



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • [Электронная библиотека](#)

[Препринты ИПМ](#) • [Препринт № 41 за 2020 г.](#)



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

[Галанин М.П.](#), [Родин А.С.](#)

Применение метода  
декомпозиции области для  
решения задачи контактного  
взаимодействия  
осесимметричных тел

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Галанин М.П., Родин А.С. Применение метода декомпозиции области для решения задачи контактного взаимодействия осесимметричных тел // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 41. 30 с.  
<http://doi.org/10.20948/prepr-2020-41>  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-41>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.Келдыша  
Российской академии наук**

**М.П. Галанин, А.С.Родин**

**Применение метода декомпозиции области  
для решения задачи контактного  
взаимодействия осесимметричных тел**

**Москва — 2020**

*Галанин М.П., Родин А.С.*

**Применение метода декомпозиции области для решения задачи контактного взаимодействия осесимметричных тел**

Представлено несколько вариантов метода декомпозиции области, в том числе методы с перекрытием подобластей (мультипликативный и аддитивный методы Шварца) и методы без перекрытия подобластей (Нейман-Дирихле и Нейман-Нейман). Рассмотрены результаты их применения для решения двумерной задачи нагружения участка упругой трубы давлением. Исследована зависимость количества внешних итераций от шага сетки и от количества вводимых подобластей. Показано, что наилучшие результаты получены для двухуровневого аддитивного метода Шварца. Данный метод обобщен на случай решения задачи с контактом столба тел. Для учета контакта между телами при решении локальной задачи в каждой из подобластей использован метод Нейман-Дирихле. Представлены результаты применения двухуровневого аддитивного метода Шварца для численного моделирования напряженно-деформированного состояния участка твэла.

**Ключевые слова:** метод декомпозиции области, двухуровневый аддитивный метод Шварца, контактное взаимодействие, термоупругое тело, тепловыделяющий элемент

*Mikhail Pavlovich Galanin, Aleksandr Sergeevich Rodin*

**Application of domain decomposition method for solving problem of contact interaction of axisymmetric bodies**

Several variants of domain decomposition method are presented, including overlapping methods (multiplicative and additive Schwarz methods) and nonoverlapping methods (Neumann-Dirichlet and Neumann-Neumann). The results of their application for solving the two-dimensional problem of loading a section of an elastic pipe with pressure are considered. The dependence of the number of external iterations on the grid step and on the number of subdomains has been investigated. It has been shown that the best results are obtained for the two-level Schwarz additive method. This method is generalized to the case of solving the problem with the contact of the column of the body. To take into account the contact between the bodies when solving the local problem in each subdomain, the Neumann-Dirichlet method is used. Results of application of two-level Schwarz additive method for numerical simulation of stress-strain state of fuel element section are presented.

**Key words:** domain decomposition method, two-level Schwarz additive method, contact interaction, thermoelastic body, fuel element

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 18-31-20020, № 18-01-00252).

## 1. Введение

При численном решении задач математической физики, которые формулируются с помощью дифференциальных уравнений в частных производных, после дискретизации задачи обычно получают систему линейных уравнений с сильно разреженной матрицей. Для решения полученных систем целесообразно использовать не прямые, а итерационные методы решения. Известно, что с ростом размерности подобных матриц (при измельчении шага сетки) увеличиваются их числа обусловленности, что приводит к замедлению сходимости итерационного процесса. Например, при решении системы уравнений размерности  $n$ , полученной после дискретизации многомерного уравнения Пуассона, методом сопряженных градиентов количество итераций, требуемое для достижения заданной точности, пропорционально  $n^{1/2}$  [1].

Одним из эффективных способов решения достаточно широкого класса краевых задач эллиптического и параболического типа для дифференциальных уравнений в частных производных является метод декомпозиции области (МДО) [2, 3]. Он позволяет свести численное решение задачи в большой области к решению ряда локальных задач в подобластях меньшего размера в рамках дополнительного итерационного процесса (внешнего). Если число вводимых подобластей является достаточно большим, то размерности соответствующих им систем линейных уравнений остаются достаточно умеренными, что позволяет заметно ускорить сходимость внутренних итераций. В настоящее время разработано большое количество разнообразных вариантов МДО [2]. Многие методы обладают замечательным свойством: количество внешних итераций (до достижения заданной точности) практически не зависит от размерности глобальной системы уравнений. Для некоторых методов количество внешних итераций также слабо зависит от количества вводимых подобластей. Для одних методов локальные задачи можно решать только последовательно, для других методов их можно решать независимо друг от друга. Интересно, что итоговый алгоритм различных вариантов МДО можно трактовать как неявный способ построения эффективного предобуславливателя для глобальной системы уравнений [2].

Для решения задачи равновесия упругого тела также можно применять МДО. Большой интерес представляет исследование модернизированных вариантов МДО для решения задачи контактного взаимодействия системы тел [4-8]. Постановка такой задачи, с одной стороны, имеет много общего с постановкой задачи применения МДО без взаимного перекрытия подобластей для единого тела, с другой стороны, она имеет ряд своих особенностей, связанных с тем, что в общем случае конфигурации контактных поверхностей заранее неизвестны.

В работе приведены результаты исследования сходимости разных вариантов МДО, полученных при решении ряда тестовых и демонстрационных задач.

## 2. Математическая постановка задачи

Рассмотрим в многомерном пространстве тело, занимающее область  $G$  с границей  $\partial G$ . Математическая формулировка квазистатической задачи механики деформируемого твердого тела в рассматриваемой постановке включает следующие соотношения [2]:

уравнение равновесия

$$L\mathbf{u} = -\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad (1)$$

граничные условия (кинематические и силовые)

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial G_D, \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{p}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial G_N, \quad (3)$$

соотношение Коши для тензора деформации

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T), \quad (4)$$

определяющее уравнение (в данном случае закон Гука) для тензора напряжений

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}^{th}(\mathbf{x})). \quad (5)$$

Здесь  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  – вектор перемещения точки, определяемой радиус-вектором  $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i$  – вектор массовых сил,  $\partial G_D$  – участок границы, на котором заданы кинематические условия (условия Дирихле) для нормальной компоненты вектора перемещения,  $\partial G_N$  – участок границы, на котором заданы силовые условия (условия Неймана),  $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = p_i(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i$  – вектор внешней нагрузки, действующей на поверхности  $\partial G_N$ ,  $\mathbf{C}$  – тензор коэффициентов упругости,  $\boldsymbol{\varepsilon}^{th}$  – тензор температурной деформации.

Задача (1)-(5) может быть решена с помощью метода декомпозиции области (МДО) [2, 3]. А именно, представим область  $G$  в виде объединения

$G = \bigcup_{\alpha=1}^M G_\alpha$  конечного числа своих подобластей  $G_1, \dots, G_M$  с границами  $\partial G_1, \dots, \partial G_M$  ( $\bar{G}_i = G_i \cup \partial G_i$ ).

Подобласти  $G_1, \dots, G_M$  могут пересекаться. Введем

дополнительные обозначения  $\Gamma = \bigcup_{\alpha=1}^P \Gamma_\alpha$  – объединение всех фиктивных границ,

возникающих дополнительно после проведения декомпозиции области,

$\partial G_{N,i} = \partial G_N \cap \partial G_i$ ,  $\partial G_{D,i} = \partial G_D \cap \partial G_i$ ,  $\partial \bar{G}_{N,i} = \partial G_i \setminus \partial G_{N,i}$ . В МДО можно выделить два

класса методов: методы, в которых каждая из введенных подобластей имеет ненулевое пересечение хотя бы с одной другой подобластью (методы Шварца или методы с перекрытием), и методы, в которых введенные подобласти не

пересекаются друг с другом. Рассмотрим несколько разных методов, относящихся к данным классам.

## 2.1 Методы Шварца

Выберем некоторую функцию  $\mathbf{u}^0$ , удовлетворяющую граничному условию (2). Тогда классический альтернирующий метод Шварца состоит в построении последовательности функций  $\{\mathbf{u}^n\}$ . На итерации с номером  $n+1$  функция  $\mathbf{u}^{n+1}$  определяется путем решения следующих локальных задач ( $i=1, \dots, M$ ) [3]:

$$\begin{aligned} L\mathbf{u}^{n+i/M} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G_i, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^{n+i/M}) \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{p}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial G_{N,i}, \\ \mathbf{u}^{n+i/M}(\mathbf{x}) &= \mathbf{u}^{n+(i-1)/M}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \bar{G} \setminus (G_i \cup \partial G_{N,i}). \end{aligned} \quad (6)$$

Данный вариант метода Шварца называют мультипликативным, он всегда подразумевает последовательное решение локальных задач, начиная с первой подобласти и кончая последней.

