ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 63 за 2020 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Кирина-Лилинская Е.П.

Дробное уравнение Фоккера-Планка и эволюция средних значений метрик надежности беспроводной связи

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Кирина-Лилинская Е.П. Дробное уравнение Фоккера-Планка и эволюция средних значений метрик надежности беспроводной связи // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 63. 14 с. http://doi.org/10.20948/prepr-2020-63
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-63

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

Е.П. Кирина-Лилинская

Дробное уравнение Фоккера-Планка и эволюция средних значений метрик надежности беспроводной связи

Москва — 2020

Кирина-Лилинская Е.П.

Дробное уравнение Фоккера-Планка и эволюция средних значений метрик надежности беспроводной связи

В работе изучается возможность применения модели дробного уравнения Фоккера-Планка для описания эволюции функции распределения индикатора качества беспроводной связи между абонентами, совершающими фрактальное случайное блуждание. Выведены уравнения эволюции среднего поля интерференции и среднего значения индикатора отношения мощности полезного сигнала к мощности интерференции, которые могут быть полезны при организации движения абонентов с целью минимизации нестационарных скачков устойчивости сигнала, приводящих к обрыву связи, а также к уменьшению эффектов нестационарного дрейфа и фрактальной диффузии.

Ключевые слова: дробное уравнение Фоккера-Планка, фрактальное блуждание, беспроводная связь, метрики надежности

Kirina-Lilinskaya E.P.

Fractal Fokker-Planck equation and evolution of average safety metrics of wireless network

This work shows possible applications of Fokker-Planck equation in the problem of describing the evolution function for the distribution of Signal-Interference ratio parameter in wireless communication between devices in random fractal walk. The work shows derivation of the base equations for describing nonstationary random fractal walk and their use in analysis of connection stability in device-to-device model. The walk also shows derivation of evolution equations for connection quality metrics, which may be helpful in minimizing non-stationary jumps in signal stability leading to signal loss and lowering the nonstationary drifting and fractal diffusion effects.

Keywords: fractal Fokker-Planck equation, wireless connection, quality metrics

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 18-11-00238

Содержание

1. Введение

В работе изучается возможность применения модели дробного уравнения Фоккера-Планка для описания эволюции функции распределения параметра качества беспроводной связи между абонентами сети, совершающими фрактальное случайное блуждание. Этот параметр, называемый SIR (signal-to-interference ratio, отношение сигнала к интерференции [1]), представляет собой сложный нелинейный функционал от распределения абонентов. Целью работы является вывод уравнений для среднего по ансамблю отношения SIR и для его дисперсии. Поскольку существует технологический уровень минимального значения SIR, при котором связь реализуется, следует определить, как меняется вероятность обрыва связи при движении абонентов.

При организации D2D-соединений возникает множество требующих решения задач. Одной из наиболее принципиальных задач является разделение частотного ресурса между двумя типами соединений: D2D-соединениями и соединениями традиционной сотовой связи.

Совокупность различных аспектов, в том числе интерференция и безопасность, не позволяет с уверенностью дать ответ на вопрос: должны ли D2D-устройства использовать строго выделенный для них спектр частот, или у них может быть доступ к частотам, используемым устройствами сотовой связи. К тому же задача распределения частот осложняется тем, что устройства в некоторых случаях могут переключаться между обоими типами соединений. Ответ может быть получен с помощью решения задач, целью которых является оптимизация архитектуры и параметров сети, обеспечивающих наилучшие показатели её производительности, и последующего сравнительного анализа полученных результатов. К наиболее важным показателям можно отнести пиковые скорости передачи данных между устройствами, задержку начала передачи данных, отношение полезного сигнала к интерференции, энергосбережение, эффективность использования частотного спектра и др. Величина SIR является важной метрикой, описывающей качество связи, которое зависит от среды распространения и расстояния между сообщающимися объектами. Следует подчеркнуть, что расстояние между взаимодействующими объектами зависит от мобильности пользователей, участвующих в связи.

В установлении D2D связи между устройствами на показатели качества связи сильно влияет мобильность пользователей. Обычно модель мобильности считается стационарной, что не позволяет моделировать эффекты нестационарного блуждания. В настоящей работе используется кинетический подход для анализа эволюции параметров функции распределения вероятностей SIR в среде D2D при нестационарной подвижности пользователей.

Одним из методов анализа различных моделей распределения абонентов сети, включая многие известные стационарные модели, а также нестационарные, является использование кинетического уравнения. Эта идея была первоначально предложена в [2], где была описана общая методология и показана динамика SIR для различных частных случаев мобильности пользователей от прямолинейного движения до броуновского движения. Далее в [3] кинетическая модель подвижности была распространена на общие случаи с широким диапазоном характеристик подвижности, однако без учета возможного фрактального характера движения абонентов. Анализ зависящей от времени эволюции среднего значения, дисперсии и коэффициента вариации метрики SIR показал, что нестационарное распределение абонентов может существенно влиять на динамику SIR. Нетривиальным аспектом теории является то, что функция распределения SIR в общем случае нестационарного случайного блуждания не является аналитически выводимой из предположительно известной функции распределения пользовательских позиций. Это связано с тем, что SIR является сложным нелинейным функционалом, что приводит к значительным техническим трудностям при выводе эволюционных уравнений моментов функции распределения этого показателя.

