ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 14 за 2021 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

М.Б. Гавриков

Вариационный принцип для локальных полей

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Гавриков М.Б. Вариационный принцип для локальных полей // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. № 14. 39 с.
https://doi.org/10.20948/prepr-2021-14
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-14

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

М.Б. Гавриков

Вариационный принцип для локальных полей

Москва — 2021

Гавриков М.Б.

Вариационный принцип для локальных полей

Рассмотрены простейшие вариационные задачи (со свободными, закреплёнными концами, задача Больца) в банаховых пространствах. Выведены необходимые условия локального экстремума в этих задачах. Рассмотрен важный класс лагранжевых механических систем – локальные нагруженные поля, для которых лагранжиан имеет вид интегрального функционала. Получены необходимые условия для функционала действия – уравнения Эйлера-Остроградского и условия трансверсальности. Из вариационного принципа для локальных полей выведены уравнения теории упругости и электродинамики Максвелла.

Ключевые слова: лагранжиан, действие, локальное нагруженное поле, вариационная задача, локальный экстремум.

Mikhail Borisovich Gavrikov

Variational principle for local fields

The simplest variational problems (with free, fixed boundaries, the Bolz problem) in Banach spaces are considered. Necessary conditions for a local extremum in these problems are derived. An important class of Lagrangian mechanical systems is considered – local loaded fields, for which the Lagrangian has the form of an integral functional. Necessary conditions for the action functional – the Euler-Ostrogradsky equations and transversality conditions – are obtained. The equations of the theory of elasticity and Maxwell electrodynamics are derived from the variational principle for local fields.

Key words: lagrangian, action, local loaded field, variational problem, local extremum.

Оглавление

Введение 3
§1. Элементы вариационного исчисления в банаховых пространствах 6
§2. Простейшие многомерные вариационные задачи 17
§3. Вариационное исчисление для локальных полей 24
§4. Основные уравнения теории упругости и электродинамики Максвелла 34
Список литературы 39

Введение

Простейшая задача вариационного исчисления состоит в поиске точек локального экстремума, locextr, интегрального функционала, обычно называемого *действием*:

$$S(f)=\int_a^b L(t,\,f(t),\,f'(t))dt \to \text{locextr},\qquad f(a)=f_0,\quad f(a)=f_1. \tag{1°}$$

Задача (1°) называется задачей с закреплёнными концами. При этом подынтегральная функция L называется *лагранжианом*, а значения функции $f(t)$, $a\le t\le b$ принадлежат некоторому нормированному пространству. В задачах классической механики указанное нормированное пространство конечномерное, его точки полностью задают состояние механической системы в каждый момент времени, а лагранжиан L вычисляется как разность между кинетической и потенциальной энергиями механической системы. Один из постулатов современной механики (*принцип наименьшего действия*) гласит, что между двумя состояниями f_0 и f_1 механическая система эволюционирует так, что действительное движение системы доставляет минимум (или, более обще, локальный экстремум) функционалу $S(f)$ в задаче (1°).

Оказывается, сформулированный постулат справедлив и для эволюции механических систем, значительно более сложных, чем те, с которыми имеет дело классическая механика и которые имеют конечное число степеней свободы. Это относится, например, к динамике упругой среды, электромагнитного поля, идеального газа, плазмы и пр. В перечисленных и многих других случаях механическая система имеет бесконечное число степеней свободы, а нормированное пространство состояний $f(t)$ механической системы является бесконечномерным и банаховым (≡ любая фундаментальная последовательность точек пространства сходится). В указанных случаях постановка вариационной задачи требует переноса понятий и результатов классического вариационного исчисления в ситуации, когда значения $f(t)$ принадлежат бесконечномерному банахову пространству, что, как показывают проведённые в §1 рассмотрения, возможно сделать в общем виде, не конкретизируя банахово пространство состояний механической системы, и основные результаты классического вариационного исчисления (леммы Дюбуа-Реймона и Лагранжа, уравнение Эйлера, условия трансверсальности, задача Больца и пр.) сохраняют свою справедливость.

В §2 рассмотрено обобщение задачи (1°) на случай, когда область определения функции $f(t)$ – отрезок $[a,b]$ – заменяется на многомерную область $D\subseteq\mathbb{R}^n$, $n>1$ с кусочно-гладкой границей. Правда, мы ограничились

известным случаем, когда значения $f(x)$, $x \in D$ лежат в конечномерном пространстве, а лагранжиан L зависит от f и её производных только первого порядка. Тем самым §2 носит справочный характер, это, по сути, сводка известных результатов. Представляет значительный интерес обобщение результатов §2 на случай, когда $f(x)$ принимает значения в бесконечномерном банаховом пространстве, а лагранжиан L зависит от частных производных f порядка $\le k$ для $k > 1$. Особенно интересен случай $k = 2$, который необходим для ряда физических задач, например, при выводе из вариационных принципов уравнений равновесия тонкой пластинки [1] или уравнений гравитационного поля (уравнений Эйнштейна) [2].

В §3 изложен центральный результат работы – необходимые условия loxextr в задаче (1°) в случае, когда банахово пространство состояний механической системы реализуется как $C_m^k(\bar{D})$ – пространство m-значных вещественных функций, k раз непрерывно дифференцируемых в области $D \subseteq \mathbb{R}^n$, все производные которых до k-го порядка включительно непрерывно продолжаются на границу ∂D области D, а лагранжиан L имеет специальный вид:

$$L(t,\varphi,\psi) = \int_D \mathscr{L}(t,x,\varphi(x),\psi(x),\nabla\varphi(x))dx + \int_{\partial D} \mathscr{M}(t,x,\varphi(x),\psi(x))d\sigma, \quad \varphi,\psi \in C_m^1(\bar{D}), \qquad (2^\circ)$$

$$\varphi = (\varphi^1,\ldots,\varphi^m), \quad \psi = (\psi^1,\ldots,\psi^m), \quad \nabla\varphi = \left[\frac{\partial\varphi^i}{\partial x_j}\right] - \text{матрица Якоби } \varphi,$$

где $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, $d\sigma$ – элемент риманова объёма на границе ∂D, $\mathscr{L} : \mathbb{R} \times \bar{D} \times \mathbb{R}^{m(n+2)} \to \mathbb{R}$, $\mathscr{M} : \mathbb{R} \times \partial D \times \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}$ – непрерывные функции, называемые *плотностями* лагранжиана L, а $\bar{D}$ – замыкание области D. Механическая система с лагранжианом вида (2°) называется *локальным нагруженным полем*. При $\mathscr{M} = 0$ поле называется *локальным*. Такие лагранжианы часто встречаются в физических задачах и представляют значительный интерес. Два конкретных примера локальных полей подробно рассмотрены в §4. Любая функция $f(t) \in C_m^1(\bar{D})$ может рассматриваться как функция $\Phi(t,x) \underset{\text{def}}{=} f(t)(x)$. Основной результат, доказанный в §3, состоит в следующем.

Если плотности лагранжиана $\mathscr{L}$ и $\mathscr{M}$ достаточно гладкие функции и достаточно гладкая $\hat{f}(t)$ доставляет locextr в вариационной задаче (1°) с лагранжианом вида (2°), то векторная функция $\hat{\Phi}(t,x) = \hat{f}(t)(x)$, $t \in [a,b]$, $x \in D$ удовлетворяет в области $[a,b] \times D$ системе уравнений *Эйлера-Остроградского*

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \hat{\mathscr{L}}}{\partial v^i}\right)+\frac{\partial \hat{\mathscr{L}}}{\partial u^i}-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \hat{\mathscr{L}}}{\partial w^i_j}\right)=0,\quad 1\le i\le m,\quad x\in D,\quad t\in[a,b],\qquad (3^\circ)$$

а предельные значения функции $\hat{\Phi}$ на границе ∂D удовлетворяют *условиям трансверсальности*

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \hat{\mathscr{M}}}{\partial v^i}\right)+\frac{\partial \hat{\mathscr{M}}}{\partial u^i}+\frac{\partial \hat{\mathscr{L}}}{\partial w^i_j}\ell^j=0,\quad 1\le i\le m,\quad x\in\partial D,\quad t\in[a,b],\qquad (4^\circ)$$

где $\vec{\ell}=(\ell^1,\ldots,\ell^n)$ – внешняя единичная нормаль к D в точках ∂D и по повторяющимся индексам в (3°) и (4°) предполагается суммирование.

Выше приняты обозначения $\mathscr{L}=\mathscr{L}(t,x,u^1,\ldots,u^m,v^1,\ldots,v^m,[w^i_j]_{1\le i\le m,1\le j\le n})$, $\mathscr{M}=\mathscr{M}(t,x,u^1,\ldots,u^m,v^1,\ldots,v^m)$, таким образом, $u^i=\varphi^i(x)$, $v^i=\psi^i(x)$, $w^i_j=\dfrac{\partial\varphi^i}{\partial x_j}(x)$, $1\le i\le m$, $1\le j\le n$. В формулах (3°), (4°) домик над $\mathscr{L}$ и $\mathscr{M}$ показывает на то, что частные производные функции $\mathscr{L}$ вычисляются на векторе $\left(t,x,\hat{\Phi}(t,x),\dfrac{\partial\hat{\Phi}}{\partial t}(t,x),\nabla_x\hat{\Phi}(t,x)\right)$, $t\in[a,b]$, $x\in D$, а частные производные $\mathscr{M}$ – на векторе $\left(t,x,\hat{\Phi}(t,x),\dfrac{\partial\hat{\Phi}}{\partial t}(t,x)\right)$, $t\in[a,b]$, $x\in\partial D$, где $\nabla_x\hat{\Phi}(t,x)=\left[\dfrac{\partial\hat{\Phi}^i}{\partial x_j}(t,x)\right]$ – матрица Якоби. Таким образом, уравнения Эйлера-Остроградского (3°) образуют систему m-нелинейных уравнений в частных производных второго порядка относительно m неизвестных функций $\hat{\Phi}^1(t,x),\ldots,\hat{\Phi}^m(t,x)$, из которых эти функции, с учётом граничных условий трансверсальности (4°), в принципе, могут быть найдены.

Основной результат §3 относится, вероятно, к математическому фольклору. С одной стороны, он используется в ряде работ, а с другой, – автору не удалось найти его доказательство в доступной научной литературе, включая известные руководства по вариационному исчислению. Это объясняется, скорее всего, тем, что работы по вариационному исчислению в бесконечномерных банаховых пространствах написаны, как правило, на физическом уровне строгости. Учитывая сказанное, в §3 дан строгий вывод уравнений Эйлера-Остроградского (3°) и условий трансверсальности (4°) для вариационной задачи (1°), (2°). При этом предполагаются известными некоторые конструкции дифференциального и интегрального исчисления в банаховых пространствах, изложенные в ряде монографий [3, 4, 5].

§1. Элементы вариационного исчисления в банаховых пространствах

Пусть E – банахово пространство, $a<b$ – вещественные числа. Определим следующие функциональные пространства:

$$C_E = C_E[a,b] \underset{\text{def}}{=} \{\varphi : [a,b] \to E \mid \varphi \textit{ непрерывна на } [a,b]\}.$$

$$C_E^1 = C_E^1[a,b] \underset{\text{def}}{=} \{\varphi \in C[a,b] \mid \varphi \textit{ непрерывно дифференцируема на } [a,b]\}.$$

Для $\varphi \in C_E[a,b]$, $\psi \in C_E^1[a,b]$ положим

$$\|\varphi\|_\infty \underset{\text{def}}{=} \sup_{a\le t\le b} \|\varphi(t)\|, \quad \|\psi\| \underset{\text{def}}{=} \max\left\{\|\psi\|_\infty, \|\psi'\|_\infty\right\}.$$

Относительно поточечных операций сложения функций и умножения их на вещественные скаляры C_E и C_E^1 являются вещественными векторными пространствами, а $\|\cdot\|_\infty$ и $\|\cdot\|$ удовлетворяют аксиомам нормы. Очевидно, $C_E^1 \subseteq C_E$ подпространство (незамкнутое по норме $\|\cdot\|_\infty$), поэтому в C_E^1 можно рассматривать и норму $\|\cdot\|_\infty$, при этом $\|\varphi\|_\infty \le \|\varphi\|$ для любого $\varphi \in C_E^1$.

Теорема 1 [3]**.** $\left(C_E, \|\cdot\|_\infty\right)$, $\left(C_E^1, \|\cdot\|\right)$ – *банаховы пространства*.

#

Пусть E, G – банаховы пространства, $U \subseteq \mathbb{R}\times E\times E$ – открытое подмножество, $F = F(t,x,y) : U \to G$ – непрерывное отображение. Допустим, для $\varphi \in C_E^1[a,b]$ при каждом $t \in [a,b]$ имеем $(t, \varphi(t), \varphi'(t)) \in U$. Тогда определено отображение $F(t,\varphi(t),\varphi'(t)) : [a,b] \to G$, являющееся непрерывным как суперпозиция непрерывных отображений, и, значит, определён интеграл

$$I(\varphi) \underset{\text{def}}{=} \int_a^b F(t,\varphi(t),\varphi'(t))dt. \qquad (1)$$

Пусть

$$\Omega \underset{\text{def}}{=} \{\varphi \in C_E^1[a,b] \mid (t,\varphi(t),\varphi'(t)) \in U \textit{ для любого } t \in [a,b]\}.$$

Теорема 2. 1) $\Omega \subseteq C_E^1[a,b]$ – *открытое подмножество, а* $I : \Omega \to G$ – *непрерывное отображение.*

2) *Если дополнительно* (*помимо непрерывности* F *на* U) *в каждой точке* U *существуют частные производные* $\partial F/\partial x, \partial F/\partial y \in \mathscr{L}(E,G)$, *непрерывные на* U, *то отображение* $I : \Omega \to G$ *непрерывно дифференцируемо в* Ω *и*

$$I'(\varphi)(u)=\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial x}(t,\varphi(t),\varphi'(t))u(t)+\frac{\partial F}{\partial y}(t,\varphi(t),\varphi'(t))u'(t)\right]dt,\ \varphi\in\Omega,u\in C_E^1[a,b]. \quad (2)$$

Доказательство **Теоремы 2** опирается на две леммы.