Существует и другой вариант, называемый аддитивным методом Шварца. Он также состоит в построении последовательности функций  $\{\mathbf{u}^n\}$ . На каждой итерации сначала решаются локальные задачи ( $i=1, \dots, M$ ), причем решения могут выполняться как последовательным, так и параллельным способом [2]:

$$\begin{aligned} L\mathbf{u}_i^{n+1} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G_i, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_i^{n+1}) \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{p}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial G_{N,i}, \\ \mathbf{u}_i^{n+1}(\mathbf{x}) &= \mathbf{u}^n(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \bar{G} \setminus (G_i \cup \partial G_{N,i}). \end{aligned} \quad (7)$$

Итоговое решение в конце каждой итерации определяется по формуле

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \alpha \sum_{i=1}^M (\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}^n), \quad (8)$$

где  $\alpha$  – это некоторый итерационный параметр, от значения которого во многом зависит сходимость данного итерационного процесса.

## 2.2 МДО без перекрытия

Рассмотрим для простоты случай, когда исходная область разбита на 2 подобласти ( $M=2$ ). В этом случае задача (1)-(5) сводится к задаче поиска функций  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_2$ , удовлетворяющих следующей системе уравнений [2]:

$$\begin{aligned} L\mathbf{u}_1 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G_1, \\ \mathbf{u}_1(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_1 &= 0, \quad \mathbf{x} \in \partial G_{D,1}, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{n}_1 &= \mathbf{p}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial G_{N,1}, \\ \mathbf{u}_1(\mathbf{x}) &= \mathbf{u}_2(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{n}_1 &= -\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{n}_2, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \\ L\mathbf{u}_2 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G_2, \\ \mathbf{u}_2(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_2 &= 0, \quad \mathbf{x} \in \partial G_{D,2}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{n}_2 = \mathbf{p}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \partial G_{N,2}.$$

Таким образом, на фиктивной границе  $\Gamma$  все компоненты векторов  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$  должны совпадать, а все компоненты векторов напряжений должны совпадать по модулю, но иметь разные знаки.

Обычно для решения (9) используют различные итерационные процессы, в рамках которых на одной итерации для каждой подобласти на соответствующей фиктивной границе  $\Gamma_i$  ставится либо условие Неймана, либо условие Дирихле, а итерации продолжаются до тех пор, пока оба условия не будут выполнены с требуемой точностью. Приведем два варианта построения такого итерационного процесса.

### Метод Нейман-Дирихле

Суть метода заключается в том, что на каждой итерации сначала решается задача Неймана для первой подобласти [2]

$$\begin{aligned} L\mathbf{u}_1^{n+1} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in G_1, \\ \mathbf{u}_1^{n+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_1 &= 0, \mathbf{x} \in \partial G_{D,1}, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1^{n+1}) \cdot \mathbf{n}_1 &= \mathbf{p}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \partial G_{N,1}, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1^{n+1}) \cdot \mathbf{n}_1 &= \mathbf{p}_\Gamma^n, \mathbf{x} \in \Gamma. \end{aligned} \quad (10)$$

Затем решается задача Дирихле для второй подобласти

$$\begin{aligned} L\mathbf{u}_2^{n+1} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in G_2, \\ \mathbf{u}_2^{n+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_2 &= 0, \mathbf{x} \in \partial G_{D,2}, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_2^{n+1}) \cdot \mathbf{n}_2 &= \mathbf{p}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \partial G_{N,2}, \\ \mathbf{u}_2^{n+1}(\mathbf{x}) &= \mathbf{u}_1^{n+1}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Gamma. \end{aligned} \quad (11)$$

В конце итерации происходит вычисление нового приближения для значения вектора напряжения на границе  $\Gamma$

$$\mathbf{p}_\Gamma^{n+1}(\mathbf{x}) = -\theta \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_2^{n+1}) \cdot \mathbf{n}_2 + (1-\theta) \mathbf{p}_\Gamma^n(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (12)$$

где  $\theta$  – некоторый итерационный параметр, от значения которого во многом зависит сходимость данного итерационного процесса.

Для получения аналогичного метода Дирихле-Нейман нужно поступить наоборот: сначала решить для первого тела задачу Дирихле, затем для второго тела – задачу Неймана, а в конце вычислить новое приближение для значения перемещения на границе  $\Gamma$  (также используя итерационный параметр).

### Метод Нейман-Нейман

Данный метод состоит из двух стадий: на каждой итерации на первой стадии для обеих подобластей решаются задачи Дирихле [2]

$$\begin{aligned} L\mathbf{u}_i^{n+1/2} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in G_i, \\ \mathbf{u}_i^{n+1/2}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_i &= 0, \mathbf{x} \in \partial G_{D,i}, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_i^{n+1/2}) \cdot \mathbf{n}_i &= \mathbf{p}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \partial G_{N,i}, \\ \mathbf{u}_i^{n+1/2}(\mathbf{x}) &= \mathbf{u}_\Gamma^n(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Gamma. \end{aligned} \quad (13)$$

Затем на второй стадии решаются две задачи Неймана

$$\begin{aligned} Lu_i^{n+1} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G_i, \\ \mathbf{u}_i^{n+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_i &= 0, \quad \mathbf{x} \in \partial G_{D,i}, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_i^{n+1}) \cdot \mathbf{n}_i &= \mathbf{p}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial G_{N,i}. \end{aligned} \quad (14)$$

Для первой подобласти вектор напряжений на фиктивной границе берется равным вектору напряжений, полученному на первой стадии для второй подобласти (с обратным знаком):

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1^{n+1}) \cdot \mathbf{n}_1 = -\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_2^{n+1/2}) \cdot \mathbf{n}_2, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (15)$$

для второй подобласти – наоборот

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_2^{n+1}) \cdot \mathbf{n}_2 = -\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1^{n+1/2}) \cdot \mathbf{n}_1, \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (16)$$

В конце итерации происходит вычисление нового приближения для значения перемещения на границе  $\Gamma$

$$\mathbf{u}_\Gamma^{n+1}(\mathbf{x}) = \theta(\mathbf{u}_1^{n+1}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_2^{n+1}(\mathbf{x})) / 2 + (1 - \theta)\mathbf{u}_\Gamma^n(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (17)$$

где  $\theta$  – некоторый итерационный параметр, от значения которого во многом зависит сходимость данного итерационного процесса.

Для получения аналогичного метода Дирихле-Дирихле нужно поступить наоборот: на первой стадии решить для обеих подобластей задачи Неймана, на второй стадии – задачи Дирихле, а в конце вычислить новое приближение для значения вектора напряжения на границе  $\Gamma$  (также используя итерационный параметр).

И в методе Нейман-Нейман и в методе Дирихле-Дирихле в рамках одной стадии задачи для разных подобластей (в том числе для случая нескольких подобластей) можно решать независимо друг от друга (в том числе параллельно).

### 2.3 Задача контактного взаимодействия $N$ тел

Рассмотрим контактное взаимодействие  $N$  тел. Теперь  $G_i$  – это область, занимаемая  $i$ -м телом,  $\Gamma_c = \bigcup_{\alpha=1}^P \Gamma_c^\alpha$  – объединение всех потенциально контактных границ в данной системе. Для простоты опишем случай взаимодействия 2 тел ( $N=2$ ).

Тогда для случая использования на контактных границах условия прилипания можно сформулировать для перемещений  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_2$  следующую систему уравнений [4, 5]:

$$\begin{aligned} Lu_1 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G_1, \\ \mathbf{u}_1(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_1 &= 0, \quad \mathbf{x} \in \partial G_{D,1}, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{n}_1 &= \mathbf{p}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial G_{N,1}, \\ \sigma_{1\tau}(\mathbf{x}) &= \sigma_{2\tau}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_c, \\ \sigma_{1n}(\mathbf{x}) &= \sigma_{2n}(\mathbf{x}) \leq 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_c, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{u}_{1n}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_{2n}(\mathbf{x}) \leq \delta_{0n}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Gamma_c, \\
& \sigma_{1\tau}(\mathbf{u}_{1\tau} + \mathbf{u}_{2\tau} - \delta_{0\tau}) + \sigma_{1n}(\mathbf{u}_{1n} + \mathbf{u}_{2n} - \delta_{0n}) = 0, \mathbf{x} \in \Gamma_c, \\
& L\mathbf{u}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in G_2, \\
& \mathbf{u}_2(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_2 = 0, \mathbf{x} \in \partial G_{D,2}, \\
& \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{n}_2 = \mathbf{p}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \partial G_{N,2},
\end{aligned}$$

где  $\delta_{0\tau}(\mathbf{x}) \geq 0$ ,  $\delta_{0n}(\mathbf{x}) \geq 0$  – функции, задающие начальный зазор (участки поверхности, которые в итоге оказываются в контакте, в начальный момент могли не соприкасаться друг с другом),  $\mathbf{u}_{i\tau} = \mathbf{u}_i \cdot \boldsymbol{\tau}_i$ ,  $\mathbf{u}_{in} = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_i$ ,  $\sigma_{i\tau} = (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{n}_i) \cdot \boldsymbol{\tau}_i$ ,  $\sigma_{in} = (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{n}_i) \cdot \mathbf{n}_i$ .