2. Уравнение Фоккера-Планка с дробными производными

В этой вводной главе будут даны определения дробных производных и дробных кинетических уравнений, следуя монографиям [4, 5].

Определим сначала дробные интегралы Римана-Лиувилля порядка $\alpha > 0$ на конечном отрезке $[a; b]$. Определяются левосторонний и правосторонний интегралы:

$$\left(I_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(y)(x-y)^{\alpha-1} dy;$$
$$\left(I_{b-}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b f(y)(y-x)^{\alpha-1} dy. \tag{2.1}$$

Эти объекты определены для функций $f \in L_1([a;b])$.

Дробные производные Римана-Лиувилля порядка $\alpha > 0$ определяются соотношениями

$$\left(D_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x f(y)(x-y)^{n-\alpha-1} dy;$$
$$\left(D_{b-}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^b f(y)(y-x)^{n-\alpha-1} dy. \tag{2.2}$$

В формулах (2.2) параметр n равен $n = [\alpha] + 1$. Далее будет рассматриваться случай, когда $\alpha = 2\beta \in (1; 2)$, т.е. когда $n = 2$.

Функция f в (2.1) и (2.2) будет рассматриваться далее как плотность функции распределения. Подразумевая, что эта плотность строится по эмпирическим данным, пределы интегрирования следует считать конечными. Однако, как было показано в [6, 7], в этом случае не существует устойчивых распределений с неотрицательными плотностями, обращающимися в ноль в граничных точках промежутков. Следовательно, чтобы рассуждения были корректными, надо формально определить дробные производные и интегралы на бесконечном промежутке. Для таких промежутков устойчивые распределения существуют и выражаются через специальные функции (Миттаг-Лефлера [8, 9]). Соответствующие определения имеют вид:

$$\left(I_{+}^{\alpha} f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} f(y)(x-y)^{\alpha-1} dy;$$
$$\left(I_{-}^{\alpha} f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x}^{+\infty} f(y)(y-x)^{\alpha-1} dy. \tag{2.3}$$

$$\left(D_{+}^{\alpha} f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^{n}}{dx^{n}} \int_{-\infty}^{x} f(y)(x-y)^{n-\alpha-1} dy;$$
$$\left(D_{-}^{\alpha} f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^{n}}{dx^{n}} \int_{x}^{+\infty} f(y)(y-x)^{n-\alpha-1} dy. \tag{2.4}$$

Для случая нескольких переменных эти формулы обобщаются следующим образом. Пусть α есть мультииндекс (α_1, α_2) с длиной $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$ (и аналогично n). Тогда

$$\left(I_{+}^{\alpha} f\right)(x, y)=\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_{-\infty}^{x} f(u, v)(x-u)^{\alpha_1-1}(y-u)^{\alpha_2-1} du dv;$$
$$\left(D_{-}^{\alpha} f\right)(x, y)=\frac{\partial^{n_1+n_2}}{\partial x^{n_1} \partial y^{n_2}}\left(I_{+}^{n-\alpha} f\right)(x, y). \tag{2.5}$$

Для краткости в работе будут рассматриваться одномерные процессы.

Вводится интегральный оператор Рисса-Феллера как следующая линейная комбинация:

$$\left(I^{\alpha} f\right)(x)=\frac{\left(I_{+}^{\alpha} f\right)(x)+\left(I_{-}^{\alpha} f\right)(x)}{2 \cos(\pi \alpha / 2)}. \tag{2.6}$$

Далее удобно рассматривать $\alpha = 2\beta$, так что

$$\left(I^{2\beta} f\right)(x)=\frac{\left(I_{+}^{2\beta} f\right)(x)+\left(I_{-}^{2\beta} f\right)(x)}{2 \cos(\pi \beta)}.$$

Аналогично производная Рисса-Феллера имеет вид

$$\frac{\partial^{2\beta} f(x)}{\partial x^{2\alpha}}=\frac{1}{2 \cos \pi \beta}\left(\left(D_{a+}^{2\beta} f\right)(x)+\left(D_{b-}^{2\beta} f\right)(x)\right), \tag{2.7}$$

где

$$\left(D_{a+}^{2\beta} f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(n-2\beta)} \frac{d^{n}}{dx^{n}} \int_{a}^{x} f(y)(x-y)^{n-2\beta-1} dy,$$
$$\left(D_{b-}^{2\beta} f\right)(x)=\frac{(-1)^{n}}{\Gamma(m-2\beta)} \frac{d^{n}}{dx^{n}} \int_{x}^{b} f(y)(y-z)^{n-2\beta-1} dy, \tag{2.8}$$
$$n=[\operatorname{Re}(2\beta)]+1.$$

Из приведенных определений следует, что дифференциальные уравнения с комбинацией дробных и обыкновенных частных производных являются интегро-дифференциальными с полярным ядром. Для обыкновенных дифференциальных уравнений с дробными производными доказано существование и единственность задачи Коши путем сведения уравнения вида

$$\left(D_{a+}^{\alpha} u\right)(x)=f(x, u(x)), \ \left(D_{a+}^{\alpha-k} u\right)(a+0)=c_k$$

к интегральному уравнению Вольтерра II рода

$$u(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k(x-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x(x-y)^{\alpha-1}f(y,u(y))dy.$$

В общем случае для уравнений с дробными производными возникает проблема интерпретации начальных и граничных условий, поскольку производные, например, Римана-Лиувилля не являются локальными и требуют знания поведения функции не в точке, а в области.

