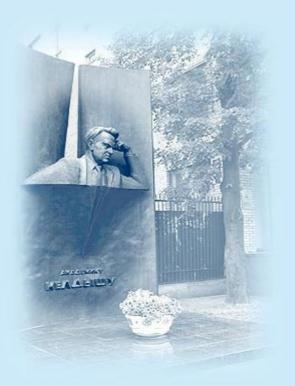


ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 13 за 2021 г.



ISSN 2071-2898 (Print) ISSN 2071-2901 (Online)

П.А. Бахвалов

Об использовании элементно-центрированной конечно-объёмной схемы на призматических сетках в пристеночном слое

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Бахвалов П.А. Об использовании элементно-центрированной конечно-объёмной схемы на призматических сетках в пристеночном слое // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. № 13. 44 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2021-13

https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-13

Ордена Ленина ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ имени М.В.КЕЛДЫША Российской академии наук

П. А. Бахвалов

Об использовании элементно-центрированной конечно-объёмной схемы на призматических сетках в пристеночном слое

П. А. Бахвалов

Об использовании элементно-центрированной конечно-объёмной схемы на призматических сетках в пристеночном слое

Рассматривается обобщение объёмно-центрированной конечно-объёмной схемы с квазиодномерной реконструкцией переменных на анизотропные призматические сетки, широко применяемые в задачах высокорейнольдсового обтекания. Для определения потоков через боковые грани призмы предлагается использовать реконструкцию вдоль поверхности, а не вдоль касательной к ней. Также изучается вопрос влияния учёта кривизны сеточных элементов на точность результатов расчёта.

Ключевые слова: неструктурированная сетка, призматический слой, метод конечных объёмов, схема MUSCL

Pavel Alexeevich Bakhvalov

On the use of a cell-centered finite-volume scheme on prismatic meshes in boundary layers

We consider the cell-centered finite-volume scheme with the quasi-one-dimensional reconstruction and generalize it to anisotropic prismatic meshes suitable for high-Reynolds-number problems. We offer a new algorithm of flux computation based on the reconstruction along the wall surface, whereas in the original schemes it was along the tangent to the wall surface. We also study how does the curvature of mesh elements influence the accuracy if taken into account.

Key words: unstructured mesh, prismatic layer, finite-volume method, cell-centered scheme, multislope MUSCL method

Содержание

1	Введение
2	Базовая конечно-объёмная схема
3	Схемы с квазиодномерной реконструкцией
4	Когда важна криволинейность
5	Схема на полуструктурированной сетке
6	Задача об акустической волне в канале
7	Анализ ошибки аппроксимации
8	Задача от обтекании профиля NACA0012
9	Учёт криволинейности сетки
10	Заключение
Спи	сок литературы

1. Введение

Среди задач динамики сжимаемого газа, решаемых при помощи численного моделирования, большинство составляют задачи обтекания при высоких числах Рейнольдса. В них вблизи обтекаемого тела возникает пограничный слой, обусловленный эффектами вязкости и теплопроводности. Качество численного моделирования в области пограничного слоя определяет точность предсказания силы трения, действующей на обтекаемое тело. Но если разрешать этот слой изотропной расчётной сеткой, то объём такой сетки будет неприемлемым для практических приложений¹. Поэтому численное моделирование задач аэродинамики предполагает использование анизотропных сеток.

Расчётные сетки для решения трёхмерных задач внешнего обтекания обычно строятся по следующей схеме. Вначале на поверхности обтекаемого тела строится поверхностная сетка (треугольная, четырёхугольная или смешанная). Затем эта сетка протягивается (extrusion) по направлению, близкому к нормали к поверхности, причём шаг в нормальном направлении вблизи поверхности обычно много меньше шага по касательным направлениям. Тем самым в некоторой области вблизи поверхности получается анизотропная сетка из треугольных призм и/или гексаэдров. Наконец, такие фрагменты сеток, построенные около разных поверхностей, либо сшиваются через подобласти неструктурированной трёхмерной сетки, коей заполняется вся оставшаяся часть расчётной области, либо сшиваются между собой и с декартовой сеткой в оставшейся части расчётной области через интерфейсы типа Chimera [1,2].

Если поверхностная сетка была структурированной, то фрагмент трёхмерной сетки, получающийся в результате протяжки, также является структурированным (то есть каждому узлу или каждому элементу этого сеточного фрагмента можно сопоставить три индекса i=(i,j,k), так чтобы соседство между узлами/элементами i_1 и i_2 определялось только по разности i_1-i_2). Если же поверхностная сетка является неструктурированной, то фрагмент объёмной сетки получается полуструктурированным. При этом каждый его элемент характеризуется номером слоя (0 — граничный, 1 — соседний с граничным и т. д.) и номером элемента поверхностной сетки, который был его прародителем. Нумерацию парой индексов — номером слоя и номером граничного узла — можно ввести и для сеточных узлов.

Формально можно рассматривать сетку с полуструктурированными фрагментами как неструктурированную и применять для неё методы, разработанные для неструктурированных сеток. Такой подход успешно применяется, в

 $^{^{1}}$ В аэродинамике числа Рейнольдса в диапазоне от 10^{4} до 10^{6} называются низкими, что соответствует физическим эффектам, не характерным для более высоких чисел. Но поскольку уже при $Re=10^{4}$ использование изотропной сетки становится крайне неэффективным, с точки зрения численных методов такое число Рейнольдса уже считается высоким.

частности, для разрывного метода Галёркина. Однако при аппроксимации конвективных членов в уравнениях Навье — Стокса конечно-объёмными схемами повышенной точности это может оказаться плохим решением. Так, для вершинно-центрированных схем с квазиодномерной реконструкцией переменных было показано [3], что на криволинейной структурированной сетке они проигрывают по точности конечно-разностным схемам и к тому же иногда приводят к неустойчивому счёту, требуя тем самым взвешивания их со схемой первого порядка. Естественно ожидать, что эти же эффекты будут иметь место и для объёмно-центрированных схем с квазиодномерной реконструкцией [4, 5].

В настоящей работе предлагается обобщение объёмно-центрированной конечно-объёмной схемы с квазиодномерной реконструкцией [4, 5] и её модификации [6] на случай сеток с анизотропными призматическими элементами. Во-первых, показывается, что, в отличие от вершинно-центрированных схем с квазиодномерной реконструкцией, необходимо учитывать кривизну сеточных рёбер. Использование сеток высокого порядка, простейшим случаем которого является учёт кривизны рёбер, является общепризнанной необходимостью для схем, основанных на точности на полиномах порядка 2 или выше, но для схем, основанных на точности на линейной функции, насколько известно автору, эта необходимость в литературе не отмечалась. Во-вторых, аналогично вершинноцентрированному случаю, предлагается для определения потоков между двумя призмами, смежными по боковой грани, использовать информацию только внутри того слоя призм, которому принадлежат эти две призмы. Работоспособность получающейся при этом схемы демонстрируется на задаче об акустической волне в цилиндрическом канале (при наличии вязкости и теплопроводности) и на задаче обтекания профиля NACA0012.

2. Базовая конечно-объёмная схема

2.1. Решаемые уравнения. Описание схемы будем вести для системы уравнений Навье – Стокса для идеального газа:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F}(Q) = \nabla \cdot \mathcal{F}^{V}(Q, \nabla Q), \tag{1}$$

где $Q = (\rho, \rho \boldsymbol{u}, E)^T$, $E = \rho \boldsymbol{u}^2/2 + p/(\gamma - 1)$ и

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{u} \\ \rho \mathbf{u} \mathbf{u} + p \mathbf{I} \\ (E+p) \mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}^{V}(Q, \nabla Q) = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{q} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Тензор вязких напряжений ${m au}=\{ au_{\alpha\beta}\}$ и тепловой поток ${m q}=\{q_{\alpha}\}$ определяются как

$$\tau_{\alpha\beta} = \mu \left(\nabla_{\alpha} u_{\beta} + \nabla_{\beta} u_{\alpha} - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} \nabla_{\xi} u_{\xi} \right), \quad q_{\alpha} = -\frac{\gamma \mu}{\Pr} \nabla_{\alpha} \left(\frac{p}{(\gamma - 1)\rho} \right). \tag{3}$$

Расчёты обтекания профиля NACA0012 будем проводить в рамках RANS (осреднённых по Рейнольдсу уравнений Навье – Стокса) с источником Спаларта – Аллмараса [7].

Также будем рассматривать линеаризованный аналог системы (1)–(3) на фоновом поле, заданном равенствами $\bar{\rho}=1, \, \bar{\boldsymbol{u}}=0, \, \bar{p}=1/\gamma$. Он имеет вид (1) при $Q=(\rho',\boldsymbol{u}',p'/(\gamma-1))^T$,

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}' \\ p' \mathbf{I} \\ \mathbf{u}'/(\gamma - 1) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}^{V}(Q, \nabla Q) = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\tau} \\ \nabla(\gamma p' - \rho') \ \mu/\Pr/(\gamma - 1) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где компоненты au определены (3) с подстановкой $u \equiv u'$.

2.2. Конечно-объёмная схема. Пусть расчётная область G покрыта расчётной сеткой, состоящей из непересекающихся сеточных элементов (ячеек). Обозначим через V_j форму ячейки j, через $|V_j|$ её объём, через $N_1(j)$ — множество ячеек, имеющих общую грань с ячейкой j, через $\Gamma(j)$ — множество граней ячейки j, лежащих на границе расчётной области.

Введём ориентированные площади сеточных граней как

$$\boldsymbol{n}_{jk} = -\boldsymbol{n}_{kj} = \int_{\partial V_j \cap \partial V_k} \boldsymbol{n} dS, \quad k \in N_1(j);$$

$$\boldsymbol{n}_{\gamma} = \int_{\gamma} \boldsymbol{n} dS, \quad \gamma \in \Gamma(j),$$
(5)

где n — единичная нормаль, внешняя по отношению к ячейке j. Отметим, что n_{jk} и n_{γ} зависят только от формы границы соответствующей сеточной грани (т. е. от формы рёбер), но не от формы самой грани. Действительно, для сеточной грани S по формуле Стокса имеем

$$\int_{S} \mathbf{n} dS = \frac{1}{2} \oint_{\partial S} \begin{pmatrix} z dy - y dz \\ x dz - z dx \\ y dx - x dy \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Если, глядя со стороны ячейки j, обход ведётся в положительном направлении, то вычисляемая таким образом нормаль является внешней по отношению

к ячейке j. Объёмы сеточных ячеек $|V_j|$ уже зависят от формы граней, но способ их определения влияет на точность схемы значительно меньше, чем способ вычисления ориентированных площадей граней.

Запишем конечно-объёмную схему для (1) в общем виде. Для $j \in E$ имеем

$$|V_j|\frac{dQ_j}{dt} + \sum_{k \in N_1(j)} F_{jk} + \sum_{\gamma \in \Gamma(j)} F_{\gamma} = \sum_{k \in N_1(j)} F_{jk}^V + \sum_{\gamma \in \Gamma(j)} F_{\gamma}^V,$$

где через $F_{jk}=-F_{kj}$ и $F_{jk}^V=-F_{kj}^V$ обозначены конвективные и диффузионные потоки между ячейками j и k, а через F_γ и F_γ^V – граничные потоки.

2.3. Вычисление конвективных потоков. Конвективные потоки F_{jk} определяются из приближённого решения задачи о распаде разрыва:

$$F_{jk} = \frac{\mathcal{F}(Q_{jk}) + \mathcal{F}(Q_{kj})}{2} \cdot \boldsymbol{n}_{jk} - |\boldsymbol{n}_{jk}||A_{jk}|\frac{Q_{jk} - Q_{kj}}{2}.$$
 (7)

Если не сказано обратное, матрица $|A_{jk}|=|A_{kj}|$ определяется методом Роу (см. [8]) по значениям Q_j и Q_k . В случае базовой конечно-объёмной схемы предраспадные значения определяются как $Q_{jk}=Q_j$, $Q_{kj}=Q_k$; определение этих переменных в схемах повышенной точности будет рассмотрено ниже. Для линеаризованных уравнений схема записывается аналогично.

Для граничных граней с условиями входа-выхода потоки F_{γ} также вычисляются по схеме Роу, в которую подставляются значение в ячейке j, частью границы которой является γ , и значение Q_{γ} , определяемое в зависимости от конкретной спецификации граничного условия (см., например, [9]). Для линеаризованных уравнений $Q_{\gamma}=0$.

Для граничной грани γ с условием непротекания или прилипания поток вычисляется по формуле

$$F_{\gamma} = (0, p_{\gamma} \boldsymbol{n}_{\gamma}, 0)^{T}, \tag{8}$$

что соответствует формальной подстановке нулевой нормальной скорости в формулу для потоков. В случае базовой конечно-объёмной схемы $p_{\gamma}=p_{j}$. В случае линеаризованных уравнений давление заменяется его пульсацией.

2.4. Вычисление диффузионных потоков. Диффузионные потоки определяются как $F_{jk}^V = \mathcal{F}^V \cdot \boldsymbol{n}_{jk}$, где \mathcal{F}^V определяется формулами (2), (3), в которые в качестве скорости и коэффициента вязкости подставляется $(\boldsymbol{u}_j + \boldsymbol{u}_k)/2$ и $(\mu_j + \mu_k)/2$ соответственно, а в качестве градиентов скоростей и внутренней энергии подставляются величины вида

$$\left(I - \frac{\boldsymbol{e}_{jk} \otimes \boldsymbol{e}_{jk}}{|\boldsymbol{e}_{jk}|^2}\right) \frac{(\nabla f)_j + (\nabla f)_k}{2} + (f_k - f_j) \frac{\boldsymbol{e}_{jk}}{|\boldsymbol{e}_{jk}|^2}, \tag{9}$$

где f — величина, от которой берётся градиент (компонента скорости или внутренняя энергия, а для линеаризованных уравнений — их пульсации),

$$(\nabla f)_j = \frac{1}{|V_j|} \sum_{k \in N_1(j)} n_{jk} \frac{f_j + f_k}{2}, \tag{10}$$

 $e_{jk} = r_k - r_j$, а r_j и r_k – радиус-векторы центров ячеек. Этот подход является стандартным, см., например, [10]. О возможных определениях центров ячеек см. ниже.