Изменения в системе уравнений (18) по сравнению с (9) связаны с тем, что при использовании МДО для одного тела условия равенства векторов перемещений и напряжений заданы на всей фиктивной границе  $\Gamma$ , а в контактной задаче аналогичные равенства будут выполняться только на тех участках поверхности  $\Gamma_c$ , которые находятся в контакте. Заранее эти участки неизвестны. Может возникнуть ситуация, когда в начальной конфигурации какие-то участки не соприкасались друг с другом, но в итоге они вступят в контакт. Или наоборот: в начальной конфигурации участки соприкасались друг с другом, но в итоге они расходятся.

Равенство

$$\sigma_{1\tau}(\mathbf{u}_{1\tau} + \mathbf{u}_{2\tau} - \delta_{0\tau}) + \sigma_{1n}(\mathbf{u}_{1n} + \mathbf{u}_{2n} - \delta_{0n}) = 0$$

(вместе с другими граничными условиями на  $\Gamma_c$ ) гарантирует, что реализуется один из двух следующих вариантов:

1) рассматриваемый участок поверхности  $\Gamma_c$  находится в контакте, и тогда верны соотношения

$$\mathbf{u}_{1\tau} + \mathbf{u}_{2\tau} = \delta_{0\tau}, \mathbf{u}_{1n} + \mathbf{u}_{2n} = \delta_{0n}, \sigma_{1n} < 0;$$

2) рассматриваемый участок поверхности  $\Gamma_c$  не находится в контакте, и тогда верны соотношения

$$\mathbf{u}_{1n} + \mathbf{u}_{2n} < \delta_{0n}, \sigma_{1\tau} = 0, \sigma_{1n} = 0.$$

Если использовать на контактных границах условия скольжения без трения, то в (18) условия на  $\Gamma_c$  принимают следующий вид [5]:

$$\begin{aligned}
& \sigma_{1\tau}(\mathbf{x}) = \sigma_{2\tau}(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \Gamma_c, \\
& \sigma_{1n}(\mathbf{x}) = \sigma_{2n}(\mathbf{x}) \leq 0, \mathbf{x} \in \Gamma_c, \\
& \mathbf{u}_{1n}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_{2n}(\mathbf{x}) \leq \delta_{0n}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Gamma_c, \\
& \sigma_{1n}(\mathbf{u}_{1n} + \mathbf{u}_{2n} - \delta_{0n}) = 0, \mathbf{x} \in \Gamma_c.
\end{aligned} \tag{19}$$

Наиболее популярными методами решения контактных задач являются метод множителей Лагранжа и метод штрафных функций [4]. Модифицированные варианты МДО без перекрытия также используют для решения контактных задач благодаря сходству в постановке задач.

Выпишем формулы метода Нейман-Дирихле (для условия скольжения без трения). На каждой итерации сначала решается задача Неймана для первого тела [2]

$$\begin{aligned}
L\mathbf{u}_1^{n+1} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G_1, \\
\mathbf{u}_1^{n+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_1 &= 0, \quad \mathbf{x} \in \partial G_{D,1}, \\
\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1^{n+1}) \cdot \mathbf{n}_1 &= \mathbf{p}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial G_{N,1}, \\
\sigma_{1n}^{n+1}(\mathbf{x}) &= p_c^n(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_c^1, \\
\sigma_{1r}^{n+1}(\mathbf{x}) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_c^1.
\end{aligned} \tag{20}$$

Здесь  $\Gamma_c^1$  – потенциально контактная поверхность для 1 тела.

Затем решается задача Дирихле для второго тела, которая в общем случае является нелинейной:

$$\begin{aligned}
L\mathbf{u}_2^{n+1} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G_2, \\
\mathbf{u}_2^{n+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_2 &= 0, \quad \mathbf{x} \in \partial G_{D,2}, \\
\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_2^{n+1}) \cdot \mathbf{n}_2 &= \mathbf{p}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial G_{N,2}, \\
\mathbf{u}_{2n}^{n+1}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_{1n}^{n+1}(\mathbf{x}) &\leq \delta_{0n}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_c^2, \\
\sigma_{2r}^{n+1}(\mathbf{x}) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_c^2, \\
\sigma_{2n}^{n+1}(\mathbf{x}) &\leq 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_c^2, \\
\sigma_n^{n+1}(\mathbf{u}_{2n}^{n+1} + \mathbf{u}_{1n}^{n+1} - \delta_{0n}) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_c^2.
\end{aligned} \tag{21}$$

В конце итерации происходит вычисление нового приближения для значения нормальных напряжений на границе  $\Gamma_c^1$  (на тех участках, которые после решения (21) находятся в контакте, на всех других участках  $p_c^{n+1}(\mathbf{x})=0$ ):

$$p_c^{n+1}(\mathbf{x}) = \theta \sigma_n^2(\mathbf{u}_2^{n+1}) + (1-\theta) p_c^n(\mathbf{x}). \tag{22}$$

Можно выполнить во многом аналогичное обобщение метода Нейман-Нейман и других вариантов МДО без перекрытия для решения задачи контактного взаимодействия тел [2, 6].

В работе [7], посвященной решению контактных задач, рассмотрен алгоритм, похожий на метод Нейман-Нейман, в котором введен не один итерационный параметр, а два параметра, которые определяются из условия минимизации энергии системы. Аналогичный алгоритм также использован в [8].

### 3. Вычислительная модель

Рассмотрим пространство  $H_0^1(G, \partial G_D)$  функций, для которых выполнено условие (2). Введем в данном пространстве скалярное произведение для функций  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H_0^1(G, \partial G_D)$  [2, 3]:

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \int_G \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dV$$

и линейный функционал

$$g(\mathbf{v}) = \int_G \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial G_N} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} dS + \int_G \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{th}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dV.$$

Тогда слабая постановка задачи (1)-(5) принимает следующий вид [2]:

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = g(\mathbf{v}). \quad (23)$$

Если использовать стандартные процедуры дискретизации переменных в (18) с помощью метода конечных элементов, то можно получить итоговое матричное уравнение [9]

$$[K]\{u\} = \{R\}, \quad (24)$$

где  $[K]$  – матрица жесткости,  $\{u\}$  – вектор перемещений, определенных в узлах сетки,  $\{R\}$  – вектор узловых сил.

### 3.1 Вычислительная модель для методов Шварца

Рассмотрим слабую постановку изложенных вариантов метода Шварца. Выделим в пространстве  $H_0^1(G, \partial G_D)$  замкнутые подпространства  $H_i = \{\mathbf{v} \in H_0^1(G, \partial G_D) : \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \bar{G} \setminus (G_i \cup \partial G_{N,i})\}$  [3]. Легко заметить, что функции

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_i^{n+1}(\mathbf{x}) &= \mathbf{u}^{n+i/M}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}^{n+(i-1)/M}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{w}_i^{n+1}(\mathbf{x}) &= \mathbf{u}_i^{n+1}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}^n(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (25)$$

определяемые для мультипликативного и аддитивного методов Шварца соответственно, принадлежат подпространствам  $H_i$ .

Тогда слабая постановка задачи для мультипликативного метода Шварца состоит из решения следующих локальных задач ( $i = 1, \dots, M$ ) [2, 3]:

$$\begin{aligned} [\mathbf{z}_i^{n+1}, \mathbf{v}_i] &= g(\mathbf{v}_i) - [\mathbf{u}^{n+(i-1)/M}, \mathbf{v}_i], \quad \mathbf{v}_i \in H_i. \\ \mathbf{u}^{n+i/M} &= \mathbf{u}^{n+(i-1)/M} + \mathbf{z}_i^{n+1}. \end{aligned} \quad (26)$$

Слабая постановка задачи для аддитивного метода Шварца состоит из решения следующих локальных задач ( $i = 1, \dots, M$ ) [2]:

$$[\mathbf{w}_i^{n+1}, \mathbf{v}_i] = g(\mathbf{v}_i) - [\mathbf{u}^n, \mathbf{v}_i], \quad \mathbf{v}_i \in H_i. \quad (27)$$

Итоговое решение в конце каждой итерации определяется по формуле

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \alpha \sum_{i=1}^M \mathbf{w}_i^{n+1}. \quad (28)$$

Для случая эллиптического скалярного оператора сходимость изложенного алгоритма доказана в [2] (для обоих вариантов) и [3] (для мультипликативного метода Шварца). В [2] полученные результаты обобщены для задачи теории упругости.

Для улучшения ситуации со сходимостью метода Шварца можно использовать двухуровневые методы, предполагающие, что кроме основной расчетной сетки в области задана грубая сетка, размеры которой сопоставимы с размерами подобластей, в которых решаются локальные задачи.