Лемма 1. *Пусть* E, G *– банаховы пространства,* $U\subseteq E$ *– открытое подмножество,* $\Phi:[a,b]\times U\to G$ *– непрерывное отображение. Тогда для любых* $x_0\in U$, $\varepsilon>0$ *найдётся* $\delta>0$, *для которого справедлива импликация*

$$x\in E,\|x-x_0\|<\delta\Rightarrow x\in U \text{ и } \|\Phi(t,x)-\Phi(t,x_0)\|<\varepsilon \text{ для любого } t\in[a,b].$$

Лемма 2. *Пусть* E, G *– банаховы пространства,* $U\subseteq[a,b]\times E$ *– открытое подмножество,* $\Phi:U\to G$ *– непрерывное отображение. Тогда*:
1) $\Omega\underset{\text{def}}{=}\{\varphi\in C_E[a,b]\,|\,(t,\varphi(t))\in U \text{ для всех } t\in[a,b]\}$ *– открыто в* $C_E[a,b]$;
2) *для любых* $\varphi_0\in\Omega$, $\varepsilon>0$ *найдётся* $\delta>0$, *для которого верна импликация*

$$\varphi\in C_E[a,b],\|\varphi-\varphi_0\|_\infty<\delta\Rightarrow\varphi\in\Omega \text{ и } \|\Phi(t,\varphi(t))-\Phi(t,\varphi_0(t))\|<\varepsilon \text{ для всех } t\in[a,b].$$

Пусть, как и выше, $U\subseteq\mathbb{R}\times E\times E$ – открытое подмножество, $L=L(t,x,y):U\to G$, $\ell=\ell(u,v):E\times E\to G$ – непрерывные отображения. Рассмотрим отображение $I:\Omega\to G$ более общего вида, называемое *функционалом Больца*

$$I(\varphi)\underset{\text{def}}{=}\int_a^b L(t,\varphi(t),\varphi'(t))dt+\ell(\varphi(a),\varphi(b)),\quad \varphi\in\Omega,\quad I(\varphi)\in G. \quad (3)$$

Применяя формулу полного дифференциала и правило дифференцирования сложной функции, из **Теоремы 2** выводим следующие утверждения.

Теорема 2'. 1) $\Omega\subseteq C_E^1[a,b]$ *– открытое подмножество и* $I(\varphi):\Omega\to G$ *– непрерывное отображение.*
2) *Если* L *непрерывно в* U *и в* U *существуют частные производные* $\partial L/\partial x,\partial L/\partial y\in\mathscr{L}(E,G)$, *непрерывные в* U, *а* ℓ *непрерывно дифференцируемо в своей области определения, то* $I(\varphi)$ *непрерывно дифференцируемо всюду в* Ω *и*

$$I'(\varphi)(h)=\int_a^b\left[\frac{\partial L}{\partial x}(t,\varphi(t),\varphi'(t))h(t)+\frac{\partial L}{\partial y}(t,\varphi(t),\varphi'(t))h'(t)\right]dt+$$
$$+\frac{\partial\ell}{\partial u}(\varphi(a),\varphi(b))h(a)+\frac{\partial\ell}{\partial v}(\varphi(a),\varphi(b))h(b), \quad (4)$$
$$\varphi\in\Omega,\quad h\in C_E^1[a,b],\quad I'(\varphi)\in\mathscr{L}(C_E^1,G),\quad \frac{\partial\ell}{\partial u},\frac{\partial\ell}{\partial v}\in\mathscr{L}(E,G).$$

#

При постановке вариационных задач приходиться считать $G=\mathbb{R}$, и тогда $\mathscr{L}(E,G)=E^*$ – сопряжённое пространство. Пусть $M\subseteq C^1_E$ – фиксированное множество. Ниже либо $M=C^1_E$, либо M – замкнутое бесконечномерное линейное многообразие конечной коразмерности.

Определение 1. $\hat\varphi\in\Omega\cap M$ называется точкой *локального минимума*, *locmin* (*максимума*, *locmax*) функционала $I:\Omega\cap M\to\mathbb{R}$, если найдётся $\delta>0$, для которого из $\varphi\in M$, $\|\varphi-\hat\varphi\|<\delta$ следует $\varphi\in\Omega$ и $I(\varphi)\ge I(\hat\varphi)$ ($I(\varphi)\le I(\hat\varphi)$). Если в последнем неравенстве равенство достигается только для $\varphi=\hat\varphi$, то $\hat\varphi$ называется *точкой строго локального минимума* (*максимума*). Наконец, $\hat\varphi$ называется *точкой* (*строго*) *локального экстремума*, *locextr* функционала $I:\Omega\cap M\to\mathbb{R}$, если она является либо точкой (строгого) локального минимума I, либо точкой (строгого) локального максимума.

Очевидно, это определение не переносится на случай произвольного банахова пространства G, поскольку в банаховом пространстве отсутствует отношение линейного порядка.

Основная задача вариационного исчисления – найти все точки locextr функционала $I(\varphi)$. Ограничимся двумя задачами, считая, что L и ℓ удовлетворяют условиям **Теоремы 2'**.

Задача 1 (задача с закреплёнными концами).

$$I(\varphi)=\int_a^b L(t,\varphi(t),\varphi'(t))dt\to\text{locextr},\quad \varphi\in C^1_E[a,b],\quad \varphi(a)=x_0,\quad \varphi(b)=x_1,$$

где $x_0,x_1\in E$ заданы. В этом случае $M=M(x_0,x_1)\underset{\text{def}}{=}\{\varphi\in C^1_E[a,b]\,|\,\varphi(a)=x_0,\varphi(b)=x_1\}$ и M является линейным многообразием, т.е. для любого $\varphi\in M$ имеем $M=\varphi+M_0$, где $M_0=M(0,0)$ – замкнутое линейное подпространство C^1_E коразмерности 2. В частности, M – замкнутое подмножество C^1_E.

Задача 2 (задача Больца).

$$I(\varphi)=\int_a^b L(t,\varphi(t),\varphi'(t))dt+\ell(\varphi(a),\varphi(b))\to\text{locextr},\quad \varphi\in C^1_E[a,b].$$

В этом случае $M=C^1_E$.

Ниже для сокращения записи используются обозначения

$$\hat L(t)=L(t,\hat\varphi(t),\hat\varphi'(t)),\quad \frac{\partial\hat L}{\partial x}(t)=\frac{\partial L}{\partial x}(t,\hat\varphi(t),\hat\varphi'(t)),\quad \frac{\partial\hat\ell}{\partial u}=\frac{\partial\ell}{\partial u}(\hat\varphi(a),\hat\varphi(b))\text{ и т.д.}$$

Основной результат содержится в следующей теореме.

Теорема 3. 1) *Если* $\hat{\varphi}$ *– locextr в* ***Задаче*** **1**, *то для* $\hat{\varphi}$ *выполнены условия*

i) $\dfrac{\partial \hat{L}}{\partial y}(t) \in C^1_{E^*}[a,b]$ (*условие гладкости*);

ii) *всюду на* $[a,b]$ *выполнено равенство*

$$-\frac{d}{dt}\frac{\partial \hat{L}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{L}}{\partial x} \equiv 0 \text{ (}\textit{уравнение Эйлера}\text{)};$$

(iii) $\hat{\varphi}(a) = x_0$, $\hat{\varphi}(b) = x_1$.

2) *Если* $\hat{\varphi}$ *– locextr в* ***Задаче*** **2**, *то для* $\hat{\varphi}$ *выполнены условия* i) *и* ii) *и следующие равенства*

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial y}(b) = -\frac{\partial \hat{\ell}}{\partial v}, \quad \frac{\partial \hat{L}}{\partial y}(a) = \frac{\partial \hat{\ell}}{\partial u} \quad (\textit{условие трансверсальности}).$$

Доказательство **Теоремы 3** опирается на следующее утверждение, являющееся обобщением на случай банаховых пространств известных из классического вариационного исчисления лемм Дюбуа-Реймона и Лагранжа [3, 4].

Лемма 3. 1) *Пусть* $D(t):[a,b] \to \mathscr{L}(E,G)$ *непрерывное, причём для любого* $v \in C_E[a,b]$ *справедлива импликация*:

$$\int_a^b v(t)dt = 0 \Rightarrow \int_a^b D(t)v(t) = 0.$$

Тогда $D(t) \equiv \text{const}$ *и обратно*.

2) *Пусть* $A(t), B(t):[a,b] \to \mathscr{L}(E,G)$ *непрерывные и для любого* $u \in C^1_E[a,b]$, *для которого* $u(a) = u(b) = 0$, *справедливо равенство*

$$\int_a^b [A(t)u(t) + B(t)u'(t)]dt = 0.$$

Тогда $B(t) \in C^1_{\mathscr{L}(E,G)}$ *и для любого* $t \in [a,b]$ *имеем* $B'(t) = A(t)$.

Доказательство Теоремы 3. 1) Пусть $\hat{\varphi}$ – locextr в **Задаче 1**. Согласно **Определению 1**, найдётся $\delta > 0$, для которого при любом $h \in M_0$ из $\|h\| < \delta$ следует $\hat{\varphi} + h \in \Omega$ и неравенство $I(\hat{\varphi} + h) \geq I(\hat{\varphi})$ в случае, когда $\hat{\varphi}$ – locmin, или неравенство $I(\hat{\varphi} + h) \leq I(\hat{\varphi})$ в случае, когда $\hat{\varphi}$ – locmax, где $I(\varphi)$ – функционал из **Задачи 1**. Отсюда вытекает, что для любой $h \in C^1_E$, $h(a) = h(b) = 0$ для всех достаточно малых по модулю α векторы $\hat{\varphi} + \alpha h$ лежат в Ω и значение $\alpha = 0$ является точкой locextr вещественной функции $f(\alpha) = I(\hat{\varphi} + \alpha h)$. Поэтому

первая вариация Лагранжа функции $\hat{\varphi}$ по направлению h, если она существует, равна нулю:

$$\delta I(\hat{\varphi};h)=\frac{d}{d\alpha}I(\hat{\varphi}+\alpha h)\Big|_{\alpha=0}=\frac{df(\alpha)}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0}=0,\quad h\in M_0$$

для любого $h\in M_0$. Согласно **Теореме 2'**, $I(\varphi)$ дифференцируема в точке $\hat{\varphi}$, поэтому для любого $h\in C_E^1$ первая вариация по Лагранжу функции $\hat{\varphi}$ по направлению h существует и имеет место равенство

$$\delta I(\hat{\varphi};h)=I'(\hat{\varphi})h,\quad h\in C_E^1.$$

В частности, из формулы (4), где надо положить $\ell=0$, следует, что для любого $h\in C_E^1$, $h(a)=h(b)=0$ имеет место тождество

$$0=I'(\varphi)h=\int_a^b\left[\frac{\partial\hat{L}}{\partial x}(t)h(t)+\frac{\partial\hat{L}}{\partial y}(t)h'(t)\right]dt.$$

Теперь из **Леммы 3.2)** следует, что $\frac{\partial\hat{L}}{\partial y}(t)\in C_{E^*}^1$ и $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\hat{L}}{\partial y}\right)\equiv\frac{\partial\hat{L}}{\partial x}$ всюду на $[a,b]$, т.е. условия i) и ii) выполнены. Условие iii) очевидно выполнено. Утверждение 1) доказано.

2) Пусть $\hat{\varphi}$ – locextr в **Задаче 2** и $h\in C_E^1$. Рассуждая как при доказательстве утверждения 1), заключаем, что $I'(\varphi)h=0$ для любого $h\in C_E^1$, где $I(\varphi)$ – функционал из **Задачи 2**. Значит, из формулы (4) следует, что для любого $h\in C_E^1$ справедливо равенство

$$\int_a^b\left[\frac{\partial\hat{L}}{\partial x}(t)h(t)+\frac{\partial\hat{L}}{\partial y}(t)h'(t)\right]dt+\frac{\partial\hat{\ell}}{\partial u}h(a)+\frac{\partial\hat{\ell}}{\partial v}h(b)=I'(\hat{\varphi})h=0.$$

В частности, последнее равенство верно для всех $h\in M_0$, т.е. таких $h\in C_E^1$, для которых $h(a)=h(b)=0$. Для указанных h имеем

$$\int_a^b\left[\frac{\partial\hat{L}}{\partial x}(t)h(t)+\frac{\partial\hat{L}}{\partial y}(t)h'(t)\right]dt\equiv 0,\quad h\in M_0.$$

Теперь из **Леммы 3.2** выводим, что $\frac{\partial\hat{L}}{\partial y}(t)\in C_{E^*}^1$ (условие гладкости) и равенство $\frac{d}{dt}\frac{\partial\hat{L}}{\partial y}=\frac{\partial\hat{L}}{\partial x}$ всюду на $[a,b]$ (уравнение Эйлера). Учитывая уже доказанную

справедливость уравнения Эйлера и установленное условие гладкости, согласно формуле (4), для любого $h \in C_E^1$ имеем

$$0 = \int_a^b \left[\frac{\partial \hat{L}}{\partial x}(t)h(t) + \frac{\partial \hat{L}}{\partial y}(t)h'(t) \right] dt + \frac{\partial \hat{\ell}}{\partial u}h(a) + \frac{\partial \hat{\ell}}{\partial v}h(b) =$$

$$= \int_a^b \left[\left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial y} \right)' h(t) + \frac{\partial \hat{L}}{\partial y}h'(t) \right] dt + \frac{\partial \hat{\ell}}{\partial u}h(a) + \frac{\partial \hat{\ell}}{\partial v}h(b) = \int_a^b \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial y}h \right)' dt + \frac{\partial \hat{\ell}}{\partial u}h(a) + \frac{\partial \hat{\ell}}{\partial v}h(b) =$$

$$= \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial y}h \right)\Bigg|_a^b + \frac{\partial \hat{\ell}}{\partial u}h(a) + \frac{\partial \hat{\ell}}{\partial v}h(b) = \left[\frac{\partial \hat{L}}{\partial y}(b) + \frac{\partial \hat{\ell}}{\partial v} \right] h(b) + \left[-\frac{\partial \hat{L}}{\partial y}(a) + \frac{\partial \hat{\ell}}{\partial v} \right] h(a).$$

Поскольку в финальном выражении квадратные скобки не зависят от h, а значения $h(a), h(b) \in E$ можно сделать произвольными за счёт выбора $h \in C_E^1$, то из доказанного равенства

$$0 = \left[\frac{\partial \hat{L}}{\partial y}(b) + \frac{\partial \hat{\ell}}{\partial v} \right] h(b) + \left[-\frac{\partial \hat{L}}{\partial y}(a) + \frac{\partial \hat{\ell}}{\partial v} \right] h(a), \quad h \in C_E^1$$

следует равенство нулю квадратных скобок, что даёт условие трансверсальности. Утверждение 2) доказано. Заметим, что в длинной цепочке равенств использовалась формула Ньютона-Лейбница и следующее утверждение: если E, G – банаховы, $A(t) \in \mathscr{L}(E,G)$, $u(t) \in E$ дифференцируемые функции на $[a,b]$, то функция $A(t)u(t) \in G$ тоже дифференцируема на $[a,b]$ и $(A(t)u(t))' = A'(t)u(t) + A(t)u'(t)$. #

Доказательство леммы 3. Сначала докажем импликацию $1) \Rightarrow 2)$.
Пусть верно утверждение 1) **леммы 3**. Положим

$$A_1(t) \underset{\text{def}}{=} \int_a^t A(\tau)d\tau, \quad a \le t \le b.$$

Тогда, очевидно, $A_1(t) \in C^1_{\mathscr{L}(E,G)}[a,b]$ и всюду в $[a,b]$ имеем $A_1'(t) = A(t)$. Теперь для любого $u \in C_E^1$, $u(a) = u(b) = 0$ получим с учётом формулы Ньютона-Лейбница

$$\begin{aligned} &\int_a^b [A(t)u(t) + B(t)u'(t)]dt = \int_a^b [A_1'(t)u(t) + B(t)u'(t)]dt = \\ &= \int_a^b [(A_1(t)u(t))' - A_1(t)u'(t) + B(t)u'(t)]dt = (A_1(t)u(t))\Big|_a^b + \end{aligned} \tag{5}$$

$$+\int_a^b (B(t)-A_1(t))u'(t)dt=\int_a^b [B(t)-A_1(t)]u'(t)dt.$$

Положим $D(t)=B(t)-A_1(t)$, $t\in[a,b]$. Это непрерывная функция со значениями в $\mathscr{L}(E,G)$. По условию леммы с учётом преобразования (5) получим равенство

$$\int_a^b D(t)u'(t)dt=0, \tag{6}$$

справедливое для любой функции $u\in C_E^1$, $u(a)=u(b)=0$. Но тогда для любой $v\in C_E$ с нулевым интегралом по отрезку $[a,b]$ справедливо равенство

$$\int_a^b D(t)v(t)dt=0. \tag{7}$$

Действительно, рассмотрим для указанного $v\in C_E$ функцию $u(t)\underset{\text{def}}{=}\int_a^t v(\tau)d\tau$, $t\in[a,b]$. Тогда $u\in C_E^1$ и $u(a)=0$, $u(b)=0$ (последнее равенство верно, поскольку интеграл от $v(t)$ по отрезку $[a,b]$ равен нулю). Но $v(t)=u'(t)$, $t\in[a,b]$ и, значит, равенство (7) следует из равенства (6). Из справедливости соотношения (7), согласно утверждению 1) леммы, которое предполагается верным, получим $D(t)\equiv\text{const}$. Значит, $B(t)=A_1(t)+\text{const}$, откуда следует, что $B\in C^1_{\mathscr{L}(E,G)}$ и равенство $B'=A_1'=A$ всюду на $[a,b]$, что доказывает утверждение 2).