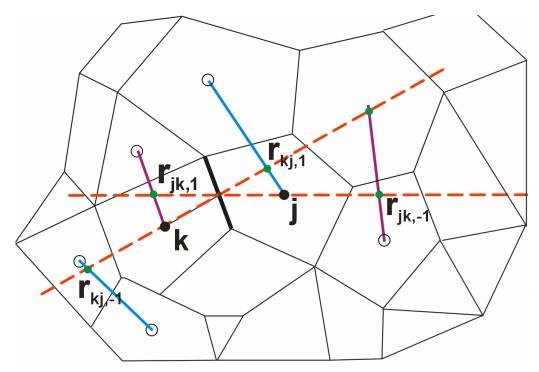
На граничных гранях с условиями входа-выхода полагается $F_{\gamma}^{V}=0$. На граничных гранях с условием прилипания и изотермической стенкой, если граничные значения скоростей и температуры одинаковые по пространству, диффузионные потоки определяются формулой $F_{\gamma}^{V}=\mathcal{F}^{V}\cdot\boldsymbol{n}_{\gamma}$, где \mathcal{F}^{V} определяется формулами (2), (3), в которые подставляются нулевые касательные производные, а нормальные производные полагаются равными $(f_{j}-f_{\gamma})/d_{\gamma}$, где j – ячейка, частью границы которой является грань γ , f_{γ} – заданное значение на границе, а $d_{\gamma}=|(\boldsymbol{r}_{j}-\boldsymbol{r}_{\gamma})\cdot\boldsymbol{n}_{\gamma}|/|\boldsymbol{n}_{\gamma}|$. Поток плотности, очевидно, полагается равным нулю. Условие прилипания с адиабатической стенкой задаётся аналогично с тем отличием, что нормальная производная от внутренней энергии полагается равной нулю.

2.5. Интегрирование по времени. В работе используется трёхстадийная явная схема Рунге — Кутты 3-го порядка и неявные схемы, которые строятся следующим образом. Записывается неявная схема BDF1² (для стационарных задач) или BDF2 (для нестационарных задач). Для приближённого решения получающейся системы нелинейных алгебраических уравнений выполняется одна (для стационарных задач) или две (для нестационарных задач) итерации модифицированного метода Ньютона. Якобиан конвективных потоков считается по базовой конечно-объёмной схеме, причём зависимостью собственных векторов и собственных значений от решения при этом пренебрегается. При вычислении якобиана диффузионных потоков первым слагаемым в (9) также пренебрегается.

3. Схемы с квазиодномерной реконструкцией

В основе предлагаемой схемы повышенной точности для призматических сеток лежит схема с квазиодномерной реконструкцией переменных на неструктурированной сетке [4,5].

²BDF – backward difference formula – одностадийная двухслойная (BDF1) или трёхслойная (BDF2) схема. BDF1 также называется неявным методом Эйлера.



Puc. 1. Определение предраспадных значений по схеме BBR3 на неструктурированной сетке

Для каждой грани определим точку $r_{jk} = r_{kj}$, которую будем называть её центром. Если грань плоская, будем считать центром грани её центр масс. Для неплоских граней (в т. ч. заданных только координатами вершин) центр можно определять по-разному; один из возможных вариантов предложен в [5].

Также для каждого элемента определим его центр r_j . Естественным выбором является определение центра ячейки как его центр масс. Однако в разделе 5.2 будет показано, что в случае анизотропной сетки центры ячеек лучше определять иначе.

Предраспадное значение Q_{jk} будем находить реконструкцией по значению Q_j (в точке r_j) и значениям в двух вспомогательных точках, лежащих на прямой, проходящей через r_j и r_{jk} , см. рис. 1. Значения в этих вспомогательных точках определяются линейной интерполяцией. Предраспадное значение Q_{kj} определяется аналогично с использованием прямой, проходящей через r_k и r_{jk} .

Ниже опишем процедуру определения предраспадных значений подробнее, внося необходимую коррекцию для повышения надёжности.

3.1. Интерполяционные конструкции. Пусть в пространстве задана точка r_0 , единичный вектор e, конечное множество попарно различных точек \mathcal{M} и его подмножество $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{M}$, содержащее не более одной точки. Определим процедуру нахождения вспомогательной точки $r_0 + Le$ и коэффициентов для ин-

терполяции в неё функции, заданной на \mathcal{M} .

Упорядочим все точки из \mathcal{M} по убыванию величины $(\boldsymbol{r}_m - \boldsymbol{r}_0) \cdot \boldsymbol{e}$, то есть будем считать, что $\mathcal{M} = \{\boldsymbol{r}_m, m = 1, \dots, |\mathcal{M}|\}$, причём

$$({m r}_1 - {m r}_0) \cdot {m e} \geqslant ({m r}_2 - {m r}_0) \cdot {m e} \geqslant \ldots \geqslant ({m r}_{|\mathcal{M}|} - {m r}_0) \cdot {m e}.$$

Рассмотрим все пары (2D) точек $\boldsymbol{m}=(m_1,m_2)$ или тройки (3D) точек $\boldsymbol{m}=(m_1,m_2,m_3),\,m_l=1,\ldots,|\mathcal{M}|.$ Если $\tilde{\mathcal{M}}\neq\varnothing$ и в этой паре (тройке) не содержится точка, входящая в $\tilde{\mathcal{M}}$, такую пару (тройку) исключим из рассмотрения. Среди оставшихся пар (троек) отберём такие, что симплекс (отрезок или треугольник) с вершинами \boldsymbol{r}_{m_l} пересекает луч, выпущенный из точки \boldsymbol{r}_0 по направлению \boldsymbol{e} , то есть векторное равенство

$$\sum_{l=1}^d lpha_l (oldsymbol{r}_{m_l} - oldsymbol{r}_0) = oldsymbol{e},$$

рассматриваемое как система относительно α_l , имеет неотрицательное решение. Здесь d – размерность пространства (2 или 3). Если эта система является вырожденной, такую пару (тройку) точек можно отбросить. Положим $L=(\sum_l \alpha_l)^{-1}$ и $\tilde{\alpha}_l=L\alpha_l$.

Полученные коэффициенты $\tilde{\alpha}_l$ являются коэффициентами выпуклой линейной интерполяции в точку $\boldsymbol{r}_0 + L\boldsymbol{e}$. Будем называть совокупность точек \boldsymbol{r}_{m_l} , коэффициентов $\tilde{\alpha}_l$ и длины L интерполяционной конструкцией.

Если удаётся определить несколько интерполяционных конструкций, то можно поступить одним из двух способов. В [4] предлагается использовать конструкцию с наибольшим значением L. В [5] предлагается использовать конструкцию с наименьшим значением величины m_1+m_2 (в 2D) или $m_1+m_2+m_3$ (в 3D). Последний вариант кажется менее наглядным, однако на практике не было замечено его существенных недостатков, и при этом он позволяет выбрать интерполяционную конструкцию намного быстрее, чем при использовании первого варианта. Хотя на неподвижной сетке эта процедура вызывается только на этапе инициализации расчёта, время её работы может быть существенно для отладочных запусков и системы регрессионного тестирования [11].

3.2. Определение предраспадных значений. Все операции интерполяции и вычисления предраспадных значений, описанные в настоящем подпункте, проводятся над набором физических, а не консервативных переменных. Поэтому будем считать, что до выполнения процедуры вычисления потоков в каждой ячейке определены значения $U = (\rho, \boldsymbol{u}, p)^T$, а предраспадные значения U_{jk} и U_{kj} после их вычисления очевидным образом преобразуются к консерватив-

ным переменным. В случае линеаризованной системы (4) это преобразование сводится к домножению последней компоненты на $\gamma - 1$.

Рассмотрим упорядоченную пару смежных ячеек j и k. Для определения предраспадного значения U_{jk} проведём следующие построения. Пусть $\tilde{N}_1(j)$ — множество радиус-векторов центров ячеек, имеющих с ячейкой j хотя бы один общий узел. Составим множество $\hat{N}_1(j)$ следующим образом: положим $\hat{N}_1(j) = \tilde{N}_1(j)$, и для каждой граничной грани γ ячейки j добавим к $\hat{N}_1(j)$ радиус-векторы всех вершин γ .

Обозначим через e единичный вектор по направлению r_j-r_{jk} . Пусть Λ^- – интерполяционная конструкция, построенная описанным выше алгоритмом, получившим на вход точку r_j , вектор e, множество точек $\hat{N}_1(j)$ и пустое множество. Если Λ^- не определена алгоритмом, а равно если хотя бы одна из точек, использованных в интерполяционной конструкции, является граничным узлом сетки, будем считать, что точка $r_{jk,-1}$ и значение $U_{jk,-1}$ в ней не определены. Иначе введём точку $r_{jk,-1}=r_j+L_{\Lambda}^-e$, где L_{Λ}^- – значение L в интерполяционной конструкции Λ^- , и определим значение $U_{jk,-1}$ в точке $r_{jk,-1}$ линейной интерполяцией с коэффициентами, содержащимися в Λ^- .

Похожим образом определим значение $U_{jk,1}$. Пусть Λ^+ — интерполяционная конструкция, построенная описанным выше алгоритмом, получившим на вход точку \boldsymbol{r}_{jk} , вектор $(-\boldsymbol{e})$, множество точек $\hat{N}_1(j)$ и множество из одной точки $\tilde{\mathcal{M}}=\{\boldsymbol{r}_k\}$. Если Λ^+ не определена алгоритмом, а равно если хотя бы одна из точек, использованных в интерполяционной конструкции, является граничным узлом сетки, будем считать, что точка $\boldsymbol{r}_{jk,1}$ и значение $U_{jk,1}$ в ней не определены. Иначе введём точку $\boldsymbol{r}_{jk,1}=\boldsymbol{r}_j-L_{\Lambda}^+\boldsymbol{e}$, где L_{Λ}^+ — значение L в интерполяционной конструкции Λ^+ , и определим значение $U_{jk,1}$ в точке $\boldsymbol{r}_{jk,1}$ линейной интерполяцией с коэффициентами, содержащимися в Λ^+ .

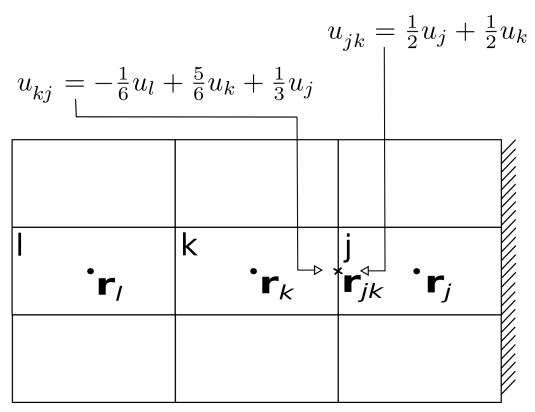
Для избежания вырождения полагается $\tilde{L}_{\Lambda}^- := \max\{L_{\Lambda}^-, |{\bm r}_j - {\bm r}_{jk}|/K_{\max}\}$, где K_{\max} — некоторая заданная константа; если не оговорено иное, используется значение $K_{\max} = 7$. Уменьшение этой константы увеличивает численную вязкость, увеличение приводит к увеличению риска возникновения неустойчивости.

Наконец, предраспадное значение U_{ik} определяется как

$$U_{jk} = U_j + \frac{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{jk}|}{2} \left(\frac{1}{3} \frac{U_j - U_{jk,-1}}{\tilde{L}_{\Lambda}^-} + \frac{2}{3} \frac{U_{jk,1} - U_j}{L_{\Lambda}^+ + |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{jk}|} \right).$$
(11)

Если значение $U_{jk,1}$ не определено, то можно либо использовать двухточечную экстраполяцию

$$U_{jk} = U_j + \frac{|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_{jk}|}{2} \frac{U_j - U_{jk,-1}}{\tilde{L}_{\Lambda}^-}$$
(12)



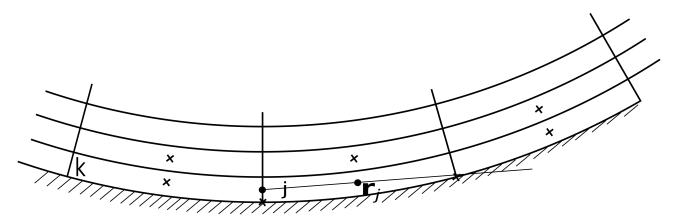
Puc. 2. Определение предраспадного значения на первом приграничном сегменте

(обозначим эту модификацию как BF0), либо формально положить $U_{jk,1}=U_k$, $L_{\Lambda}^+=|{\bm r}_j-{\bm r}_{jk}|$ и использовать стандартную трёхточечную интерполяцию (11) (обозначим эту модификацию как BF1). Аналогично, если не удаётся определить значение $U_{jk,-1}$, можно положить

$$U_{jk} = U_j + \frac{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{jk}|}{2} \frac{U_{jk,1} - U_j}{L_{\Lambda}^+ + |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{jk}|}$$
(13)

или просто $U_{jk}=(U_j+U_k)/2$. Последняя ситуация естественным образом возникает вблизи границы, см. рис. 2, в том числе в одномерном случае; при этом предлагаемый подход (определение U_{kj} по трём точкам и U_{jk} по двум точкам), как показывает опыт, обеспечивает устойчивый счёт и второй порядок точности. В размерности более единицы эта ситуация также возникает при определении потоков между граничными ячейками, лежащими на вогнутой границе, см. рис. 3. Фактически в этом слое для определения производной по углу является центрально-разностная схема, однако из-за того, что она используется только в одном слое ячеек, это обычно не приводит к неустойчивости.