Например, для аддитивного двухуровневого метода Шварца решение на каждой итерации ищется в виде [2]

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \alpha \sum_{i=1}^M \mathbf{w}_i^{n+1} + \alpha \mathbf{w}_0^{n+1}, \quad (29)$$

где  $\mathbf{w}_0^{n+1}$  – решение задачи, полученное на грубой сетке и пересчитанное на узлы основной сетки путем интерполяции.

После дискретизации задачи методом конечных элементов решение каждой локальной задачи сводится к решению системы линейных уравнений вида (размерность векторов совпадает с количеством узлов сетки в данной подобласти, умноженным на размерность задачи):

$$[K_i]\{\mathbf{w}_i\} = \{R_i\}. \quad (30)$$

### 3.2 Вычислительная модель для МДО без перекрытия

Введем пространства  $H_0^1(G_i, \partial G_{D,i})$  функций, для которых выполнено условие (2) на  $\partial G_{D,i}$ . Определим в данных пространствах скалярные произведения для функций  $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i \in H_0^1(G_i, \partial G_{D,i})$  [2]:

$$[\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i]_i = \int_{G_i} \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_i) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_i) dV$$

и линейные функционалы

$$g_i(\mathbf{v}_i) = \int_{G_i} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_i dV + \int_{\partial G_{N,i}} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_i dS + \int_{G_i} \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{th}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_i) dV.$$

$$g_{\Gamma_i}(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i) = \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{n}_i) \cdot \mathbf{v}_i dS.$$

Введем пространство  $V(G) = H_0^1(G_1, \partial G_{D,1}) \times H_0^1(G_2, \partial G_{D,2})$ . Таким образом, для произвольной функции  $\mathbf{v} \in V(G)$  верно представление

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)^T, \quad \mathbf{v}_1 \in H_0^1(G_1, \partial G_{D,1}), \quad \mathbf{v}_2 \in H_0^1(G_2, \partial G_{D,2}).$$

Выделим в пространстве  $V(G)$  следующее множество функций  $\mathbf{v}$ , для которых значения  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  совпадают на фиктивной границе  $\Gamma$ :

$$K = \{\mathbf{v} \in V(G) : \mathbf{v}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{v}_2(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma\}.$$

Тогда слабую постановку задачи (9) можно сформулировать так: нужно найти функцию  $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)^T \in K$ , для компонент которой верны равенства

$$[\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i]_i = g_i(\mathbf{v}_i) + g_{\Gamma_i}(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i) \quad (31)$$

для всех функций  $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)^T \in K$ .

Если задать в пространстве  $V(G)$  скалярное произведение и линейные функционалы

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = [\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1]_1 + [\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2]_2,$$

$$g(\mathbf{v}) = g_1(\mathbf{v}_1) + g_2(\mathbf{v}_2),$$

$$g_{\Gamma}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g_{\Gamma_1}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) + g_{\Gamma_2}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2)$$

и учесть, что для всех  $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)^T \in K$  выполнено равенство

$$g_{\Gamma}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{n}_1) \cdot \mathbf{v}_1 dS + \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{n}_2) \cdot \mathbf{v}_2 dS = \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{n}_1) \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) dS = 0, \quad (32)$$

то можно получить следующее уравнение для слабой постановки задачи МДО без перекрытия, формально совпадающее с (23):

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = g(\mathbf{v}). \quad (33)$$

### Метод Нейман-Дирихле

Рассмотрим пространство следов функций  $\mathbf{v}_i \in H_0^1(G_i, \partial G_{D,i})$ ,  $i=1,2$  на фиктивной границе  $\Gamma$ :

$$H^{1/2}(\Gamma) = \{\boldsymbol{\varphi} \in L^2(\Gamma) : \exists \mathbf{v}_i \in H_0^1(G_i, \partial G_{D,i}), \mathbf{v}_i(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Gamma\}.$$

Определим в пространствах  $H_0^1(G_i, \partial G_{D,i})$  следующие множества для каждой функции  $\boldsymbol{\varphi} \in L^2(\Gamma)$  [10]

$$K_i(\boldsymbol{\varphi}) = \{\mathbf{v}_i \in H_0^1(G_i, \partial G_{D,i}) : \mathbf{v}_i(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \Gamma\}.$$

Для метода Нейман-Дирихле слабая постановка задачи (10) для первого тела принимает следующий вид: найти функцию  $\mathbf{u}_1^{n+1} \in H_0^1(G_1, \partial G_{D,1})$ , для которой верно равенство [10]

$$[\mathbf{u}_1^{n+1}, \mathbf{v}_1]_1 = g_1(\mathbf{v}_1) + g_{\Gamma 1}^n(\mathbf{v}_1), \quad \forall \mathbf{v}_1 \in H_0^1(G_1, \partial G_{D,1}), \quad (34)$$

где

$$g_{\Gamma 1}^n(\mathbf{v}_1) = \int_{\Gamma} \mathbf{p}_{\Gamma}^n \cdot \mathbf{v}_1 dS.$$

Для второго тела слабая постановка задачи (11) формулируется так: найти функцию  $\mathbf{u}_2^{n+1} \in K_2(\boldsymbol{\varphi}_1^{n+1})$ , для которой верно равенство

$$[\mathbf{u}_2^{n+1}, \mathbf{v}_2]_2 = g_2(\mathbf{v}_2), \quad \forall \mathbf{v}_2 \in K_2(\boldsymbol{\varphi}_1^{n+1}), \quad (35)$$

где  $\boldsymbol{\varphi}_1^{n+1}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_1^{n+1}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Gamma$ .

### Метод Нейман-Нейман

На первой стадии каждой итерации для обоих тел слабая постановка задачи формулируется так: найти функцию  $\mathbf{u}_i^{n+1/2} \in K_i(\boldsymbol{\varphi}_i^{n+1})$ , для которой верно равенство [6]

$$[\mathbf{u}_i^{n+1/2}, \mathbf{v}_i]_i = g_i(\mathbf{v}_i), \quad \forall \mathbf{v}_i \in K_i(\boldsymbol{\varphi}_i^{n+1}). \quad (36)$$

На второй стадии для обоих тел слабая постановка задачи заключается в следующем: найти функцию  $\mathbf{u}_i^{n+1} \in H_0^1(G_i, \partial G_{D,i})$ , для которой верно равенство

$$[\mathbf{u}_i^{n+1}, \mathbf{v}_i]_i = g_i(\mathbf{v}_i) + g_{\Gamma i}^{n+1/2}(\mathbf{v}_i), \quad \forall \mathbf{v}_i \in H_0^1(G_i, \partial G_{D,i}), \quad (37)$$

где

$$g_{\Gamma 1}^{n+1/2}(\mathbf{v}_1) = - \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_2^{n+1/2}) \cdot \mathbf{n}_2) \cdot \mathbf{v}_1 dS,$$

$$g_{\Gamma 2}^{n+1/2}(\mathbf{v}_2) = - \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1^{n+1/2}) \cdot \mathbf{n}_1) \cdot \mathbf{v}_2 dS.$$

### 3.3 Вычислительная модель для контактной задачи

Рассмотрим случай, когда на  $\Gamma_c$  заданы условия скольжения без трения.

Выделим в пространстве  $V(G)$  следующее множество функций  $\mathbf{v}$  [10]:

$$K_c = \{ \mathbf{v} \in V(G) : v_{1n}(\mathbf{x}) + v_{2n}(\mathbf{x}) \leq \delta_{0n}, \mathbf{x} \in \Gamma_c \}.$$

Слабую постановку задачи (18) можно сформулировать так: нужно найти функцию  $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)^T \in K_c$ , для компонент которой верны равенства

$$[\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i]_i = g_i(\mathbf{v}_i) + g_{ci}(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i) \quad (38)$$

для всех функций  $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)^T \in K_c$ .

Так как касательные напряжения равны 0, то справедливы соотношения

$$g_{ci}(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i) = \int_{\Gamma_c^i} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{n}_i) \cdot \mathbf{v}_i dS = \int_{\Gamma_c^i} (\sigma_{it} v_{it} + \sigma_{in} v_{in}) dS = \int_{\Gamma_c^i} \sigma_{in} v_{in} dS,$$

$$g_c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g_{c1}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) + g_{c2}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) = \int_{\Gamma_c} \sigma_{1n} (v_{1n} + v_{2n}) dS.$$

Тогда, складывая равенства (38) для  $i = 1, 2$ , можно получить в сумме:

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = g(\mathbf{v}) + g_c(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \quad (39)$$

Если выбрать  $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ , то (39) принимает вид

$$[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = g(\mathbf{u}) + g_c(\mathbf{u}, \mathbf{u}), \quad (40)$$

где

$$g_c(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \int_{\Gamma_c} \sigma_{1n} (u_{1n} + u_{2n}) dS = \int_{\Gamma_c} \sigma_{1n} \delta_{0n} dS. \quad (41)$$

Последнее равенство в (41) справедливо, поскольку  $\sigma_{1n} \neq 0$  только на тех участках, на которых  $u_{1n} + u_{2n} = \delta_{0n}$  (где есть контакт).

