ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 5 за 2020 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Савенков Е.Б.

Решения уравнений в частных производных на поверхностях: обзор алгоритмов

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Савенков Е.Б. Решения уравнений в частных производных на поверхностях: обзор алгоритмов // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 5. 18 с. **http://doi.org/10.20948/prepr-2020-5**
URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-5**

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. КЕЛДЫША

Е.Б. Савенков

Решение уравнений в частных производных на поверхностях: обзор алгоритмов

Москва, 2020

Е.Б. Савенков, Решения уравнений в частных производных на поверхностях: обзор алгоритмов

Аннотация. В работе приведен обзор методов построения конечномерных аппроксимаций эллиптических и параболических уравнений на поверхностях, вложенных в трехмерное пространство. Основное внимание уделено случаю, когда поверхность задана неявным образом. Представлено краткое описание основных классов используемых для решения этой задачи вычислительных алгоритмов.

Ключевые слова: уравнения на поверхностях, метод множеств уровня, метод проекции ближайшей точки, метод конечных элементов.

E.B. Savenkov, Numerical techniques for surface PDEs. Review of approaches.

Abstract. In this paper we briefly review numerical techniques for solution of parabolic and elliptic PDEs defined on 2D surfaces embedded into 3D space. Special attention is paid to the case of implicitly defined surfaces. We present description of main trends on construction of such algorithms.

Key words and phrases: surface PDEs, levelset method, closest point projection method, finite elelements method.

Содержание

1 Введение

Необходимость численного решения уравнений в частных производных на двумерных поверхностях, вложенных в трехмерное пространство, возникает при анализе целого ряда содержательных прикладных задач. В качестве примеров укажем анализ процессов теплопроводности в мембранах и оболочках; анализ теплового состояния тонких включений в трехмерных телах и средах; задачи течения жидкости в трещинах; описание процессов диффузии в тонких пленках жидкости; ряд задач компьютерной графики и обработки изображений и так далее. Соответствующие математические модели представляют собой уравнения в частных производных, заданных на вложенных в трехмерное пространство поверхностях с краем или без края.

Особый случай представляют собой поверхности, которые эволюционируют с течением времени и геометрия которых априорно неизвестна. Типичным примером такой задачи является динамика жидкости в трещине гидроразрыва пласта. В настоящее время гидравлический разрыв пласта (гидроразрыв пласта, ГРП) является одним из самых распространенных методов увеличения нефтеотдачи, используемых при промышленной разработке нефтегазовых месторождений. Сущность технологии ГРП заключается в закачке в нефтеносный пласт специальной жидкости разрыва с целью создания искусственной (техногенной) трещины значительной протяженности (длина ~ 100 м, высота ~ 10 м, среднее раскрытие ~ 5–10 мм). Созданная трещина заполняется проппантом (калиброванным искусственным или естественным «песком»). В результате создается соединенный со скважиной искусственный канал с большой площадью притока, имеющий высокую (на порядки превышающую пластовую) проницаемость. Это обеспечивает значительное увеличение притока пластового флюида к скважине. Инженерные аспекты технологии рассмотрены, например, в [Экономидес2007, Салимов2013]. Физико–математическое описание динамики трещины ГРП в ходе ее развития сводится к решению сложной связанной задачи, включающей в себя (помимо других групп уравнений):

- уравнения течения (обычно неньютоновской) жидкости разрыва в трещине;
- механические условия, определяющие направления развития срединной поверхности трещины в каждой точке ее края («фронта» трещины).

При этом считается, что:

- геометрически трещина описывается своей срединной поверхностью с заданным в каждой ее точке раскрытием;

- срединная поверхность трещины является произвольной, но заданной поверхностью с краем;
- в фиксированной точке срединной поверхности раскрытие является заданной известной функцией в указанной точке.

Необходимость разработки эффективных и робастных численных методов решения этой задачи связана прежде всего с тем, что:

- в ходе процедуры ГРП трещина эволюционирует, причем точный характер этой эволюции заранее неизвестен. Другим словами, область решения задачи меняется с течением времени;
- срединная поверхность трещины не является плоской — трещина может «поворачитать», причем направление ее развития может быть различным в разных точках ее фронта.

Определение наиболее эффективных способов решения этой задачи являлось мотивацией для анализа существующих алгоритмов для решения уравнений на поверхностях. Отметим, что настоящий обзор не является исчерпывающим – его содержание определяется прежде всего требованием применимости и эффективности того или иного алгоритма в контексте решения полной связанной задачи о развитии трещины гидроразрыва пласта.

В частности, ниже практически не будут рассматриваться методы, основанные на явном представлении поверхности (например, в параметрическом виде) и использующие триангуляцию поверхности — такая триангуляция (а) должна динамически перестраиваться в ходе развития трещины; (б) для описания эволюции трещины, геометрия которой задана полигональной моделью, необходимо использование нетривиальных геометрических алгоритмов и (в) должны быть предложены эффективные алгоритмы переноса данных (интерполяции) с поверхностной сетки на трехмерную сетку в объеме при том, что их геометрии в общем случае никак не согласованы.