Если требуется монотонизация решения, то вместо физических переменных используются характеристические переменные, к которым применяется



Puc.~3.~ Определение предраспадного значения при определении потока вдоль вогнутой поверхности. Крестиками обозначены точки множества \mathcal{M} при определении точки $\boldsymbol{r}_{ik.-}$

ограничитель:

$$Q_{jk} = Q_j + \frac{|{\bm r}_j - {\bm r}_{jk}|}{2} S \ LimiterFunc\left(\frac{S^{-1}(Q_j - Q_{jk,-1})}{L_{\Lambda}^{-}}, \frac{S^{-1}(Q_{jk,1} - Q_j)}{L_{\Lambda}^{+} + |{\bm r}_j - {\bm r}_{jk}|}\right),$$

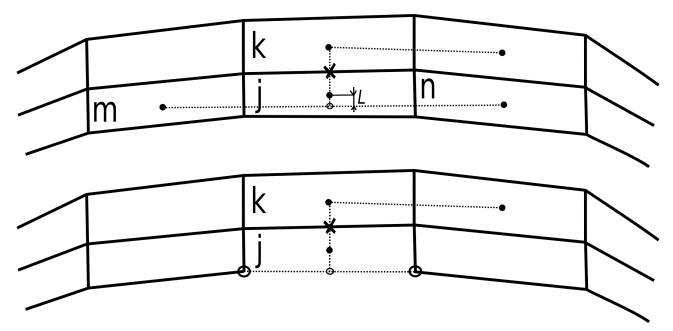
где S — матрица собственных векторов матрицы A_{jk} , а $LimiterFunc(\cdot,\cdot)$ — некоторая функция, например, minmod. Если значения $Q_{jk,\pm}$ не определены, то монотонизация решения оказывается невозможной; в зависимости от ситуации можно пользоваться немотонизированной схемой или полагать $Q_{jk}=Q_{j}$.

Значение U_{kj} определяется аналогичным образом, при этом используются лучи, лежащие на прямой, проходящей через \boldsymbol{r}_k и \boldsymbol{r}_{jk} .

Чтобы схема была консервативной, требуется выполнение условия $F_{jk}=-F_{kj}$, что обеспечивается однозначным определением U_{jk} и U_{kj} . В обычной ситуации эти значения вычисляются в цикле по сеточным граням и это условие выполняется автоматически. В случае задания периодических граничных условий автором используется реализация, при которой одно и то же значение (скажем, U_{jk}) вычисляется независимо для двух граней, для которых эти значения должны совпадать. Поскольку интерполяционные конструкции могут, вообще говоря, определяться неоднозначно, требуется искусственное согласование интерполяционных конструкций. Аналогичная операция проводится и при расчётах в многопроцессорном режиме.

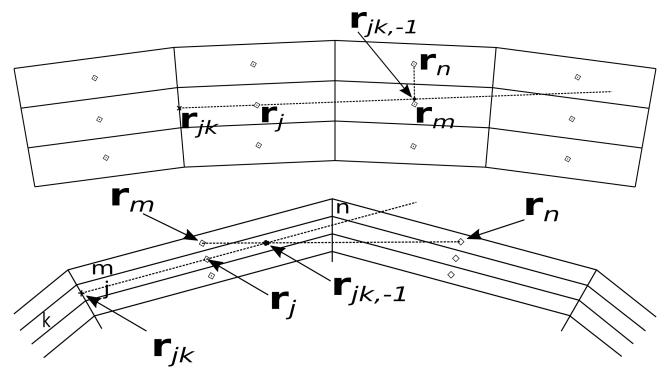
Остаётся описать процедуру определения значений p_{γ} , используемых в граничном условии отражения или прилипания. Пусть j – ячейка и γ – её граничная грань. Проведём луч из \boldsymbol{r}_j в направлении, противоположном направлению на \boldsymbol{r}_{γ} . Аналогично определению $U_{jk,-1}$ для внутренних граней определяется $U_{\gamma,-1}$, после чего по аналогии с (12) используется экстраполяция

$$p_{\gamma} = p_j + \frac{|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_{\gamma}|}{2} \frac{p_j - p_{\gamma,-1}}{\tilde{L}_{\Lambda}^-}.$$



Puc. 4. Схема реконструкции вблизи границы. Сверху: оригинальный алгоритм, снизу: исправленный алгоритм

- **3.3. Объяснение изменений.** Подчеркнём изменения, внесённые в настоящей работе в алгоритм реконструкции, и поясним их смысл на примерах.
- 1. Во множество $\hat{N}_1(j)$ добавляются граничные узлы сетки. Рассмотрим определение предраспадного значения U_{jk} на грани jk, которая вместе с окружающим её фрагментом сетки изображена на рис. 4. В случае плоской границы значение U_{jk} в этой конфигурации не определено. Если же граница является выпуклой и имеет сколь угодно малую кривизну, то значение $U_{kj,-1}$ формально определяется интерполяцией по U_m и U_n , причём чем кривизна меньше, тем меньше $L \equiv L_{\Lambda}^-$ (рис. 4, сверху). Это, весьма вероятно, приведёт к неустойчивости. Если же использовать алгоритм, описанный в настоящем разделе, то в рассматриваемом случае точка $U_{kj,-1}$ не определяется (обе точки r_{m_1} и r_{m_2} являются граничными узлами, а не центрами ячеек), что согласуется со случаем плоской границы.
- 2. Определение значения $U_{jk,1}$ проводится интерполяцией, причём в шаблон интерполяции обязательно включается точка r_k . Данная поправка является необходимой, если шаблон интерполяции выбирается путём максимизации L_{Λ}^+ . Снова обратимся к рис. 4 и рассмотрим процедуру определения значения $U_{kj,1}$ (т. е. реконструкции "через грань" для определения значения U_{kj}). Критерий максимизации L_{Λ}^+ вместо $U_{kj,1}=U_j$ даст неудачную интерполяцию $U_{kj,1}=(U_m+U_n)/2$. При использовании критерия минимизации m_1+m_2 эта поправка не требуется.



Puc. 5. Схема реконструкции для различных коэффициентов анизотропии. Сверху: $\alpha \ll 1$; снизу: $\alpha \gg 1$

4. Когда важна криволинейность

Расчётную сетку в пристеночной подобласти обычно характеризуют коэффициентом анизотропии H/h, где H — шаг сетки вдоль поверхности, а h — шаг по нормали к поверхности. Но для схем с квадиодномерной реконструкцией, записанных на призматической сетке (с постоянным h) около плоской поверхности, коэффициент анизотропии входит только в величины V_j и n_{jk} , но не влияет на способ определения предраспадных значений. В то же время, для криволинейной поверхности коэффициент анизотропии влияет на свойство этих схем более существенно, что очевидно, например, из рис. 5.

В [12] была отмечена другая характеристика сетки, а именно $\alpha=H^2/(2Rh)$. Продемонстрируем её роль на примере трёх геометрический операций.

4.1. Центр масс ячейки. Рассмотрим четырёхугольную ячейку сетки с вершинами в точках $r=r_0\pm\Delta r/2$, $\phi=\phi_0\pm\Delta\phi/2$. Вычислим её центр масс, интерпретируя её форму а) как четырёхугольник с прямыми рёбрами и б) как область, заданную неравенствами

$$r_0 - \frac{\Delta r}{2} < r < r_0 + \frac{\Delta r}{2}, \quad \phi_0 - \frac{\Delta \phi}{2} < \phi < \phi_0 + \frac{\Delta \phi}{2}.$$
 (14)

В обоих случаях очевидно, что центр масс лежит на луче $\phi=\phi_0$, поэтому нужно вычислить только координату вдоль этого луча.

В случае четырёхугольника с прямыми рёбрами имеем

$$\begin{split} r_c &= \frac{\int\limits_{(r_0 + \Delta\phi/2)\cos(\Delta\phi/2)}^{(r_0 + \Delta\phi/2)\cos(\Delta\phi/2)} 2x \, \mathrm{tg}(\Delta\phi/2) \, x dx}{\int\limits_{(r_0 + \Delta\phi/2)\cos(\Delta\phi/2)}^{(r_0 + \Delta\phi/2)\cos(\Delta\phi/2)} = \\ &\int\limits_{(r_0 - \Delta\phi/2)\cos(\Delta\phi/2)}^{(r_0 + \Delta\phi/2)\cos(\Delta\phi/2)} 2x \, \mathrm{tg}(\Delta\phi/2) dx} = \\ &= \frac{x^3}{3} \bigg|_{(r_0 + \Delta\phi/2)\cos(\Delta\phi/2)}^{(r_0 + \Delta\phi/2)\cos(\Delta\phi/2)} / \frac{x^2}{2} \bigg|_{(r_0 - \Delta\phi/2)\cos(\Delta\phi/2)}^{(r_0 + \Delta\phi/2)\cos(\Delta\phi/2)} = \\ &= \frac{2}{3}\cos(\Delta r/2) \frac{(r_0 + \Delta\phi/2)^3 - (r_0 - \Delta r/2)^3}{(r_0 + \Delta r/2)^2 - (r_0 - \Delta r/2)^2} = \left(r_0 + \frac{1}{12} \frac{(\Delta r)^2}{r_0}\right)\cos(\Delta\phi/2). \end{split}$$

В случае ячейки вида (14) получаем аналогичный результат:

$$r_c = \left(r_0 + \frac{1}{12} \frac{(\Delta r)^2}{r_0}\right) \frac{\sin(\Delta \phi/2)}{\Delta \phi/2}.$$

Рассмотрим величину $\tilde{\alpha}=|r_c-r_0|/\Delta r$, показывающую, на сколько шагов сетки по радиальному направлению центр масс ячейки смещён относительно самой ячейки. Пренебрегая величиной порядка $(\Delta r)^2/r_0$, в случае прямолинейной ячейки получаем

$$\tilde{\alpha} = \frac{r_0}{\Delta r} \left(\cos(\Delta \phi/2) - 1 \right) \approx \frac{1}{8} \frac{r_0}{\Delta r} (\Delta \phi)^2.$$

Или, используя приближённое равенство $H \approx r_0 \Delta \phi$, получаем

$$\tilde{\alpha} \approx \frac{1}{8} \frac{H^2}{r_0 \Delta r} = \frac{\alpha}{4}.$$

Если считать центры масс по криволинейной ячейке, результат отличается на множитель: $\tilde{\alpha} \approx \alpha/12$.

4.2. Реконструкция по касательной и вдоль поверхности. Оценим теперь велчину, насколько сильно луч e, который вводится для определения предраспадных значений U_{jk} , отклоняется от дуги окружности. Этот луч зависит от способа определения центра ячейки r_j , о чём пойдёт речь ниже. Пока будем для простоты считать, что этот луч выпущен из точки (r_0, ϕ_0) и направлен по касательной к окружности радиуса r_0 . Тогда он пересечёт луч $\phi_1 = \phi_0 + \Delta \phi$

в точке с радиусом $r_0/\cos(\Delta\phi)$. Если шаг сетки в поперечном радиальном направлении равен Δr , то эта точка будет находиться в

$$\tilde{\alpha} = \frac{r_0}{\Delta r} \left(\frac{1}{\cos(\Delta \phi)} - 1 \right) \approx \frac{1}{2} \frac{r_0}{\Delta r} (\Delta \phi)^2 \approx \frac{1}{2} \frac{H^2}{r_0 \Delta r} = \alpha$$

шагах сетки от дуги окружности радиуса r_0 . Если $\alpha \ll 1$, то схема с квазиодномерной реконструкцией будет похожа на схему на структурированной сетке (см. рис. 5, сверху); если же $\alpha \gg 1$, то реконструкция пойдёт поперёк сеточных слоёв (см. рис. 5, снизу), что выглядит нежелательным.

4.3. Возможность квазиодномерной реконструкции. Изучим теперь вопрос, в каком случае центр грани лежит внутри выпуклой оболочки центров ячеек, соседних по узлу с этой гранью. Это условие определяет сущестование точек $r_{jk,+}$. Рассмотрим сетку из четырёхугольных ячеек с вершинами в точках $r=r_j\pm \Delta r/2,\,\phi=\phi_j\pm \Delta\phi/2$ и будем считать, что в качестве центра такой ячейки выбрана точка с полярными координатами r_j и ϕ_j . Чтобы центр грани jk (такой что $r_j=r_k:=r_0$) лежал внутри интересующей нас выпуклой оболочки, должно выполняться условие

$$r_0 < (r_0 + \Delta r)\cos(\Delta \phi/2)$$
.

Пренебрегая членами высоких порядков малости по $\Delta\phi$ и Δr , получаем

$$\frac{r_0}{\Delta r} (\Delta \phi)^2 < 8$$

или $H^2/(r_0\Delta r)<8$. Если центр ячейки определять как её центр масс, то рассуждение остаётся тем же, а константа в правой части неравенства уменьшается. Это наглядно видно из рис. 6, где изображён случай $\Delta\phi=\pi/12$, $\Delta r/r_0=2/57$.