Если вычесть из (39) выражение (40), то с учетом (41) получим равенство

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}] = g(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + g_c(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}). \quad (42)$$

Для функционала  $g_c(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u})$  всегда справедливо следующее неравенство:

$$g_c(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) = \int_{\Gamma_c} \sigma_{1n} (v_{1n} + v_{2n} - \delta_{0n}) dS \geq 0,$$

поскольку  $\sigma_{1n} \leq 0$ ,  $v_{1n} + v_{2n} - \delta_{0n} \leq 0$  (если  $\mathbf{v} \in K_c$ ).

Поэтому в качестве итоговой слабой постановки контактной задачи можно использовать неравенство [6, 10]:

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}] \geq g(\mathbf{v} - \mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{v} \in K_c. \quad (43)$$

Еще одним существенным отличием контактной задачи по сравнению с МДО для одного тела является то, что в общем случае сетки на контактных поверхностях разных тел могут быть несогласованными. Это приводит к заметному усложнению алгоритма вычисления значений напряжений на элементах поверхности. Один из вариантов такого алгоритма приведен в [11].

### Метод Нейман-Дирихле

Определим в пространствах  $H_0^1(G_i, \partial G_{D,i})$  следующие множества для каждой функции  $\varphi \in L^2(\Gamma)$

$$K_{ci}(\varphi) = \{ \mathbf{v}_i \in H_0^1(G_i, \partial G_{D,i}) : v_{in}(\mathbf{x}) \leq \delta_{0n} - \varphi, \mathbf{x} \in \Gamma_c^i \}.$$

Для метода Нейман-Дирихле слабая постановка задачи (20) для первого тела принимает следующий вид: найти функцию  $\mathbf{u}_1^{n+1} \in H_0^1(G_1, \partial G_{D,1})$ , для которой верно равенство [10]

$$\left[ \mathbf{u}_1^{n+1}, \mathbf{v}_1 \right]_1 = g_1(\mathbf{v}_1) + g_{c1}^n(\mathbf{v}_1), \quad \forall \mathbf{v}_1 \in H_0^1(G_1, \partial G_{D,1}), \quad (44)$$

где

$$g_{c1}^n(\mathbf{v}_1) = \int_{\Gamma_c^1} \mathbf{p}_1^n \cdot \mathbf{v}_1 dS.$$

Для второго тела слабая постановка задачи (21) формулируется так: найти функцию  $\mathbf{u}_2^{n+1} \in K_{c2}(\varphi_1^{n+1})$ , для которой верно неравенство

$$\left[ \mathbf{u}_2^{n+1}, \mathbf{v}_2 - \mathbf{u}_2^{n+1} \right]_2 \geq g_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{u}_2^{n+1}), \quad \forall \mathbf{v}_2 \in K_{c2}(\varphi_1^{n+1}), \quad (45)$$

где  $\varphi_1^{n+1}(\mathbf{x}) = u_{1n}^{n+1}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Gamma_c$ .

В [10] доказана сходимость предложенного алгоритма (для более сложного случая наличия трения) для подходящих значений итерационного параметра  $\theta$ .

## 4. Результаты применения метода декомпозиции области

В приведенных ниже примерах всегда использовались конечные элементы 1 порядка на четырехугольной сетке [9].

### 4.1 Задача нагружения упругой трубы давлением

Рассмотрим решение задачи нагружения упругой трубы внешним давлением  $p_1 = 10$ . Расчетная область – продольное сечение участка трубы ( $r_1 = 1$ ,  $r_2 = 2$ ,  $L_z = 8$ ), нижний торец трубы закреплен по оси, к верхнему торцу приложено давление  $p_2 = 50$ .

Согласно выбранному алгоритму исходная область сначала разбивалась по оси  $Oz$  на заданное количество прямоугольных подобластей без перекрытия  $\Omega_1, \dots, \Omega_M$ . Каждая подобласть имела следующие характерные размеры:  $H_r = r_2 - r_1$ ,  $H_z = L_z / M$ . Подобласть  $G_i$  соответствовала объединению подобласти  $\Omega_i$  и дополнительных участков соседних подобластей  $\Omega_{i-1}$  и  $\Omega_{i+1}$  с размерами, задаваемыми выбранным коэффициентом относительного перекрытия (обычно равным 0.3).

Итерационный процесс продолжался до тех пор, пока не выполнялось соотношение

$$\|\mathbf{r}^n\|_2 / \|\mathbf{r}^0\|_2 \leq \varepsilon_0,$$

где  $\mathbf{r}^n = \{R\} - [K]\{u^n\}$  – вектор невязки решения уравнения (7) на  $n$ -ой итерации (данные итерации в дальнейшем называются внешними).

В данной работе обычно выбирались

$$\{u^0\} = 0, \quad \varepsilon_0 = 10^{-5}.$$

Решение локальных систем уравнений (30) выполнялось с помощью метода бисопряженных градиентов (соответствующие итерации называются внутренними). Для аддитивного метода Шварца параметр  $\alpha = 0.5$ .

Следуя работе [2], введем следующие определения для свойств методов (являющихся вариантами МДО), относящихся к решению итоговой системы линейных уравнений.

*Определение 1:* метод, для которого количество внешних итераций, требуемых для достижения заданной точности, не зависит от размерности системы уравнений, называют оптимальным.

*Определение 2:* метод, для которого количество внешних итераций, требуемых для достижения заданной точности, не зависит от количества вводимых подобластей, называют масштабируемым.

Для исследования зависимости сходимости метода от размерности итоговой системы линейных уравнений рассмотрены три расчетные сетки с шагами  $h=0.1$  (количество узлов – 891),  $h=0.05$  (количество узлов – 3381),  $h=0.025$  (количество узлов – 13161).

Для рассматриваемой задачи известно аналитическое решение для компонент тензора напряжений. В таблице 1 приведены относительные ошибки численного решения, полученного при решении задачи во всей области без декомпозиции, по сравнению с точным решением для различных сеток. Ошибки вычислялись следующим образом:

$$error \sigma = \sqrt{\left( \sum_{k=1}^{Nelem} s_k \left( \frac{\sigma_k^{ex} - \sigma_k^{num}}{\sigma_k^{ex}} \right)^2 \right) / \left( \sum_{k=1}^{Nelem} s_k \right)},$$

где  $\sigma_k^{ex}$  – точное значение рассматриваемой компоненты тензора напряжений в центре  $k$ -го элемента,  $\sigma_k^{num}$  – полученное численное значение аналогичной величины,  $s_k$  – площадь  $k$ -го элемента сетки.

Таблица 1

### Ошибки численного решения для разных сеток (M = 1)

Шаг сетки h	Ошибки численного решения		
	$error \sigma_{rr}$	$error \sigma_{\varphi\varphi}$	$error \sigma_{zz}$
0.1	$1.51 \cdot 10^{-3}$	$2.91 \cdot 10^{-4}$	$1.59 \cdot 10^{-4}$
0.05	$6.29 \cdot 10^{-4}$	$7.48 \cdot 10^{-5}$	$4.63 \cdot 10^{-5}$
0.025	$2.72 \cdot 10^{-4}$	$1.91 \cdot 10^{-5}$	$1.31 \cdot 10^{-5}$

Как видно из приведенных данных, при измельчении сетки относительные ошибки численного решения для радиальной компоненты тензора напряжений убывают со скоростью, близкой к линейной, а для угловой и осевой компонент – со скоростью, близкой к квадратичной.

### Мультипликативный метод Шварца

В таблице 2 приведено количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки для мультипликативного метода Шварца при фиксированном относительном перекрытии подобластей (отношение размера перекрытия к размеру подобласти равнялось 0.3). Как видно из таблицы, метод является оптимальным (количество внешних итераций не зависит от шага сетки), но не является масштабируемым: при увеличении количества подобластей количество итераций увеличивается приблизительно как  $M^2$ .

Таблица 2

**Мультипликативный метод Шварца: количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки (относительное перекрытие 0.3)**

Количество подобластей (M)	Шаг сетки, количество узлов		
	h=0.1	h=0.05	h=0.025
2 подобласти	21	21	21
4 подобласти	103	103	103
8 подобластей	480	479	479

В таблице 3 рассмотрена зависимость относительных ошибок численного решения по сравнению с аналитическим после проведения различного числа итераций, соответствующих различным значениям  $\varepsilon_0$ , для расчета с разбиением на 8 подобластей с шагом сетки h=0.025.