Отметим также, что численное решение уравнений по поверхностях является достаточно сложной задачей даже в том случае, когда поверхность задана и не меняется. Так, построение аппроксимаций уравнения на поверхности «наивным» способом (триангуляция поверхности с последующей дискретизацией задачи, например, методом конечных элементов) сталкивается со следующими трудностями:

- построение качественной триангуляции: в случае если, например, кривизна поверхности существенно меняется, требуется построение адаптивной триангуляции (сетка должна быть более плотной в областях с большей кривизной);

- аккуратный учет внутренней геометрии поверхности: свойства решения задачи определяются такими характеристиками поверхности, как ее кривизна, которая является дифференциальной характеристикой *второго* порядка. Аккуратный учет этих свойств при использовании, например, линейных конечных элементов (для аппроксимации как решения, так и самой поверхности) — нетривиальная задача. Сложной является и задача о построении аппроксимаций оптимального порядка в естественных для задачи соболевских нормах.

Методы такого типа рассмотрены, например, в [Dziuk1988, Demlow2007, Dziuk2007a, Dziuk2007b]); в настоящей работе они не рассматриваются.

Необходимость решения описанных выше проблем построения аппроксимаций уравнений на поверхностях привела к развитию подходов, так или иначе основанных на погружении поверхности и заданного на ней уравнения в объемлющее трехмерное пространство.

В этом случае уравнение продолжается в некоторую область, содержащую поверхность. Далее тем или иным способом строятся аппроксимации трехмерной задачи в пространственной области. В результате решение уравнения на поверхности приближается следом решения конечномерной задачи во вмещающей поверхность области.

Далее в работе коротко рассматриваются основные существующие подходы указанного типа. Рассмотрение будем вести на примере модельной параболической задачи Коши для оператора Лапласа–Бельтрами (см., например, [Дубровин1986]) на криволинейной поверхности $\mathcal{F}$ без края (например, $\mathcal{F}$ — шар, тор и т.д.):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_{\mathcal{F}} u = 0.$$

Таким образом, вопрос задания граничных условий рассматриваться не будет.

Далее будет рассмотрен метод проекции ближайшей точки, который позволяет рассматривать уравнения на поверхности с краем.

Отметим следующий важный факт: одним из принципиальным моментов, связанных с решением уравнений на поверхностях, является непосредственно способ представления поверхности. Так, упомянутые выше алгоритмы, основанные на триангуляции поверхности, предполагают, что она задана параметрически. Во всех рассмотренных ниже алгоритмах в большинстве случаев используется неявное представление поверхности как множества уровня ноль некоторой заданной в пространстве функции.

Известны также методы, основанные на представлении поверхности множеством принадлежащих ей точек («point cloud surfaces», [Berger2014]), см., например, [Liang2013, Macdonald2013]. К сожалению, в настоящее время известно не так много работ, посвященных этому классу алгоритмов — с одной стороны, его разработка только начинается, а с другой — чаще всего он применяется для решения специальных классов задач, например, компьютерной графики и обработки изображений. Его апробация для решения физически содержательных задач, требующих гарантированного качества решения и высокой надежности, является делом будущего.

2 Методы погружения на основе множеств уровня

Основная идея методов данного класса заключается в том, что решение задачи на поверхности строится без введения на ней отдельной, поверхностной, расчетной сетки — вместо этого используется пространственная расчетная сетка, построенная в некоторой области, содержащей поверхность и, в общем случае, не согласованная с ней.

Непосредственно поверхность задается неявно как поверхность уровня ноль заданной функции φ, определенной в трехмерном пространстве. Суть метода заключается в том, что уравнение, заданное на поверхности уровня ноль, продолжается во все пространство (то есть на все поверхности уровня функции φ) так, что решение продолженного уравнения совпадает с решением исходного уравнения на нулевой поверхности уровня.

Далее «продолженное» уравнение аппроксимируется во всей трехмерной области стандартным методом конечных элементов. След трехмерного решения на исходной поверхности дает решение исходной задачи.

Метод этого типа изначально был предложен в [Bertalmio2001]. Для аппроксимации уравнения использовался метод конечных разностей. Обобщения рассмотренного подхода в контексте метода конечных разностей на случай динамически меняющихся поверхностей были рассмотрены в [Adalsteinsson2003, Xu2003], а на случай уравнений четвертого порядка — в [Greer2006a].

Подход с использованием метода конечных элементов для решения задач как второго, так и четвертого порядка, был предложен в [Dziuk2008a]; обобщение на случай динамических поверхностей представлено в [Dziuk2010]. В работе [Bradman2007] конечно-элементный подход был развит для решения спектральных задач для уравнений на поверхностях.