4.4. Выводы. Во всех трёх рассмотренных вопросах мы увидели, что "значимость" кривизны зависит от одной и той же величины

$$\alpha = \frac{H^2}{2Rh},\tag{15}$$

где H — шаг поверхностной сетки, R — радиус кривизны поверхности, h — шаг сетки по нормали к поверхности. Её наибольшее значение обычно достигается на границе, где h минимально. Если $\alpha \lesssim 1$, можно ожидать корректной работы схем с квазиодномерной реконструкцией. При $\alpha \gg 1$ использование оригинальной схемы с квазиодномерной реконструкцией может быть опасным.

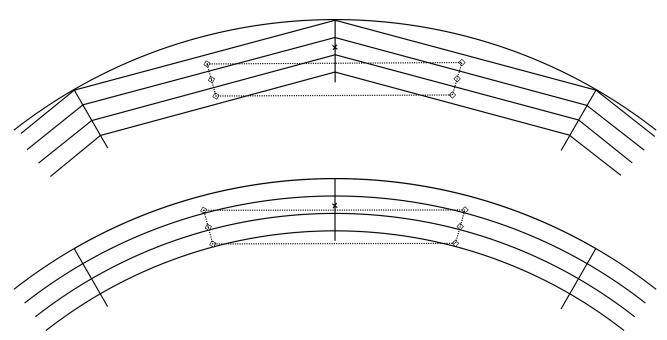


Рис. 6. Взаимное расположение центра грани и выпуклой оболочки центров масс соседних ячеек. Сверху: центр масс считается по четырёхугольнику; снизу: центр масс считается по криволинейному четырёхугольнику

5. Схема на полуструктурированной сетке

5.1. Интерпретация значений сеточной функции. Прежде всего, заметим, что значения сеточной функции не могут интерпретироваться как точечные значения искомого решения в центре масс сеточной ячейки, независимо от того, учитывается ли при определении центра масс кривизна ячейки. Рассмотрим расчётную область, задаваемую неравенствами $r_{\min} < r < r_{\max}$, и ячейку вида (14), лежащую около границы $r = r_{\min}$. Если Δr достаточно мало (такое, что $\alpha \gg 1$, где α определено (15)), то её центр масс ячеек окажется внутри круга радиуса r_{\min} , т. е. вне расчётной области (см. раздел 4.1). При попытке задания начальных данных в этой ячейке на основе точечного значения в её центре масс возникнет ошибка, поскольку функция, определяющая начальные данные, в этой точке не определена. Если значение сеточной функции определять как интегральное среднее по ячейке с прямыми рёбрами, результат будет тем же.

Решением этой проблемы может быть определение сеточной функции как интегрального среднего по ячейке с учётом её кривизны. Это является технически сложным; более того, если граница всё равно воспродится приближённо, то некоторое ограничение, связывающее H и Δr , всё равно остаётся. Применительно к рассматриваемой схеме (гарантированно не обладающей формальным порядком точности выше 2) это не требуется. Ниже значение сеточной функции в ячейке будет трактоваться как среднее арифметическое значений искомой функции в вершинах этой ячейки.

5.2. Определение центров ячеек и граней. Определение центра ячейки как её центра масс может приводить к нежелательным последствиям. Рассмотрим призматическую сетку около плоской поверхности z=0 и допустим, что вершины призмы имеют координаты $(0,-H,0),\ (0,H,0),\ (H,0,0),\ (0,-H,h),\ (0,H,h),\ (H,0,h(1+\epsilon))$. Будем считать, что все рёбра такой призмы являются отрезками, а все грани – плоскими. Вычислим её центр масс. В силу симметрии $y_c=0$; имеем

$$x_{c} = \frac{\int_{0}^{H} \int_{-H+x}^{H-x} \int_{0}^{h+\epsilon hx/H} x dz dy dx}{\int_{0}^{H} \int_{-H+x}^{H-x} \int_{0}^{h+\epsilon hx/H} \int_{0}^{H} dz dy dx} = \frac{2hH^{3} \int_{0}^{1} \xi(1-\xi)(1+\epsilon\xi)d\xi}{2hH^{2} \int_{0}^{1} (1-\xi)(1+\epsilon\xi)d\xi} = \frac{2hH^{3} \int_{0}^{1} \xi(1-\xi)(1+\epsilon\xi)d\xi}{2hH^{2} \int_{0}^{1} (1-\xi)(1+\epsilon\xi)d\xi}$$

$$=H\frac{\int_{0}^{1}(-\epsilon\xi^{3}-(1-\epsilon)\xi^{2}+\xi)d\xi}{\int_{0}^{1}(-\epsilon\xi^{2}-(1-\epsilon)\xi+1)d\xi}=H\frac{-\epsilon\frac{1}{4}-(1-\epsilon)\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{-\epsilon\frac{1}{3}-(1-\epsilon)\frac{1}{2}+1}=H\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{18}\epsilon+O(\epsilon^{2})\right).$$

Третью координату центра масс (z_c) вычислять нет необходимости. С другой стороны, центр треугольной грани имеет координаты $(H/3,0,h(1+\epsilon/3))$. Отсюда видно, что разность радиус-векторов центра масс треугольной грани и центра масс элемента и будет иметь вид $(O(\epsilon H),0,O(h))$. Чтобы это направление было близко к вертикальному, требуется выполнения условия $\epsilon \ll h/H$. Поскольку отношение h/H может быть очень малым (скажем, $h/H \sim 10^{-4}$), условие $\epsilon \ll h/H$, как правило, не будет выполняться на используемых на практике сетках. Для избежания этой проблемы предлагается определять центр элемента как точку, радиус-вектор которой является средним арифметическим радиус-векторов вершин этого элемента. Аналогично, центр грани будет определяться как точка, радиус-вектор которой является средним арифметическим радиус-векторов вершин этой грани.

5.3. Определение полуструктуры сетки. Как было сказано во Введении, каждая ячейка полуструктурированной сетки характеризуется номером слоя. Пользователем задаётся набор граничных поверхностей с граничным условием прилипания (с адиабатическим или изотермическим условием на температуру). Все призмы, хотя бы одно из оснований которых лежит на такой поверхности, считаются принадлежащими слою 0. Все призмы, имеющие общую грань ровно с одной призмой из слоя 0, но сами ему не принадлежащие, считаются принадлежащими к слою 1. Маркирование слоёв продолжается до тех пор,

пока формируемые таким образом сеточные слои оказываются непустыми. Таким образом, номер слоя показывает, сколько переходов нужно сделать через основания призмы, чтобы попасть в призму, одно из оснований которой лежит на указанной пользователем стенке. Здесь под призмами подразумеваются как треугольные призмы, так четырёхугольные призмы (гексаэдры). Элементы, не являющиеся призмами или гексаэдрами, считаются не относящимися к полуструктурированной подобласти сетки. Могут задаваться дополнительные ограничения на определение слоёв: по общему числу слоёв, расстоянию до стенки, степени анизотропии сетки и т. д., но в настоящей работе эти критерии не используются.

5.4. Определение потока через сеточную грань. Для определения потока через грань, разделяющую элементы из разных слоёв, полуструктура сетки игнорируется, и численный поток определяется описанным выше методом. Для определения потока через грань, разделяющую элементы j и k из одного слоя (обозначим его через l), определяется вспомогательный вектор N_{jk} , имеющий смысл направления, нормального к поверхности. Он определяется следующим образом. Для ячеек j и k определяются смежные им по граням ячейки j_-, k_- , лежащие на слое l-1, и ячейки j_+, k_+ , лежащие на слое l-1. Далее полагается

$$m{N}_{jk} = m{n}_{j-j} + m{n}_{jj_+} + m{n}_{k_-k} + m{n}_{kk_+}.$$

Если какие-то из ячеек j_-, k_-, j_+, k_+ не определяются, то соответствующие слагаемые в сумме пропускаются. Далее центры всех ячеек, соседних по узлам с j или k и относящиеся к слою l, проектируются на плоскость, ортогональную вектору N_{jk} . Наконец, значения U_{jk} и U_{kj} определяются описанным выше алгоритмом для двумерных (а в двумерном случае — одномерных) сеток.

Рассмотрим для примера двумерную равномерную сетку с ячейками вида (14); пусть j – некоторая ячейка и k и l – ячейки, смежные с j по грани и лежащие с ней на одном слое. Если не применять монотонизацию, то значение U_{jk} определяется линейной комбинацией значений в ячейках j, k и l по формуле (11), которую можно представить в виде

$$U_{jk} = c_l(\Delta\phi)U_l + c_j(\Delta\phi)U_j + c_k(\Delta\phi)U_k.$$

Зависимость коэффициентов при значениях в ячейках от $\Delta \phi$ присутствует, но имеет вид $c_l(\Delta \phi) = c_l(0) + O((\Delta \phi)^2)$. Поэтому она не оказывает существенного влияния на точность расчётов.

5.5. Схема BBRU. При решении линейных уравнений с постоянными коэффициентами на равномерной декартовой четырёхугольной сетке схема BBR

вырождается в конечно-разностную схему 3-го порядка аппроксимации. Однако на сетках из правильных треугольников схема BBR обладает только вторым порядком аппроксимации; в случае стационарных решений порядок точности равен трём, а в случае нестационарных — двум. Повышения порядка точности до третьего в нестационарном случае можно достигнуть использованием модификации BBRU [6].

Модификация BBRU (подразумевается схема, заданная формулами (16)—(17) в [6]) заключается в коррекции уже готовой дивергенции потоков, посчитанной по схеме BBR. Модификация схемы BBR с явным учётом полуструктуры сетки проводится аналогично.

Дальнейшее изложение будет построено следующим образом. В разделе 6 будет рассмотрена задача об акустической волне в канале и приведены результаты её расчётов в двумерной постановке. Раздел 7 посвящён объяснению полученных результатов. В разделе 8 будет рассмотрена задача об обтекании профиля NACA0012 и приведены результаты её двумерных расчётов. Наконец, в разделе 9 будет рассмотрен вопрос о квадратичном представлении сеточных рёбер и его влиянии на точность расчётов обеих задач.

6. Задача об акустической волне в канале

6.1. Постановка задачи. Верифицируем построенную схему на задаче об акустической волне в цилиндрическом канале при наличии вязкости и теплопроводности. В рамках линеаризованных уравнений Навье – Стокса (4) эта задача имеет аналитическое решение вида

$$Q(t, \mathbf{r}) = \text{Re}\left(\exp(i(\omega t - \nu \phi - k_z z))\hat{Q}(r)\right),$$

где $r = (r\cos\phi, r\sin\phi, z)$, а \hat{Q} – функция из [0,R] в \mathbb{C}^5 . Решение этого вида было получено Кирхгоффом [13] для случая нулевой азимутальной моды и легко обобщается на случай произвольной азимутальной моды. Программное вычисление этого решения реализовано в библиотеке ColESo, подробное описание этой реализации см. в [14].

Чтобы можно было сравнивать с результатами двумерных расчётов, будем рассматривать моду с нулевым осевым волновым числом. Зададим следующие параметры решения: осевое волновое число $k_z=0$; азимутальное волновое число $\nu=8$; радиальное волновое число (номер гармоники, начиная с нуля) m=1; радиус цилиндра R=1; коэффициент вязкости $\mu=10^{-7}$; число Прандтля $\Pr=1$; показатель адиабаты $\gamma=1.4$. При этих значениях параметров частота волны получается равной

Таблица 1. Параметры и характеристики сеток для задачи об акустической волне в канале

	1 4	β		$h_{\rm max} = H/2$	N_r	α
1	58	0.08	$7.62 \cdot 10^{-6}$	0.0135	193	12.0
2	116	0.04	$3.81 \cdot 10^{-6}$	0.0067	371	6.0

Положительная мнимая часть определяет скорость затухания волны. Общий множитель выберем так, чтобы решение было порядка единицы (в начальный момент времени максимум пульсации плотности ≈ 1.4). Начальные данные зададим по точному решению на момент времени t=0, расчёт будем проводить до времени t=20. Ввиду периодичности решения по углу все расчёты проводятся в секторе $2\pi/\nu=\pi/4$.

6.2. Численная постановка в 2D. Вначале проведём расчёт этой задачи в двумерной постановке (схема на двумерной сетке совпадает со схемой для трёхмерной задачи на сетке с одним слоем по направлению z; шаг по z неважен). Расчётную сетку будем строить следующим образом. При 0.1 < r < 1 построим полярную (т. е. декартовую в системе координат (r, ϕ)) сетку. По углу сетка равномерная и содержит n_{ϕ} ячеек. Распределение узлов по радиусу определяется исходя из условия

$$h(r) \approx \min \left\{ h_{\infty}, \beta \left\| \frac{d^3 \hat{Q}(r)}{dr^3} \right\|^{-1/3} \right\},$$
 (16)

где норма пятикомпонентной величины определяется как корень из суммы квадратов её компонент. Степень -1/3 выбрана из соображений размерности. Шаг h_∞ был выбран из соображения, чтобы при r=1/2 шаг в азимутальном направлении был равен шагу в радиальном направлении, т. е. $h_\infty=2\pi/(2\nu N_\phi)$. Множитель β был выбран равным $\beta\approx11.8~h_\infty$. При этом второй аргумент минимума в (16) около внутреннего максимума решения примерно равен h_∞ , а уменьшение β относительно заданного значения не приводит к существенному улучшению точности на больших временах t. Область r<0.1 заполняется неструктурированной сеткой; ввиду того, что $Q(t,\mathbf{r})\sim r^\nu$, численная ошибка, связанная с подобластью r<0.1 и переходом со структурированной сетки на неструктурированную, ничтожна. Основные параметры сеток сведены в таблицу 1; также в ней приведена характеристика α , посчитанная для граничных ячеек.