Впервые уравнение дробного порядка для исследования диффузионных процессов было выписано в [10]. В работе [11] уравнения дробного порядка применялись для моделирования случайного блуждания с непрерывным временем. Такое случайное блуждание определяется последовательностью одинаково распределенных величин (величин смещения), так что плотность вероятности $f(x,t)$ нахождения частицы в точке x в момент времени t определяется уравнением

$$\left({}_tD_{0+}^{\gamma}f\right)(x,t)=\lambda\left({}_xD_{a+}^{\alpha}f\right)(x,t),$$

где λ есть некоторая постоянная.

В работе [5] было показано, что эволюция условных плотностей $p(x,t|x_0,t_0)$ распределений стохастического процесса, соответствующего нелинейному стохастическому уравнению

$$d\xi=A(\xi,t)dt+B(\xi,t)d\Lambda,$$

где Λ есть устойчивый случайный процесс (т.е. процесс с независимыми устойчиво распределенными приращениями), может быть представлена в виде дробного уравнения адвекции-диффузии:

$$\frac{\partial p}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}(u(x,t)p)-B\left({}_xD_{a+}^{\alpha}p\right)(x,t) \qquad (2.9)$$

с начальными условиями в виде дельта-функции: $\lim\limits_{t\to t_0}p(x,t|x_0,t_0)=\delta(x-x_0)$.

Отметим также, что в качестве дробного аналога уравнения диффузии рассматривались и уравнения дробного порядка по времени [4]:

$$\left({}_tD_{0+}^{\gamma}f\right)(x,t)=\lambda\Delta f(x,t).$$

Далее будет рассматриваться дробное уравнение Фоккера-Планка, которое было предложено в [5]:

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial\left(u(x,t)f(x,t)\right)}{\partial x}=B(t)\frac{\partial^{2\beta}f(x,t)}{\partial x^{2\beta}}. \qquad (2.10)$$

Здесь $u(x,t)$ – параметр сноса (дрейф), а $B(t)$ – зависящий в общем случае от времени неотрицательный коэффициент фрактальной диффузии. В данной модели предполагается, что непрерывно дифференцируемая по своим аргументам функция $f(x,t)$ аппроксимирует выборочную плотность функции распределения (далее ВПФР), представленную, например, в виде гистограммы, а скорость дрейфа $u(x,t)$ определяется как средняя выборочная скорость по двумерному эмпирическому распределению:

$$u(x,t)f(x,t)=\int F(x,v,t)vdv,\quad f(x,t)=\int F(x,v,t)dv. \qquad (2.11)$$

Граничные условия для распределений всех порядков предполагаются нулевыми.

3. Уравнение эволюции линейных функционалов

Будем предполагать, что абоненты (т.е. точки нахождения приемо-передающих устройств) совершают случайное блуждание в виде процесса с устойчивыми независимыми приращениями, так что координаты нахождения абонентов в определенный момент времени t

$$X(t) = X(0) + \sum_{k=1}^{t} x_k \,, \quad Y(t) = Y(0) + \sum_{k=1}^{t} y_k \,, \quad Z(t) = Z(0) + \sum_{k=1}^{t} z_k \,, \qquad (3.1)$$

определяются как сумма последовательных шагов приращений $\mathbf{r}_k = \{x_k, y_k, z_k\}$ на временном шаге k.

Далее будем считать, что ВПФР нестационарного временного ряда приращений координат удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка с дробными пространственными производными и сносом. Без учета дрейфа такое уравнение впервые было предложено Заславским в [4] и затем исследовалось многими авторами.

Для краткости обозначений будем предполагать, что блуждание по каждой из координат осуществляется независимо и в рамках одной и той же вероятностной модели. Тогда уравнение для эволюции ВПФР приращений одной из координат имеет вид (2.10) с учетом уравнений связи (2.11).

Заметим, что плотность $f(x)$ должна быть неотрицательна и нормируема на единицу, причем по предположению использования модели для аппроксимации реальных временных рядов с ограниченными приращениями граничные условия следует выбрать нулевыми: $f(0,t) = f(1,t) = 0$.

Тогда после интегрирования уравнения (2.10) по x с учетом нулевых граничных условий и условия сохранения нормировки получаем, что должно выполняться равенство

$$\int_0^1 \frac{\partial^{2\beta} f(x,t)}{\partial x^{2\beta}} dx = 0 \,.$$

Из определения (2.7) следует, что это условие преобразуется к виду

$$\int_0^1 \left(f(x,t) + f(1-x,t) \right) \frac{dx}{x^{2\beta}} = 0 \,.$$

Однако последнее равенство не может быть удовлетворено неотрицательной функцией иначе, чем при равенстве $f(x,t) = 0$ почти везде. Неотрицательная плотность распределения существует только при рассмотрении бесконечного промежутка: $x \in (-\infty, +\infty)$. На практике это означает, что мы пренебрегаем граничными эффектами, что возможно, если только блуждание рассматривается на относительно небольшом промежутке времени, в течение которого абоненты не достигают границы области блуждания. С учетом сделанных замечаний можно переходить к построению эволюционных уравнений для моментов и иных функционалов от функции распределения, плотность которой удовлетворяет дробному уравнению Фоккера-Планка.