Перейдем к описанию метода. Рассмотрим гладкую поверхность $\mathcal{F}$ без края, целиком расположенную в замкнутой ограниченной трехмерной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Будем считать, что $\mathcal{F}$ является поверхностью уровня ноль некоторой функции

$$\varphi = \varphi(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega,$$

определенной всюду в Ω, то есть:

$$\mathcal{F} = \{\boldsymbol{x} \in \Omega : \quad \varphi(\boldsymbol{x}) = 0\}.$$

Поверхность уровня α функции φ будем обозначать $\mathcal{F}_\alpha$,

$$\mathcal{F}_\alpha = \{\boldsymbol{x} \in \Omega : \quad \varphi(\boldsymbol{x}) = \alpha\},$$

при этом $\mathcal{F}_0 \equiv \mathcal{F}$. Единичную нормаль $\boldsymbol{n}$ к $\mathcal{F}$ ориентируем в сторону возрастания функции φ. В этом случае имеем:

$$\boldsymbol{n} = \frac{\nabla\varphi}{\|\nabla\varphi\|}, \tag{1}$$

где ∇ — обычный (трехмерный, не поверхностный) оператор Гамильтона.

В дальнейшем будем считать, что поверхность $\mathcal{F}$ является невырожденной в том смысле, что

$$\nabla\varphi(\boldsymbol{x}) \neq 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega.$$

Выражение (1) определяет векторное поле $\boldsymbol{n}$ всюду в области Ω, при этом в каждой точке $\boldsymbol{x} \in \Omega$ вектор $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ является внешней (в указанном выше смысле) единичной нормалью к поверхности уровня функции φ, проходящей через точку $\boldsymbol{x}$.

Определим проектор:

$$\boldsymbol{P}_\varphi = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n}; \quad [\boldsymbol{P}_\varphi]_{ij} = \delta_{ij} - n_i n_j,\ i, j = \overline{1, 3},$$

где $\boldsymbol{I}$ — единичный тензор с компонентами δ_{ij}, нижними индексами обозначены компоненты тензоров и векторов в некоторой произвольной, но фиксированной ортогональной декартовой системе координат в Ω.

В каждой точке $\boldsymbol{x} \in \Omega$ проектор $\boldsymbol{P}_\varphi$ сопоставляет произвольному вектору в точке $\boldsymbol{x}$ его проекцию на касательное подпространство к поверхности уровня функции $\varphi(\boldsymbol{x})$, проходящей через точку $\boldsymbol{x}$.

Можно показать, что поверхностный градиент следа на поверхности $\mathcal{F}$ произвольной функции u, заданной в Ω, имеет вид:

$$\nabla_\varphi u = \boldsymbol{P}_\varphi \nabla u = \nabla_\varphi u = \nabla u - (\nabla u \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n}.$$

Отсюда следуют соотношения:

$$\nabla_\varphi u \cdot \boldsymbol{n} = 0$$

и

$$\nabla_{\mathcal{F}_\alpha} u = (\nabla_\varphi u)|_{\mathcal{F}_\alpha}.$$

Обозначим компоненты вектора ∇_φ в декартовой ортогональной системе координат $\mathcal{O}x_1x_2x_3$, введенной в области Ω, через D_i^φ. Тогда поверхностный оператор дивергенции можно записать в виде

$$\nabla_\varphi \cdot \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{3} D_i^\varphi v_i.$$

Произвольный эллиптический оператор на поверхности теперь может быть определен с помощью поверхностных операторов $\nabla_\varphi(\cdot)$ и $\nabla_\varphi \cdot (\cdot)$. В частности, оператор Лапласа–Бельтрами (поверхностный оператор Лапласа на поверхности $\mathcal{F}$) определяется как

$$\Delta_\varphi u = \nabla_\varphi \cdot \nabla_\varphi u.$$

Отметим, что для средней кривизны поверхности уровня справедливо выражение

$$C_\varphi = -\nabla \cdot \boldsymbol{n} = -\nabla \cdot \frac{\nabla\varphi}{\|\nabla\varphi\|}.$$

Рассмотрим теперь параболическое уравнение на поверхности $\mathcal{F}$ вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla_{\mathcal{F}} \cdot \boldsymbol{q}_\varphi = 0, \quad \boldsymbol{q}_\varphi = -\boldsymbol{D}\nabla_{\mathcal{F}} u.$$

Формальное продолжение этого уравнения во всю область Ω имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla_\varphi \cdot \boldsymbol{q}_\varphi = 0, \qquad (2)$$

где $\boldsymbol{D}$ — (трехмерный) симметричный тензор, такой что

$$(\boldsymbol{D} : \boldsymbol{t}) \cdot \boldsymbol{n} = 0$$

для произвольного векторного поля $\boldsymbol{t}$, которое в каждой точке $\boldsymbol{x}$ области Ω касается поверхности уровня функции φ, проходящей через точку $\boldsymbol{x}$, то есть

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega.$$

Такое свойство тензора $\boldsymbol{D}$ гарантирует, что поток $\boldsymbol{q}$ описывает распространение консервативной величины u только «вдоль» поверхностей уровня функции φ.

