|\nabla\phi\|^{2k} \nabla\phi\right) - \psi_{00\phi}(\theta, \phi) + \frac{1}{2}\epsilon_\phi(\phi)\boldsymbol{E}^2, \tag{42}$$

  где $\beta = \mathrm{const}$ — коэффициент подвижности, $\lambda = \mathrm{const}$, $\lambda_k = \mathrm{const}$ — параметры.

- Уравнение закона сохранения энергии в форме уравнения теплопроводности (32b):

$$c(\phi)\dot{\theta} = -\nabla \cdot (-k(\phi)\nabla\theta) + \tau(\phi)\boldsymbol{E}^2 + \theta\dot{\phi}\psi_{00\theta\phi}(\theta, \phi) + \beta\dot{\phi}^2, \tag{43}$$

  где $c = c(\phi)$ — коэффициент теплоемкости, $k = k(\phi)$ — коэффициент теплопроводности, $\beta = \mathrm{const}$ — коэффициент подвижности.

  В формулировке последнего уравнения явно учтено, что коэффициент диэлектрической проницаемости не зависит от температуры (см. (32a)).

- Выражения для свободной энергии, задаваемой соотношениями (34):

$$\hat{\psi}(\theta, \boldsymbol{E}, \phi, \boldsymbol{p}) = \psi_{00}(\theta, \phi) - \frac{1}{2}\epsilon(\phi)\boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2}\lambda\boldsymbol{p}^2 + \frac{1}{2(k+1)}\lambda_k \|\boldsymbol{p}\|^{2(k+1)},$$
$$\psi_{00}(\theta, \phi) = \psi_{\mathrm{mix}}(\theta, \phi) + \frac{\Gamma}{2}\frac{1 - f(\phi)}{l^2},$$
$$\psi_{\mathrm{mix}}(\theta, \phi) = -c(\phi)\theta\ln\theta + \theta\left[c(\phi) + c_1(\phi)\right],$$

где

$$c_1(\phi) = c(\phi) \ln \theta_0 - \eta_0,$$

$\theta_0 = \text{const}$, $\eta_0 = \text{const}$ — опорные значения температуры и энтропии среды при фиксированном значении ϕ.

В соответствии с данным определением свободной энергии ее производные, входящие в уравнения (43) и (42), имеют вид:

$$\psi_{00\phi} = \psi_{\text{mix}\phi} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma}{l^2} f'(\phi), \quad \psi_{00\theta\phi} = \psi_{\text{mix}\theta\phi}.$$

- Зависимости $a = a(\phi)$, где $a = \epsilon, \tau, c$, которые определены как

$$a = a(\phi) = a_{\text{d}}(\theta) f(\phi) + a_{\text{br}}(\theta)(1 - f(\phi)),$$

где $f = f(\phi) = 4\phi^3 - 3\phi^4$ — функция деградации,

$$a_{\text{d}} = \text{const}, \quad a_{\text{br}} = \text{const}$$

— значения соответствующей величины для полностью поврежденной («br») и полностью неповрежденной («d») среды.

Представленные уравнения и определяющие соотношения представляют собой замкнутую систему уравнений относительно неизвестных полей

$$\Phi = \Phi(\boldsymbol{x}, t), \quad \phi = \phi(\boldsymbol{x}, t), \quad \theta = \theta(\boldsymbol{x}, t).$$

Сформулированные выше уравнения модели должны быть дополнены подходящими начальными и граничными условиями.

6 Заключение

В настоящей работе предложена математическая модель типа диффузной границы для описания динамики развития канала электрического пробоя. Построенная модель обобщает результаты работы [Pitike2014]. В отличие от рассмотренной в этой работе модели, предложенная в настоящей работе модель позволяет учитывать неизотермические процессы, является консервативной и включает в себя уравнение закона сохранения энергии.

Вывод модели выполнен в рамках методов рациональной механики сплошной среды с применением процедуры Колмана-Нолла и теории микросил и микронапряжений М. Гуртина. Таким образом, построенная модель является термодинамически корректной в смысле выполнения закона сохранения энергии и выполнения второго закона термодинамики в форме неравенства Клазиуса-Дюгема.

Список литературы

[Зипунова2020] Зипунова Е.В., Савенков Е.Б. О моделях диффузной границы для описания динамики объектов высшей коразмерности //Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 122. 34 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2020-122 https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-122

[Alberty2001] Alberty, A.R. Use of Legendre transforms in chemical thermodynamics // Pure Appl. Chem., Vol. 73, No. 8, pp. 1349–1380, 2001. https://doi.org/10.1351/pac200173081349

[Ambati2015] Ambati, M., Gerasimov, T., De Lorenzis, L. A review on phase-field models of brittle fracture and a new fast hybrid formulation // Computational Mechanics, vol. 55, pp. 383–405. 2015. https://doi.org/10.1007/s00466-014-1109-y