Например, рассмотрим некоторый линейный функционал

$$W(t)=\int_{-\infty}^{\infty} w(x,t)\,f(x,t)dx, \tag{3.2}$$

где $w(x,t)$ есть некоторая функция, средним значением которой мы интересуемся. Ее производная по времени в силу уравнения (2.10) с учетом определения (2.7) имеет вид:

$$\frac{dW(t)}{dt}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}f(x,t)dx+\int_{-\infty}^{\infty}w(x,t)\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}f(x,t)dx+\int_{-\infty}^{\infty}w(x,t)\left(-\frac{\partial(u(x,t)\,f(x,t))}{\partial x}+B(t)\frac{\partial^{2\beta}f(x,t)}{\partial x^{2\beta}}\right)dx.$$

Введем обозначение $G(x,t)$ для интеграла

$$G(x,t)=\frac{1}{2\Gamma(1-2\beta)\cos\pi\beta}\left(\int_{-\infty}^{x>0}\frac{f(\xi,t)}{(x-\xi)^{2\beta}}d\xi-\int_{x}^{+\infty}\frac{f(\xi,t)}{(\xi-x)^{2\beta}}d\xi\right). \tag{3.3}$$

Тогда искомая производная по времени примет вид:

$$\frac{dW(t)}{dt}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}f(x,t)dx+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}(u(x,t)\,f(x,t)-B(t)G(x,t))dx. \tag{3.4}$$

Например, для среднего значения $m(t)$ случайной величины x по распределению $f(x,t)$ получаем

$$\frac{dm(t)}{dt}=\int x\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx=$$

$$=-\int x\frac{\partial}{\partial x}(u(x,t)\,f(x,t))dx+B(t)\int x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\int G(|x-y|)f(y,t)dy\right)dx,$$

где с учетом представления (2.8) введено обозначение

$$\frac{\partial^{2\beta}f(x,t)}{\partial x^{2\beta}}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}G(x-y)\,f(y,t)dy,$$

$$G(x-y)=\frac{1}{2\cos\pi\beta}\frac{1}{\Gamma(2-2\beta)}(x-y)^{1-2\beta},\quad y<x, \tag{3.5}$$

$$G(x-y)=\frac{1}{2\cos\pi\beta}\frac{1}{\Gamma(2-2\beta)}(-x+y)^{1-2\beta},\quad y\ge x.$$

После интегрирования по частям с учетом нулевых граничных условий получаем

$$\frac{dm(t)}{dt}=\int u(x,t)\,f(x,t)dx. \tag{3.6}$$

Уравнение (3.5) означает, что эволюция среднего значения случайной величины, плотность которой эволюционирует по уравнению (2.10), определяется средней скоростью сноса, т.е. параметром указанного уравнения.

4. Уравнение эволюции среднего значения SIR

Описанный метод вывода уравнений эволюции средних по ансамблю величин может быть обобщен и на случай нелинейных функционалов. Важным примером таких функционалов является отношение «сигнал-интерференция» при анализе надежности мобильной связи между движущимися приемо-передающими устройствами.

Рассмотрим функционал, зависящий от расстояний между движущимися точками, положения которых образуют в совокупности ансамбль траекторий случайного процесса. Пусть координаты $(x_i(t), y_i(t), z_i(t))$ определяют положение точки i-ой траектории в рассматриваемой области на дискретном шаге t. Число точек (т.е. траекторий) в рассматриваемой системе случайно движущихся тел равно $N+2$. Расстояние между точками на двух траекториях определяется формулой

$$r_{ij}^2(t) = (x_i(t) - x_j(t))^2 + (y_i(t) - y_j(t))^2 + (z_i(t) - z_j(t))^2. \tag{4.1}$$

Введем функцию связи между двумя точками, зависящую от расстояния между ними: $\varphi_{ij} \equiv \varphi(r_{ij}) = 1/r_{ij}^2$. Выберем определенную пару точек, например, 1 и 2. Рассмотрим функционал SIR между заданной парой точек, имеющий вид:

$$S(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t) = \frac{\varphi_{12}(t)}{\sum\limits_{j=3}^{N+2} \varphi_{1j}(t)}. \tag{4.2}$$

Сумма в знаменателе формулы (4.2) представляет собой умноженное на N среднее значение функции связи с первой точкой, определяемое как

$$U(\mathbf{r}, t) = \int_V \varphi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t) \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \tag{4.3}$$

где $\rho(\mathbf{r}')$ есть плотность распределения расстояний между точками в данной области, а V – формально неограниченная область блуждания. Удобно ввести далее расстояние $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{12}$ и рассматривать все остальные точки в системе отсчета, связанной со второй частицей. Тогда SIR (4.2) примет вид

$$S \equiv S(\mathbf{r}, t) = \frac{\varphi(\mathbf{r}, t)}{NU(\mathbf{r}, t)}. \tag{4.4}$$