Докажем утверждение 1) леммы от противного. Допустим, $D(t)\neq\text{const}$ на $[a,b]$. Тогда в силу непрерывности $D(t)$ найдутся $a<t_1<t_2<b$, для которых $D(t_1)\neq D(t_2)$. Это значит, что для некоторого $u_0\in E$, $u_0\neq 0$ имеем $x_1=D(t_1)u_0\neq x_2=D(t_2)u_0$. Зафиксируем указанное u_0, и пусть $0<\varepsilon<\|x-x_0\|\|u_0\|^{-1}/2$. По непрерывности $D(t)$ в точках t_1 и t_2 можно выбрать $\delta>0$, для которого при $|t|<\delta$ справедливы неравенства $\|D(t_1+t)-D(t_1)\|<\varepsilon$, $\|D(t_2+t)-D(t_2)\|<\varepsilon$. Уменьшая, если надо, $\delta>0$, можно считать, что интервалы $(t_1-\delta,t_1+\delta)$, $(t_2-\delta,t_2+\delta)$ лежат в $[a,b]$. Наконец, пусть $\lambda(t)$ – непрерывная вещественная функция, для которой $\lambda(t)>0$ при $|t|<\delta$ и $\lambda(t)\equiv 0$ при $|t|\geq\delta$ (Например, можно положить $\lambda(t)=\max\{0,\delta-|t|\}$). Тогда функция $v(t)=(\lambda(t-t_1)-\lambda(t-t_2))u_0\in C_E$, $a\leq t\leq b$ и интеграл от неё равен нулю по отрезку $[a,b]$:

$$\int_a^b v(t)dt = \int_a^b [\lambda(t-t_1) - \lambda(t-t_2)]dt \cdot u_0 = \left[\int_{t_1-\delta}^{t_1+\delta} \lambda(t-t_1)dt - \int_{t_2-\delta}^{t_2+\delta} \lambda(t-t_2)dt \right] u_0 =$$

$$= \left[\int_{-\delta}^{\delta} \lambda(\tau)d\tau - \int_{-\delta}^{\delta} \lambda(\tau)d\tau \right] u_0 = 0.$$

Убедимся, что тем не менее $\int_a^b D(t)v(t)dt \neq 0$ и тем самым получим противоречие. Преобразуем интеграл

$$\int_a^b D(t)v(t)dt = \int_a^b \lambda(t-t_1)D(t)u_0 dt - \int_a^b \lambda(t-t_2)D(t)u_0 dt =$$

$$= \int_{t_1-\delta}^{t_1+\delta} \lambda(t-t_1)D(t)u_0 dt - \int_{t_2-\delta}^{t_2+\delta} \lambda(t-t_2)D(t)u_0 dt =$$

$$= \int_{-\delta}^{\delta} \lambda(t)D(t+t_1)u_0 dt - \int_{\delta}^{\delta} \lambda(t)D(t+t_2)u_0 dt = \int_{-\delta}^{\delta} \lambda(t)[D(t+t_1) - D(t+t_2)]u_0 dt =$$

$$= \int_{-\delta}^{\delta} \lambda(t)\{[D(t_1+t) - D(t_1)]u_0 - [D(t_2+t) - D(t_2)]u_0 + x_1 - x_2\}dt =$$

$$= \int_{-\delta}^{\delta} \lambda(t)dt \cdot (x_1 - x_2) + \int_{-\delta}^{\delta} \lambda(t)\{[D(t_1+t) - D(t_1)]u_0 - [D(t_2+t) - D(t_2)]u_0\}dt.$$

Применяя несколько раз неравенство треугольника, отсюда выводим оценку:

$$\left\| \int_a^b D(t)v(t)dt \right\| \geq \left\| \int_{-\delta}^{\delta} \lambda(t)dt \cdot (x_1 - x_2) \right\| -$$

$$- \left\| \int_{-\delta}^{\delta} \lambda(t)\{[D(t_1+t) - D(t_1)]u_0 - [D(t_2+t) - D(t_2)]u_0\}dt \right\| \geq$$

$$\geq \int_{-\delta}^{\delta} \lambda(t)dt \cdot \|x_1 - x_2\| - \int_{-\delta}^{\delta} \lambda(t) \|[D(t_1+t) - D(t_1)]u_0 - [D(t_2+t) - D(t_2)]u_0\| dt \geq$$

$$\geq \int_{-\delta}^{\delta} \lambda(t)dt \cdot \|x_1 - x_2\| - \int_{-\delta}^{\delta} \lambda(t) \left(\|D(t_1+t) - D(t_1)\| + \|D(t_2+t) - D(t_2)\| \right) \|u_0\| dt \geq$$

$$\geq \int_{-\delta}^{\delta} \lambda(t)dt \cdot \|x_1 - x_2\| - 2\varepsilon \|u_0\| \int_{-\delta}^{\delta} \lambda(t)dt \geq \int_{-\delta}^{\delta} \lambda(t)dt \cdot \left(\|x_1 - x_2\| - 2\varepsilon \|u_0\| \right) > 0$$

по выбору $\varepsilon > 0$. Значит, $\int_a^b D(t)v(t)dt \neq 0$, что и утверждалось. Обратно, если $D(t) \equiv \text{const} = D$, то

$$\int_a^b D(t)v(t)dt = D\int_a^b v(t)dt = D \cdot 0 = 0.$$

Лемма доказана. #

Из физических соображений нас интересуют прежде всего решения уравнения Эйлера $\hat{\varphi} \in C_E^2[a,b]$, остальные решения имеют в основном академический интерес. Здесь

$$C_E^2 = C_E^2[a,b] \underset{\text{def}}{=} \{\varphi \in C_E^1[a,b] \mid \varphi' \text{ непрерывно дифференцируема на } [a,b]\}.$$

При этом норма в C_E^2 задаётся формулой $\|\varphi\| = \max\{\|\varphi\|_\infty, \|\varphi'\|_\infty, \|\varphi''\|_\infty\}$, где $\varphi'' = (\varphi')'$. При некоторых ограничениях любое решение уравнения Эйлера класса C_E^1 принадлежит к классу C_E^2. Сформулируем эти ограничения.

Определение 2. Билинейное непрерывное отображение $\Pi : E \times E \to \mathbb{R}$, где E – банахово пространство, называется *невырожденным*, если индуцированное отображение $E \to E^*$, $x \in E \mapsto \Pi_x \in E^*$, $\Pi_x(y) \underset{\text{def}}{=} \Pi(x,y)$ (являющееся, очевидно, линейным и непрерывным) суть биекция E на E^*.

Для невырожденных Π, по теореме Банаха об открытом отображении, биекция $x \mapsto \Pi_x$ задаёт изоморфизм банаховых пространств (т.е. обратное отображение, очевидно линейное, тоже непрерывное). Отсюда следует, что если E неизоморфно E^*, то билинейных невырожденных отображений $\Pi : E \times E \to \mathbb{R}$ нет. Поэтому область применимости следующей теоремы достаточно узкая, она приложима, например, для гильбертовых или конечномерных банаховых пространств.

Теорема 4. *Пусть $U \subseteq \mathbb{R} \times E \times E$ – открытое, E – банахово пространство, $L = L(t,x,y) : U \to \mathbb{R}$ – функция, причём*

1) *L непрерывна всюду в U;*

2) *существуют в каждой точке U частные производные $\partial L / \partial x, \partial L / \partial y \in E^*$, непрерывные в U по совокупности переменных;*

3) *$\partial L / \partial y$ непрерывно дифференцируема в U, а $\partial^2 L / \partial y^2 : E \times E \to \mathbb{R}$ невырожденное в каждой точке U.*

Тогда, если $\hat{\varphi} \in \Omega$ – locextr функционала $I(\varphi)$ в задаче Больца или $\hat{\varphi} \in \Omega \cap M(x_0, x_1)$ – locextr функционала $I(\varphi)$ в задаче с закреплёнными концами, то $\hat{\varphi} \in C_E^2[a,b]$.

Замечание. $\partial^2 L/\partial y^2 \in \mathscr{L}(E,E^*) \cong L_2(E;\mathbb{R})$, где справа стоит банахово пространство, состоящее из всех билинейных непрерывных отображений $\Pi: E\times E\to\mathbb{R}$, с нормой $\|\Pi\| = \sup\limits_{\|x\|\le 1,\|y\|\le 1} |\Pi(x,y)|$, а $\cong$ обозначает изометрию банаховых пространств из **Определения 2**, при которой Π отображается в элемент $\mathscr{L}(E,E^*)$, задаваемый формулой $x\mapsto \Pi_x$.

Доказательство Теоремы 4. Рассмотрим отображение

$$F: U\to \mathbb{R}\times E\times E^*,$$
$$(t,x,y)\mapsto \left(t,x,\frac{\partial L}{\partial y}(t,x,y)\right).$$

По условию Теоремы (условие 3)) F непрерывно дифференцируемо в U. Проверим, что для любого $a\in U$ отображение $F'(a): \mathbb{R}\times E\times E\to \mathbb{R}\times E\times E^*$ (очевидно, линейное и непрерывное) является изоморфизмом банаховых пространств. Согласно теореме Банаха об открытом отображении, для этого необходимо и достаточно убедиться в биективности $F'(a)$. Если $(\ell,h_1,h_2)\in\mathbb{R}\times E\times E$, то, по теореме о полном дифференциале, имеем

$$F'(a)(\ell,h_1,h_2) = \left(\ell, h_1, \frac{\partial^2 L}{\partial t\partial y}(a)\ell + \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}(a)h_1 + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(a)h_2\right), \qquad (8)$$

где $\dfrac{\partial^2 L}{\partial t\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial y}\right)$, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial L}{\partial y}\right)$, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial L}{\partial y}\right)$.

Инъективность $F'(a)$: если $F'(a)(\ell,h_1,h_2)=0$, то из формулы (8) следует $\ell=0$, $h_1=0$, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2}(a)h_2=0$, в силу невырожденности $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2}(a)$ отсюда следует $h_2=0$. Значит, $\mathrm{Ker}F'(a)=0$ и $F'(a)$ инъективно.

Эпиморфность $F'(a)$: пусть $(s,h,h^*)\in\mathbb{R}\times E\times E^*$ – произвольный вектор, найдём вектор $(\ell,h_1,h_2)\in\mathbb{R}\times E\times E$, для которого $F'(a)(\ell,h_1,h_2)=(s,h,h^*)$; из формулы (8) следует $\ell=s$, $h_1=h$, а для нахождения h_2 имеем уравнение

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(a)h_2 = h^* - \frac{\partial^2 L}{\partial t\partial y}(a)s - \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}(a)h \in E^*,$$

которое всегда и притом однозначно разрешимо в силу невырожденности $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2}(a)$. Итак, $F'(a)$ эпиморфно.

Поскольку, по доказанному $F'(a)$ – изоморфизм банаховых пространств, то по теореме об обратном отображении для любого $a \in U$ найдутся открытые подмножества $V \subseteq U$, $W \subseteq \mathbb{R} \times E \times E^*$, для которых $a \in V$, $F(a) \in W$, F биективно отображает V на W и обратное отображение непрерывно дифференцируемо. Пусть теперь $\hat{\varphi}$ – locextr в **Задаче 1** или **Задаче 2**. Из **Теоремы 3** следует, что $\dfrac{\partial \hat{L}}{\partial y}(t) \in C^1_{E^*}[a,b]$. Пусть $t_0 \in [a,b]$ – произвольная. Выберем указанные выше открытые множества V и W для точки $a = (t_0, \hat{\varphi}(t_0), \hat{\varphi}'(t_0))$. Тогда $a \in V$, $F(a) \in W$, и по соображениям непрерывности в некоторой открытой окрестности t_0 имеем

$$(t, \hat{\varphi}(t), \hat{\varphi}'(t)) = F^{-1}(F(t, \hat{\varphi}(t), \hat{\varphi}'(t))) = F^{-1}(t, \hat{\varphi}(t), \frac{\partial L}{\partial y}(t)),$$

где $F^{-1} : W \to V$ – обратное отображение к биекции $F : V \to W$. Поскольку F^{-1} непрерывно дифференцируемо, $\dfrac{\partial \hat{L}}{\partial y} \in C^1_{E^*}$, то, по теореме о композиции непрерывно дифференцируемых отображений, заключаем, что функция $t \mapsto (t, \hat{\varphi}(t), \hat{\varphi}'(t))$ непрерывно дифференцируема в открытой окрестности t_0. Значит, в этой окрестности t_0 функция $\hat{\varphi}'(t)$ непрерывно дифференцируема, а $\hat{\varphi}(t)$ дважды непрерывно дифференцируема. Ввиду произвольности точки t_0 приходим к выводу, что $\hat{\varphi} \in C^2_E[a,b]$. Теорема доказана. #

Пусть $\hat{\varphi}$ – locextr в **Задаче 1** или **Задаче 2** и $\hat{\varphi} \in C^2_E[a,b]$. В условиях **Теоремы 4** по правилу дифференцирования сложной функции уравнение Эйлера переписывается в виде

$$\frac{\partial^2 \hat{L}}{\partial t \partial y} + \frac{\partial^2 \hat{L}}{\partial x \partial y}\hat{\varphi}'(t) + \frac{\partial^2 \hat{L}}{\partial y^2}\hat{\varphi}''(t) - \frac{\partial \hat{L}}{\partial x} = 0,$$