Для интегрирования по времени использовалась явная трёхстадийная схема Рунге — Кутты 3-го порядка точности. Число Куранта было формально задано равным $\sigma=1$, что соответствовало шагу $\tau=\sigma/(\kappa h_{\min}^{-2}+ch_{\min}^{-1})$, где $\kappa=2\gamma\mu/\min\{\text{Pr},1\}$, а c=1 есть скорость звука. Отметим, что использование неявной схемы BDF2 позволяет проводить расчёт с более крупным шагом по времени, но при больших шагах ошибка интегрирования по времени становится доминирующей. Если наложить условие, чтобы ошибка интегрирования по времени не превосходила 10% от численной ошибки при точном интегрировании по времени, неявная схема позволяет снизить затраты машинного времени в 2-3 раза. Однако этот выигрыш нивелировался необходимостью дополнительных расчётов для контроля точности интегрирования по времени.

6.3. Результаты в 2D. Результаты двумерных расчётов приведены на рис. 7 для сеток №1 и №2. На них изображен максимум по расчётной области ошибки пульсации плотности в зависимости от времени. Линии, отмеченные в легенде как PL ("prismatic layer"), соответствуют схеме с учётом структуры сетки (в 2D полуструктурированный фрагмент сетки автоматически является структурированным); остальные линии соответствуют схемам без учёта структуры сетки. Для сравнения отложены результаты расчётов по вершинно-центрированной схеме, с учётом структуры [3] и без неё. На рис. 8 изображены изолинии ошибки по плотности (красные линии), наложенные на поле пульсаций плотности (чёрные линии).

Из рис. 7 и рис. 8 можно сделать следующие выводы. Для объёмноцентрированной схемы с трёхточечной реконструкцией, как и для вершинноцентрированной схемы с трёхточечной реконструкцией, учёт структуры сетки не сказывается существенным образом на точности расчёта. Радиальный профиль ошибки похож на форму гармоники, и максимум ошибки совпадает с минимумом решения. Небольшой фазовый сдвиг (с точностью до π) между решением и ошибкой является основанием полагать, что наибольшее по величине слагамое в ошибке решения пропорционально 4-й производной от решения по углу. Это согласуется со сходимостью с порядком, близким к 3, наблюдаемой путём сопоставления верхнего и нижнего графиков на рис. 7. Теоретический анализ этого результата будет проведён в разделе 7.

6.4. Упрощённая постановка. Прежде чем переходить к трёхмерным расчётам, немного упростим задачу. А именно, ограничим расчётную область условием r > 0.1 и при r = 0.1 поставим условие непротекания ($u' \cdot n = 0$) и

 $^{^{3}}$ Приведено то выражение для κ , которое используется в коде.

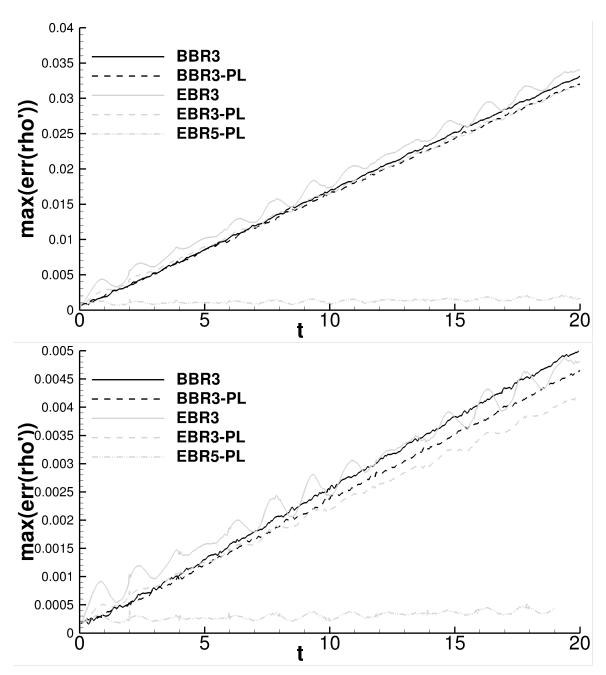
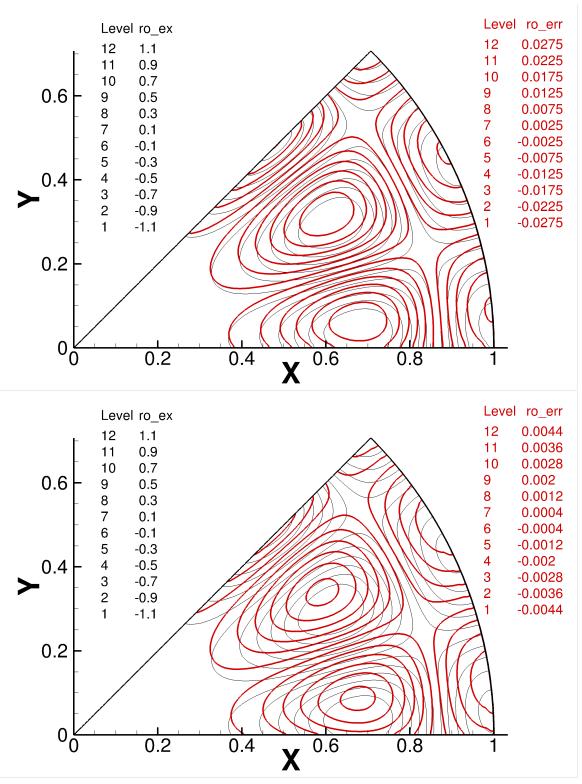


Рис. 7. Зависимость ошибки от времени на сетках №1 (верхний график) и №2 (нижний график)



 $\it Puc.~8.$ Изолинии решения и ошибки на сетках №1 и №2 для схемы BBR на время t=20

Таблица 2. Численная ошибка в задаче об акустической волне в канале при её решении в области r < 1 и 0.1 < r < 1

Постановка	t = 0.01	t = 0.1	t=1	t = 20
B области $r < 1$	$5.0 \cdot 10^{-5}$	$1.8 \cdot 10^{-4}$	$2.8 \cdot 10^{-4}$	$2.6 \cdot 10^{-4}$
В области $0.1 < r < 1$	$5.3 \cdot 10^{-5}$	$1.8 \cdot 10^{-4}$	$2.8 \cdot 10^{-4}$	$ 2.6 \cdot 10^{-4} $

равенство нулю вязких потоков. Начальные данные будем задавать исходя из точного решения в цилиндре, поэтому они, с формальной точки зрения, не согласованы с граничными условиями. Но поскольку при r=0.1 они близки к нулю, это не должно существенным образом сказываться на точности.

Проверим это в численном расчёте. В таблице 2 приведен максимум по сетке ошибки плотности на разные моменты времени для случая расчёта в области r < 1 и в области 0.1 < r < 1. Использовалась схема EBR5 с учётом полуструктуры, дающая наименьшую ошибку (см. рис. 7), и сетка №2. Видно, что изменение постановки пренебрежимо слабо сказывается на ошибке численного решения. Это позволяет для трёхмерных задач строить сетку только в области 0.1 < r < 1, $z_{\min} < z < z_{\max}$. Но поскольку при очень малом времени ошибка, возникающая из-за некорректного граничного условия, может быть существенной, всюду далее будем измерять ошибку только по области 0.4 < r < 1.

6.5. Численная постановка в 3D. Трёхмерные сетки строились следующим образом. Вначале во вспомогательных координатах (ξ,η) в прямоугольнике $0<\xi<8, 0<\eta< N_\phi$ строилась сетка с характерной длиной ребра, равной 1. В настоящей работе ограничимся случаем сетки из прямоугольных треугольников. Затем эта сетка протягивалась (extrude) по третьему направлению (обозначим новую координату через ζ) в область $0.1<\zeta<1$ с распределением (16) при $T\equiv\zeta$, в результате чего получалась призматическая сетка в прямоугольном параллелепипеде. Наконец, координаты преобразовывались по формулам

$$x = \zeta \cos\left(\frac{2\pi}{\nu N_{\phi}}\xi\right), \quad y = \zeta \sin\left(\frac{2\pi}{\nu N_{\phi}}\xi\right), \quad z = \frac{2\pi}{\nu N_{\phi}}\eta,$$
 (17)

в результате чего получалась сетка в цилиндрическом сегменте 0.1 < r < 1, $0 < z < 16\pi/(\nu N_\phi)$.

Использовались те же значения N_{ϕ} , что и в двумерной постановке, поэтому основные сеточные размеры остаются такими же, как в таблице 1. Сетка №1 содержит 1238 поверхностных треугольников и, следовательно, $1238 \cdot 193 =$

238934 призмы, сетка №2 содержит 2476 поверхностных треугольников и, следовательно, $2476 \cdot 371 = 918596$ призм.

7. Анализ ошибки аппроксимации

Рассмотрим равномерную четырёхугольную сетку, такую что вершины ячейки j имеют координаты $r=r_j\pm\Delta r/2,\,\phi=\phi_j\pm\Delta\phi/2$. Будем рассматривать случай $\alpha\gg 1$, то есть $\Delta r\ll r_j(\Delta\phi)^2$. Запишем две конечно-объёмные схемы. Определение предраспадных значений на длинных гранях будем проводить при помощи реконструкции вдоль прямой $\phi=const$ (что совпадает со схемой с квазиодномерной реконструкцией, описанной выше). Определение предраспадных значений на коротких гранях будем проводить а) при помощи реконструкции переменных вдоль окружности r=const и б) при помощи квазиодномерной реконструкции. Радиус-вектор центра ячейки будем определять как среднее арифметическое радиус-векторов её вершин, то есть

$$r_j = r_j \cos(\Delta \phi/2) \begin{pmatrix} \cos \phi_j \\ \sin \phi_j \end{pmatrix}$$
.

Будем исследовать аппроксимационную ошибку вычисления производных в ячейке j, для которой $r_j=r_0$ и $\phi_j=0$. Она имеет площадь

$$V_{j} = \frac{1}{2}\sin(\Delta\phi) \left((r_{0} + \Delta r/2)^{2} - (r_{0} - \Delta r/2)^{2} \right) = \sin(\Delta\phi) r_{0} \Delta r.$$

Если рассматривать грани не как отрезки, а как дуги окружности, $\sin(\Delta\phi)$ заменяется на $\Delta\phi$, и это не меняет дальнейших рассуждений. Ориентированные площади длинных граней равны

$$m{n}_{jk} = \left(egin{array}{c} \pm (r_0 \pm \Delta r/2) 2 \sin(\Delta \phi/2) \ 0 \end{array}
ight),$$

а коротких -

$$n_{jk} = \begin{pmatrix} -\Delta r \sin(\Delta \phi/2) \\ \pm \Delta r \cos(\Delta \phi/2) \end{pmatrix}.$$

7.1. Схема с одномерной реконструкцией. Легко показать, что схема с одномерной реконструкцией на рассматриваемой сетке обладает вторым порядком аппроксимации и не обладает третьим. Однако численные результаты (см. ниже) показывают, что ошибка третьего порядка малости по $\Delta \phi$ на достаточно грубых сетках может доминировать над ошибкой второго порядка. Подробный анализ численной ошибки выходит за пределы настоящей работы. Однако из соображений размерности можно отметить следующий факт. Поскольку при

нулевой кривизне границы члены второго порядка в ошибке равны нулю, члены второго порядка должны в ошибке аппроксимации должны быть пропорциональны не третьим производным по углу и радиусу (как это имеет место в случае обычных схем второго порядка), а вторым (в отдельных случаях — первым) производным, умноженным на кривизну. В частности, если решение является ν -й азимутальной модой, где $\nu \neq 0$, то члены ошибки, связанные с кривизной, получаются в $O(\nu)$ раз меньше членов второго порядка в обычной схеме 2-го порядка.

Продемонстрируем это рассуждение на примере. Будем смотреть на точность вычисления производной от некоторой функции f по y (то есть по касательному направлению) в ячейке j, введённой выше. Обозначим через $k\pm$ соседей ячейки j по коротким граням. Поскольку для двух граней компонента нормали вдоль y равна нулю, имеем

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{j} = \frac{1}{V_{j}} \Delta r \cos(\Delta \phi/2) (f_{jk+} - f_{jk-}),$$

где $f_{jk\pm}$ — некоторым образом взвешенные предраспадные значения $f_{jk\pm,+}$ и $f_{jk\pm,-}$. Поскольку сетка по ϕ равномерная, предполагая, что способ взвешивания предраспадных значений (определяемый направлениями характеристик) не сильно меняется от ячейки к ячейке, можно записать

$$f_{jk+} - f_{jk-} = (\Delta \phi) \frac{\partial f}{\partial \phi}(\mathbf{r}_j) + O((\Delta \phi)^4) = r_0(\Delta \phi) \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{r}_j) + O((\Delta \phi)^3).$$

Следовательно, имеем

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{i} = \frac{\Delta \phi}{2\sin(\Delta \phi/2)} \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{r}_{j}) + O((\Delta \phi)^{3}). \tag{18}$$

С формальной точки зрения, (18) показывает, что производная по y (а равно производная по ϕ) определяется со вторым порядком аппроксимации. Однако если в обычных схемах второго порядка ошибка пропорциональна третьей производной по углу, то здесь — первой производной. Например, для ν -й азимутальной моды в первом случае ошибка пропорциональна ν^3 , здесь же — только ν , что существенно меньше. Ошибка аппроксимации производной по x, рассматриваемая аналогичным образом, оценивается через вторые производные по углу и радиусу (члены, связанные с кривизной) и четвёртые производные (наследуемые от декартовой сетки).

Численные результаты расчёта задачи об акустической волне в канале дают основание предполагать, что составляющие в ошибке аппроксимации, связанные с кривизной, частично имеют ненакапливаемый во времени характер. Это требует дальнейшего анализа.