Рассмотрим эволюцию среднего значения функционала SIR. Пусть N есть число приемо-передающих устройств, а $\varphi(\mathbf{x})$ есть функция ослабления мощности сигнала в зависимости от расстояния до приемника. Тогда среднее значение SIR по ансамблю траекторий определяется формулой

$$q(t) = \frac{1}{N} \int_V \frac{\varphi(\mathbf{x})}{U(\mathbf{x}, t)} f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}, \quad U(\mathbf{x}, t) = \int_V \varphi(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) f(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}'. \tag{4.5}$$

Величину $U(\mathbf{x}, t)$ будем называть средним полем или полем интерференции. Из (4.5) следует, что эволюция величины $q(t)$ определяется не только собственно эволюцией распределения $f(\mathbf{x}, t)$, но и эволюцией поля интерференции:

$$N \frac{dq}{dt} = \int_V \frac{\varphi(\mathbf{r})}{U(\mathbf{r}, t)} \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} d\mathbf{r} - \int_V \frac{\varphi(\mathbf{r})}{U^2(\mathbf{r}, t)} \frac{\partial U(\mathbf{r}, t)}{\partial t} f(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}. \tag{4.6}$$

В соответствии с уравнением (4.5) имеем

$$\frac{\partial U(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \int \varphi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \frac{\partial f(\mathbf{r}', t)}{\partial t} d\mathbf{r}'. \tag{4.7}$$

Подставляя в (4.7) выражение для $\dfrac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$ из (2.10)

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}=-\frac{\partial\left(u(x,t)\,f(x,t)\right)}{\partial x}+B(t)\frac{\partial^{2\beta}f(x,t)}{\partial x^{2\beta}},$$

где с учетом представления (3.5) дробные производные трактуются в виде

$$\frac{\partial^{2\beta}f(x,t)}{\partial x^{2\beta}}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(x-y)\,f(y,t)dy,$$

получаем

$$\frac{\partial U(\mathbf{r},t)}{\partial t}=\int\varphi(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\frac{\partial f(\mathbf{r}',t)}{\partial t}d\mathbf{r}'=$$

$$=-\int\varphi(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)div_{\mathbf{r}'}(\mathbf{u}(\mathbf{r}',t)\,f(\mathbf{r}',t))d\mathbf{r}'+ \tag{4.8}$$

$$+B(t)\Delta_{\mathbf{r}}\int\varphi(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)G(|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|)\,f(\mathbf{r}'',t)d\mathbf{r}'d\mathbf{r}''.$$

Первое интегральное слагаемое в (4.8) преобразуется посредством обычного интегрирования по частям с учетом нулевых граничных условий:

$$\int\varphi(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)div_{\mathbf{r}'}(\mathbf{u}(\mathbf{r}',t)\,f(\mathbf{r}',t))d\mathbf{r}'=$$

$$=-\int grad_{\mathbf{r}'}\varphi(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\mathbf{u}(\mathbf{r}',t)\,f(\mathbf{r}',t)d\mathbf{r}'=$$

$$=\int grad_{\mathbf{r}}\varphi(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\mathbf{u}(\mathbf{r}',t)\,f(\mathbf{r}',t)d\mathbf{r}'= \tag{4.9}$$

$$=div_{\mathbf{r}}\int\varphi(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\mathbf{u}(\mathbf{r}',t)\,f(\mathbf{r}',t)d\mathbf{r}'\equiv div_{\mathbf{r}}\mathbf{J}(\mathbf{r},t).$$

Здесь выражение для $\mathbf{J}$ представляет плотность потока потенциала ослабления сигнала:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r},t)=\int\varphi(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\mathbf{u}(\mathbf{r}',t)\,f(\mathbf{r}',t)d\mathbf{r}'. \tag{4.10}$$

Второй интегральный член в (4.8) преобразуется по правилам интегрирования по частям для дробных производных (см. [4, 8]):

$$\int\limits_a^b h(x)\left(D_{a+}^{2\beta}g\right)(x)dx=\int\limits_a^b g(x)\left(D_{b-}^{2\beta}h\right)(x)dx.$$

В результате мы получаем

$$\Delta_{\mathbf{r}}\int\varphi(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)G(|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|)\,f(\mathbf{r}'',t)d\mathbf{r}'d\mathbf{r}''=\left(D^{2\beta}U\right)(\mathbf{r},t). \tag{4.11}$$

Подставляя выражения (4.10) и (4.11) в (4.8), получаем уравнение для описания эволюции среднего поля интерференции:

$$\frac{\partial U(\mathbf{x},t)}{\partial t}=B(t)\left(D^{2\beta}U\right)(\mathbf{x},t)-div_{\mathbf{x}}\mathbf{J}(\mathbf{x},t). \tag{4.12}$$

Уравнение (4.12) означает, что поле интерференции эволюционирует по тем же законам, что и собственно случайное блуждание абонентов: для него получилось уравнение Фоккера-Планка вида (2.10) с тем же коэффициентом фрактальной диффузии, но в котором параметр сноса плотности вероятности заменен на аналогичный параметр сноса потенциала интерференции.

Перейдем теперь к вычислению уравнения эволюции среднего значения SIR (4.5).