Таблица 3

**Мультипликативный метод Шварца:  
ошибки численного решения (M = 8, h=0.025)**

$\varepsilon_0$	Количество итераций	Ошибки численного решения		
		$error \sigma_{rr}$	$error \sigma_{\varphi\varphi}$	$error \sigma_{zz}$
$10^{-2}$	162	$7.10 \cdot 10^{-3}$	$1.55 \cdot 10^{-3}$	$2.07 \cdot 10^{-2}$
$10^{-3}$	267	$7.38 \cdot 10^{-4}$	$1.59 \cdot 10^{-4}$	$2.09 \cdot 10^{-3}$
$10^{-4}$	372	$2.73 \cdot 10^{-4}$	$2.63 \cdot 10^{-5}$	$2.11 \cdot 10^{-4}$
$10^{-5}$	478	$2.71 \cdot 10^{-4}$	$1.94 \cdot 10^{-5}$	$2.45 \cdot 10^{-5}$
$10^{-6}$	582	$2.71 \cdot 10^{-4}$	$1.92 \cdot 10^{-5}$	$1.32 \cdot 10^{-5}$

Как видно из сравнения данных таблицы 1 и таблицы 3, ошибки, полученные с помощью мультипликативного МДО для  $\varepsilon_0 = 10^{-6}$ , практически не отличаются от аналогичных ошибок, полученных при решении задачи во всей области.

### Аддитивный метод Шварца

В таблице 4 приведено количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки для аддитивного метода Шварца при фиксированном относительном перекрытии подобластей (отношение размера перекрытия к размеру подобласти равнялось 0.3).

Таблица 4

#### Аддитивный метод Шварца: количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки (относительное перекрытие 0.3)

Количество подобластей (M)	Шаг сетки, количество узлов		
	h=0.1	h=0.05	h=0.025
2 подобласти	85	85	85
4 подобласти	407	407	407
8 подобластей	1868	1868	1868

Как видно из таблицы, метод также является оптимальным (количество внешних итераций не зависит от шага сетки), но не является масштабируемым: при увеличении количества подобластей количество итераций увеличивается приблизительно как  $M^2$ . Количество итераций по сравнению с мультипликативным методом Шварца выросло приблизительно в 4 раза.

В таблице 5 рассмотрена зависимость относительных ошибок численного решения по сравнению с аналитическим после проведения различного числа итераций, соответствующих различным значениям  $\varepsilon_0$  для расчета с разбиением на 8 подобластей с шагом сетки  $h=0.1$ .

Таблица 5

#### Аддитивный метод Шварца: ошибки численного решения (M = 8, h=0.1)

$\varepsilon_0$	Количество итераций	Ошибки численного решения		
		$error \sigma_{rr}$	$error \sigma_{\varphi\varphi}$	$error \sigma_{zz}$
$10^{-2}$	592	$5.76 \cdot 10^{-3}$	$1.35 \cdot 10^{-3}$	$2.93 \cdot 10^{-2}$
$10^{-3}$	1017	$1.62 \cdot 10^{-3}$	$3.08 \cdot 10^{-4}$	$2.96 \cdot 10^{-3}$
$10^{-4}$	1443	$1.51 \cdot 10^{-3}$	$2.89 \cdot 10^{-4}$	$3.34 \cdot 10^{-4}$
$10^{-5}$	1868	$1.51 \cdot 10^{-3}$	$2.90 \cdot 10^{-4}$	$1.62 \cdot 10^{-4}$
$10^{-6}$	2293	$1.51 \cdot 10^{-3}$	$2.91 \cdot 10^{-4}$	$1.59 \cdot 10^{-4}$

Как видно из сравнения данных таблицы 1 и таблицы 5, ошибки, полученные с помощью аддитивного МДО для  $\varepsilon_0 = 10^{-6}$ , практически не отличаются от аналогичных ошибок, полученных при решении задачи во всей области.

### Двухуровневый аддитивный метод Шварца

В таблице 6 приведено количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки для двухуровневого аддитивного метода Шварца при фиксированном относительном перекрытии подобластей (отношение размера перекрытия к размеру подобласти равнялось 0.3). Ячейки грубой сетки соответствовали разбиению исходной области на подобласти без перекрытия  $\Omega_1, \dots, \Omega_M$ .

Таблица 6

#### Двухуровневый аддитивный метод Шварца: количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки

Количество подобластей (M)	Шаг сетки, количество узлов		
	h=0.1	h=0.05	h=0.025
2 подобласти	21	21	21
4 подобласти	21	21	21
8 подобластей	22	22	22

Как видно из таблицы 6, для рассматриваемой задачи количество внешних итераций слабо зависит от количества подобластей, поэтому метод можно считать оптимальным и масштабируемым.

В таблице 7 рассмотрена зависимость относительных ошибок численного решения по сравнению с аналитическим после проведения различного числа итераций, соответствующих различным значениям  $\varepsilon_0$ , для расчета с разбиением на 8 подобластей с шагом сетки h=0.05.

Таблица 7

#### Двухуровневый аддитивный метод Шварца: ошибки численного решения (M = 8, h=0.05)

$\varepsilon_0$	Количество итераций	Ошибки численного решения		
		$error \sigma_{rr}$	$error \sigma_{\varphi\varphi}$	$error \sigma_{zz}$
$10^{-2}$	9	$1.38 \cdot 10^{-2}$	$9.51 \cdot 10^{-4}$	$1.72 \cdot 10^{-3}$
$10^{-3}$	13	$1.71 \cdot 10^{-3}$	$1.54 \cdot 10^{-4}$	$1.38 \cdot 10^{-4}$
$10^{-4}$	17	$6.96 \cdot 10^{-4}$	$8.05 \cdot 10^{-5}$	$4.79 \cdot 10^{-5}$
$10^{-5}$	22	$6.32 \cdot 10^{-4}$	$7.52 \cdot 10^{-5}$	$4.63 \cdot 10^{-5}$
$10^{-6}$	27	$6.29 \cdot 10^{-4}$	$7.49 \cdot 10^{-5}$	$4.63 \cdot 10^{-5}$

Как видно из сравнения данных таблицы 1 и таблицы 7, ошибки, полученные с помощью двухуровневого аддитивного МДО для  $\varepsilon_0 = 10^{-6}$ , практически не отличаются от аналогичных ошибок, полученных при решении задачи во всей области.

В таблице 8 рассмотрена зависимость количества внешних итераций различных вариантов МДО от размера относительного перекрытия для случая 4 подобластей и шага сетки  $h = 0.1$ . Как и следовало ожидать, уменьшение данного размера приводит к существенному росту числа итераций для одноуровневых мультипликативного и аддитивного МДО.

Таблица 8

**Количество итераций в зависимости от размера относительного перекрытия (M=4, h=0.1)**

относительное перекрытие	0.2	0.3	0.4
мультипликативный МДО	161	103	76
аддитивный МДО	629	407	299
двухуровневый аддитивный МДО	23	21	19

**Метод Нейман-Дирихле**

В данном алгоритме сначала решалась задача Неймана для нижней подобласти, затем последовательно для каждой из (M-2) последующих подобластей - задача, для которой на нижней фиктивной границе подобласти стояло условие Дирихле, а на верхней границе – условие Неймана. В конце решалась задача Дирихле для верхней подобласти. Значение итерационного параметра считалось постоянным  $\theta=0.25$  (для  $\theta=0.5$  возникали проблемы со сходимостью в случае M=8). В качестве нулевого приближения бралось нулевое значение вектора напряжения.

В таблице 9 приведено количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки для метода Нейман-Дирихле (МДО без перекрытия).

Таблица 9

**Метод Нейман-Дирихле: количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки**

Количество подобластей (M)	Шаг сетки, количество узлов		
	h=0.1	h=0.05	h=0.025
2 подобласти	38	38	38
4 подобласти	54	54	54
8 подобластей	82	82	82

Как видно из таблицы, метод является оптимальным – количество внешних итераций не зависит от шага сетки. По сравнению с

мультипликативным методом Шварца для случая 2 тел количество итераций заметно больше (там 21 итерация), зато масштабируемость заметно лучше: при увеличении количества подобластей количество итераций увеличивается приблизительно как  $M^{1/2}$  (для одноуровневых методов Шварца  $M^2$ ). Проведенный анализ ошибок численного решения по сравнению с аналитическим показал, что для  $\varepsilon_0 = 10^{-5}$  ошибки практически совпадают с величинами, приведенными в таблице 1.

### Метод Нейман-Нейман

В алгоритме на первой стадии независимо друг от друга решались задачи, для которых на одной из фиктивных границ соответствующей подобласти стояло условие Дирихле, а на второй фиктивной границе – условие Неймана. На второй стадии также независимо друг от друга решались аналогичные задачи с переставленными условиями (вместо условия Дирихле – условие Неймана, и наоборот). В реализованном алгоритме для каждой задачи всегда на одной из границ стояло условие Дирихле, что гарантировало единственность полученного решения. Значение итерационного параметра бралось постоянным и равным  $\theta=0.5$ .