где все частные производные $\dfrac{\partial L}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial t \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial x}\right)$, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial L}{\partial y}\right)$, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial L}{\partial y}\right)$ непрерывны по совокупности переменных в U и вычисляются в точке $(t, \hat{\varphi}(t), \hat{\varphi}'(t))$. Поскольку всюду в U отображение $\partial^2 L / \partial y^2 : E \to E^*$ – изоморфизм банаховых пространств, то для любого $t \in [a,b]$ отображение $\dfrac{\partial^2 \hat{L}}{\partial y^2}(t) : E \to E^*$ – тоже изоморфизм и уравнение Эйлера можно разрешить относительно $\hat{\varphi}''$ и записать в виде

$$\hat{\varphi}'' = \left(\frac{\partial^2 \hat{L}}{\partial y^2}\right)^{-1}\left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial x} - \frac{\partial^2 \hat{L}}{\partial t \partial y} - \frac{\partial^2 \hat{L}}{\partial x \partial y}\hat{\varphi}'\right) = F(t, \hat{\varphi}(t), \hat{\varphi}'(t)), \qquad (9)$$

где правая часть $F(t,x,y)$ задана на U и является непрерывным отображением

$$F(t,x,y) = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\right)^{-1}\left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial y} - \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}y\right).$$

Непрерывность $\left(\partial^2 L / \partial y^2\right)^{-1}$ на U следует из разложения

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\right)^{-1} : U \xrightarrow{\partial^2 L/\partial y^2} \mathrm{isom}(E, E^*) \xrightarrow{\Lambda} \mathrm{isom}(E^*, E) \subseteq \mathscr{L}(E^*, E),$$

где для банаховых пространств E, F обозначено $\mathrm{isom}(E,F)$ – множество изоморфизмов $\varphi : E \to F$ и $\Lambda(\varphi) \underset{\text{def}}{=} \varphi^{-1}$. Несложно проверить, что $\mathrm{isom}(E,F) \subseteq \mathscr{L}(E,F)$ – открытое подмножество, а Λ – непрерывное отображение. В итоге получим нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка (9) в банаховом пространстве E с неизвестной функцией $\hat{\varphi}$, разрешённое относительно старшей производной $\hat{\varphi}''$. Это уравнение решается на отрезке $[a,b]$, и для нахождения неизвестной функции $\hat{\varphi}(t)$ ставится краевая задача. Граничные условия имеют вид $\hat{\varphi}(a) = x_0$, $\hat{\varphi}(b) = x_1$ в задаче с закреплёнными границами и сводятся к условиям трансверсальности $\frac{\partial L}{\partial y}(b, \hat{\varphi}(b), \hat{\varphi}'(b)) = -\frac{\partial \ell}{\partial v}(\hat{\varphi}(a), \hat{\varphi}(b))$, $\frac{\partial L}{\partial y}(a, \hat{\varphi}(a), \hat{\varphi}'(a)) = \frac{\partial \ell}{\partial u}(\hat{\varphi}(a), \hat{\varphi}(b))$ в задаче Больца.

§2. Простейшие многомерные вариационные задачи

В задачах классического вариационного исчисления рассматриваются преимущественно функции одной переменной, определённые на отрезке $[a,b]$. Чем заменить отрезок $[a,b]$ в многомерных задачах? Рассмотрим этот вопрос отдельно.

Пусть $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ – непустое открытое ограниченное связное множество, тогда $\partial D = \bar{D} \setminus D$.

Определение 3. Точка $p \in \bar{D}$ называется *регулярной точкой* D, если существует открытое подмножество $U \subseteq \mathbb{R}^n$, содержащее p и диффеоморфное вложение класса C^1 множества U на открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(q) = (x^1(q), \ldots, x^n(q))$, $q \in U$, для которого $x^n(p) = 0$ и множество $U \cap D$ в

координатах задаётся неравенством $x^n(q) > 0$. Множество всех регулярных точек D обозначается $\partial_r D$ и называется *регулярной границей* D.

Из **Определения 3** несложно вывести, что $U \cap \bar{D}$ в координатах задаётся неравенством $x^n \geq 0$, а множество $U \cap \partial D$ – равенством $x^n = 0$ (второе следует из первого, вследствие соотношения $U \cap \partial D = (U \cap \bar{D}) \setminus (U \cap D)$). Множество $\partial_r D$ является открытым подмножеством границы ∂D, а $\partial D \setminus \partial_r D$ – компактное множество.

На $\partial_r D$ естественным образом вводится структура ориентируемого дифференцируемого многообразия размерности $(n-1)$ класса C^1. Смотри подробнее в [7].

Для дальнейшего необходимо, чтобы множество всех нерегулярных точек границы $\partial D \setminus \partial_r D$ было достаточно тощим в следующем смысле.

Определение 4. Пусть $Q \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ и $s > 0$. Множество Q имеет s-*протяжённость нуль* (*по Уитни*), если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta_0 > 0$, удовлетворяющее следующему условию: для всех $0 < \delta < \delta_0$ существуют целое $k \geq 1$ и разложение $Q = Q_1 \cup \ldots \cup Q_k$, для которых $\operatorname{diam} Q_i < \delta$, $1 \leq i \leq k$ и $k\delta^s < \varepsilon$.

Теорема 5. *Пусть $M \subseteq \mathbb{R}^n$ – m-мерное подмногообразие класса C^k, $k \geq 1$ и $0 \leq m < n$, а $C \subseteq M$ – компакт. Тогда C имеет нулевую* (m+1)-*протяжённость.* #

Определение 5. *Стандартной областью* в $\mathbb{R}^n$, $n > 1$ называется непустое открытое ограниченное связное подмножество $D \subseteq \mathbb{R}^n$, для которого $\partial D \setminus \partial_r D$ имеет нулевую $(n-1)$-протяжённость, а $\partial_r D$ – конечный риманов объём.

Из **Теоремы 5** следует, что объединение конечного числа компактных подмножеств различных подмногообразий $\mathbb{R}^n$, $n > 1$ размерности $< (n-1)$ имеет нулевую $(n-1)$-протяжённость. Поэтому, если $\partial D \setminus \partial_r D$ лежит в указанном объединении, то $\partial D \setminus \partial_r D$ имеет нулевую $(n-1)$-протяжённость. Именно с этим частным случаем обычно приходится иметь дело.

Очевидно, для стандартной области D граница ∂D имеет лебегову меру нуль. В многомерных вариационных задачах роль отрезка $[a,b]$ играют замыкания $\bar{D}$ для всевозможных стандартных областей D. При этом экстремальные значения функционалов ищутся среди функций, заданных на D и принадлежащих к определённым функциональным классам. Рассмотрим некоторые из них.

Пусть $D \subseteq \mathbb{R}^n$ – стандартная область, $k \geq 0$ – целое

$$C^k(\bar{D}) \underset{\text{def}}{=} \{ f : D \to \mathbb{R} \mid f \in C^k(D) \text{ и } \partial^\alpha f \text{ непрерывно продолжается на } \bar{D}$$

$$\text{для любого } |\alpha| \leq k \}.$$

(Поскольку продолжение $\partial^\alpha f$ на $\bar{D}$ определено, если существует, однозначно, ниже оно всюду, где это не ведёт к недоразумению, обозначается тем же символом.) Здесь $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\partial^\alpha f$ – частная производная

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n)\}.$$

Очевидно, $C^k(\bar{D})$ – вещественное векторное пространство относительно операций поточечного сложения функций и умножения их на вещественные константы. Положим

$$\|f\| = \max_{|a| \le k} \left(\sup_{x \in D} \left| \partial^\alpha f(x) \right| \right), \quad f \in C^k(\bar{D}).$$

Из определения $C^k(\bar{D})$ следует, что $\|f\|$ – конечная величина. Легко проверяются аксиомы нормы. Обобщим изложенную конструкцию.

Пусть $m \ge 1$ – целое. Положим

$$C_m^k(\bar{D}) = \{ f = (f^1, \ldots, f^m) : D \to \mathbb{R}^m \mid f^i \in C^k(\bar{D}) \text{ для любого } 1 \le i \le m \},$$

$$\|f\| = \max_{1 \le i \le m} \|f^i\|, \quad f = (f^1, \ldots, f^m) \in C_m^k(\bar{D}).$$

Очевидно, $C_1^k(\bar{D}) = C^k(\bar{D})$ и $C_m^k(\bar{D})$ – вещественное нормированное векторное пространство относительно операций поточечного сложения функций и умножения их на вещественные константы.

Теорема 6 [8]**.** $C_m^k(\bar{D})$ *с введённой выше нормой – банахово пространство*.

#

Пусть $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $n > 1$ – стандартная область, $U \subseteq \bar{D} \times \mathbb{R}^{m+mn}$ – открытое подмножество, $L : U \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, называемая *лагранжианом*,

$$\Omega = \{ f \in C_m^1(\bar{D}) \mid (x, f^i(x), f_{x_j}^i(x)) \in U \text{ для любого } x \in \bar{D} \},$$

где $f_{x_j}^i = \partial f^i / \partial x_j$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$. Тогда определена функция $I : \Omega \to \mathbb{R}$

$$I(f) = \int_D L(x, f^i(x), f_{x_j}^i(x)) dx, \qquad (10)$$

где интеграл берётся по мере Лебега. Интеграл существует, поскольку подынтегральная функция непрерывна в D и, значит, измерима по Лебегу. Кроме того, учитывая открытость D и компактность $\bar{D}$, множество D измеримо по Лебегу и его мера конечна. Наконец, подынтегральная функция ограничена, поскольку она непрерывно продолжается на $\bar{D}$, а $\bar{D}$ – компакт.

Суммируя сказанное, приходим к выводу о существовании конечного интеграла Лебега (10).

Теорема 7. $\Omega \subseteq C_m^1(\bar{D})$ *– открытое подмножество, а* $I(f)$ *– непрерывная функция на* Ω. #

Дифференцируемость функционала $I(f)$ устанавливается в следующей теореме, где домик над буквой L означает, что все аргументы вычисляются на функции $\hat{f} \in \Omega$.

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial f^i}(x) = \frac{\partial L}{\partial f^i}(x, \hat{f}(x), \hat{f}'(x)), \quad \frac{\partial \hat{L}}{\partial f^i_{x_j}}(x) = \frac{\partial L}{\partial f^i_{x_j}}(x, \hat{f}(x), \hat{f}'(x)) \text{ и т.д.}$$

$$\hat{f}(x) = (\hat{f}^1(x), \ldots, \hat{f}^m(x)), \quad \hat{f}'(x) = \left[\hat{f}^i_{x_j}(x) \right]_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}.$$

Теорема 8. *Пусть* $L : U \to \mathbb{R}$ *непрерывна и всюду в* U *существуют частные производные* $\partial L / \partial f^i$, $\partial L / \partial f^i_{x_j}$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, *также непрерывные в* U. *Тогда*:

1) $I(f)$ *имеет первую вариацию по Лагранжу в каждой точке* $\hat{f} \in \Omega$ *по любому направлению* $h \in C_m^1(\bar{D})$, *вычисляемую по формуле*

$$\delta I(\hat{f}; h) = \int_D \left[\frac{\partial \hat{L}}{\partial f^i}(x) h^i(x) + \frac{\partial \hat{L}}{\partial f^i_{x_j}}(x) \frac{\partial h^i}{\partial x_j}(x) \right] dx, \quad \hat{f} \in \Omega, \quad h \in C_m^1(\bar{D}),$$

где по повторяющимся индексам здесь и ниже предполагается суммирование.

2) *Функция* $\delta I(f; h)$, $f \in \Omega$, $h \in C_m^1(\bar{D})$ *линейна и непрерывна по* h, *и производная по Гато* $I'_\Gamma(f)(h) \underset{\text{def}}{=} \delta I(f; h)$ *непрерывна по* f *в* Ω, *в частности,* $I(f)$ *непрерывно дифференцируема по Фреше в* Ω *и* $I'(f) = I'_\Gamma(f)$. #

Рассмотрим две вариационные задачи.

Задача 3 (задача со свободной границей).

$$I(f) \to \text{locextr}, \quad f \in \Omega.$$

Задача 4 (задача с закреплённой границей).

$$I(f) \to \text{locextr}, \quad f \in \Omega, \quad f|_{\partial D} = \varphi, \quad \varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^m),$$

где $\varphi \in C_m(\partial D)$ – заданная непрерывная функция. Поставленная задача равносильна следующей

$$I(f) \to \text{locextr}, \quad f \in \Omega \cap M(\varphi),$$

где $M(\varphi) \underset{\text{def}}{=} \{ f \in C_m^1(\bar{D}) \mid f\big|_{\partial D} = \varphi \}$ – замкнутое бесконечномерное линейное многообразие в $C_m^1(\bar{D})$. Действительно, для любого $f_0 \in M(\varphi)$ имеем $M(\varphi) = f_0 + M(0)$, где $M(0) = \{ f \in C_m^1(\bar{D}) \mid f\big|_{\partial D} = 0 \}$ – замкнутое бесконечномерное подпространство в $C_m^1(\bar{D})$.

Пусть $U_0 = U \cap (D \times \mathbb{R}^{m+nm})$. Очевидно, U_0 – открытое подмножество $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m+nm}$, $U_0 \subseteq U$ и каждая точка из $U \setminus U_0$ является предельной для U_0. В наиболее важном случае $U = \bar{D} \times \mathbb{R}^{m+nm}$ имеем $\Omega = C_m^1(\bar{D})$, $U_0 = D \times \mathbb{R}^{m+nm}$.

Теорема 9. *Пусть выполнены условия* ***Теоремы 8*** *и дополнительное условие гладкости: каждая частная производная* $\partial L / \partial f_{x_j}^i$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ *непрерывно дифференцируема в открытом множестве* U_0 *и все частные производные функций* $\partial L / \partial f_{x_j}^i$ *непрерывно продолжаются на* U. *Тогда*:

1) *Если* $\hat{f} \in \Omega$ *– locextr в задаче с закреплённой границей и* $\hat{f} \in C_m^2(\bar{D})$, *то всюду в* D *выполнены тождества*

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial f^i}(x) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial f_{x_j}^i}(x) \right) = 0, \quad x \in D, \quad 1 \le i \le m \tag{11}$$

(*уравнения Эйлера – Остроградского*).

2) *Если* $\hat{f} \in \Omega$ *– locextr в задаче со свободной границей и* $\hat{f} \in C_m^2(\bar{D})$, *то всюду в* D *выполнены тождества* (11), *а на регулярной границе* $\partial_r D$ *справедливы соотношения*

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial f_{x_j}^i}(x) \ell^j(x) = 0, \quad x \in \partial_r D, \quad 1 \le i \le m \,(\textit{условия трансверсальности}), \tag{12}$$

где $\ell(x) = (\ell^1(x), \ldots, \ell^n(x))$, $x \in \partial_r D$ *– внешняя единичная нормаль области* D *в точке* $x \in \partial_r D$.