Уравнение (2) описывает, в частности, процесс распространения тепла в анизотропной среде, которая состоит из бесконечно тонких теплоизолированных слоев, геометрия которых описывается поверхностями уровня функции φ. Отметим, что указанное уравнение является вырожденным в силу того, что проектор $\boldsymbol{P}_\varphi$ имеет нулевое собственное число, соответствующее собственному вектору $\boldsymbol{n}$.

В работе [Dziuk2008a] приведены формулы Грина (интегрирования по частям), соответствующие операторам $\nabla_\varphi(\cdot)$, и $\nabla_\varphi \cdot (\cdot)$ и представлена слабая постановка задачи для уравнения (2), которая имеет следующий вид: определить функцию u, определенную в Ω и удовлетворяющую уравнению

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} v \|\nabla\varphi\| \, d\Omega + \int\limits_\Omega \boldsymbol{D}\nabla_\varphi \cdot \nabla_\varphi v \|\nabla\varphi\| \, d\Omega = 0, \tag{3}$$

для произвольной пробной функции v, определенной в Ω. Здесь $\|\cdot\|$ — обычная евклидова норма в $\mathbb{R}^3$. При выводе уравнения считалось, что на границе $\partial\Omega$ области Ω задано естественное граничное условие

$$\|\nabla\varphi\| \boldsymbol{D}\nabla_\varphi u \cdot \boldsymbol{n}_{\partial\Omega} = 0,$$

где $\boldsymbol{n}_{\partial\Omega}$ — единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Уравнение (3) решается в трехмерной области Ω методом конечных элементов. Построение аппроксимаций стандартно. Функция φ также аппроксимируется на сетке. Отметим, что в слабую постановку задачи не входят величины, отнесенные к поверхности, все они вычисляются «в объеме».

Решение исходного уравнения на поверхности является ограничением (следом) решения трехмерной задачи (3) на поверхность уровня ноль функции φ (точнее, следом на поверхности уровня ноль сеточной аппроксимации φ_h функции φ).

В работе [Deckelnick2010] показано, что толщина сеточной расчетной области Ω_h в направлении нормали к поверхности уровня ноль функции φ может быть выбрана порядка шага сетки. Таким образом, задача (3) решается лишь в узком слое, содержащем поверхность $\mathcal{F}$.

Обобщение метода на случай динамически меняющейся поверхности приведено в [Eilks2008].

Аналогичные подходы рассмотрены, например, в [Greer2006a, Greer2006b], где представлена модификация проектора $\boldsymbol{P}_\varphi$, обеспечивающая невырожденность результирующего, трехмерного, уравнения. Само уравнение решается методом конечных разностей.

Функция φ, поверхность уровня ноль которой задает поверхность $\mathcal{F}$, определена неоднозначно. В практических приложениях в качестве функции $\varphi(x)$ чаще всего выбирают функцию знакового расстояния, то есть $\varphi(\boldsymbol{x}) \equiv d(\boldsymbol{x})$, где

$$d(\boldsymbol{x}) = \mathrm{sign}[\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x})] \cdot \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{x}}\|$$

и $\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{x}}$ — проекция (в смысле кратчайшего расстояния) точки $\boldsymbol{x} \in \Omega$ на поверхность $\mathcal{F}$:

$$\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{x}} = \arg\min_{\boldsymbol{y} \in \mathcal{F}} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega,$$

$\boldsymbol{n}$ — вектор единичной внешней нормали, задающей ориентацию поверхности $\mathcal{F}$.

Известно, что если область Ω «достаточно мала», а поверхность $\mathcal{F}$ — гладкая, то d — гладкая (дифференцируемая) функция точки пространства [Ambrosio1998, Krantz1981, Foot1984, Krantz1999].

3 Методы погружения типа «диффузной границы»

Этот класс методов близок к рассмотренному ранее. Общая идея сохраняется, однако способ продолжения уравнения на поверхности в трехмерное пространство отличается от рассмотренного ранее. Впервые метод был предложен в [Ratz2006].

Как и ранее, будем рассматривать уравнение (2), заданное на замкнутой ограниченной поверхности $\mathcal{F}$ без края.

Введем функцию $h_0(\boldsymbol{x})$, которая является индикаторной (характеристической) функцией объема, ограниченного поверхностью $\mathcal{F}$ (напомним, что до сих пор и пока не указано явно, мы рассматриваем только случай односторонних поверхностей без края, поэтому указанная функция существует). Другими словами, $h_0(\boldsymbol{x})$ равна нулю с одной стороны от поверхности $\mathcal{F}$ и единице — с другой. Если в рассмотренных ранее примерах $\varphi(\boldsymbol{x}) = d(\boldsymbol{x})$ — функция знакового расстояния, то

$$h_0(\boldsymbol{x}) = H(-d(\boldsymbol{x})),$$

где H — «обычная» функция Хевисайда.