В таблице 10 приведено количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки для метода Нейман-Нейман (МДО без перекрытия).

Таблица 10

### Метод Нейман-Нейман: количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки

Количество подобластей (M)	Шаг сетки, количество узлов		
	h=0.1	h=0.05	h=0.025
2 подобласти	36	36	36
4 подобласти	119	119	119
8 подобластей	439	439	439

Как видно из таблицы, метод является оптимальным – количество внешних итераций не зависит от шага сетки. По сравнению с методом Нейман-Дирихле для случая 2 тел количество итераций чуть меньше (там 38 итераций), но масштабируемость метода аналогична одноуровневым методам Шварца: при увеличении количества подобластей количество итераций увеличивается приблизительно как  $M^2$ . Проведенный анализ ошибок численного решения по сравнению с аналитическим показал, что для  $\varepsilon_0 = 10^{-5}$  ошибки практически совпадают с величинами, приведенными в таблице 1.

По итогам проведенных расчетов можно сделать следующие выводы. Рассмотрены 5 вариантов МДО: 3 варианта с перекрытием области и 2 варианта без перекрытия. 3 варианта подразумевают только последовательное решение локальных задач, два варианта – независимое друг от друга решение локальных

задач. Во всех рассмотренных методах наблюдается независимость количества внешних итераций до достижения заданного уровня сходимости от шага сетки. Независимость количества внешних итераций от количества подобластей, на которые разбивается исходная область, характерна только для двухуровневого аддитивного метода Шварца.

#### 4.2 Задача о контакте столба тел

Рассмотрим задачу о контакте столба одинаковых тел, поставленных в направлении оси Oz друг на друга. В качестве подобного тела выберем участок трубы ( $r_1 = 1$ ,  $r_2 = 2$ ,  $L_z = 1$ ). Считаем, что нижний торец нижнего тела закреплен по оси, к верхнему торцу верхнего тела приложено давление  $p_2 = 50$ , к внешней поверхности всех тел приложено давление  $p_1 = 10$ . В силу поставленных условий решение данной задачи для любого количества  $N$  тел должно давать такие же радиальные перемещения и такие же распределения напряжений, как и в задаче без контакта, приведенной в пункте 4.1.

В данной задаче для всех контактных поверхностей нет начального зазора, нет выхода из контакта, в проводимых расчетах использованы идентичные сетки. Поэтому если применить условие прилипания, то решение задачи будет совпадать с решением аналогичной задачи для единого тела, разбитого на  $N$  подобластей, с помощью МДО. Действительно, расчеты показали, что количество итераций для  $N = 2, 4, 8$  для методов Нейман-Дирихле и Нейман-Нейман получается таким же, как в таблицах 9 и 10 соответственно.

Перейдем к случаю, когда на контактных поверхностях задано условие скольжения без трения. В этом случае конечный результат получается таким же, как и для условия прилипания, но промежуточные результаты отличаются, поэтому отличается и итоговое количество итераций.

Рассмотрим метод Нейман-Дирихле. Чередование условий Неймана и Дирихле на контактных границах тел является таким же, как в случае одного тела на фиктивных границах подобластей. Значение итерационного параметра считалось постоянным  $\theta = 0.5$ . Как и раньше, решение локальных задач выполнялось строго последовательно, итерационный процесс продолжался до достижения заданного критерия уменьшения невязки общей системы уравнений для всех тел

$$\|\mathbf{r}^n\|_2 / \|\mathbf{r}^0\|_2 \leq \varepsilon_0.$$

В таблице 11 приведено количество итераций в зависимости от количества контактирующих тел и шага сетки.

**Метод Нейман-Дирихле: количество итераций в зависимости  
от количества тел и шага сетки**

Количество тел ( $N$ )	Шаг сетки, количество узлов		
	$h=0.1$	$h=0.05$	$h=0.025$
2 тела	18	18	18
4 тела	26	26	26
8 тел	39	39	39
16 тел	61	61	61

Как видно из сравнения таблицы 9 и таблицы 11, метод Нейман-Дирихле обладает сходными характеристиками при применении к рассмотренной контактной задаче и к задаче для единого тела. Количество итераций для контактной задачи меньше, чем в первой задаче. Метод является оптимальным, а количество внешних итераций при увеличении количества тел растет приблизительно как  $\sqrt{N}$ .

Проведенный анализ ошибок численного решения по сравнению с аналитическим показал, что для  $\varepsilon_0 = 10^{-5}$  ошибки по порядку величин совпадают с ошибками, приведенными в таблице 1.

Теперь рассмотрим применение к данной контактной задаче двухуровневого аддитивного метода Шварца ( $\alpha=0.5$ ). Разобьем расчетную область на следующие непересекающиеся подобласти  $\Omega_1, \dots, \Omega_M$  ( $M=N+1$ ). Подобласть  $\Omega_1$  соответствует нижней половине нижнего тела,  $\Omega_M$  соответствует верхней половине верхнего тела, для других случаев  $\Omega_i$  состоит из объединения верхней половины  $i$  тела и нижней половины  $i+1$  тела. Подобласть  $G_i$  получается объединением подобласти  $\Omega_i$  и дополнительных участков соседних подобластей  $\Omega_{i-1}$  и  $\Omega_{i+1}$  с размерами, задаваемыми выбранным коэффициентом относительного перекрытия (обычно 0.4). Для подобластей  $G_1, G_M$  решаются линейные задачи упругости, для остальных подобластей решаются задачи контакта двух упругих тел, причем на нижней поверхности нижнего тела и на верхней поверхности верхнего тела всегда заданы условия Дирихле. Все локальные задачи решаются независимо друг от друга. Для решения этих локальных контактных задач использован метод Нейман-Дирихле ( $\theta=0.5$ ), число внутренних итераций не превышало 5. Ячейки грубой сетки соответствуют подобластям  $\Omega_1, \dots, \Omega_M$ , на грубой сетке решается линейная задача упругости.

В таблице 12 приведено количество итераций в зависимости от количества контактирующих тел и шага сетки.

Таблица 12

**Двухуровневый аддитивный метод Шварца: количество итераций  
в зависимости от количества тел и шага сетки**

Количество тел ( $N$ )	Шаг сетки, количество узлов		
	$h=0.1$	$h=0.05$	$h=0.025$
2 тела	26	26	24
4 тела	28	28	28
8 тел	27	28	28
16 тел	27	27	27

Как видно из таблицы 12, количество внешних итераций слабо зависит от шага сетки и от количества контактирующих тел, поэтому предложенный метод можно считать оптимальным и масштабируемым. При этом количество итераций для 2 тел больше, чем при использовании стандартного метода Нейман-Дирихле, для 4 тел количество итераций для двух методов сопоставимо, а при бóльшем количестве тел при заданной точности  $\varepsilon_0 = 10^{-5}$  двухуровневый метод Шварца сходится быстрее.

В таблице 13 рассмотрена зависимость относительных ошибок численного решения по сравнению с аналитическим после проведения различного числа итераций, соответствующих различным значениям  $\varepsilon_0$  для расчета с 8 телами и шагом сетки  $h=0.025$ .

Таблица 13

**Двухуровневый аддитивный метод Шварца:  
ошибки численного решения ( $N = 8, h=0.025$ )**

$\varepsilon_0$	Количество итераций	Ошибки численного решения		
		$error \sigma_{rr}$	$error \sigma_{\varphi\varphi}$	$error \sigma_{zz}$
$10^{-2}$	9	$1.11 \cdot 10^{-2}$	$1.07 \cdot 10^{-3}$	$1.60 \cdot 10^{-3}$
$10^{-3}$	13	$1.13 \cdot 10^{-3}$	$3.21 \cdot 10^{-4}$	$1.17 \cdot 10^{-4}$
$10^{-4}$	18	$3.12 \cdot 10^{-4}$	$9.63 \cdot 10^{-5}$	$1.88 \cdot 10^{-5}$
$10^{-5}$	28	$2.73 \cdot 10^{-4}$	$3.47 \cdot 10^{-5}$	$1.38 \cdot 10^{-5}$
$10^{-6}$	47	$2.72 \cdot 10^{-4}$	$2.56 \cdot 10^{-5}$	$1.39 \cdot 10^{-5}$

Как видно из сравнения данных таблицы 1 и таблицы 13, ошибки, полученные с помощью двухуровневого аддитивного метода Шварца, для  $\varepsilon_0 = 10^{-6}$  близки к ошибкам, полученным при решении задачи для единого тела. В отличие от стандартного метода Нейман-Дирихле распределение радиальных и окружных напряжений устанавливается не сразу, а тоже меняется в процессе итерирования.