Замечание. Дополнительное условие гладкости из **Теоремы 9** равносильно такому условию: каждая функция $\partial L / \partial f_{x_j}^i$ имеет непрерывные в U производные по f^k и $f_{x^s}^k$, а по x^ℓ имеет непрерывные производные в U_0, которые непрерывно продолжаются на U.

Уравнения. Эйлера-Остроградского (11) образуют систему m нелинейных уравнений в частных производных второго порядка относительно m неизвестных функций $\hat{f}^1, \ldots, \hat{f}^m \in C^2(\bar{D})$ неразрешённую относительно старших производных

$$\frac{\partial^2 \hat{L}}{\partial x_j \partial f^i_{x_j}} - \frac{\partial \hat{L}}{\partial f^i} + \frac{\partial^2 \hat{L}}{\partial f^k \partial f^i_{x_j}} \frac{\partial \hat{f}^k}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 \hat{L}}{\partial f^r_{x_p} \partial f^i_{x_j}} \frac{\partial^2 \hat{f}^r}{\partial x_j \partial x_p} = 0, \quad 1 \le i \le m, \qquad (13)$$

(где, напомним, по повторяющимся индексам предполагается суммирование) которая дополняется m граничными условиями для нахождения функции $\hat{f} \in C^2_m(\bar{D})$. В задаче с закреплённой границей это условия Дирихле $\hat{f}^i\big|_{\partial D} = \varphi^i$, $1 \le i \le m$, в задаче со свободной границей – условия трансверсальности (12). При этом коэффициенты $\partial \hat{L} / \partial f^i$, $\partial^2 \hat{L} / (\partial x_j \partial f^i_{x_j})$, $\partial^2 \hat{L} / (\partial f^k \partial f^i_{x_j})$, $\partial^2 \hat{L} / (\partial f^r_{x_p} \partial f^i_{x_j})$ в системе (13) и $\partial \hat{L} / \partial f^i_{x_j}$ – в граничных условиях (12) нелинейно зависят от неизвестных функций $\hat{f}^i$ и их производных $\partial \hat{f}^i / \partial x_j$. Исследование поставленных краевых задач в области D для функций $\hat{f}^i$, $1 \le i \le m$ имеет смысл проводить в каждом конкретном случае.

Пример 1 (Принцип Дирихле)**.** Пусть $m = 1$, $U = \bar{D} \times \mathbb{R}^{1+n}$, $L = -\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 - V(x) f^2 + 2 f F(x)$, где $V(x), F(x) \in C(\bar{D})$ – заданные функции. Тогда если функция $f \in C^2(\bar{D})$ доставляет решение вариационной задачи

$$\int_D \left[-\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 - V(x) f^2 + 2 f F(x) \right] dx \to \text{locextr}, \quad f \in C^1(\bar{D}),$$

то она, согласно **Теореме 9**, удовлетворяет уравнению Эйлера-Остроградского (11), имеющему вид

$$-\Delta f + V(x) f = F(x), \quad x \in D, \quad \Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

(при $V = 0$ получается уравнение Пуассона), и либо граничному условию $\left. \frac{\partial f}{\partial n} \right|_{\partial_r D} = 0$, где **n** – единичная внешняя нормаль к D в точках $\partial_r D$, в задаче со свободной границей, либо граничному условию $f\big|_{\partial D} = \varphi$, где $\varphi \in C(\partial D)$ – заданная функция, в задаче с закреплённой границей.

Пример 2 (уравнение мыльных плёнок)**.** Пусть $m = 1$, $U = \bar{D} \times \mathbb{R}^{1+n}$, $L = \left(1 + \sum_{i=1}^{n} (\partial f / \partial x_i)^2 \right)^{1/2}$. Если функция $f \in C^2(\bar{D})$ доставляет решение вариационной задачи

$$\int\limits_D \left[1+\sum_{i=1}^{n}(\partial f\ /\ \partial x_i)^2\right]^{1/2} dx \to \text{locextr}, \quad f \in C^1(\bar{D}),$$

то она, согласно **Теореме 9**, удовлетворяет уравнению Эйлера-Остроградского (11), имеющему вид

$$\Delta f - \frac{\langle \Gamma \nabla f, \nabla f \rangle}{1+|\nabla f|^2} = 0, \quad \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right),$$

где $\Gamma = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{1\le i,j\le n}$ – $n\times n$-матрица (гессиан функции f), $|\nabla f|$ – евклидова норма градиента ∇f. Для $n=2$ полученное уравнение (называемое *уравнением мыльных плёнок*) упрощается:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\left(1+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\left(1+\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\right)-2\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}=0.$$

При этом в задаче со свободной границей выполняется естественное граничное условие $\left.\frac{\partial f}{\partial n}\right|_{\partial_r D} = 0$, а в задаче с закреплённой границей – условие $f|_{\partial D} = \varphi$.

Доказательство **Теорем 8,9** опирается на многомерный аналог леммы Лагранжа – основной леммы вариационного исчисления.

Лемма 4. 1) (*О продолжении*). *Пусть* $N \subseteq \mathbb{R}^n$ *– подмногообразие класса* C^1, $\dim N < n$ *и* $\varphi: N \to \mathbb{R}$ *функция класса* C^1 *с компактным носителем. Тогда найдётся функция* $\Phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *класса* C^1, *для которой* $\Phi|_N = \varphi$.

2) (*Лемма Лагранжа для многообразий*). *Пусть* N *– риманово многообразие,* $g: N \to \mathbb{R}$ *– непрерывная функция и для любой функции* $\varphi: N \to \mathbb{R}$ *класса* C^1 *с компактным носителем верно равенство*

$$\int\limits_N g\varphi d\sigma = 0$$

($d\sigma$ *– элемент риманова объёма*). *Тогда* $g \equiv 0$, *и обратно*.

3) (*Лемма Лагранжа для многомерной области*). *Пусть* $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *– стандартная область,* $g: D \to \mathbb{R}$ *– непрерывная и ограниченная функция и для любого* $h \in C^1(\bar{D})$, *для которого* $h|_{\partial D} = 0$, *справедливо равенство*

$$\int\limits_D ghdx = 0. \qquad (14)$$

Тогда $g \equiv 0$, *и обратно* (*при сделанных предположениях интеграл существует*). #

Иногда используется модифицированный вариант леммы Лагранжа для многомерной области: если $D \subseteq \mathbb{R}^n$ – стандартная область, $g : D \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция и равенство (14) выполнено для любой бесконечно дифференцируемой функции h с компактным носителем, лежащим в D, то $g \equiv 0$, и обратно.

Проведённые выше построения обобщаются на случай, когда лагранжиан L зависит от производных функции f порядка >1, $L = L(x, \partial^\alpha f^i)_{|\alpha| \le k}$, $f \in C_m^k(\bar{D})$. Тогда, если функции $\hat{f} = (\hat{f}^1, \dots \hat{f}^m)$ доставляют locextr в вариационной задаче, например, со свободной границей

$$\int_D L(x, \partial^\alpha f^i)_{|\alpha| \le k} dx \to \text{locextr}, \quad f \in C_m^k(\bar{D}),$$

то при достаточной гладкости частных производных $\dfrac{\partial L}{\partial(\partial^\alpha f^i)}$, $|\alpha| \le k$ и экстремальной функции $\hat{f}$ последняя в области D удовлетворяет *уравнениям Эйлера-Пуассона*

$$\sum_{|\alpha| \le k} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial(\partial^\alpha f^i)} \right) = 0, \quad x \in D, \quad 1 \le i \le m,$$

являющихся обобщением уравнений Эйлера-Остроградского. Рассмотрение указанных условий гладкости и обсуждение граничных условий (условий трансверсальности) выходит за рамки настоящей работы.

§3. Вариационное исчисление для локальных полей

Определение 6. *Лагранжевой механической системой* (ЛМС) называется непрерывное отображение $\Lambda : \mathbb{R} \times E \times E \to \mathbb{R}$, где E – банахово пространство. Для ЛМС определён функционал $S : C_E^1[a,b] \to \mathbb{R}$, называемый *действием*:

$$S[f] \underset{\text{def}}{=} \int_a^b \Lambda(t, f(t), f'(t)) dt, \quad f \in C_E^1[a,b].$$

Рассмотрим вариационную задачу с закреплёнными концами

$$S[f] \to \text{locextr}, \quad f \in C_E^1[a,b], \quad f(a) = f_0, \quad f(b) = f_1, \qquad (15)$$

где $f_0, f_1 \in E$ заданы. Один из постулатов современной физики состоит в том, что механическая система, состояния которой задаются векторами банахова

пространства E, эволюционирует на временном отрезке $[a,b]$ между двумя состояниями $f(a)=f_0\in E$ и $f(b)=f_1\in E$ так, что функционал действие $S[f]$ принимает на кривой $f(t)\in E$, задающей действительную эволюцию системы, минимальное (или, более обще, экстремальное) значение. Наша цель – сформулировать необходимые условия locextr для вариационной задачи (15) и функционала действия, порождаемого ЛМС специального вида, называемых ниже локальными полями.

Определение 7. 1) ЛМС называется *полем*, если $\dim E=\infty$.

2) ЛМС называется *локальным нагруженным полем*, если $E=C^1_m(\bar D)$ для некоторой стандартной области $D\subseteq\mathbb{R}^n$, $m\geq 1$ и лагранжиан имеет вид

$$\Lambda(t,\varphi,\psi)=L(t,\varphi,\psi)+M(t,\varphi|_{\partial D}\cdot\psi|_{\partial D})=\int\limits_D \mathscr{L}(t,x,\varphi(x),\psi(x),\nabla\varphi(x))dx+$$
$$+\int\limits_{\partial_r D}\mathscr{M}(t,p,\varphi(p),\psi(p))d\sigma,\quad \varphi,\psi\in E=C^1_m(\bar D) \tag{16}$$

для некоторых непрерывных функций $\mathscr{L}:\mathbb{R}\times\bar D\times\mathbb{R}^{2m+mn}\to\mathbb{R}$, $\mathscr{M}:\mathbb{R}\times\partial D\times\mathbb{R}^{2m}\to\mathbb{R}$, где $\nabla\varphi(x)=[\varphi^i_{x_j}(x)]_{1\leq i\leq m,1\leq j\leq n}$ – матрица Якоби отображения $\varphi=(\varphi^1,\ldots,\varphi^m)$ в точке $x\in D$, $d\sigma$ – элемент риманова объёма на $\partial_r D$ и для $p\in\partial D$ под $\varphi(p)$, $\psi(p)$ понимаются предельные значения φ и ψ на границе ∂D.

3) Локальное нагруженное поле называется *локальным полем*, если $\mathscr{M}=0$, а функции $\mathscr{L}$ и $\mathscr{M}$ называются *плотностями лагранжианов* L и M соответственно.

Из сделанных предположений следует существование обоих интегралов в (16). Непрерывность лагранжианов L и M (и значит Λ) вытекает из следующей леммы.

Лемма 5. *Пусть G – банахово пространство, K, P – непустые метрические пространства, причём K – компакт, $F:G\to C(K,P)$, $\mathscr{A}:\mathbb{R}\times P\to\mathbb{R}$ непрерывные отображения. Тогда для любых $(t_0,z_0)\in\mathbb{R}\times G$ и $\varepsilon>0$ найдётся $\delta>0$, для которого справедлива импликация: $|t-t_0|<\delta$, $\|z-z_0\|<\delta\Rightarrow|\mathscr{A}(t,F(z)(x))-\mathscr{A}(t_0,F(z_0)(x))|<\varepsilon$ для всех $x\in K$ (здесь $C(K,P)$ – множество всех непрерывных отображений K в P, снабжённое равномерной метрикой).*

Пусть теперь $K\subseteq\mathbb{R}^n$ – непустой компакт, $L:\mathbb{R}\times G\to\mathbb{R}$ определено равенством

$$L(t,z)\underset{\text{def}}{=}\int\limits_K\mathscr{A}(t,F(z)(x))dx. \tag{17}$$

Тогда из **леммы 5** следует непрерывность функционала L по совокупности переменных. Рассмотрим два частных случая.

1. Пусть $G = E \times E$, $E = C_m^1(\bar{D})$, $K = \bar{D}$, $P = \bar{D} \times \mathbb{R}^N$, $N = 2m + mn$, $F : G \to C(K, P)$, $F(\varphi, \psi)(x) \underset{\text{def}}{=} (x, \varphi(x), \psi(x), \nabla\varphi(x))$, $x \in \bar{D}$, $\mathscr{A} \underset{\text{def}}{=} \mathscr{L}$. Непрерывность $\mathscr{A}$ очевидна, непрерывность F следует из оценки $\|F(\varphi, \psi) - F(\varphi_0, \psi_0)\| \le \max\{\|\varphi - \varphi_0\|, \|\psi - \psi_0\|\}$. Теперь из **леммы 5** и равенства (17) следует непрерывность лагранжиана $L(t, \varphi, \psi)$ по совокупности переменных.

2. Пусть $G = F \times F$, $F = C_m(\partial D)$, $K = \partial D$, $P = \partial D \times \mathbb{R}^{2m}$, $F : G \to C(K, P)$, $F(\alpha, \beta)(p) \underset{\text{def}}{=} (p, \alpha(p), \beta(p))$, $p \in \partial D$, $\alpha, \beta \in F$, $\mathscr{A} \underset{\text{def}}{=} \mathscr{M}$. Непрерывность F и $\mathscr{A}$ очевидна. Из **леммы 5**, равенства

$$M(t, \alpha, \beta) = \int_{\partial_r D} \mathscr{A}(t, F(\alpha, \beta)(p)) d\sigma, \quad \alpha, \beta \in F = C_m(\partial D)$$

и конечности риманова объёма $\partial_r D$ следует непрерывность лагранжиана $M(t, \alpha, \beta)$ по совокупности переменных.