Функция $h_0(\boldsymbol{x})$ является разрывной. Введем такую гладкую функцию $h_\epsilon(\boldsymbol{x})$ ($\epsilon \geqslant 0$ — действительный параметр), что поверхность $\mathcal{F}$ является поверхностью уровня $1/2$ функции $h_\epsilon(\boldsymbol{x})$. Функция h_ϵ «размазывает» скачок функции $h_0(\boldsymbol{x})$ по слою ширины ϵ в направлении нормали к поверхности $\mathcal{F}$.

А именно, будем считать, что

$$h_\epsilon(\boldsymbol{x}) = \psi\left(\frac{d(\boldsymbol{x})}{\epsilon}\right),$$

где $\psi(z): \mathbb{R} \to (0,1)$ — монотонно убывающая функция своего аргумента, удовлетворяющая следующим свойствам:

$$\lim_{z\to+\infty} \psi(z) = 0, \quad \lim_{z\to-\infty} \psi(z) = 1, \quad \lim_{|z|\to+\infty} z\psi(z)^2(1-\psi(z))^2 = 0.$$

Далее, уравнение (2) заменяется на следующее *регуляризованное* уравнение:

$$B(h_\epsilon)\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \nabla \cdot [-(\delta(\epsilon) + B(h_\epsilon))\nabla \tilde{u}] = B(h_\epsilon)\tilde{f}, \qquad (4)$$

где $\tilde{u}$ определена всюду в Ω (а не только на $\mathcal{F}$),

$$B(z) = z^2(1 - z^2),$$

$\delta(\epsilon)$ — действительный параметр, а $\tilde{f}$ — подходящее продолжение функции f (правой части исходной задачи) с поверхности $\mathcal{F}$ во всю расчетную область.

В качестве функции $h_\epsilon(\boldsymbol{x})$ может быть выбрана, например, функция

$$h_\epsilon(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\left[1 - \tanh\left(\frac{3}{\epsilon}(|d(\boldsymbol{x})| - 1)\right)\right].$$

Уравнение (4) далее аппроксимируется в Ω стандартными способами, например, методом конечных элементов на пространственной сетке в Ω.

Как и в предыдущем подходе, приближенное решение исходного уравнения на $\mathcal{F}$ определяется как след приближенного решения уравнения (4) на $\mathcal{F}$.

4 Методы с погружением поверхности, но без погружения уравнения

Рассмотрим еще один подход, несколько отличный от описанных ранее, см. [Olshanskii2009, Olshanskii2009a, Olshanskii2012].

В соответствии с этим подходом, как и ранее, считается, что поверхность $\mathcal{F}$ вложена в трехмерную область Ω. В отличие от рассмотренных выше подходов, уравнение не продолжается в пространственную область Ω и соответствующая слабая постановка задачи строится непосредственно на поверхности $\mathcal{F}$ и имеет вид: определить функцию u, заданную на поверхности $\mathcal{F}$ и удовлетворяющую уравнению

$$\int\limits_{\mathcal{F}} \frac{\partial u}{\partial t} v \, dS + \int\limits_{\mathcal{F}} \boldsymbol{D}\nabla_\varphi u \cdot \nabla_\varphi v \, dS = 0, \qquad (5)$$

для произвольной пробной функции v, определенной на $\mathcal{F}$. Таким образом, переход к трехмерной задаче не производится.

Далее, в области Ω вводится конечно-элементная расчетная сетка Ω_h, например из тетраэдров. Пусть ω_h — сеточная подобласть, состоящая из тех ячеек сетки Ω_h, которые имеют непустое пересечение с поверхностью $\mathcal{F}$. Для простоты считаем, что пересечение ячеек сетки ω_h с поверхностью лежит целиком внутри ячеек (то есть поверхность не проходит через узлы или грани ячеек). Аппроксимация решения вариационной задачи (5) ищется в конечномерном пространстве V_h, элементы которого — линейные комбинации базисных функций, соответствующих узлам сетки ω_h.

Таким образом, уравнение аппроксимируется на поверхности, но решение ищется как след некоторой сеточной функции в трехмерном пространстве.

В отличие от методов, рассмотренных выше, в слабую постановку задачи и ее аппроксимации входят величины, отнесенные к поверхности. Для их вычисления необходимо введение триангуляции на $\mathcal{F}$. Однако эта триангуляция носит вспомогательные характер (используется только для численного интегрирования при вычислении элементов матрицы масс и матрицы жесткости конечномерной задачи, соответствующей (5)).

5 Метод «ближайшей точки» (closest point method)

Описанные выше методы в том виде, как они были изначально сформулированы атворами, предназначены для решения уравнений на поверхностях без края. Их формальное обобщение на случай поверхностей краем технически возможно (например, с использованием «слабых» способов учета граничных условий типа метода штрафа или (вариационно-солгласованного) метода множителей Лагранжа). Однако соответствующие обобщения достаточно сложны в практической реализации. Одной из причин этого является то, что поверхность с краем не может быть удобно описана как множество уровня ноль гладкой функции типа знакового расстояния.