[Anderson1997] Anderson, D., McFadden, G., Wheeler, A. Diffuse-Interface Methods in Fluid Mechanics // Annual Review of Fluid Mechanics. 30. 1997. https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.30.1.139

[Asadi2015] Asadi, E., Zaem, M.A. A Review of Quantitative Phase-Field Crystal Modeling of Solid–Liquid Structures // JOM, Vol. 67, No. 1, 2015. https://doi.org/10.1007/s11837-014-1232-4

[Boettinger2002] Boettinger, W.J., Warren, J.A., Beckermann, C., Karma, A. Phase field simulation of solidification // Annu. Rev. Mater. Res. 2002. 32:163–194. https://doi.org/10.1146/annurev.matsci.32.101901.155803

[Cai2017a] Cai, Z., Wang, X., Luo, B., Hong, W., Wu, L., Li, L. Nanocomposites with enhanced dielectric permittivity and breakdown strength by microstructure design of nanofillers // Composites Science and Technology. 151 (2017). pp. 109-114. https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2017.08.015

[Cai2017b] Cai, Z., Wang, X., Luo, B., Li, L. Hierarchical-structured dielectric permittivity and breakdown performances of polymer-ceramic nanocomposites // Ceramics International, vol. 44, iss. 1, 2018, pp. 843-848. https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2017.10.008

[Cai2019a] Cai, Z., Wang, X., Li, L., Hong, W. Electrical treeing: A phase-field model // Extreme Mechanics Letters. 28 (2019) pp. 87–95. https://doi.org/10.1016/j.eml.2019.02.006

[Cai2019b] Cai, Z., Wang, X., Luo, L., Zhao, P., Zhu, C., Li, L. Laminated structure-induced high dielectric strength and energy storage density in dielectric composites // Composites Science and Technology 173 (2019) pp. 61–65. https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2019.01.029

[Cai2019c] Cai, Z., Wang, H., Zhao, P., Chen, L., Zhu, C., Hui, K., Li, L., Wang, X. Significantly enhanced dielectric breakdown strength and energy density of multilayer ceramic capacitors with high efficiency by electrodes structure design // Appl. Phys. Lett. 115, 023901 (2019) https://doi.org/10.1063/1.5110527

[Cartalade2013] Cartalade, A., Younsi, A., Régnier, R., Schuller, S. Simulations of Phase-field Models for Crystal Growth and Phase Separation // Procedia Materials Science, vol. 7, 2014, pp. 72-78. https://doi.org/10.1016/j.mspro.2014.10.010

[Coleman1963] Coleman, Bernard D. and Noll, Walter The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity // Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1963, No. 1, pp. 167-178, vol. 13. https://doi.org/10.1007/BF01262690

[Degond1992] Degond, P., Raviart, P.-A. An analysis of the Darwin model of approximation to Maxwel's equations // Forum Mathematicum, 4 (1992), pp. 13-44. https://doi.org/10.1515/form.1992.4.13

[Emmerich2012] Emmerich, H., Löwen, H., Wittkowski, R., Gruhn, T., Tòth, G.I., Tegze, G., Gránásy, L. Phase-field-crystal models for condensed matter dynamics on atomic length and diffusive time scales: an overview // Advances in Physics, Vol. 61, No. 6, pp. 665–743. 2012. https://doi.org/10.1080/00018732.2012.737555

[Espath2017] Espath, L.F.R., Sarmiento, A.F., Dalcin, L., Calo, V.M. On the thermodynamics of the Swift–Hohenberg theory // Continuum Mechanics and Thermodynamics, vol. 29, pp. 1335–1345 (2017). https://doi.org/10.1007/s00161-017-0581-y

[Espath2020] Espath, L., Calo, V. Phase-field gradient theory // arXiv:1912.06391v2 [math-ph]. 2020.

[Fried1993] Fried, E., Gurtin, M.E. Continuum theory of thermally induced phase transitions based on an order parameter // Physica D 68 (1993) 326-343. https://doi.org/10.1016/0167-2789(93)90128-N

[Gomez2019] Gomez, H., Bures, M., Moure, A. A review on computational modelling of phase-transition problems // Philos. Trans. A. Math. Phys. Eng. Sci. 2019; 377(2143):20180203. https://doi.org/10.1098/rsta.2018.0203

[Granasy2014] Gránásy, L., Rátkai, L., Szállás,A., Korbuly, B., Tóth, G.I., Környei, L., Pusztai, T. Phase-Field Modeling of Polycrystalline Solidification: From Needle Crystals to Spherulites — A Review // Metallurgical and Materials Transactions A, vol. 45, pp. 1694–1719 (2014). https://doi.org/10.1007/s11661-013-1988-0

[Gurtin1994] Gurtin, M.E. Generalized Ginzburg-Landau And Cahn-Hilliard Equations Based On A Microforce Balance // U.S. Army Research Office, Research Report No. 94-NA-020, June 1994. https://doi.org/10.1016/0167-2789(95)00173-5

[Gurtin1995] Gurtin, M.E., Polignone, D., Vinals, J. Two-phase binary fluids and immiscible fluids described by an order parameter // Carnegie Mellon University, Report 95-NA-001, 1995.