7.2. Схема с квазиодномерной реконструкцией. Теперь будем считать схему с одномерной реконструкцией эталоном и посмотрим, насколько схема с квазиодномерной реконструкцией от неё отличается. Поведение схемы с квазиодномерной реконструкцией зависит от α . Рассмотрим случай $\alpha\gg 1$, то есть случай большой анизотропии и кривизны поверхности. Предраспадные значения на длинных гранях определяются таким же образом, что и в предыдущем пункте. Поэтому нужно рассмотреть только определение предраспадных значений на коротких гранях.

Точка $\boldsymbol{r}_{jk,-1}$ определяется на пересечении прямой, проходящей через \boldsymbol{r}_j и \boldsymbol{r}_{jk} , с прямой, проходящей через \boldsymbol{r}_m и \boldsymbol{r}_n , см. рис. 5. Точки \boldsymbol{r}_m и \boldsymbol{r}_n имеют координаты

$$m{r}_m = (r_0 + \Delta r)\cos(\Delta\phi/2)\left(egin{array}{c} 1 \ 0 \end{array}
ight), \quad m{r}_n = (r_0 + \Delta r)\cos(\Delta\phi/2)\left(egin{array}{c} \cos\Delta\phi \ \sin\Delta\phi \end{array}
ight).$$

Луч e, на котором построение схемы предполагает определение вспомогательной точки $r_{jk,-1}$, имеет направляющий вектор $(0,1)^T$. Для определения интерполяционной конструкции запишем векторное равенство

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_m \begin{pmatrix} \Delta r \cos(\Delta \phi/2) \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_n \begin{pmatrix} ((r_0 + \Delta r) \cos \Delta \phi - r_0) \cos(\Delta \phi/2) \\ (r_0 + \Delta r) \sin \Delta \phi \cos(\Delta \phi/2) \end{pmatrix},$$

откуда находим

$$\alpha_n = \frac{1}{(r_0 + \Delta r)\sin\Delta\phi\cos(\Delta\phi/2)},$$

$$\alpha_m = -\alpha_n \frac{(r_0 + \Delta r)\cos\Delta\phi - r_0}{\Delta r}.$$

Далее определяется $L=(\alpha_m+\alpha_n)^{-1}$ и $\tilde{\alpha}_n=L\alpha_n$, $\tilde{\alpha}_m=L\alpha_m$. Запишем теперь

$$\frac{U_{jk,-1} - U_j}{L} = \frac{\tilde{\alpha}_m U_m + \tilde{\alpha}_n U_n - U_j}{L} = \frac{U_m - U_j}{L} + \tilde{\alpha}_n \frac{U_n - U_m}{L} =$$

$$= (\alpha_m + \alpha_n)(U_m - U_j) + \alpha_n(U_n - U_m) =$$

$$= \Delta r (\alpha_m + \alpha_n) \frac{U_m - U_j}{\Delta r} + \Delta \phi \alpha_n \frac{U_n - U_m}{\Delta \phi}.$$

При $\alpha\gg 1$ по определению имеем $\Delta r\ll r_0(\Delta\phi)^2$. Поэтому выполняется

$$\alpha_m \approx \alpha_n \frac{r_0}{\Delta r} (1 - \cos \Delta \phi) \approx \frac{1}{2} \alpha \alpha_n.$$

Следовательно, величина α_n пренебрежимо мала по сравнению с α_m , и

$$\frac{U_{jk,-1} - U_j}{L} \approx (\Delta r) \frac{1}{2} \frac{r_0 \Delta \phi^2}{\Delta r} \frac{1}{r_0 \Delta \phi} \frac{U_m - U_j}{\Delta r} + \frac{1}{r_0 \Delta \phi} (U_n - U_m) =$$

$$= \frac{1}{2} \Delta \phi \frac{U_m - U_j}{\Delta r} + \frac{1}{r_0 \Delta \phi} (U_n - U_m).$$

Таким образом, разделённая разность $(U_{jk,-1}-U_j)/L$, действительно, аппроксимирует производную по касательному направлению с первым порядком. Далее, представим во втором слагаемом

$$U_n = U_k + (\Delta r) \frac{U_n - U_k}{\Delta r}, \quad U_m = U_j + (\Delta r) \frac{U_m - U_j}{\Delta r}.$$

Имеем

$$\frac{U_{jk,-1}-U_j}{L}\approx (\Delta r)\frac{1}{2}\frac{r_0\Delta\phi^2}{\Delta r}\frac{1}{r_0\Delta\phi}\frac{U_m-U_j}{\Delta r}+\frac{1}{\alpha}\left(\frac{U_n-U_k}{\Delta r}+\frac{U_m-U_j}{\Delta r}\right)+\frac{U_k-U_j}{r_0\Delta\phi}.$$

Последнее слагаемое похоже на значение выражения $(U_{jk,-1}-U_j)/L$ в схеме с одномерной реконструкцией. Второе слагаемое пропорционально α^{-1} и, следовательно, пренебрежимо мало. Таким образом, в схеме с квазиодномерной реконструкцией разность $(U_{jk,-1}-U_j)/L$ "подмешивает" в касательную производную радиальную производную с множителем $(\Delta\phi)/2$. После взятия разности по противолежащим сегментам эта добавка превратится в величину второго порядка малости, пропорциональную смешанной производной. Слагаемые такого вида присутствуют и в ошибке аппроксимации по схеме с одномерной реконструкцией.

При определении предраспадных значений на коротких гранях значение $U_{jk,1}$ обычным образом не определяется (см. раздел 4.3). При использовании модификации BF0 (12) точность ухудшается: в ошибке аппроксимации возникает член второго порядка, пропорциональный третьей производной по углу. Однако при использовании модификации BF1 полагается $U_{jk,1} = U_k$, то есть $U_{jk,1}$ определяется так же, как и в схеме с одномерной реконструкцией.

Таким образом, анализ ошибки аппроксимации схемы с квазиодномерной реконструкцией объясняет, почему при использовании модификации BF1 она близка по точности к схеме с одномерной реконструкцией. Однако в нашем анализе мы явным образом предположили равномерность сетки в полярной системе координат. На криволинейные структурированные сетки общего вида этот результат не распространяется, что будет видно из рассмотрения следующей задачи.

8. Задача от обтекании профиля NACA0012

8.1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу об обтекании профиля NACA0012 [15]. В расчётной области, представляющей собой внешность профиля, ограниченную неравенствами -500 < x, y < 500, решаются

осреднённые по Рейнольдсу уравнения Навье — Стокса (RANS) с моделью турбулентности Спаларта — Аллмараса (SA) [7]. Число Рейнольдса, посчитанное по длине хорды, равно $\mathrm{Re}=6\cdot 10^6$. Коэффициент динамической вязкости определяется по закону Сазерленда с параметром $T_\infty=300K$.

Фоновый поток задаётся равенствами

$$\bar{U} = (\bar{\rho}, \bar{\boldsymbol{u}}, \bar{p})^T = \left(1, \cos\phi, \sin\phi, 0, \frac{1}{\gamma M^2}\right)^T,$$

где ϕ — угол атаки, равный 10 градусам, а M=0.15 — число Маха фонового потока. На профиле задаются нулевое значение вектора скорости, нулевой поток тепла (${\bf u}=0,\,\partial T/\partial n=0$) и нулевой коэффициент турбулентной вязкости $\tilde{\nu}_t=0$. Граничные условия на внешних границах обеспечивают поддержание фонового потока вдали от профиля. Для коэффициента турбулентной вязкости на входной границе задаётся условие $\nu_t/\nu=1$, где ν — коэффициент молекулярной вязкости.

8.2. Расчётные сетки. Для удобства сравнения с вершинно-центрированной схемой в двумерном случае использовались те же расчётные сетки, что и в [3]. Профиль имел габариты -0.25 < x < 0.75, -0.06 < y < 0.06. Шаг сетки по нормальному направлению во всех сетках был задан постоянным по всему профилю и равным 10^{-6} . Поверхностные сетки на профиле имели сгущение к передней и задней кромке. Вдали от профиля использовалась неструктурированная треугольная сетка. Количество узлов сетки, лежащих на профиле, и общее количество треугольников (неструктурированная подобласть) и четырёхугольников (структурированная подобласть) в расчётной сетке приведены в таблице 3 (сверху).

Для трёхмерных расчётов сетки строились следующим образом. Вначале на профиле, протянутом по z в интервале 0 < z < 0.25, строилась треугольная сетка, локальные параметры которой соответствовали двумерной сетке с тем же названием. Большинство треугольников поверхностной сетки близки к правильным (см. рис. 12). Затем эта поверхностная сетка протягивалась по нормали к границе с увеличением шага по нормальному направлению до достижения изотропии (то есть пока шаг по нормальному направлению не становился близким к шагу по касательным направлениям). В прямоугольнике 0.75 < x < 6, y = 0, 0 < z < 0.25 строилась четырёхугольная сетка, равномерная по z и сгущающаяся по x, от которой аналогичной протяжкой по нормальному направлению строилась гексаэдральная сетка до достижения изотропии. Затем во всей расчётной области за вычетом параллелепипеда -3.5 < x < 6, -3.5 < y < 3.5, 0 < z < 0.25 строился один слой призматической сетки. Оставшаяся часть расчётной области (параллелепипед -3.5 < x < 6, -3.5 < y < 3.5, 0 < z < 0.25

Таблица 3. Характеристики расчётных сеток

Сетка (2D)	cx4	cx3	cx2	cx1
N_{surf}	102	162	246	442
N_{quad}	43616	39840	53954	64000
N_{tri}	21910	21266	29254	36670
Сетка (3D)	cx4	cx3	cx2	-
N_{surf}	12236	25440	57196	-
N_{tetra}	339584	568364	1029976	-
N_{pyr}	6756	11408	22284	-
N_{prism}	1073612	2014152	3967356	-
N_{hex}	21052	21052	21052	-

за вычетом подобласти, где уже построена полуструктурированная сетка) заполнялась неструктурированной сеткой, тетраэдральной с вкраплениями четырёхугольных пирамид в местах соприкосновения с четырёхугольными гранями. Затем сетка сшивалась со своим отражением относительно плоскости z=0, тогда на противоположных поверхностях сетки (z=0.25 и z=-0.25) сетка получалась одинаковой, что позволяло поставить периодические граничные условия.

Количество треугольников на поверхности профиля и общее количество элементов каждого типа в расчётной сетке приведено в таблице 3 (снизу).

8.3. Результаты двумерных расчётов. Основными результами расчётов являются коэффициенты аэродинамических сил, действующих на обтекаемое тело. В таблицу 4 сведены невязкие и вязкие составляющие коэффициентов, полученные на разных сетках для предложенной в настоящей работе схемы с использованием структуры сетки (BBR3-PL) и вершинно-центрированных схем с 3-точечной (EBR3-PL) и 5-точечной (EBR5-PL) реконструкцией для структурированных сеток [3] (в этой работе эти схемы были названы EBR3S и EBR5S соответственно). Эти результаты показывают, что схема BBR3-PL обеспечивает примерно такую же точность, что и вершинно-центрированная схема с трёхточечной реконструкцией, и проигрывает вершинно-центрированной схеме с пятиточечной реконструкцией.

Также проведём расчёты по схеме с квазиодномерной реконструкцией вдоль прямой (BBR3) и сравним их с результатами по схеме BBR3-PL. Все расчёты будем проводить на сетке $\operatorname{cx}4$. При $K_{\max} = +\infty$ схема является неустойчи-

Таблица 4. Аэродинамические коэффициенты в двумерных расчётах

Коэффициент	Схема	cx4	cx3	cx2	cx1
$C_{d,conv}$	BBR3-PL	$12.04 \cdot 10^{-3}$		$6.79 \cdot 10^{-3}$	
$C_{d,conv}$	EBR3-PL	$12.25 \cdot 10^{-3}$	$8.58 \cdot 10^{-3}$	$6.79 \cdot 10^{-3}$	$ 6.45 \cdot 10^{-3} $
$C_{d,conv}$	EBR5-PL	$7.14 \cdot 10^{-3}$	$6.64 \cdot 10^{-3}$	$6.33 \cdot 10^{-3}$	$ 6.25 \cdot 10^{-3} $
$C_{d,visc}$	BBR3-PL	$5.70 \cdot 10^{-3}$	$6.01 \cdot 10^{-3}$	$6.15 \cdot 10^{-3}$	$6.19 \cdot 10^{-3}$
$C_{d,visc}$	EBR3-PL	$5.72 \cdot 10^{-3}$	$5.98 \cdot 10^{-3}$	$6.12 \cdot 10^{-3}$	$ 6.13 \cdot 10^{-3} $
$C_{d,visc}$	EBR5-PL	$6.13 \cdot 10^{-3}$	$6.15 \cdot 10^{-3}$	$6.17 \cdot 10^{-3}$	$ 6.16 \cdot 10^{-3} $
C_l	BBR3-PL	1.044	1.076	1.088	1.089
C_l	EBR3-PL	1.058	1.079	1.087	1.086
C_l	EBR5-PL	1.101	1.097	1.092	1.088

 $\it Tаблица~5.$ Аэродинамические коэффициенты в двумерных расчётах при разном значении $\it K_{\rm max}$

Схема	BBR3-PL	BBR3				
K_{max}	$+\infty$	20	7	3		
a,core		$2.55 \cdot 10^{-2}$				
$C_{d,visc}$	$5.70 \cdot 10^{-3}$	$4.09 \cdot 10^{-3}(*)$	$3.94 \cdot 10^{-3}$	$3.43 \cdot 10^{-3}$		
C_l	$1.04 \cdot 10^0$	$0.96 \cdot 10^{0}$	$0.86 \cdot 10^{0}$	$0.83 \cdot 10^{0}$		

вой и результат получить не удаётся. Уменьшение $K_{\rm max}$, что фактически является взвешиванием схемы повышенной точности со схемой без реконструкции, стабилизирует расчёт. Однако максимальное значение шага по времени, при котором удаётся вести расчёт по неявной схеме, всё равно оказывается ниже, чем для схемы BBR3-PL. Также ухудшается и точность предсказания аэродинамических коэффициентов, см. таблицу 5. Звездой отмечено неустановившееся значение, ждать его установления было нецелесообразно. Таким образом, проведение расчётов по схеме BBR без учёта структуры сетки является нецелесообразным, тогда как явный учёт структуры позволяет получить решение, близкое по качеству к решению по схеме EBR3. Отметим, что в рамках вершинноцентрированной схемы расчёт без учёта структуры сетки также приводит к потере точности, но не столь катастрофическому, как для схемы BBR.