Поэтому в настоящем разделе описан еще один метод решения уравнений на поверхностях, который, в отличие от рассмотренных ранее, позволяет получить решение задачи на многообразии с краем естественным способом. Метод был предложен и разработан в работах [Ruuth2008, Merriman2007, Macdonald2011, Macdonald2008, Macdonald2009]. Он также использует неявное представление поверхности и продолжение уравнения на поверхности во вмещающее ее пространство, однако использует с этой целью не метод поверхностей уровня, а метод «проекции ближайшей точки». Этот метод изначально являлся разностным. Рассмотрим его основные идеи. Теоретические и практические детали метода изложены в цитируемых в настоящем разделе работах.

Рассматриваемая математическая постановки задачи совпадает с представленной в [Ruuth2008, Macdonald2009, Macdonald2011].

Как и ранее, будем считать, что поверхность $\mathcal{F}$ целиком расположена внутри пространственной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Пусть для произвольной точки $\boldsymbol{x} \in \Omega$, точка $\boldsymbol{x}_{\text{cp}}$ — ближайшая к ней точка на поверхности $\mathcal{F}$,

$$\boldsymbol{x}_{\text{cp}} = \arg\min_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{F}} \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\|.$$

Точку $\boldsymbol{x}_{\text{cp}}$ будем называть проекцией точки $\boldsymbol{x}$ на поверхность $\mathcal{F}$, а соответствующий оператор будем обозначать $\boldsymbol{P}$,

$$\boldsymbol{x}_{\text{cp}} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}.$$

Оператор $\boldsymbol{P}$ является векторнозначным; он отображает область Ω на поверхность $\mathcal{F}$, рассматриваемую как подмножество в $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Если для поверхности $\mathcal{F}$ можно задать функцию знакового расстояния $d_{\mathcal{F}}(\boldsymbol{x})$ (например, если $\mathcal{F}$ — ориентированная поверхность без края), то для оператора $\boldsymbol{P}$ справедливо представление:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - d_{\mathcal{F}}(\boldsymbol{x})\nabla d_{\mathcal{F}}(\boldsymbol{x}), \quad d_{\mathcal{F}}(\boldsymbol{x}) \equiv \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, \mathcal{F}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}\|.$$

Так же, как и функция знакового расстояния (или пары таких функций, в случае поверхности с краем), проектор $\boldsymbol{P}$ однозначно описывает поверхность $\mathcal{F}$,

$$\mathcal{F} = \{\boldsymbol{x} \in \Omega : \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}\}.$$

Однако последний способ является более общим: он позволяет описывать геометрию поверхности с краем, неориентируемые многообразия или многообразия коразмерности больше единицы (то есть, в случае трехмерной области, кривые (коразмерность 2) и точки (коразмерность 3)), а также объединение объектов различной коразмерности [Macdonald2011].

С помощью проектора $\boldsymbol{P}$ легко построить продолжение произвольной функции, заданной на поверхности, во всю область Ω. А именно, для произвольной функции u, заданной на поверхности, ее продолжение $\mathcal{E}[u]$ в Ω определим как

$$\mathcal{E}[u](\boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega.$$

Построенный таким способом оператор продолжения может быть определен для произвольных функций, заданных в пространстве. А именно, любая функция, заданная в пространстве, однозначно определяет функцию на поверхности как свой собственный след на ней. Поэтому для функций, заданных в пространстве, определим оператор $\mathcal{E}$ следующим образом:

$$\mathcal{E}[u](\boldsymbol{x}) = u(\mathrm{P}\boldsymbol{x}).$$

Отметим, что:

- для произвольной функции в Ω, постоянной в направлении нормали к $\mathcal{F}$,

$$(\nabla u)\left|_{\mathcal{F}} = \nabla_{\mathcal{F}}\left(u|_{\mathcal{F}}\right);\right.$$

- для произвольного векторного поля в Ω, касательного к поверхности $\mathcal{F}$,

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{q})\left|_{\mathcal{F}} = \nabla_{\mathcal{F}} \cdot \left(q|_{\mathcal{F}}\right).\right.$$

Тогда, в силу свойств проектора $\boldsymbol{P}$ и оператора продолжения $\mathcal{E}$, имеем:

$$\nabla \mathcal{E}[u](\boldsymbol{x}) = \nabla u(\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}) = \nabla_{\mathcal{F}} u.$$

Поскольку восполнение $\mathcal{E}[u](\boldsymbol{x})$ постоянно вдоль направлений, нормальных к поверхности, векторное поле $\nabla \mathcal{E}[u](\boldsymbol{x})$ является касательным к $\mathcal{F}$. Отсюда следует, что

$$\nabla \cdot [\nabla \mathcal{E}[u](\boldsymbol{x})] = \nabla \cdot [\nabla u(\boldsymbol{P}\boldsymbol{x})] = \nabla_{\mathcal{F}} \cdot \nabla_{\mathcal{F}} u.$$

Аналогичные продолжения можно построить и для более сложных эллиптических операторов дивергентного типа, см. [Marz2012].