Вычислим первый интеграл в (4.6). Используя представление (3.5), получаем следующую цепочку равенств:

$$\int \frac{\varphi(\mathbf{x})}{U(\mathbf{x},t)} \frac{\partial f(\mathbf{x},t)}{\partial t} d\mathbf{x} =$$

$$= -\int \frac{\varphi(\mathbf{x})}{U(\mathbf{x},t)} div_{\mathbf{x}} (\mathbf{u}(\mathbf{x},t) f(\mathbf{x},t)) d\mathbf{x} + B(t) \int \frac{\varphi(\mathbf{x})}{U(\mathbf{x},t)} \Delta_{\mathbf{x}} \int G(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) f(\mathbf{y},t) d\mathbf{y} d\mathbf{x} =$$

$$= \int grad_{\mathbf{x}} \left(\frac{\varphi(\mathbf{x})}{U(\mathbf{x},t)} \right) \mathbf{u}(\mathbf{x},t) f(\mathbf{x},t) d\mathbf{x} + B(t) \int \frac{\varphi(\mathbf{x})}{U(\mathbf{x},t)} \Delta_{\mathbf{x}} \int G(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) f(\mathbf{y},t) d\mathbf{y} d\mathbf{x}.$$

Последнее равенство в данной цепочке преобразований получено интегрированием по частям с учетом нулевых граничных условий для плотности распределения. Обозначим далее для краткости скалярное произведение $\mathbf{u}(\mathbf{x},t) grad_{\mathbf{x}} \left(\frac{\varphi(\mathbf{x})}{U(\mathbf{x},t)} \right)$ через $P(\mathbf{x},t)$.

Внутренний интеграл по y во втором слагаемом преобразуется интегрированием по частям по к виду $D^{2\beta} \left(\frac{\varphi}{U} \right) (\mathbf{y},t)$.

В результате получаем, что

$$\int \frac{\varphi(\mathbf{x})}{U(\mathbf{x},t)} \frac{\partial f(\mathbf{x},t)}{\partial t} d\mathbf{x} = \int \left(P(\mathbf{x},t) + B(t) D^{2\beta} \left(\frac{\varphi}{U} \right) (\mathbf{x},t) \right) f(\mathbf{x},t) d\mathbf{x}. \tag{4.13}$$

Подставляя теперь в (4.6) результаты сделанных преобразований (4.12) и (4.13), получаем

$$N \frac{dq}{dt} = \int \left(P(\mathbf{x},t) + B(t) D^{2\beta} \left(\frac{\varphi}{U} \right) (\mathbf{x},t) \right) f(\mathbf{x},t) d\mathbf{x} -$$
$$- B(t) \int \frac{\varphi(\mathbf{x})}{U^2(\mathbf{x},t)} \left(\left(D^{2\beta} U \right) (\mathbf{x},t) \right) f(\mathbf{x},t) d\mathbf{x} +$$
$$+ \int \frac{\varphi(\mathbf{x})}{U^2(\mathbf{x},t)} \left(div_{\mathbf{x}} \mathbf{J}(\mathbf{x},t) \right) f(\mathbf{x},t) d\mathbf{x}.$$

Члены со сносом и диффузией от двух слагаемых удобно объединить, так что уравнение эволюции среднего SIR запишется в виде:

$$\begin{aligned} N \frac{dq}{dt} &= \int \left(\mathbf{u}(\mathbf{x},t) grad_{\mathbf{x}} \left(\frac{\varphi(\mathbf{x})}{U(\mathbf{x},t)} \right) + \frac{\varphi(\mathbf{x})}{U^2(\mathbf{x},t)} \left(div_{\mathbf{x}} \mathbf{J}(\mathbf{x},t) \right) \right) f(\mathbf{x},t) d\mathbf{x} + \\ &+ B(t) \int \left(D^{2\beta} \left(\frac{\varphi(\mathbf{x})}{U(\mathbf{x},t)} \right) (\mathbf{x},t) - \frac{\varphi(\mathbf{x})}{U^2(\mathbf{x},t)} \left(\left(D^{2\beta} U \right) (\mathbf{x},t) \right) \right) f(\mathbf{x},t) d\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Таким образом, в терминах координат траекторий приемо-передающих устройств эволюция среднего значения SIR выглядит весьма громоздко. В то же время в уравнении (4.14) можно выделить два типа слагаемых. Первый интеграл определяется сносом среднего поля интерференции, а второй связан с диффузией этого поля. Если коэффициент диффузии является малой величиной, так что эволюция среднего SIR определяется главным образом первым членом, т.е. эффектом сноса, то интересно постараться минимизировать этот эффект. Поэтому, если окажется возможным ввести такое управление, при котором первое слагаемое будет близко к нулю, то поведение SIR окажется квазистационарным, что имеет практическое значение.

Интересно отметить, что в двумерном или трехмерном случае возможен вариант, когда ненулевая скорость сноса ортогональна градиенту локального SIR, а поток SIR имеет нулевую расходимость $div_{\mathbf{x}}\mathbf{J}=0$, так что изменение среднего SIR будет определяться только диффузионным слагаемым. В более общем случае можно предложить такое управление движением абонентов, что вклад $\mathbf{u}\nabla\left(\frac{\varphi}{U}\right)+\frac{\varphi}{U^2}div\mathbf{J}$ равен нулю локально (жесткое условие) или в среднем по пространству (более мягкое условие).