8.4. Об аппроксимации градиентов. Источниковый член в уравнении для $\tilde{\nu}$ выражается в том числе через градиенты от скоростей. Изначально автором

эти градиенты вычислялись формулами, точными на линейной функции, и в двумерной постановке это давало удовлетворительные результаты. Однако на трёхмерной сетке это приводило к случайным выбросам поля скоростей в пристеночных ячейках и, как следствие, неверному решению. Использование формулы (10) для вычисления градиентов решило эту проблему.

9. Учёт криволинейности сетки

9.1. Квадратичное представление рёбер. В двумерном случае вектор n_{jk} (или $n_{j\gamma}$) равен по модулю длине отрезка, соединяющего вершины соответствующей грани, и перпендикулярен этому отрезку. Следовательно, этот вектор не зависит от формы ребра. В трёхмерном случае вектор n_{jk} зависит от формы рёбер и определяется формулой (6). Рассмотрим некоторое ребро с вершинами r_A и r_B . Если расчётная сетка не содержит дополнительной информации, ребро считается отрезком. Если на ребре определена дополнительная точка r_C , то ребро можно параметризовать формулой

$$oldsymbol{r} = oldsymbol{r}_C + \left(\xi - rac{1}{2}
ight)(oldsymbol{r}_B - oldsymbol{r}_A) + 2\left(\xi - rac{1}{2}
ight)^2(oldsymbol{r}_B - 2oldsymbol{r}_C + oldsymbol{r}_A).$$

После этого величины ориентированных площадей (5) вычисляются однозначно по формуле (6). Аналогичным образом, определив несколько точек на ребре, можно сделать его кривой более высокого порядка.

При построении трёхмерных сеток для задачи об акустической волне в канале координаты дополнительной точки в середине рёбра определялись как средние арифметические координат вершин рёбер перед выполнением координатного преобразования (17). В сетках для задачи об обтекании профиля координаты дополнительных точек на рёбрах обеспечивались генератором сетки.

Способ вычисления величин объёмов ячеек $|V_j|$, как правило, не оказывает большого влияния на точность, если их сумма не меняется или меняется незначительно. В настоящей работе объёмы ячеек $|V_j|$ вычисляются исходя из линейного представления рёбер. Поскольку для четырёхугольной сеточной грани её вершины могут не лежать в одной плоскости, её форма определяется неоднозначно, при этом объёмы считаются по "средней" форме (см. [16] для гексаэдров; для остальных типов элементов объёмы считаются аналогично).

9.2. Невязкая задача в цилиндре. Рассмотрим линеаризованные уравнения Эйлера в цилиндре $0.1 < r < 1, \ 0 < z < z_{\rm max}$ с периодическим условием на крышках и граничным условием непротекания при r=0.1 и r=1. Здесь $r=(x^2+y^2)^{1/2}$. В рамках этих уравнений рассмотрим решение задачи об акустической волне в канале, формально положив коэффициенты вязкости и теплопроводности равными нулю ($\mu=\mu/{\rm Pr}=0$) и доопределив решение на границе

цилиндра (которое формально содержит деление на μ и поэтому не определено) предельным значением изнутри. Это решение удовлетворяет заданным граничным условиям при r=1.

Будем использовать сетку из треугольных призм, анизотропную около боковой поверхности цилиндра, соответствующую коэффиценту вязкости $\mu=10^{-7}$. Поток на граничных гранях определяется по формуле (8). Численные эксперименты показывают, что в такой постановке возникает достаточно большая численная ошибка, распространяющаяся от границы. Эта ошибка вызвана рассогласованностью вычисления потоков на внутренних и граничных треугольных гранях. Покажем это.

С точностью до величин более малого порядка по h поток через внутреннюю треугольную грань jk равен полусумме нормальных компонент потоков, посчитанных по значениям U_j и U_k . Векторы скоростей в U_j и U_k определяются как средние векторы скоростей по вершинам соответствующих призм. Следовательно, опять же с точностью до величин следующего порядка малости, векторы скоростей, по которым считается поток F_{jk} , аппроксимируют вектор скорости в центре масс грани jk. С другой стороны, в граничном условии нормальная компонента вектора скорости приравнивается к нулю. Например, если сетка на границе состоит из прямоугольных треугольников, катеты которых ориентированы по углу и по z, то нормаль направлена в плоскости XY и аппроксимирует нормаль к поверхности в середние горизонтального ребра, а не в середине треугольника. Эти нормали повёрнуты друг относительно друга на $O(\Delta\phi)$. То есть нормаль, если её отнести к центру масс треугольника, имеет азимутальную компоненту $O(\Delta\phi)|\mathbf{n}_{j\gamma}| = O(H^3/R)$. Зануление "не совсем той" компоненты нормали создаёт ошибку аппроксимации потока массы

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}_{\gamma} \sim u_{\phi} H^3 / R,$$

где u_{ϕ} – скорость на границе. После деления на объём ячейки получаем величину порядка $u_{\phi}H/(Rh)$.

Поскольку эта ошибка аппроксимации возникает только в граничной ячейке, в норме L_1 она имеет порядок O(H/R), что даёт основание полагать сходимость с первым порядком при $H \to 0$, равномерную по h < H. В норме L_∞ ошибка решения накапливается на промежутке $t \in (0,O(h))$ и далее распространяется от границы, возрастая со временем значительно медленнее, то есть ошибка решения опять же получается порядка O(H/R).

Ошибка, о которой идёт речь в настоящем пункте, устраняется реконструкцией нормалей. Если использовать квадратичное восстановление поверхности, поле нормалей получается линейным. Следовательно, величина n_{γ} , определяемая как интеграл от единичной нормали по граничной грани, с точностью до $O((\Delta\phi)^2)$ оказывается сонаправленной с точечным значением нормали

Таблица 6. Численная ошибка в задаче об акустической волне в канале по схеме BBR3 для полуструктурированных сеток по области $x^2+y^2>0.4^2$

Сетка	$N_{\phi} = 58,$	$\beta = 0.08$	$N_{\phi} = 116, \beta = 0.04$		
Геометрия	Q1	Q2	Q1	Q2	
Один шаг	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$1.8 \cdot 10^{-5}$	$2.7 \cdot 10^{-5}$	$3.4 \cdot 10^{-6}$	
t = 0.001	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$4.0 \cdot 10^{-4}$	$7.0 \cdot 10^{-4}$	$1.3 \cdot 10^{-4}$	
t = 0.1	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$4.7 \cdot 10^{-4}$	$3.4 \cdot 10^{-4}$	
t = 1	$5.1 \cdot 10^{-3}$	$4.9 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$	
t = 20	$9.4 \cdot 10^{-2}$	$9.6 \cdot 10^{-2}$	$2.4 \cdot 10^{-2}$	$2.4 \cdot 10^{-2}$	

в центре грани. В результате эта ошибка исчезает. Отметим, что даже если нормали n_{jk} и n_{γ} оставить посчитанными по линейному представлению рёбер, но граничное условие строить на занулении вектора скорости вдоль реконструированной нормали, ошибка всё равно исчезает.

9.3. Вязкая задача в цилиндре. Рассмотрим теперь линеаризованные уравнения Навье — Стокса и граничные условия прилипания с нулевой скоростью. Описанный в предыдущем подпункте механизм генерации ошибки в этом случае не работает, так как скорость на границе равна нулю.

Максимум модуля ошибки пульсации плотности, взятый на разные моменты времени на различных сетках, сведён в таблицу 6. В отличие от невязкого случая, аппроксимационная ошибка не сосредоточена в граничной ячейке, а имеет максимум на границе и убывает по мере удаления от неё. Кроме того, измеряемая величина имеет локальный максимум при $t\approx 2.4\cdot 10^{-4}$, после чего начинает снижаться. Указанный момент времени примерно одинаковый на трёх сетках: $N_\phi=58,\,\beta=0.08;\,N_\phi=58,\,\beta=0.04;\,N_\phi=116,\,\beta=0.08;$ значение в точке максимума пропорционально H.

Из таблицы 6 видно, что определение n_{jk} и n_{γ} исходя из квадратичного представления рёбер устраняет составляющую ошибки решения, доминирующую на малых временах счёта. Исправление только лишь граничных конвективных потоков лишено смысла, поскольку скорости на границе нулевые. Также было обнаружено, что отличие между линейным и квадратичным представлением рёбер сказывается только на точности вычисления конвективных потоков; при вычислении диффузионных потоков замена вектора n_{jk} на посчитанный с использованием линейного представления почти не меняет результат.

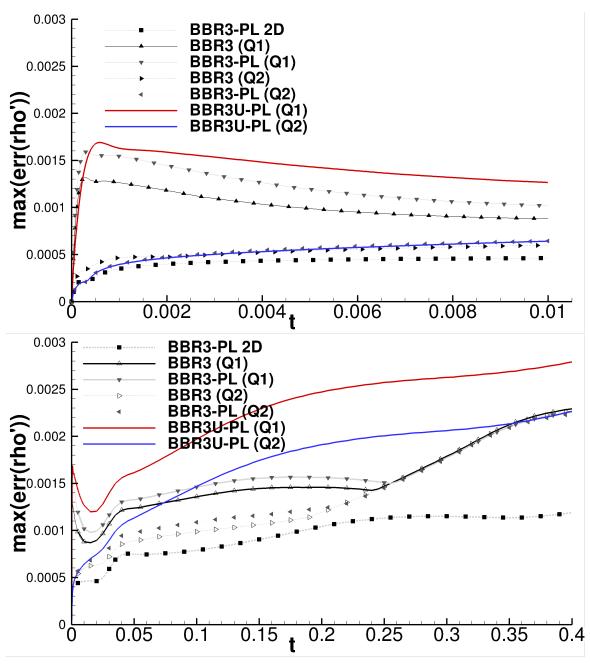


Рис. 9. Зависимость ошибки от времени на сетке №1 на начальном этапе

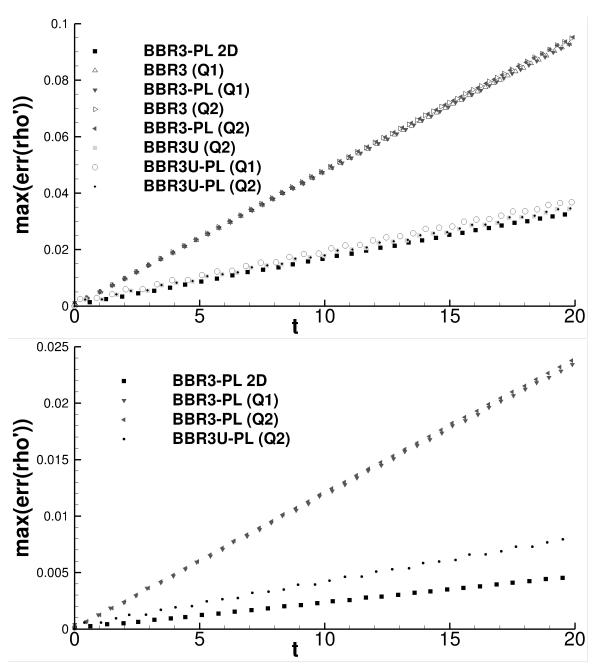
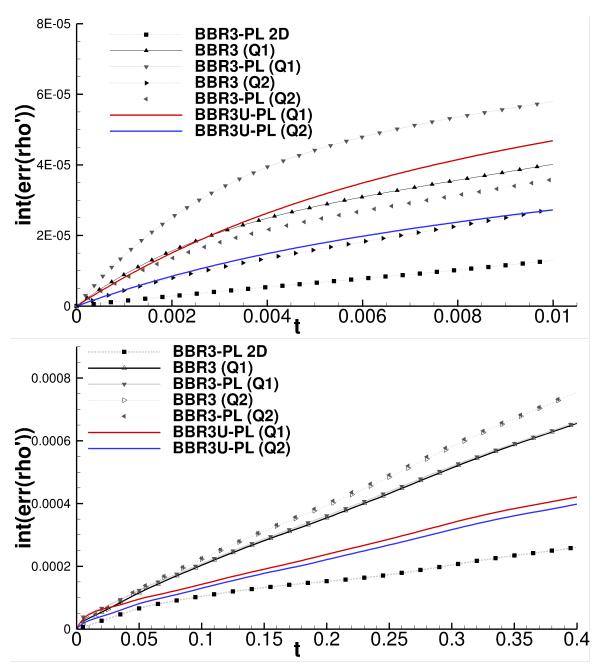


Рис. 10. Зависимость ошибки от времени на сетках №1 (верхний график) и №2 (нижний график) в трёхмерной постановке



 $Puc.\ 11.\$ Зависимость ошибки от времени на сетке №1 на начальном этапе в интегральной норме

Зависимость максимума модуля ошибки пульсации плотности от времени также отложена на рис. 9 и рис. 10. На рис. 9 эта зависимость изображена при 0 < t < 0.01 (верхний рисунок) и при 0 < t < 0.4 (нижний рисунок); оба рисунка соответствуют сетке №1. Видно, что резкий рост ошибки при малом времени наблюдается для всех рассмотренных схем, но при квадратичном восполнении рёбер он существенно меньше, чем при линейном восполнении. В интегральной норме (средний модуль ошибки по области r > 0.4) при 0 < t < 0.01 и 0 < t < 0.4 ошибка пульсации плотности изображена на рис. 11.