Доказательство Леммы 5. Пусть $x \in K$ – произвольное. Из непрерывности $\mathscr{A}$ в точке $(t_0, F(z_0)(x))$ следует существование $\delta(x) > 0$, для которого

$$|t - t_0| < \delta(x), \quad \rho(q, F(z_0)(x)) < \delta(x) \Rightarrow |\mathscr{A}(t, q) - \mathscr{A}(t_0, F(z_0)(x))| < \varepsilon / 2, \quad (18)$$

где ρ – метрика в P, а из непрерывности $F(z_0)$ в точке x следует существование открытой окрестности $V(x)$ точки x, для которой

$$y \in V(x) \Rightarrow \rho(F(z_0)(y), F(z_0)(x)) < \delta(x) / 2. \quad (19)$$

По компактности K из открытого покрытия $\{V(x)\}_{x \in K}$ можно выбрать конечное подпокрытие K. Пусть $K = V(x_1) \cup \ldots \cup V(x_n)$ и $\delta_1 = \min\limits_{1 \le i \le n} \delta(x_i) > 0$. Наконец, из непрерывности F в точке z_0 следует существование $\delta_2 > 0$

$$\|z - z_0\| < \delta_2 \Rightarrow \rho(F(z)(x), F(z_0)(x)) < \delta_1 / 2 \text{ для любого } x \in K. \quad (20)$$

Положим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда $\delta > 0$. Покажем, что δ – искомое. Пусть $|t - t_0| < \delta$, $\|z - z_0\| < \delta$ и $x \in K$ – произвольная точка. Найдём и зафиксируем $1 \le i \le n$, для которого $x \in V(x_i)$. Тогда

$$\begin{aligned} |\mathscr{A}(t, F(z)(x)) - \mathscr{A}(t_0, F(z_0)(x))| \le |\mathscr{A}(t, F(z)(x)) - \mathscr{A}(t_0, F(z_0)(x_i))| + \\ + |\mathscr{A}(t_0, F(z_0)(x_i)) - \mathscr{A}(t_0, F(z_0)(x))| \end{aligned} \quad (21)$$

Поскольку $\rho(F(z)(x),F(z_0)(x_i)) \le \rho(F(z)(x),F(z_0)(x)) + \rho(F(z_0)(x),F(z_0)(x_i)) <$ $< \delta_1/2 + \delta(x_i)/2 \le \delta(x_i)$, где использованы неравенства (19) и (20) и соотношение $\delta_1 \le \delta(x_i)$, из полученной оценки $|t-t_0| < \delta \le \delta(x_i)$ и неравенства (18) следует, что первое слагаемое в правой части (21) меньше $\varepsilon/2$. Ещё раз применяя неравенство (19), заключаем, что $\rho(F(z_0)(x_i),F(z_0)(x)) < \delta(x_i)/2$, поэтому из неравенства (18) следует, что и второе слагаемое в правой части (21) меньше $\varepsilon/2$. Поэтому $|\mathscr{A}(t,F(z)(x)) - \mathscr{A}(t_0,F(z_0)(x))| < \varepsilon$. Ввиду произвольности $x \in K$ лемма доказана. #

Наша цель – получить для достаточно гладкого лагранжиана Λ, вычисляемого по (16), необходимое условие locextr в вариационной задаче (15). Условимся об обозначении аргументов $\mathscr{L}$ и $\mathscr{M}$

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(t,x,u,v,w), \quad \mathscr{M} = \mathscr{M}(t,p,u,v), \quad x \in \bar{D}, \quad p \in \partial D,$$
$$u = (u^1,\ldots,u^m), \quad v = (v^1,\ldots,v^m), \quad w = [w^i_j]_{1\le i\le m, 1\le j\le n}.$$

Теорема 10. 1) *Если функция* $\mathscr{L}$ *непрерывна и непрерывно дифференцируема по аргументам* u^i, w^i_j, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, *то функция* $L(t,\varphi,\psi)$ *непрерывно дифференцируема по* φ *и*

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi}(t,\hat{\varphi},\hat{\psi})h = \int_D \left(\frac{\partial \hat{\mathscr{L}}}{\partial u^i} h^i + \frac{\partial \hat{\mathscr{L}}}{\partial w^i_j} \frac{\partial h^i}{\partial x_j} \right) dx, \quad \hat{\varphi},\hat{\psi} \in C^1_m(\bar{D}), \quad h \in C^1_m(\bar{D}).$$

2) *Если функция* $\mathscr{L}$ *непрерывна и непрерывно дифференцируема по аргументам* v^i, $1 \le i \le m$, *то функция* $L(t,\varphi,\psi)$ *непрерывно дифференцируема по* ψ *и*

$$\frac{\partial L}{\partial \psi}(t,\hat{\varphi},\hat{\psi})h = \int_D \frac{\partial \hat{\mathscr{L}}}{\partial v^i} h^i dx, \quad \hat{\varphi},\hat{\psi} \in C^1_m(\bar{D}), \quad h \in C^1_m(\bar{D}).$$

3) *Если функция* $\mathscr{M}$ *непрерывна и непрерывно дифференцируема по аргументам* u^i, $1 \le i \le m$, *то функция* $M(t,\alpha,\beta)$ *непрерывно дифференцируема по* α *и*

$$\frac{\partial M}{\partial \alpha}(t,\hat{\alpha},\hat{\beta})h = \int_{\partial_r D} \frac{\partial \mathscr{M}}{\partial u^i} h^i d\sigma, \quad \hat{\alpha},\hat{\beta} \in C_m(\partial D), \quad h \in C_m(\partial D).$$

4) *Если функция* $\mathscr{M}$ *непрерывна и непрерывно дифференцируема по аргументам* v^i, $1 \le i \le m$, *то функция* $M(t,\alpha,\beta)$ *непрерывно дифференцируема по* β *и*

$$\frac{\partial M}{\partial \beta}(t,\hat{\alpha},\hat{\beta})h = \int\limits_{\partial_r D} \frac{\partial \mathscr{M}}{\partial v^i} h^i d\sigma, \quad \hat{\alpha},\hat{\beta} \in C_m(\partial D), \quad h \in C_m(\partial D).$$

По повторяющимся индексам предполагается суммирование, домик над $\mathscr{L}$ *означает, что частные производные* $\partial\mathscr{L}/\partial u^i$, $\partial\mathscr{L}/\partial v^i$, $\partial\mathscr{L}/\partial w^i_j$ *вычисляются на векторе* $(t,x,\hat{\varphi}(x),\hat{\psi}(x),\nabla\hat{\varphi}(x))$, $x \in D$, *а домик над* $\mathscr{M}$ *– что частные производные* $\partial\mathscr{M}/\partial u^i$, $\partial\mathscr{M}/\partial v^i$ *вычисляются на векторе* $(t,p,\hat{\alpha}(p),\hat{\beta}(p))$, $p \in \partial_r D$.

Рассмотрим функционалы

$$S_L[f] \underset{\text{def}}{=} \int\limits_{\alpha}^{\beta} L(t, f(t), f'(t))dt,\ f \in C^1_E[a,b],\ S_M[\alpha] \underset{\text{def}}{=} \int\limits_{\alpha}^{\beta} M(t,\alpha(t),\alpha'(t))dt, \alpha \in C^1_F[a,b],$$

где $E = C^1_m(\bar{D})$, $F = C_m(\partial D)$, тогда $S[f] = S_L[f] + S_M[\pi(f)]$, где $\pi : C^1_E \to C^1_F$, $\pi(f)(t) \underset{\text{def}}{=} f(t)\big|_{\partial D}$. Очевидно, π – линейное непрерывное отображение и $\|\pi(f)\| \le \|f\|$, $f \in C^1_E$. Согласно **Теоремам 2** и **2'**, где надо положить $\Omega = C^1_E$, при выполнении условий **Теоремы 10** функционалы S_L и S_M непрерывно дифференцируемы на C^1_E и C^1_F соответственно. Поэтому функционал $S[f]$ в задаче (15) также непрерывно дифференцируем на C^1_E и по теореме о дифференцируемости сложной функции $S'[f] = S'_L[f] + S'_M[\pi(f)] \circ \pi$. В частности, для любых $\hat{f}, h \in C^1_E$ из формулы (4) выводим

$$S'[\hat{f}]h = S'_L[\hat{f}]h + S'_M[\pi(\hat{f})]\pi(h) = \int\limits_a^b \left[\frac{\partial \hat{L}}{\partial \varphi}h + \frac{\partial \hat{L}}{\partial \psi}h'\right]dt + \int\limits_a^b \left[\frac{\partial \hat{M}}{\partial \alpha}\pi(h) + \frac{\partial \hat{M}}{\partial \beta}\pi(h)'\right]dt.$$

Учитывая равенство $\pi(h)' = \pi(h')$, окончательно получим

$$S'[\hat{f}]h = \int\limits_a^b \left[\left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \hat{M}}{\partial \alpha} \circ \pi\right)h + \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \psi} + \frac{\partial \hat{M}}{\partial \beta} \circ \pi\right)h'\right]dt.$$

Если $\hat{f}$ – точка locextr функционала $S[f]$ в задаче (15), то $S'[\hat{f}]h = 0$ для любого $h \in C^1_E$, $h(a) = h(b) = 0$. Но тогда из **леммы 3** следует, что

$$\left[\frac{\partial \hat{L}}{\partial \psi} + \frac{\partial \hat{M}}{\partial \beta} \circ \pi\right](t) \in C^1_{E^*}, -\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \hat{L}}{\partial \psi}(t) + \left(\frac{\partial \hat{M}}{\partial \beta} \circ \pi\right)(t)\right] + \frac{\partial \hat{L}}{\partial \varphi}(t) + \left(\frac{\partial \hat{M}}{\partial \beta} \circ \pi\right)(t) \equiv 0, \quad (22)$$

где последнее равенство выполнено тождественно для всех $t \in [a,b]$, а домики над L и M означают, что:

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial \psi}(t)=\frac{\partial L}{\partial \psi}(t,\hat{f}(t),\hat{f}'(t)),\quad \left(\frac{\partial \hat{M}}{\partial \beta}\circ\pi\right)(t)=\frac{\partial M}{\partial \beta}(t,\pi(\hat{f}(t)),\pi(\hat{f}'(t)))\text{ и т.д.}$$

Из (22) следует, что для любого $h\in E$ имеет место тождество на отрезке [a,b]

$$-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \hat{L}}{\partial \psi}(t)h+\frac{\partial \hat{M}}{\partial \beta}(t)\pi(h)\right]+\frac{\partial \hat{L}}{\partial \varphi}(t)h+\frac{\partial \hat{M}}{\partial \alpha}(t)\pi(h)\equiv 0,\quad t\in[a,b],\quad h\in E,$$

причём функция в квадратных скобках непрерывно дифференцируема на [a,b]. Из полученного тождества и **Теоремы 10** следует равенство

$$\begin{aligned}&-\frac{d}{dt}\left[\left(\int_D \frac{\partial \hat{\mathscr{L}}}{\partial v^i}h^i+\int_{\partial_r D}\frac{\partial \hat{\mathscr{M}}}{\partial v^i}\left(h^i\big|_{\partial D}\right)\right)d\sigma\right]+\\&+\int_D\left(\frac{\partial \hat{\mathscr{L}}}{\partial u^i}h^i+\frac{\partial \hat{\mathscr{L}}}{\partial w^i_j}\frac{\partial h^i}{\partial x_j}\right)dx+\int_{\partial_r D}\frac{\partial \hat{\mathscr{M}}}{\partial u^i}\left(h^i\big|_{\partial D}\right)d\sigma=0,\end{aligned}\qquad(23)$$

справедливое для любых $t\in[a,b]$, $h=(h^1,\ldots,h^m)\in E=C^1_m(\bar{D})$, где домик над $\mathscr{L}$ означает, что соответствующая производная вычисляется на векторе $(t,x,\hat{f}(x),\hat{f}'(t)(x),\nabla\hat{f}(t)(x))$, $x\in D$, а домик над $\mathscr{M}$ указывает на векторный аргумент $(t,p,\hat{f}(t)(p),\hat{f}'(t)(p))$, $p\in\partial D$. При этом функция в квадратных скобках в (23) непрерывно дифференцируема на $[a,b]$. Преобразуем равенство (23), внося производную по t под знаки интегралов и избавляясь от дифференцирования пробной функции h. Это можно сделать для достаточно гладких плотностей лагранжианов $\mathscr{L}$ и $\mathscr{M}$. Вот точный результат.

Теорема 11. *Пусть выполнены следующие условия гладкости для функций* $\mathscr{L}$ и $\mathscr{M}$:

1) $\mathscr{L}\in C^2(\overline{\mathbb{R}\times D\times\mathbb{R}^{m(2+n)}})$;

2) *при любом фиксированном* $p\in\partial D$ *функция* $\mathscr{M}$ *дважды непрерывно дифференцируема по аргументам* t, u^i, v^i *и все частные производные до второго порядка включительно непрерывны по совокупности переменных на* $\mathbb{R}\times\partial D\times\mathbb{R}^{2m}$.

Тогда, если $\hat{f}\in C^1_E[a,b]$ *– locextr в вариационной задаче* (15) *и* $\hat{f}\in C^2_E[a,b]$, $\hat{f}([a,b])\subseteq C^2_m(\bar{D})$, *то векторная функция* $\hat{\Phi}(t,x)=\hat{f}(t)(x)$ *на* $[a,b]\times D$ *удовлетворяет тождествам*

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \hat{\mathscr{L}}}{\partial v^i}\right)+\frac{\partial \hat{\mathscr{L}}}{\partial u^i}-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \hat{\mathscr{L}}}{\partial w^i_j}\right)=0,\quad 1\le i\le m,\quad x\in D,\quad t\in[a,b]\qquad(24)$$

(*уравнения Эйлера – Остроградского*)

а на регулярной части границы $\partial_r D$ *справедливы равенства*

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \hat{\mathscr{M}}}{\partial v^i}\right)+\frac{\partial \hat{\mathscr{M}}}{\partial w_j^i}\ell^j+\frac{\partial \hat{\mathscr{M}}}{\partial u^i}=0,\quad 1\le i\le m,\quad x\in\partial_r D,\quad t\in[a,b], \tag{25}$$

(*условия трансверсальности*)

где ℓ^j, $1\le j\le n$ *– компоненты внешней единичной нормали к* D *в точках* $\partial_r D$, *в* (24) *производные* $\partial\hat{\mathscr{L}}/\partial v^i$, $\partial\hat{\mathscr{L}}/\partial u^i$, $\partial\hat{\mathscr{L}}/\partial w_j^i$ *вычисляются в точке*

$$\left(t,x,\hat{\Phi}^i(t,x),\frac{\partial\hat{\Phi}^i}{\partial t}(t,x),\frac{\partial\hat{\Phi}^i}{\partial x_j}(t,x)\right) \tag{26}$$

для $t\in[a,b]$, $x\in D$, а в (25) $\partial\hat{\mathscr{L}}/\partial w_j^i$ *вычисляется в точке* (26) *для* $t\in[a,b]$, $x\in\partial_r D$, $\partial\hat{\mathscr{M}}/\partial u^i$, $\partial\hat{\mathscr{M}}/\partial v^i$ *вычисляются в точке* $\left(t,p,\hat{\Phi}^i(t,p),\frac{\partial\hat{\Phi}^i}{\partial t}(t,p)\right)$ *для* $t\in[a,b]$, $p\in\partial_r D$. *При этом значения* $\hat{\Phi}$ *и её производных на границе вычисляются по непрерывности.*

Лемма 6. *Пусть* $f\in C_E^2[a,b]$, $f([a,b])\subseteq C_m^2(\bar{D})$ (*где* $E=C_m^1(\bar{D})$), $\Phi(t,x)=f(t)(x)$, $t\in[a,b]$, $x\in D$. *Тогда*:

1) *векторная функция* $\Phi(t,x)$ *имеет все производные до второго порядка включительно по аргументам* $t,x_1,\ldots,x_n$, *непрерывные в* $[a,b]\times D$ *и непрерывно продолжаемые в* $[a,b]\times\bar{D}$;

2) *имеют место равенства* $\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial t}(t,x)=f'(t)(x)$, $\frac{\partial^2\hat{\Phi}}{\partial t^2}(t,x)=f''(t)(x)$, $t\in[a,b]$, $x\in D$, *а предельные значения* $\hat{\Phi}$ *на границе* ∂D *дважды дифференцируемы по* t *и первая и вторая производные по* t *указанных предельных значений совпадают с предельными значениями на границе* ∂D *соответственно* $\partial\Phi/\partial t$, $\partial^2\Phi/\partial t^2$.