[Gurtin1996] Gurtin, M.E. Generalized Ginzburg-Landau and Cahn-Hilliard equations based on a microforce balance // Phisica D: Nonlinear Phenomena, 1996, No. 3-4, pp. 178-192, vol. 92. https://doi.org/10.1016/0167-2789(95)00173-5

[Gurtin2010] Gurtin, M.E., Fried, E., Anand, L. The mechanics and thermodynamics of continua. Cambridge University Press. 2010.

[Helrich2009] Helrich, C.S. Modern Thermodynamics with Statistical Mechanics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009, ISBN: 3540854177,

[Hong2019] Hong, W., Pitike, K.C. Modeling breakdown-resistant composite dielectrics // Procedia IUTAM 12 (2015), pp. 73–82. https://doi.org/10.1016/j.piutam.2014.12.009

[Kim2012] Kim, J. Phase-Field Models for Multi-Component Fluid Flows // Communications in Computational Physics, vol. 12, Iss. 3, 2012 , pp. 613-661. https://doi.org/10.4208/cicp.301110.040811a

[Kruger2019] Kruger, S.E. The Three Quasi-Static Limits of the Maxwell Equations // arXiv:1909.11264v2 [physics.class-ph] 2 Oct 2019.

[Lamorgese2011] Lamorgese, A.G., Molin, D., Mauri, R. Phase Field Approach to Multiphase Flow Modeling // Milan Journal of Mathematics, vol. 79, pp. 597–642 (2011). https://doi.org/10.1007/s00032-011-0171-6

[Larsson2007] Larsson, J. Electromagnetics from a quasistatic perspective // Am. J. Phys. 75(3), March 2007. https://doi.org/10.1119/1.2397095

[LeBellac1973] Le Bellac, M., Lévy-Leblond Galilean Electromagnetism // Il Nuovo Cimento, vol. 14B, N.2, 1973. pp. 217–234. https://doi.org/10.1007/BF02895715

[Pitike2014] Pitike, K.C., Hong, W. Phase-field model for dielectric breakdown in solids // Journal of Applied Physics 115, 044101 (2014) https://doi.org/10.1063/1.4862929

[Rapetti2014] Rapetti, F., Rousseaux, G. On quasi-static models hidden in Maxwell's equations // Applied Numerical Mathematics 79 (2014) 92–106. https://doi.org/10.1016/j.apnum.2012.11.007

[Raviart1995] Raviart, P.-A., Sonnendrücker, E. Approximate models for the Maxwell equations // Journal of Computational and Applied Mathematics 63 (1995) 69-81. https://doi.org/10.1016/0377-0427(95)00058-5

[Raviart1996] Raviart, P.-A., Sonnendrücker, E. A hierarchy of approximate models for the Maxwell equations // Numer. Math. 73: pp. 329–372 (1996). https://doi.org/10.1007/s002110050196

[Rosensweig1989] Rosensweig, R.E. Thermodynamics of electromagnetism // Chap. 13 in: Astarita, G. Thermodynamics. An Advanced Textbook for Chemical Engineers. Springer, Boston, MA. 1989. https://doi.org/10.1007/978-1-4899-0771-4_14

[Rousseaux2013] Rousseaux, G. Forty years of Galilean Electromagnetism (1973–2013) // Eur. Phys. J. Plus (2013) 128: 81. https://doi.org/10.1140/epjp/i2013-13081-5

[Santra2020] Santra, S., Mandal, S., Chakraborty, S. Phase-field modeling of multicomponent and multiphase flows in microfluidic systems: a review // International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow, 2020. https://doi.org/10.1108/HFF-01-2020-0001

[Sargado2018] Sargado, J.M., Keilegavlen, E., Berre, I., Nordbotten, J.M. High-accuracy phase-field models for brittle fracture based on a new family of degradation functions // Journal of the Mechanics and Physics of Solids 111 (2018) 458–489. https://doi.org/10.1016/j.jmps.2017.10.015

[vanRienen2003] van Rienen, U., Flehr, J., Schreiber, U., Motrescu, V. Modeling and Simulation of Electro-Quasistatic Fields // International Series of

Numerical Mathematics, Vol. 146, 17-31, 2003. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8065-7_2

[Xu2009] Xu, Z., Meakin, P., Tartakovsky, A. Diffuse-interface model for smoothed particle hydrodynamics // Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics. 79. 036702. 2009. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.79.036702

[Zipunova2020] Zipunova, E., Savenkov, E. On the diffuse interface models for high codimension dispersed inclusions // arXiv:2101.04484v1 [physics.geo-ph]. 2020.

Содержание