Также следует подчеркнуть, что при ненулевой диффузии вклад соответствующего слагаемого в уравнение эволюции среднего SIR не может быть равным нулю. Даже в простейшем случае, когда $2\beta=1$, указанный член преобразуется к виду

$$B(t)\int\frac{d\varphi(\mathbf{x})/d\mathbf{x}}{U(\mathbf{x},t)}f(\mathbf{x},t)d\mathbf{x},$$

отличному от нуля.

5. Уравнения эволюции для анализа надежности беспроводной связи

Одним из индикаторов надежности связи может служить параметр устойчивости среднего значения SIR. Само это значение должно находиться в определенных технологически обоснованных пределах, но если распределение обладает большой дисперсией, то доверительный интервал изменения SIR оказывается слишком большим. Для оценки устойчивости среднего значения используют нормированное среднее (коэффициент Шарпа), определяемый как отношение среднего значения $q(t)$ к корню из дисперсии.

Обозначим дисперсию SIR через $\Sigma^2(t)$. Тогда коэффициент Шарпа есть

$$s(t)=q(t)/\Sigma(t). \tag{5.1}$$

Изменение во времени среднего значения SIR дается формулой (4.14). Для анализа величины $s(t)$ надо вывести предварительно уравнение эволюции для дисперсии SIR.

Дисперсия SIR определяется как функционал по ансамблю траекторий следующим образом:

$$\Sigma^2(t)=\frac{1}{N^2}\int_V\left(\frac{\varphi(\mathbf{x})}{U(\mathbf{x},t)}-\int_V\frac{\varphi(\mathbf{x}')}{U(\mathbf{x}',t)}f(\mathbf{x}',t)d\mathbf{x}'\right)^2 f(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}. \tag{5.2}$$

Дифференцируя (5.2) по времени, получаем

$$N^2\frac{d\Sigma^2(t)}{dt}=\int_V\left(\frac{\varphi(\mathbf{x})}{U(\mathbf{x},t)}-Nq(t)\right)^2\frac{\partial f(\mathbf{x},t)}{\partial t}d\mathbf{x}-$$
$$-2\int_V\left(\frac{\varphi(\mathbf{x})}{U^2(\mathbf{x},t)}\frac{\partial U(\mathbf{x},t)}{\partial t}+N\frac{dq(t)}{dt}\right)\left(\frac{\varphi(\mathbf{x})}{U(\mathbf{x},t)}-Nq(t)\right)f(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}. \tag{5.3}$$

Первый интеграл в правой части написанного равенства преобразуется с использованием уравнения Фоккера-Планка (2.10), как это было сделано при выводе уравнения (4.14), а второй – известная, в принципе, величина, поскольку является интегралом от производных по времени величин, найденных ранее в (4.12) и (4.14). В результате производная по времени в левой части уравнения (5.3) будет выражена через производные по $\mathbf{x}$ в правой части.

Для первого интеграла в (5.3) получаем:

$$\int_V \left(\frac{\varphi(\mathbf{x})}{U(\mathbf{x},t)} - Nq(t) \right)^2 \frac{\partial f(\mathbf{x},t)}{\partial t} d\mathbf{x} =$$

$$= \int_V \left(\frac{\varphi(\mathbf{x})}{U(\mathbf{x},t)} - Nq(t) \right)^2 \left(-div_x (\mathbf{u}(\mathbf{x},t) f(\mathbf{x},t)) + \frac{B(t)}{2} D^{2\beta} f(\mathbf{x},t) \right) d\mathbf{x}.$$

Интегрированием по частям этот интеграл приводится к виду:

$$\int_V \left(\frac{\varphi(\mathbf{x})}{U(\mathbf{x},t)} - Nq(t) \right)^2 \frac{\partial f(\mathbf{x},t)}{\partial t} d\mathbf{x} = 2\int_V \left(\frac{\varphi(\mathbf{x})}{U(\mathbf{x},t)} - Nq(t) \right) \left(\mathbf{u}(\mathbf{x},t) \nabla \frac{\varphi(\mathbf{x})}{U(\mathbf{x},t)} \right) f(\mathbf{x},t) d\mathbf{x} +$$

$$+ B(t) \int_V \left(\frac{\varphi(\mathbf{x})}{U(\mathbf{x},t)} - Nq(t) \right) \left(\Delta \frac{\varphi(\mathbf{x})}{U(\mathbf{x},t)} \right) D^{2\beta-2} f(\mathbf{x},t) d\mathbf{x} +$$

$$+ B(t) \int_V \left(\nabla \frac{\varphi(\mathbf{x})}{U(\mathbf{x},t)} \right)^2 D^{2\beta-2} f(\mathbf{x},t) d\mathbf{x}.$$