Лемма 7. 1) *Пусть функция* $K(t,x)$, $t\in\mathbb{R}$, $x\in D$ *непрерывна и непрерывно дифференцируема по* t, *причём функции* $K(t,x)$, $\frac{\partial K}{\partial t}(t,x)$ *непрерывно продолжаются на* $\mathbb{R}\times\bar{D}$. *Тогда интеграл в левой части непрерывно дифференцируем по* t *и его производная вычисляется по формуле*

$$\frac{d}{dt}\int_D K(t,x)dx=\int_D\frac{\partial K}{\partial t}(t,x)dx.$$

2) *Пусть функция* $K(t,p)$, $t\in\mathbb{R}$, $p\in\partial_r D$ *непрерывна и непрерывно дифференцируема по* t, *причём функции* K *и* $\partial K/\partial t$ *непрерывно продолжаются на* $\mathbb{R}\times\partial D$. *Тогда интеграл в левой части непрерывно дифференцируем по* t *и его производная вычисляется по формуле*

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\partial_r D} K(t,p)d\sigma=\int\limits_{\partial_r D}\frac{\partial K}{\partial t}(t,p)d\sigma.$$

Доказательство Теоремы 11. Преобразуем равенство (23). Согласно **лемме 6**,

$$\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial v^i}(t,x)=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v^i}\left(t,x,\hat{\Phi}^i(t,x),\frac{\partial\hat{\Phi}^i}{\partial t}(t,x),\frac{\partial\hat{\Phi}^i}{\partial x_j}(t,x)\right),\quad t\in[a,b],\quad x\in D,$$

$$\frac{\partial\hat{\mathscr{M}}}{\partial v^i}(t,p)=\frac{\partial\mathscr{M}}{\partial v^i}\left(t,p,\hat{\Phi}^i(t,p),\frac{\partial\hat{\Phi}^i}{\partial t}(t,p)\right),\quad t\in[a,b],\quad p\in\partial D.$$

Из условий гладкости и **леммы 6**, применяя правило дифференцирования сложной функции из матанализа, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial v^i}h^i\right)=\left(\frac{\partial^2\hat{\mathscr{L}}}{\partial t\partial v^i}+\frac{\partial^2\hat{\mathscr{L}}}{\partial u^k\partial v^i}\frac{\partial\hat{\Phi}^k}{\partial t}+\frac{\partial^2\hat{\mathscr{L}}}{\partial v^s\partial v^i}\frac{\partial^2\hat{\Phi}^s}{\partial t^2}+\frac{\partial^2\hat{\mathscr{L}}}{\partial w_k^\ell\partial v^i}\frac{\partial^2\hat{\Phi}^\ell}{\partial t\partial x_k}\right)h^i,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\hat{\mathscr{M}}}{\partial v^i}h^i\Big|_{\partial D}\right)=\left(\frac{\partial^2\hat{\mathscr{M}}}{\partial t\partial v^i}+\frac{\partial^2\hat{\mathscr{M}}}{\partial u^k\partial v^i}\frac{\partial\hat{\Phi}^k}{\partial t}+\frac{\partial^2\hat{\mathscr{M}}}{\partial v^s\partial v^i}\frac{\partial^2\hat{\Phi}^s}{\partial t^2}\right)h^i\Big|_{\partial D}.$$

Из этих выражений следует, что для $K(t,x)=\dfrac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial v^i}h^i$, $t\in[a,b]$, $x\in D$ либо $K(t,x)=\dfrac{\partial\hat{\mathscr{M}}}{\partial v^i}h^i\Big|_{\partial D}$, $t\in[a,b]$, $x\in\partial_r D$ выполнены условия **леммы 7** и, значит, согласно этой лемме, производную d/dt можно внести под знак каждого из интегралов в квадратной скобки в (23).

С другой стороны, из условий гладкости и **леммы 6** следует, что для любого $1\le k\le n$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial w_j^i}\right)=\frac{\partial^2\hat{\mathscr{L}}}{\partial x_k\partial w_j^i}+\frac{\partial^2\hat{\mathscr{L}}}{\partial u^s\partial w_j^i}\frac{\partial\hat{\Phi}^s}{\partial x_k}+\frac{\partial^2\hat{\mathscr{L}}}{\partial v^s\partial w_j^i}\frac{\partial^2\hat{\Phi}^s}{\partial x_k\partial t}+\frac{\partial^2\hat{\mathscr{L}}}{\partial w_s^\ell\partial w_j^i}\frac{\partial^2\hat{\Phi}^\ell}{\partial x_k\partial x_s}.$$

Отсюда следует, что производная в левой части полученного равенства непрерывна на $[a,b]\times D$ и непрерывно продолжается на $[a,b]\times\bar{D}$. Поэтому левая часть следующего равенства

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial w^i_j}h^i\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial w^i_j}\right)h^i+\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial w^i_j}\frac{\partial h^i}{\partial x_j}$$

непрерывно продолжается на $[a,b]\times\bar{D}$. Следовательно, применима формула Остроградского-Гаусса, из которой следует тождество

$$\int\limits_D\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial w^i_j}\frac{\partial h^i}{\partial x_j}dx=-\int\limits_D\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial w^i_j}\right)h^i dx+\int\limits_{\partial_r D}\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial w^i_j}\ell^j h^i\Big|_{\partial_r D}d\sigma.$$

Собирая полученные результаты, преобразуем равенство (23) к виду

$$\begin{aligned}&\int\limits_D\left[-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial v^i}\right)+\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial u^i}-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial w^i_j}\right)\right]h^i dx+\\&+\int\limits_{\partial_r D}\left[-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\hat{\mathscr{M}}}{\partial v^i}\right)+\frac{\partial\hat{\mathscr{M}}}{\partial u^i}+\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial w^i_j}\ell^j\right]h^i\Big|_{\partial_r D}d\sigma=0.\end{aligned}\qquad(27)$$

Равенство (27) справедливо для любого $t\in[a,b]$ и $h\in C^1_m(\bar{D})$. В частности, (27) верно для любого $h\in C^1_m(\bar{D})$, $h\big|_{\partial D}=0$. Для таких h второй интеграл в (27) обращается в нуль, а равенство нулю первого интеграла, ввиду произвольности указанной h, на основании **леммы 4**, позволяет заключить, что квадратные скобки в первом интеграле в (27) обращаются в нуль, что приводит к уравнениям Эйлера-Остроградского (24). С другой стороны, из проведённого рассуждения следует, что соотношение (27) сводится к равенству

$$\int\limits_{\partial_r D}\left[-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\hat{\mathscr{M}}}{\partial v^i}\right)+\frac{\partial\hat{\mathscr{M}}}{\partial u^i}+\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial w^i_j}\ell^j\right]h^i\Big|_{\partial_r D}d\sigma=0,\qquad(28)$$

справедливому для любой $h\in C^1_m(\bar{D})$. Из **леммы 4** следует, что для любых функций класса C^1 с компактными носителями $h^i_0:\partial_r D\to\mathbb{R}$ найдётся $h\in C^1_m(\bar{D})$, для которой $h^i\big|_{\partial_r D}=h^i_0$, $1\le i\le m$. Но тогда, по **лемме 4**, в квадратных скобках в интеграле (28) должны стоять нулевые величины, что даёт условия трансверсальности (25). Теорема доказана. #

Уравнения Эйлера-Остроградского образуют систему m нелинейных уравнений в частных производных второго порядка для нахождения m экстремальных функций $\hat{\Phi}^1(t,x),\ldots,\hat{\Phi}^m(t,x)$ в области $[a,b]\times D$. Условия трансверсальности (25) дают систему m нелинейных уравнений, связывающих предельные значения на регулярной границе $\partial_r D$ функций $\hat{\Phi}^i(t,p)$, $1\le i\le m$ и их производных по t первого и второго порядка (см. **лемму 6.2**)), а также

предельные значения на регулярной границе элементов матрицы Якоби $\dfrac{\partial\hat{\Phi}^i}{\partial x_j}(t,p)$, $p\in\partial_r D$. На концах временного отрезка при $t=a$, $t=b$ выполнены равенства $\hat{\Phi}^i(a,x)=f_0^i(x)$, $\hat{\Phi}^i(b,x)=f_1^i(x)$, $x\in D$, где $1\le i\le m$, а $f_0, f_1\in C_m^2(\bar{D})$ – заданные функции. Условия на концах $t=a$, $t=b$ изменятся, если в задаче (15) концы считать незакреплёнными. Тогда из **Теоремы 3** следует, что должны быть выполнены условия

$$\left(\frac{\partial\hat{L}}{\partial\psi}+\frac{\partial\hat{M}}{\partial\beta}\circ\pi\right)(a)=\left(\frac{\partial\hat{L}}{\partial\psi}+\frac{\partial\hat{M}}{\partial\beta}\circ\pi\right)(b)=0,$$

что, с учётом **Теоремы 10**, даёт тождество

$$\int\limits_D\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial v^i}h^i dx+\int\limits_{\partial_r D}\frac{\partial\hat{\mathscr{M}}}{\partial v^i}h^i\Big|_{\partial D}d\sigma=0,$$

которое должно быть выполнено для $t=a$, $t=b$ и любого $h\in C_m^1(\bar{D})$. Повторяя заключительную часть доказательства **Теоремы 11**, отсюда получим условия на концах для задачи (15) с незакреплёнными концами: $\dfrac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial v^i}(a)=\dfrac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial v^i}(b)=0$, $\dfrac{\partial\hat{\mathscr{M}}}{\partial v^i}(a)=\dfrac{\partial\hat{\mathscr{M}}}{\partial v^i}(b)=0$, $1\le i\le m$. Эти условия, например, в точке $t=a$ примут вид:

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v^i}\left(a,x,\hat{\Phi}^k(a,x),\frac{\partial\hat{\Phi}^k}{\partial t}(a,x),\frac{\partial\hat{\Phi}^k}{\partial x_j}(a,x)\right)=0,\quad x\in D,\quad 1\le i\le m,$$

$$\frac{\partial\mathscr{M}}{\partial v^i}\left(a,p,\hat{\Phi}^k(a,p),\frac{\partial\hat{\Phi}^k}{\partial t}(a,p)\right)=0,\quad p\in\partial_r D,\quad 1\le i\le m.$$

Аналогичный вид имеют условия в точке $t=b$.

Замечание. Условия гладкости плотностей лагранжианов $\mathscr{L}$ и $\mathscr{M}$ в **Теореме 11**, как это следует из её доказательства, избыточны. Достаточно считать: 1) в области определения $\mathbb{R}\times\bar{D}\times\mathbb{R}^{m(n+2)}$ функция $\mathscr{L}$ непрерывна и существуют непрерывные частные производные $\partial\mathscr{L}/\partial u^i$, $\partial\mathscr{L}/\partial v^i$, $\partial\mathscr{L}/\partial w_j^i$, для $\partial\mathscr{L}/\partial v^i$ существуют непрерывные по совокупности переменных частные производные по аргументам t, u^k, v^s, w_s^k, а для $\partial\mathscr{L}/\partial w_j^i$ существуют непрерывные по совокупности переменных частные производные по аргументам u^k, v^s, w_s^k и в области $\mathbb{R}\times D\times\mathbb{R}^{m(n+2)}$ существуют частные

производные по x_j, непрерывные и непрерывно продолжающиеся на $\mathbb{R}\times\bar{D}\times\mathbb{R}^{m(n+2)}$; 2) в области определения $\mathbb{R}\times\partial D\times\mathbb{R}^{2m}$ функция $\mathscr{M}$ непрерывна и существуют непрерывные частные производные $\partial\mathscr{M}/\partial u^i$, $\partial\mathscr{M}/\partial v^i$, а для $\partial\mathscr{M}/\partial v^i$ существуют непрерывные по совокупности переменных частные производные по аргументам t, u^k, v^s.

§4. Основные уравнения теории упругости и электродинамики Максвелла

В качестве приложения **Теоремы 11** из §3 рассмотрим вывод уравнений теории упругости и электродинамики Максвелла из вариационных принципов.

Начнём с теории упругости. Основной неизвестной величиной в теории упругости является *вектор смещений* $\mathbf{u}(t,x)$, который ищется из системы уравнений [1]

$$\rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}=\frac{E}{2(1+\sigma)}\left\{\Delta\mathbf{u}+\frac{1}{1-2\sigma}\operatorname{graddiv}\mathbf{u}\right\}-\mathbf{F}(x), \tag{29}$$

где ρ – плотность упругой среды, $\mathbf{F}(x)$ – объёмная плотность внешних сил, действующих на упругую среду, E, σ – константы. Константа E называется *модулем растяжения* (или *модулем Юнга*), σ – *коэффициентом Пуассона*. Покажем, что уравнение (29) получается из вариационной задачи:

$$S[\mathbf{u}]\underset{\text{def}}{=}$$

$$=\int_a^b dt\int_D\left\{\frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\right)^2-\frac{E}{2(1+\sigma)}\left[\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}(\operatorname{div}\mathbf{u})^2+\frac{1}{2}\left|\operatorname{rot}\mathbf{u}\right|^2\right]-\left\langle\mathbf{F}(x),\mathbf{u}\right\rangle\right\}dx\to\operatorname{locextr},$$

$$\mathbf{u}(a,x)=\mathbf{u}_0(x),\quad \mathbf{u}(b,x)=\mathbf{u}_1(x),$$

где $D\subseteq\mathbb{R}^3$ – стандартная область, заполненная упругой средой, $\mathbf{F}(x)$, $x\in D$ – непрерывная функция из $C_3(\bar{D})$, $\mathbf{u}_0,\mathbf{u}_1\in C_3^2(\bar{D})$ – заданные функции. В данном случае лагранжева механическая система является локальным полем, для которого $\mathscr{M}=0$, а плотность лагранжиана $\mathscr{L}$ в канонических переменных из §3 имеет вид:

$$\mathscr{L}(t,x,u^i,v^i,w^i_j)=\frac{\rho}{2}\left(\left(v^1\right)^2+\left(v^2\right)^2+\left(v^3\right)^2\right)-\frac{E}{2(1+\sigma)}\left[\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}\left(w_1^1+w_2^2+w_3^3\right)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(w_2^3-w_3^2\right)^2+\frac{1}{2}\left(w_3^1-w_1^3\right)^2+\frac{1}{2}\left(w_1^2-w_2^1\right)^2\right]-\left(F^1(x)u^1+F^2(x)u^2+F^3(x)u^3\right),$$