На рис. 10 эта же зависимость изображена при 0 < t < 20 для сеток №1 (верхний рисунок) и №2 (нижний рисунок). Видно, что на больших временах ошибка во времени растёт линейно и наблюдается сеточная сходимость со вторым порядком (в отличие от третьего порядка в двумерном случае). Отсюда следует, что на большом времени доминирующее слагаемое в ошибке наследуется из двумерной ВВR-схемы, имеющей второй порядок на равномерных сетках из правильных треугольников. Использование схемы ВВRU позволяет существенно улучшить точность по сравнению со схемой ВВR. Как видно из рис. 10, на сетке №1 точность расчёта по схеме ВВRU почти такая же, как у двумерных расчётов, однако на сетке №2 уступает им.

9.4. Задача об обтекании профиля. Как и в предыдущей задаче, в решении задачи об обтекании профиля на треугольной сетке наблюдаются осцилляции. Чтобы убедиться, что эти осцилляции не вызваны реконструкцией переменных, проведём расчёты по базовой конечно-объёмной схеме. Результаты этих расчётов приведены на рис. 12. Поле плотности на профиле, полученное с использованием линейной параметризации рёбер, приведено на рис. 12 сверху, а с использованием квадратичной параметризации — снизу. Видно, что при использовании линейной параметризации наблюдаются сильные осцилляции, максимум которых достигается примерно в точке максимума плотности, имеющей координату $y \approx 0.08$ (т. е. эта точка относительно точки растекания находится по другую сторону от передней кромки). При использовании квадратичной параметризации осцилляции ослабляются, но всё ещё заметны. Отметим, что эти осцилляции не могут быть объяснены неправильным определением $|V_j|$, поскольку изменение $|V_j|$ не меняет стационарного решения.

Теперь проведём расчёты по схеме BBR3-PL на сетках сх2, сх3 и сх4. Поля плотности похожи на изображённые на рис. 12; для краткости мы не будем их визуализировать, а вместо этого проанализируем осцилляции количественно. Выберем сечение поверхностной сетки плоскостью z=-0.15, на нём найдём минимум плотности ρ_{min} , и посчитаем среднее арифметическое от плотности

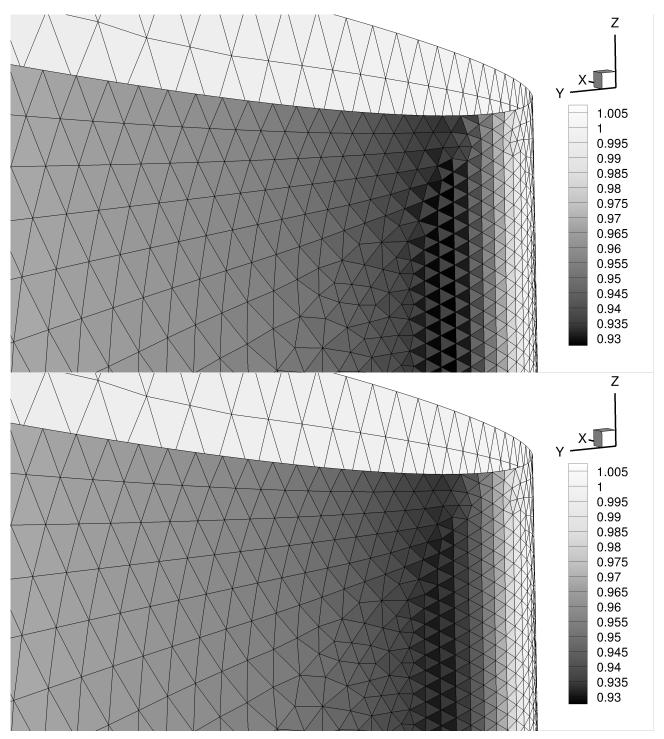


Рис. 12. Обтекание профиля NACA0012 на сетке с призматическим пристеночным слоем. Сверху: прямолинейные рёбра; снизу: рёбра с квадратичной параметризацией

$T \subset T$	U	U	U
<i>Таблица 7</i> . Результаты	измерении оснип	пянии около і	тепелнеи кпомки
Taominga 7. Tooysiblaibi	померении осции		тередиен кромки

Геометрия	Сетка	$ ho_{min}$	$ ho_{av}$	$\rho_{av} - \rho_{min}$
Q1	cx4	0.9047	0.9182	0.0135
Q1	cx3	0.9043	0.9157	0.0114
	cx2	0.9051	0.9108	0.0057
O2	cx4	0.9088	0.9116	0.0028
Q2	cx3	0.9091	0.9096	0.0005
	cx2	0.9074	0.9092	0.0018

по соседним ячейкам, которое обозначим за ρ_{av} . Результаты сведём в таблицу 7.

Если предположить, что граничная сетка состоит из правильных треугольников, для гладкого поля плотности ρ_{av} должно отличаться от ρ_{min} на величну второго порядка малости, а следовательно, величина $\rho_{av}-\rho_{min}$ может служить мерой осцилляций. Однако из таблицы 7 видно, что она не очень надёжная, что вызвано отличием сетки от равномерной (особенно для сх2, т. к. сетка сгущалась к передней кромке, и в точке минимума плотности уже начинается разбег), а также грубостью сетки, из-за которой зависимость $\rho_{av}-\rho_{min}$ далека от асимптотики (особенно для сх8).

Тем не менее, данные в таблице 7 показывают, что использование квадратичной параметризации рёбер существенно ослабляет осцилляции на поверхности обтекаемого тела, вызванные треугольной поверхностной сеткой.

Все результаты, приведённые ниже, получены по схеме BBR3-PL с использованием квадратичного восполнения сеточных рёбер. Отметим, что ввиду стационарности задачи использование модификации BBRU не меняет численного решения. В таблицу 8 сведены результаты расчётов на различных сетках в 2D и 3D; для сравнения приведены результаты по схеме EBR5 в 2D в качестве эталона. Результаты расчёта задачи в трёхмерной постановке по схеме BBR3-PL оказываются точнее, чем в двумерной. Это объясняется следующим. Двумерный расчёт эквивалентен трёхмерному расчёту на сетке, имеющей один шаг по Z, все грани которой либо параллельны плоскости XY, либо являются четырёхугольными и параллельными оси Z. А при одной и той же характерной длине ребра треугольная поверхностная сетка имеет больше степеней свободы на единицу площади, чем четырёхугольная, что и обеспечивает более высокую точность вместе с ростом стоимости.

Таким образом, из таблицы 8 можно сделать вывод о том, что схема BBR3-PL при квадратичном восполнении сеточных рёбер пригодна для численных расчётов задач аэродинамики.

Таблица 8. Аэродинамические коэффициенты в двумерных и трёхмерных расчётах

Коэфф.	Постановка,	cx4	cx3	cx2	cx1,
ποσφφ.	схема				EBR5-ijk
$C_{d,conv}$	2D	$12.04 \cdot 10^{-3}$	$8.33 \cdot 10^{-3}$		$6.25 \cdot 10^{-3}$
$C_{d,conv}$	3D, Q2	$7.43 \cdot 10^{-3}$	$6.79 \cdot 10^{-3}$	$6.42 \cdot 10^{-3}$	
$C_{d,conv}$	3D, Q1	$9.58 \cdot 10^{-3}$	$7.85 \cdot 10^{-3}$	$6.77 \cdot 10^{-3}$	
$C_{d,visc}$	2D	$5.70 \cdot 10^{-3}$	$6.01 \cdot 10^{-3}$	$6.15 \cdot 10^{-3}$	$6.16 \cdot 10^{-3}$
$C_{d,visc}$	3D, Q2	$5.98 \cdot 10^{-3}$	$6.11 \cdot 10^{-3}$	$6.16 \cdot 10^{-3}$	
$C_{d,visc}$	3D, Q1	$5.63 \cdot 10^{-3}$	$5.88 \cdot 10^{-3}$	$6.06 \cdot 10^{-3}$	
C_l	2D	1.0453	1.0766	1.0888	1.0883
C_l	3D, Q2	1.0798	1.0848	1.0872	
C_l	3D, Q1	1.0578	1.0744	1.0841	

10. Заключение

В работе были рассмотрены объёмно-центрированные конечно-объёмные схемы повышенной точности для призматических сеток и способ определения предраспадных значений с использованием полуструктуры сетки, присутствующей в призматических слоях. По итогам проведённого анализа можно сделать следующие выводы.

Во-первых, в отличие от вершинно-центрированных схем, для объёмно-центрированных схем важен учёт криволинейности сеточных граней. Если рёбра сетки считать прямыми, на неструктурированных сетках возникает ошибка хаотического вида порядка O(H), определяемого положением узлов неструктурированной сетки. Если учитывать кривизну, хаотическая составляющая ошибка существенно уменьшается и, предположительно, имеет величину $O(H^2)$. В задаче об акустической волне в канале эта ошибка не накапливается со временем и почти не влияет на точность на больших временах счёта, но в задаче обтекания профиля существенно искажает численное решение.

Во-вторых, для задачи об акустической волне в канале составляющей ошибки, доминирующей при больших временах, в двумерном случае является слагаемое порядка $O(H^3)$, которое наследуется из одномерной схемы на равномерной сетке. В трёхмерном случае доминирующее слагаемое в расчётах по схеме BBR3 имеет порядок $O(H^2)$ и также наследуется из свойств схемы на двумерной неструктурированной сетке; применение модификации BBRU позволяет существенно улучшить точность, приблизив её к точности двумерных расчётов на структурированных сетках. Учёт полуструктуры сетки почти не влияет на точность расчёта. Однако для задачи об обтекании профиля расчё-

ты по схеме без учёта полуструктуры сетки иногда завершаются аварийным остановом, для избежания которого требуется настройка константы K_{max} . При учёте полуструктуры сетки расчёты проводятся стабильно и без использования настроечных параметров. Таким образом, при использовании схем с квазиодномерной реконструкцией переменных явный учёт полустркутуры сетки является важной составляющей численного метода.

Автор благодарит П. Родионова за обсуждение работы, а также В. Бобкова и В. Цветкову за построение расчётных сеток для задачи об обтекании профиля. Все расчёты проводились программным кодом NOISEtte [17].

Вычисления проведены с помощью гибридного суперкомпьютера K60, установленного в Центре коллективного пользования ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.

Список литературы

- 1. Katz A., Work D. High-order flux correction/finite difference schemes for strand grids // Journal of Computational Physics. 2015. Vol. 282. P. 360–380.
- 2. High-order strand grid methods for shock turbulence interaction / Tong O., Yanagita Yu., Harris S. et al. // International Journal of Computational Fluid Dynamics. 2018. Vol. 32. P. 203–217.
- 3. EBR схемы с криволинейными реконструкциями для решения двумерных задач внешнего обтекания / Бахвалов П. А., Дубень А. П., Козубская Т. К. [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 152. С. 1–22.
- 4. Бахвалов П. А., Козубская Т. К. Схема с квазиодномерной реконструкцией переменных, определенных в центрах элементов трёхмерной неструктурированной сетки // Матем. моделирование. 2016. Т. 28. С. 79–95.
- 5. Touze C., Murrone A., Guillard H. Multislope MUSCL method for general unstructured meshes // Journal of Computational Physics. 2015. P. 389–418.
- 6. Бахвалов П. А. Анализ и улучшение точности объёмно-центрированной схемы с квазиодномерной реконструкцией переменных // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. № 9. С. 1–32.
- 7. Spalart P. R., Allmaras S. R. A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows // AIAA Paper. 1992. no. 92-0439.
- 8. Toro E. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction. Springer, 2009. p. 748.

- 9. Carlson J.-R. Inflow/Outflow Boundary Conditions with Application to FUN3D: Tech. Rep.: NASA/TM-2011-217181: NASA, 2011.
- 10. Ferziger J. H., Perić M. Computational Methods for Fluid Dynamics. Springer, 2002. p. 423.
- 11. Бобков В. Г. Разработка и автоматическое регрессионное тестирование программного комплекса NOISEtte // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 32. С. 1–20.
- 12. Mavriplis D. J. Revisiting the Least-Squares Procedure for Gradient Reconstruction on Unstructured Meshes // AIAA Paper. 2003. no. 2003-3986.
- 13. Kirchhoff G. Über der Einfluss der Warmeleitung in einem Gase auf die Schallbewegung // Annalen der Physik und Chemie. 1868. Vol. 134, no. 6. P. 177–193.
- 14. Бахвалов П. А., Козубская Т. К. Звуковая волна в круглой бесконечной трубе при наличии вязкости и теплопроводности // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 132. С. 1–32.
- 15. 2DN00: 2D NACA 0012 Airfoil Validation Case: Tech. Rep.: : NASA Langley Research Center. Turbulence Modeling Resource. URL: https://turbmodels.larc.nasa.gov/naca0012 val.html.
- 16. Davies D. E., Salmond D. J. Calculation of the Volume of a General Hexahedron for Flow Predictions // AIAA Journal. 1984. Vol. 23. P. 954–956.
- 17. Gorobets A. Parallel Algorithm of the NOISEtte Code for CFD and CAA Simulations // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. Vol. 39, no. 4. P. 524–532.