Таким образом, исходное уравнение (2) может быть продолжено во всю область Ω. Дальнейшие шаги этого подхода ничем не отличаются от ранее рассмотренных: уравнение в Ω аппроксимируется стандартным способом на трехмерной сетке, а решение исходной задачи на поверхности восстанавливается как след решения трехмерной.

Строгое обоснование описанных выше построений представлено в работе [Marz2012].

В оригинальных работах, цитированных выше, для построения аппроксимаций использован метод конечных разностей. Отдельной задачей в рамках такого подхода является учет граничных условий на границе $\partial\mathcal{F}$ поверхности $\mathcal{F}$. В работе [Macdonald2011] предложен удобный вариант способа их задания, основанный на использовании специального вида оператора продолжения с поверхности в пространство.

6 Заключение

В настоящем обзоре рассмотрены основные классы вычислительных алгоритмов для решения эллиптических и параболических уравнений на двумерных поверхностях, вложенных в трехмерное пространство. Перечень описанных алгоритмов, тем не менее, не является исчерпывающим: так, например, в обзоре не рассмотрены алгоритмы на основе бессеточных методов конечных элементов («meshfree finite elements methods») и лишь упомянуты алгоритмы, основанные на представлении поверхности как «облака точек» («point cloud surface»). Помимо этого, рассматривались алгоритмы, предназначенные для решения уравнений на неявно заданных поверхностях.

В заключение можно отметить следующее:

- В настоящее время известно достаточно много классов алгоритмов для численного решения дифференциальных уравнений в частных производных на поверхностях. Многие из них имеют цельное теоретическое обоснование и хорошо апробированы. Помимо непосредственно способа аппроксимации уравнений (метод конечных элементов или конечных разностей и так далее), одним из основных критериев отличия является способ представления поверхности. Он является базовой алгоритмической деталью, во многом определяющей возможности метода.

- Большинство рассмотренных алгоритмов ориентировано на решение уравнений на поверхностях без края. В этом случае наиболее простым и эффективным способом построения алгоритма является использование для описания поверхности метода множеств уровня.

  Достоинства этого подхода, тем не менее, теряются, если рассматривается поверхность с краем — в этом случае алгоритм существенно усложняется (в частности, требуется не одна, а по крайне мере две поверхности уровня — для описания непосредственно поверхности и ее края; возникает вопрос о способах учета граничных условий на каре поверхности и так далее).

- По всей видимости, единственным методом, естественным образом допускающим рассмотрение неявно заданных поверхностей с краем, является метод проекции ближайшей точки. Он же позволяет рассматривать расчетные области, которые являются объединением многообразий различной пространственной размерности. Соответствующие алгоритмы для решения «широко распространенных» задач типа эллиптических и параболических уравнений диффузии и теплопроводности достаточно просты. Вместе с тем, непосредственно подход является достаточно общим и универсальным, допуская обобщения на случай нелинейных задач и уравнений порядка выше второго.

- Наконец, отдельный интерес, по очевидным причинам, представляют методы, использующие представление поверхности как множества точек («point cloud surfaces»).

Автор выражает свою признательность научному сотруднику ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, к.ф.-м.н. В.Е. Борисову за совету и полезные обсуждения, способствовавшие улучшению этой работы.

Список литературы

[Дубровин1986] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия: методы и приложения, М.: Наука, 1986. 760 с.

[Салимов2013] Салимов В.Г., Ибрагимов Н.Г., Насыбуллин А.В., Салимов О.В. Гидравлический разрыв карбонатных пластов. М.: Нефтяное хозяйство, 2013. 471 с.

[Экономидес2007] Экономидес М., Олини Р., Валько П. Унифицированный дизайн гидроразрыва пласта. От теории к практике. М.: Институт компьютерных исследований, 2007. 236 с.

[Adalsteinsson2003] Adelsteinsson, D. Sethian, J.A. Transport and diffusion of material quantities on propagating interfaces via level set methods // J. Comput. Phys., 185, 271–288, 2003.

[Ambrosio1998] Ambrosio, L., Mantegazza, C. Curvature and distance function from a manifold // The Journal of Geometric Analysis. vol. 8, iss. 5, pp. 723–748. 1998.

[Berger2014] Berger, M., Tagliasacchi, A., Seversky, L., Alliez, P., Levine, J., Sharf, A., Silva, C. State of the Art in Surface Reconstruction from Point Clouds // EUROGRAPHICS 2014 / S. Lefebvre and M. Spagnuolo. STAR – – State of The Art Report, 2014.

[Bertalmio2001] Bertalmio, M., Cheng, L.T., Osher, S., Sapiro, G. Variational problems and partial differential equations on implicit surfaces // J. Comput. Phys., 174, 759–780, 2001.

[Bradman2007] Bradman, J., A level-set method for computing the eigenvalues of elliptic operators defined on compact hypersurfaces // J. Sci. Comput., 37, 282–315, 2007.

[Deckelnick2010] Deckelnik, K., Dziuk, G., Elliott, C.M, Heine, C.-J. An h-narrow band finite-element method for elliptic equations on implicit surfaces // IMA Journal of Numerical Analysis (2010) 30, pp. 351-376.