где приняты обозначения

$$\left(v^1,v^2,v^3\right)=\left(\frac{\partial u^1}{\partial t},\frac{\partial u^2}{\partial t},\frac{\partial u^3}{\partial t}\right),\left(u^1,u^2,u^3\right)=\mathbf{u}(t,x),\ w_j^i=\frac{\partial u^i}{\partial x_j},\ \mathbf{F}=\left(F^1,F^2,F^3\right).\quad(30)$$

Очевидно, для $\mathscr{L}$ выполнены минимальные условия гладкости из **Замечания** в конце §3. Согласно **Теореме 11**, экстремальный дважды непрерывно дифференцируемый по t и $x\in\bar{D}$ вектор смещений $\mathbf{u}(t,x)=\hat{\Phi}(t,x)$, доставляющий locextr вариационной задаче для $S[\mathbf{u}]$, удовлетворяет системе уравнений Эйлера-Остроградского (24):

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial v^i}\right)+\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial u^i}-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial w_j^i}\right)=0,\quad i=1,2,3,\quad x\in D,\quad t\in[a,b],$$

Очевидно, $\partial\hat{\mathscr{L}}/\partial v^i=\rho\partial\hat{\Phi}^i/\partial t$, $\partial\hat{\mathscr{L}}/\partial u^i=-F^i(x)$. Элементарное вычисление показывает, что матрица $\partial\mathscr{L}/\partial w_j^i$ имеет вид:

$$\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial w_j^i}\right]=-\frac{E}{2(1+\sigma)}\left[2\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}\left(w_1^1+w_2^2+w_3^3\right)\mathrm{I}_3+\right.$$
$$\left.+\begin{pmatrix}0 & w_2^1-w_1^2 & w_3^1-w_1^3\\ w_1^2-w_2^1 & 0 & w_3^2-w_2^3\\ w_1^3-w_3^1 & w_2^3-w_3^2 & 0\end{pmatrix}\right],\qquad(31)$$

где I_3 – единичная трёхмерная матрица. Очевидно, $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial w_j^i}\right)$ получается умножением матрицы (31), куда подставляются выражения (30) (результатом указанной подстановки будет матрица $\left[\partial\hat{\mathscr{L}}/\partial w_j^i\right]$), на дифференциальный оператор $\nabla=\left(\partial/\partial x_1,\partial/\partial x_2,\partial/\partial x_3\right)^{\mathrm{T}}$. Учитывая выражение

$$\left[\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial w_j^i}\right]=-\frac{E}{2(1+\sigma)}\left[2\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}(\mathrm{div}\mathbf{u})\mathrm{I}_3+\begin{pmatrix}0 & -(\mathrm{rot}\mathbf{u})^3 & (\mathrm{rot}\mathbf{u})^2\\ (\mathrm{rot}\mathbf{u})^3 & 0 & -(\mathrm{rot}\mathbf{u})^1\\ -(\mathrm{rot}\mathbf{u})^2 & (\mathrm{rot}\mathbf{u})^1 & 0\end{pmatrix}\right],\quad(32)$$

получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial w_j^i}\right)\right)=\left[\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial w_j^i}\right]\begin{pmatrix}\partial/\partial x_1\\ \partial/\partial x_2\\ \partial/\partial x_3\end{pmatrix}=\left[\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial w_j^i}\right]\nabla=-\frac{E}{2(1+\sigma)}\left[2\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}(\mathrm{div}\mathbf{u})\mathrm{I}_3+\right.$$

$$+\left(\frac{\partial(\mathrm{rot}\mathbf{u})^2}{\partial x_3}-\frac{\partial(\mathrm{rot}\mathbf{u})^3}{\partial x_2},\frac{\partial(\mathrm{rot}\mathbf{u})^3}{\partial x_1}-\frac{\partial(\mathrm{rot}\mathbf{u})^1}{\partial x_3},\frac{\partial(\mathrm{rot}\mathbf{u})^1}{\partial x_2}-\frac{\partial(\mathrm{rot}\mathbf{u})^2}{\partial x_1}\right)^{\mathrm{T}}\Bigg]=$$

$$=-\frac{E}{2(1+\sigma)}\left[2\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}\mathrm{graddiv}\mathbf{u}-\mathrm{rotrot}\mathbf{u}\right]=-\frac{E}{2(1+\sigma)}\left[\Delta u+\frac{1}{1-2\sigma}\mathrm{graddiv}\mathbf{u}\right],$$

где использовано известное тождество $\mathrm{rotrot}\mathbf{u}=\mathrm{graddiv}\mathbf{u}-\Delta\mathbf{u}$. Таким образом, уравнения Эйлера-Остроградского имеют вид:

$$-\rho\frac{\partial^2\hat{\Phi}}{\partial t^2}-\mathbf{F}(x)+\frac{E}{2(1+\sigma)}\left[\Delta\hat{\Phi}+\frac{1}{1-2\sigma}\mathrm{graddiv}\hat{\Phi}\right]=0,$$

что совпадает с уравнением (29). Естественные граничные условия для уравнения (29) определяются условиями трансверсальности (25) на границе $\partial_r D$:

$$\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial w_j^i}\ell^j=0,\quad i=1,2,3 \tag{33}$$

и получаются умножением матрицы (32) слева на вектор внешней единичной нормали ℓ в точках регулярной матрицы. Из (32) следует, что условие трансверсальности (33) эквивалентно соотношению

$$2\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}(\mathrm{div}\hat{\Phi})\ell+[\mathrm{rot}\hat{\Phi},\ell]=0,\quad \mathbf{u}(t,x)=\hat{\Phi}(t,x).$$

Умножая последнее равенство скалярно на ℓ и учитывая $\langle\ell,\ell\rangle=1$, $\langle\ell,[\mathrm{rot}\hat{\Phi},\ell]\rangle=0$, получим $\mathrm{div}\hat{\Phi}|_{\partial_r D}=0$ и $(\mathrm{rot}\hat{\Phi})|_{\partial_r D}\|\ell$. Таким образом, дивергенция экстремальной функции $\hat{\Phi}$ на регулярной границе должна обращаться в нуль, а её ротор должен быть параллелен нормали к границе (или, иначе, ортогонален регулярной границе $\partial_r D$).

Рассмотрим теперь уравнения электродинамики Максвелла, определяющие эволюцию электромагнитного поля в заданной стандартной области $D\subseteq\mathbb{R}^3$ [9]

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\mathrm{rot}\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}\,(\text{закон Ампера}),\quad \mathrm{div}\mathbf{E}=4\pi\sigma,\\&\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}+\mathrm{rot}\mathbf{E}=0\,(\text{закон Фарадея}),\quad \mathrm{div}\mathbf{H}=0,\end{aligned} \tag{34}$$

где $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ – напряжённости электрического и магнитного полей, $\mathbf{j}(t,x)$, $\sigma(t,x)$ – известные функции, задающие распределения токов и зарядов в области D, подчиняющиеся очевидному ограничению $\partial\sigma/\partial t+\mathrm{div}\mathbf{j}=0$. Для получения

уравнений Максвелла, считая область D односвязной, введём векторный потенциал $\mathbf{A}$ поля $\mathbf{H}$: $\mathrm{rot}\mathbf{A}=\mathbf{H}$. Тогда из закона Фарадея получим $\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\nabla\varphi$, где φ – некоторая гладкая функция, называемая скалярным потенциалом. Получим уравнения Максвелла (34) из следующей вариационной задачи

$$S[\mathbf{A},\varphi]\underset{\text{def}}{=}\int_a^b dt\int_D\left\{\frac{1}{8\pi}\left[\left|\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+\nabla\varphi\right|^2-\left|\mathrm{rot}\mathbf{A}\right|^2\right]+\frac{\langle\mathbf{j}\cdot\mathbf{A}\rangle}{c}-\sigma\varphi\right\}dx\to\text{locextr},$$

$$\mathbf{A}(a,x)=\mathbf{A}_0(x),\quad \varphi(a,x)=\varphi_0(x),\quad \mathbf{A}(b,x)=\mathbf{A}_1(x),\quad \varphi(b,x)=\varphi_1(x),$$

где $A_0,A_1\in C_3^2(\bar{D})$, $\varphi_0,\varphi_1\in C^2(\bar{D})$ – заданные функции. В данном случае лагранжева механическая система является локальным полем, для которого $\mathscr{M}=0$, а плотность лагранжиана $\mathscr{L}$ в канонических переменных из §3 имеет вид:

$$\mathscr{L}(t,x,u^i,v^i,w_j^i)=\frac{1}{8\pi}\left[\left(\frac{v^1}{c}+w_1^0\right)^2+\left(\frac{v^2}{c}+w_2^0\right)^2+\left(\frac{v^3}{c}+w_3^0\right)^2-\left(w_2^3-w_3^2\right)^2-\right.$$

$$\left.-\left(w_3^1-w_1^3\right)^2-\left(w_1^2-w_2^1\right)^2\right]+\frac{1}{c}\left(j^1u^1+j^2u^2+j^3u^3\right)-\sigma u^0,$$

где приняты обозначения

$$(v^1,v^2,v^3)=\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t},\ v^0=\frac{\partial\varphi}{\partial t},\ (u^1,u^2,u^3)=\mathbf{A},\ u^0=\varphi,\ w_j^i=\frac{\partial A^i}{\partial x_j},\ 1\le i,j\le 3,$$

$$w_j^0=\frac{\partial\varphi}{\partial x_j},\ 1\le j\le 3,\quad \mathbf{j}=(j^1,j^2,j^3),\ \mathbf{A}=(A^1,A^2,A^3). \tag{35}$$

Если $\mathbf{j}(t,x)$, $\sigma(t,x)$ определены и непрерывны по совокупности переменных в $\mathbb{R}\times\bar{D}$, то минимальные условия гладкости для $\mathscr{L}$ из **Замечания** в конце §3 выполнены и, согласно **Теореме 11**, экстремальные функции $\hat{\mathbf{A}}(t,x)$, $\hat{\varphi}(t,x)$ (дважды непрерывно дифференцируемые по t, x в $[a,b]\times\bar{D}$), доставляющие locextr функционалу $S[\mathbf{A},\varphi]$, удовлетворяют системе уравнений Эйлера-Остроградского (24):

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial v^i}\right)+\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial u^i}-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial w_j^i}\right)=0,\quad i=0,1,2,3,\quad x\in D,\quad t\in[a,b].$$

Основной результат состоит в следующем. Пусть

$$\mathbf{E} \underset{\text{def}}{=} -\frac{1}{c}\frac{\partial \hat{\mathbf{A}}}{\partial t} - \nabla\hat{\varphi}, \quad \mathbf{H} \underset{\text{def}}{=} \operatorname{rot}\hat{\mathbf{A}}.$$

Тогда $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ – решение уравнений Максвелла (34). Действительно, из определения $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ и равенств $\operatorname{rot}\nabla = 0$, $\operatorname{divrot} = 0$ тривиально вытекает справедливость второй пары уравнений Максвелла (34). Первая пара уравнений Максвелла получается из уравнений Эйлера-Остроградского. В самом деле, очевидны равенства $\frac{\partial \hat{\mathscr{L}}}{\partial v^i} = \frac{1}{4\pi c}\left(\frac{v^i}{c} + w_i^0\right) = \frac{1}{4\pi c}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \hat{A}^i}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x_i}\right) = -\frac{E^i}{4\pi c}$, $\frac{\partial \hat{\mathscr{L}}}{\partial u^i} = \frac{j^i}{c}$, $1 \le i \le 3$, $\frac{\partial \hat{\mathscr{L}}}{\partial u^0} = -\sigma$, $\frac{\partial \hat{\mathscr{L}}}{\partial v^0} = 0$. Элементарная проверка показывает, что:

$$\left[\frac{\partial \hat{\mathscr{L}}}{\partial w_j^i}\right]_{\substack{0\le i\le 3\\ 1\le j\le 3}} = \frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix} v^1/c + w_1^0 & v^2/c + w_2^0 & v^3/c + w_3^0 \\ 0 & w_1^2 - w_2^1 & w_1^3 - w_3^1 \\ w_2^1 - w_1^2 & 0 & w_2^3 - w_3^2 \\ w_3^1 - w_1^3 & w_3^2 - w_2^3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Откуда с учётом соотношений (35) и выражения векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ через $\hat{\mathbf{A}}$ и $\hat{\varphi}$ получим

$$\left[\frac{\partial \hat{\mathscr{L}}}{\partial w_j^i}\right] = \frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix} -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ 0 & H^3 & -H^2 \\ -H^3 & 0 & H^1 \\ H^2 & -H^1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (36)$$

Очевидно, $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \hat{\mathscr{L}}}{\partial w_j^i}\right)$ получается умножением матрицы (36) на дифференциальный оператор ∇ слева, откуда:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \hat{\mathscr{L}}}{\partial w_j^i}\right)\right) = \frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix} -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ 0 & H^3 & -H^2 \\ -H^3 & 0 & H^1 \\ H^2 & -H^1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix} -\operatorname{div}\mathbf{E} \\ \frac{\partial H^3}{\partial x_2} - \frac{\partial H^2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial H^1}{\partial x_3} - \frac{\partial H^3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial H^2}{\partial x_1} - \frac{\partial H^1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix} -\operatorname{div}\mathbf{E} \\ (\operatorname{rot}\mathbf{H})^1 \\ (\operatorname{rot}\mathbf{H})^2 \\ (\operatorname{rot}\mathbf{H})^3 \end{pmatrix}.$$

Подставляя результаты проведённых вычислений в уравнения Эйлера-Остроградского, получим:

$$i=0:-\sigma+\frac{1}{4\pi}\mathrm{div}\mathbf{E}=0,\quad 1\le i\le 3:\ \frac{\mathbf{j}}{c}+\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}-\frac{1}{4\pi}\mathrm{rot}\mathbf{H}=0,$$

что совпадает с первой парой уравнений Максвелла (34).

Естественные граничные условия определяются условиями трансверсальности (25), которые равносильны равенству нулю результата умножения матрицы (36) справа на вектор единичной внешней нормали ℓ:

$$\frac{\partial\hat{\mathscr{L}}}{\partial w^i_j}\ell^j=0\quad\Leftrightarrow\quad\langle\mathbf{E},\ell\rangle=0,\quad[\mathbf{H},\ell]=0.$$

Итак, для экстремальных потенциалов $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\varphi}$ определяемое или электромагнитное поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ на границе $\partial_r D$ удовлетворяет условиям: поле $\mathbf{E}$ касается $\partial_r D$, а поле $\mathbf{H}$ ортогонально регулярной границе $\partial_r D$.

Список литературы

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. – М.: Наука, 1965. 204 с.
2. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения. – М.: Наука, 1979. 760 с.
3. Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. – М.: Мир, 1971. 392 с.
4. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979. 432 с.
5. Дьёдонне Ж. Основы современного анализа. – М.: Мир, 1964.
6. Буслаев В.С. Вариационное исчисление. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1980. 288 с.
7. Зуланке Р., Винтген П. Дифференциальная геометрия и расслоения. – М.: Мир, 1975. 348 с.
8. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теория и задачи функционального анализа. – М.: Наука, 1979.
9. Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 616 с.