Добавляя к полученному выражению второй интеграл и заменяя в нем $\dfrac{\partial U}{\partial t}$ выражением (4.12), а dq/dt – выражением (4.14), получаем следующее:

$$N^2 \frac{d\Sigma^2(t)}{dt} = 2\int_V \left(\frac{\varphi(\mathbf{x})}{U(\mathbf{x},t)} - Nq(t) \right) \left(\mathbf{u}(\mathbf{x},t) \nabla \frac{\varphi(\mathbf{x})}{U(\mathbf{x},t)} \right) f(\mathbf{x},t) d\mathbf{x} +$$

$$+ B(t) \int_V \left(\frac{\varphi(\mathbf{x})}{U(\mathbf{x},t)} - Nq(t) \right) \left(\Delta \frac{\varphi(\mathbf{x})}{U(\mathbf{x},t)} \right) D^{2\alpha-2} f(\mathbf{x},t) d\mathbf{x} +$$

$$+ B(t) \int_V \left(\nabla \frac{\varphi(\mathbf{x})}{U(\mathbf{x},t)} \right)^2 D^{2\alpha-2} f(\mathbf{x},t) d\mathbf{x} -$$

$$- 2\int_V \left(\frac{\varphi(\mathbf{x}')}{U(\mathbf{x}',t)} - Nq(t) \right) f(\mathbf{x}',t) d\mathbf{x}' \times$$

$$\times \int \left(\mathbf{u}(\mathbf{x},t) grad_{\mathbf{x}} \left(\frac{\varphi(\mathbf{x})}{U(\mathbf{x},t)} \right) + \frac{\varphi(\mathbf{x})}{U^2(\mathbf{x},t)} \left(div_{\mathbf{x}} \mathbf{J}(\mathbf{x},t) \right) \right) f(\mathbf{x},t) d\mathbf{x} - \qquad (5.4)$$

$$- 2B(t) \int_V \left(\frac{\varphi(\mathbf{x}')}{U(\mathbf{x}',t)} - Nq(t) \right) f(\mathbf{x}',t) d\mathbf{x}' \times$$

$$\times \int \left(D^{2\alpha} \left(\frac{\varphi(\mathbf{x})}{U(\mathbf{x},t)} \right)(\mathbf{x},t) - \frac{\varphi(\mathbf{x})}{U^2(\mathbf{x},t)} \left(\left(D^{2\alpha} U \right)(\mathbf{x},t) \right) \right) f(\mathbf{x},t) d\mathbf{x} -$$

$$- 2\int_V \left(\frac{\varphi(\mathbf{x})}{U^2(\mathbf{x},t)} \left(B(t) \left(D^{2\alpha} U \right)(\mathbf{x},t) - div_{\mathbf{x}} \mathbf{J}(\mathbf{x},t) \right) \right) \left(\frac{\varphi(\mathbf{x})}{U(\mathbf{x},t)} - Nq(t) \right) f(\mathbf{x},t) d\mathbf{x}.$$

В полученном выражении можно выделить члены в соответствии с их влиянием на перенос рассматриваемого признака. Во-первых, это слагаемые, обусловленные переносом локального SIR φ/U в силу скорости сноса в уравнении Фоккера-Планка. Во-вторых, это члены, пропорциональные произведению среднего SIR на средний снос неоднородности локального SIR. В-третьих, это члены, связанные с диффузией.

Используя затем формулу (5.1) для определения коэффициента Шарпа, получаем формулу для изменения индикатора устойчивости связи в рассматриваемой модели фрактального блуждания.

6. Заключение

В работе получены уравнения, представляющие основу для описания процессов нестационарного случайного фрактального блуждания с целью последующего анализа реализуемости и устойчивости беспроводной связи в модели D2D. Такая модель адекватно описывает блуждание покупателей по торговым молам, поведение зрителей в парках и на стадионах, в иных местах массового скопления людей.

Выведенные уравнения эволюции метрик качества соединения могут быть полезны при организации движения абонентов с целью минимизации нестационарных скачков SIR, приводящих к обрыву связи, а также к уменьшению эффектов нестационарного дрейфа и фрактальной диффузии.

Литература

1. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. – М.: Радио и связь, 1989. – 656 с.
2. Fedorov, S.L., Orlov, Yu.N., Samuylov, A.K. Moltchanov, D.A., Gaidamaka Yu.V., Samouylov, K.E, Shorgin S.Ya. SIR Distribution in D2D Environment with Non-stationary Mobility of Users // Proc. 31st European Conference on Modelling and Simulation, ECMS 2017. P. 720-725.
3. Ivchenko A., Orlov Yu., Samouylov A., Molchanov D., Gaidamaka Yu. Characterizing Time-Dependent Variance and Coefficient of Variation of SIR in D2D Connectivity // Lecture Notes in Computer Science, 2017. V. 10531. P. 526-535.
4. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. – Amsterdam: Elsevier, 2006. – 541 p.
5. Zaslavsky G.M. Chaos, fractional kinetics and anomalous transport // Physics Reports. – 2002. – V. 371, No. 6. – P. 461-580.
6. Зенюк Д.А., Митин Н.А., Орлов Ю.Н. Моделирование случайного блуждания на Канторовом множестве // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2013. № 31. 18 с.
7. Зенюк Д.А., Орлов Ю.Н. Дробное уравнение адвекции-диффузии и моделирование нестационарных временных рядов. – М.: МФТИ, 2016. – 94 с.
8. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
9. Скороход А.В. Случайные процессы с независимыми приращениями. – М.: Наука, 1964. – 280 с.
10. Oldham K.B., Spaniel J. The fractional calculus. – San Diego: Academic Press, 1974. – 240 p.
11. Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractal approach // Physics reports. – 2000. – V. 339. №1. P. 1-77.