[Demlow2007] Demlow, A., Dziuk, G. An adaptive finite element method for the Laplace–Beltrami operator on implicitly defined surfaces // SIAM J. Numer. Anal., 45, 421–442, 2007.

[Dziuk1988] Dziuk, G. Finite elements for the Beltrami operator on arbitrary surfaces. // Partial Differential Equations and Calculus of Variations (S.

Hildebrandt & R. Leis eds). Lecture Notes in Mathematics, vol. 1357. Berlin: Springer, pp. 142–155.

[Dziuk2007a] Dziuk, G., Elliott, C.M. Finite elements on evolving surfaces // IMA J. Numer. Anal., 27, 262–292, 2007.

[Dziuk2007b] Dziuk, G., Elliott, C.M. Surface finite elements for parabolic equations // J. Comput. Math., 25, 385–407, 2007.

[Dziuk2008a] Dziuk, G., Elliott, C.M, Eulerian finite element method for parabolic PDEs on implicit surfaces // Interfaces and Free Boundaries 10 (2008), pp. 119–138.

[Dziuk2010] Dziuk, G., Elliott, C.M. An Eulerian approach to transport and diffusion on evolving implicit surfaces // Comput Visual Sci (2010) 13:17–28. DOI 10.1007/s00791-008-0122-0

[Eilks2008] Eilks, C., Elliott, C.M. Numerical simulation of dealloying by surface dissolution via the evolving surface finite element method // Journal of Computational Physics 227 (2008) 9727–9741.

[Foot1984] Foot, R. Regularity if the distance function // Pproceedings of the American Mathematical Society, Volume 92, Number 1, pp. 153-155. 1984.

[Greer2006b] Greer, J.B., Bertozzi, A.L., Sapiro, G. Fourth order partial differential equations on general geometries // Journal of Computational Physics 216 (2006) 216–246.

[Greer2006a] Greer, J.B. An Improvement of a Recent Eulerian Method for Solving PDEs on General Geometries // Journal of Scientific Computing, Vol. 29, No. 3, 2006.

[Krantz1981] Krantz, S.G., Parks, H.R. Distance to C^k Hypersurfaces // Journal of Differential Equations, 40, pp. 116-120. 1981.

[Krantz1999] Steven G. Krantz, Harold R. Parks The Geometry of Domains in Space. Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher), 1999th Edition. Birkhäuser, 308 pp.

[Liang2013] Liang, J., Zhao, H. Solving Partial Differential Equations on Point Clouds // Article in SIAM Journal on Scientific Computing 35(3), 2013.

[Macdonald2013] Macdonald, C., Merriman, B., Ruuth, S. Simple computation of reaction-diffusion processes on point clouds // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. 110. 2013.

[Macdonald2008] Macdonald, C.B., Ruuth, S.J. Level set equations on surfaces via the Closest Point Method // J. Sci. Comput., 35 (2008), pp. 219–240.

[Macdonald2009] Macdonald, C.B., Ruuth, S.J. The implicit Closest Point Method for the numerical solution of partial differential equations on surfaces // SIAM J. Sci. Comput., 31 (2009), pp. 4330–4350.

[Macdonald2011] Macdonald, C.B., Brandman, J., Ruuth, S.J. Solving eigenvalue problems on curved surfaces using the Closest Point Method // J. Comput. Phys., 230 (2011), pp. 7944–7956.

[Marz2012] März, T., Macdonald, C.B. Calculus on Surfaces with General Closest Point Functions // SIAM J. Numer. Anal., 50(6), 3303–3328.

[Merriman2007] Merriman, B., Ruuth, S.J. Diffusion generated motion of curves on surfaces // Journal of Computational Physics, 225 (2007) pp. 2267–2282.

[Olshanskii2009] Olshanskii, M.A., Reusken, A., Grande, J. A finite Element Method for Elliptic Equations on Surfaces // SIAM J. Numer. Anal., Vol. 47, No. 5, pp. 3339–3358, 2009.

[Olshanskii2009a] Olshanskii, M. Reusken, A. A finite element method for surface PDEs: matrix prop- erties // Numer. Math., 114:491–520, 2009.

[Olshanskii2012] Olshanskii, M.A., Reusken, A., Xu, X. A Volume Mesh Finite Element Method for PDEs on Surfaces // European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2012) J. Eberhardsteiner et.al. (eds.) Vienna, Austria, September 10-14, 2012.

[Ratz2006] Ratz, A., Voigt, A. PDEs on Surfaces: A Diffuse Interface Approach // Comm. Math.Sci., Vol. 4, No. 3, pp. 575–590, 2006.

[Ruuth2008] Ruuth, S.J., Merriman, B. A simple embedding method for solving partial differential equations on surfaces // Journal of Computational Physics, 227, pp. 1943–1961, 2008.

[Xu2003] Xu, J.-J., Zhao, H.-K. An Eulerian formulation for solving partial differential equations along a moving interface // J. Sci. Comput., 19, 573–594, 2003.