Таким образом, для рассмотренной тестовой задачи предложенный вариант двухуровневого аддитивного метода Шварца показал себя вполне работоспособным, поэтому он применен для решения более сложной задачи.

#### 4.3 Задача о контактном взаимодействии тел в тепловыделяющем элементе

Рассмотрим задачу, позволяющую моделировать ряд термомеханических эффектов, происходящих в тепловыделяющем элементе (ТВЭЛе) [8]. Он представляет собой трубу (оболочку), имеющую следующие характерные размеры: длина – 3-4 м, диаметр – 1 см, толщина – 1 мм. В трубу помещен столб из топливных таблеток (их количество достигает нескольких сотен). В ходе работы ТВЭЛа происходит нагрев таблеток до температуры около 1600 К. Контактное взаимодействие таблеток друг с другом и оболочкой оказывает существенное влияние на НДС ТВЭЛа.

Выполним моделирование выхода участка ТВЭЛа на номинальную мощность в осесимметричном приближении. Таблетки и оболочки считаются термоупругими, свойства материала таблетки соответствуют диоксиду урана, свойства материала оболочки соответствуют сплаву циркония.

Расчетная область включает в себя  $N$  таблеток и участок оболочки. Сначала во всей области решалась динамическая температурная задача с заданной постоянной линейной плотностью тепловыделения в таблетках, температура всей оболочки считалась равной 623 К, между боковыми поверхностями таблеток и внутренней поверхностью оболочки ставилось граничное условие 3 рода.

После выхода температуры на установившийся режим полученное температурное поле применялось для решения уравнений равновесия рассматриваемой конструкции со следующими граничными условиями: нижние торцы первой таблетки и оболочки закреплены в направлении оси  $Oz$ , на верхнем торце верхней таблетки задано давление  $p_1 = 50$  МПа, на внешней поверхности оболочки задано давление  $p_2 = 10$  МПа. На поверхности контактирующих тел поставлено условие скольжения без трения.

Использован двухуровневый аддитивный метод Шварца ( $\alpha = 0.5$ ). Расчетная область разбита на подобласти без перекрытия  $\Omega_1, \dots, \Omega_M$ ,  $M = N + 1$ . Подобласть  $\Omega_1$  является объединением нижней половины нижней таблетки и соответствующего ей участка оболочки,  $\Omega_M$  является объединением верхней половины верхней таблетки и соответствующего ей участка оболочки, для других случаев  $\Omega_i$  является объединением верхней половины  $i$  таблетки, нижней половины  $i+1$  таблетки и соответствующего им участка оболочки. Подобласть  $G_i$  получается объединением подобласти  $\Omega_i$  и дополнительных участков соседних подобластей  $\Omega_{i-1}$  и  $\Omega_{i+1}$  с размерами, задаваемыми выбранным коэффициентом относительного перекрытия (обычно 0.4). Для

подобластей  $G_i$ ,  $G_m$  решаются задачи контакта двух термоупругих тел (пара контактных поверхностей таблетка/оболочка), для остальных подобластей решаются задачи контакта трех термоупругих тел (пара контактных поверхностей таблетка/таблетка и две пары контактных поверхностей таблетка/оболочка). Все локальные задачи решаются независимо друг от друга. При решении задачи в подобласти  $G_i$  на торцевых поверхностях тел, соответствующих  $\partial G_i$ , всегда заданы условия Дирихле. Поэтому использован следующий вариант метода Нейман-Дирихле ( $\theta=0.5$ ): сначала решалась задача для нижней таблетки (на контактах таблетка/таблетка, таблетка/оболочка заданы условия Неймана), затем задача для верхней таблетки (на контакте таблетка/таблетка задано условие Дирихле, на контакте таблетка/оболочка – условие Неймана) и затем задача для участка оболочки (на контакте таблетка/оболочка задано условие Дирихле). В качестве начального приближения на первой внешней итерации ставилось нулевое контактное давление, число внутренних итераций не превышало 5.

Грубая сетка строилась в двух телах: одно тело соответствовало объединению всех таблеток без учета их фасок, второе тело совпадало с оболочкой. В радиальном направлении в каждом теле помещалась одна ячейка, в осевом направлении размер ячеек брался равным половине высоты таблетки. Для грубой сетки для каждого тела решалась линейная задача упругости, значения модуля Юнга эффективного материала в каждой ячейке определялись путем усреднения значений модуля Юнга в элементах основной сетки, которые попадали в рассматриваемую ячейку грубой сетки. Нижний торец каждого из двух тел считался закрепленным по оси, на внешней поверхности первого тела и на внутренней поверхности второго тела ставилось условие Дирихле для радиального перемещения. Значения приращений  $\Delta U_r$  в узлах грубой сетки получались путем усреднения приращений радиальных перемещений с предыдущей итерации в узлах основной сетки, расположенных на контактной границе таблетка/оболочка и относящихся к соответствующим ячейкам грубой сетки.

Можно выделить следующие особенности решаемой мультиконтактной задачи. Для каждой контактной пары таблетка/таблетка в результате температурного расширения происходит выход из контакта значительного количества узлов сетки. Данный процесс приводит к существенному увеличению количества внешних итераций, поэтому в проводимых расчетах введено ограничение, что из контакта могут выходить 2/3 элементов контактной поверхности, расположенных ближе к фаске таблетки. Из-за большой протяженности конструкции вдоль оси Oz топливные таблетки, особенно в верхней части столба, смещались относительно оболочки на расстояние в десятки или сотни ячеек сетки по сравнению со своим начальным положением (поверхностные сетки в контактных парах таблетка/оболочка всегда несогласованны). Поэтому требовалось постоянное отслеживание

взаимного расположения узлов сетки, расположенных на поверхностях контакта таблетка/оболочка, на каждой внешней итерации.

В таблице 14 приведено количество внешних итераций для различных значений  $\varepsilon_0$  (критерий сходимости такой же, как и для предыдущих задач) для различного количества таблеток в расчетной области для случая, когда в контактных парах таблетка/таблетка запрещен выход из контакта даже при возникновении растягивающих напряжений

Таблица 14

**Количество внешних итераций (шаг сетки в таблетке – 0.25, шаг сетки в оболочке – 0.125), условия скольжения**

Количество таблеток	Отношение нормы текущей невязки к норме начальной невязки глобальной системы уравнений		
	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$
4	12	17	22
10	13	17	21
50	12	16	21
100	12	16	21

В таблице 15 приведено количество внешних итераций для различных значений  $\varepsilon_0$  и различного количества таблеток в расчетной области для случая, когда в контактных парах таблетка/таблетка из контакта выходят 2/3 элементов

Таблица 15

**Количество внешних итераций (шаг сетки в таблетке – 0.25, шаг сетки в оболочке – 0.125), условия скольжения**

Количество таблеток	Отношение нормы текущей невязки к норме начальной невязки глобальной системы уравнений		
	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$
2	23	34	46
4	30	46	62
10	34	52	70
25	36	54	72
50	35	51	70
100	36	53	71

Из таблицы 15 видно, что при увеличении количества таблеток от 2 до 10 наблюдается увеличение количества итераций, но в дальнейшем данный процесс стабилизируется, увеличение количества таблеток вплоть до 100 не приводит к существенному изменению количества итераций.

В таблице 16 приведено количество итераций для случая, когда в расчетной области находятся 10 таблеток и используются разные сетки.

Таблица 16

**Количество внешних итераций для разных сеток (10 таблеток)**

Шаги сетки	Отношение нормы текущей невязки к норме начальной невязки глобальной системы уравнений		
	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$
$h_1=0.25, h_2=0.125$	34	52	70
$h_1=0.125, h_2=0.07$	30	46	62
$h_1=0.06125, h_2=0.035$	34	52	70

Из таблицы видно, что уменьшение шагов сетки не приводит к существенному изменению количества итераций.

Таким образом, предложенный метод по отношению к рассмотренной задаче можно с определенными оговорками считать оптимальным и масштабируемым.

Для большей наглядности приведем некоторые графики для расчета с 10 таблетками ( $h_1=0.125, h_2=0.07$ ). Координаты и перемещения на графиках нормированы на 1 мм, а напряжения – на 1 МПа. На рис. 1 приведен график распределения радиального перемещения, а на рис. 2 – распределения контактного давления в узлах, расположенных на внешней поверхности таблеток. Аналогичные графики для узлов, расположенных на внутренней поверхности оболочки, визуальны неотличимы от показанных (за исключением участков между фасками, где контакта не происходит). Из графика контактного давления видно, что оно является почти постоянным (около 80 МПа) вдоль большей части боковой поверхности каждой таблетки, но вблизи углов фасок находятся концентраторы напряжений. Значения давлений в этих зонах увеличиваются при измельчении сетки, но интегральная контактная сила, действующая на поверхность, остается неизменной.

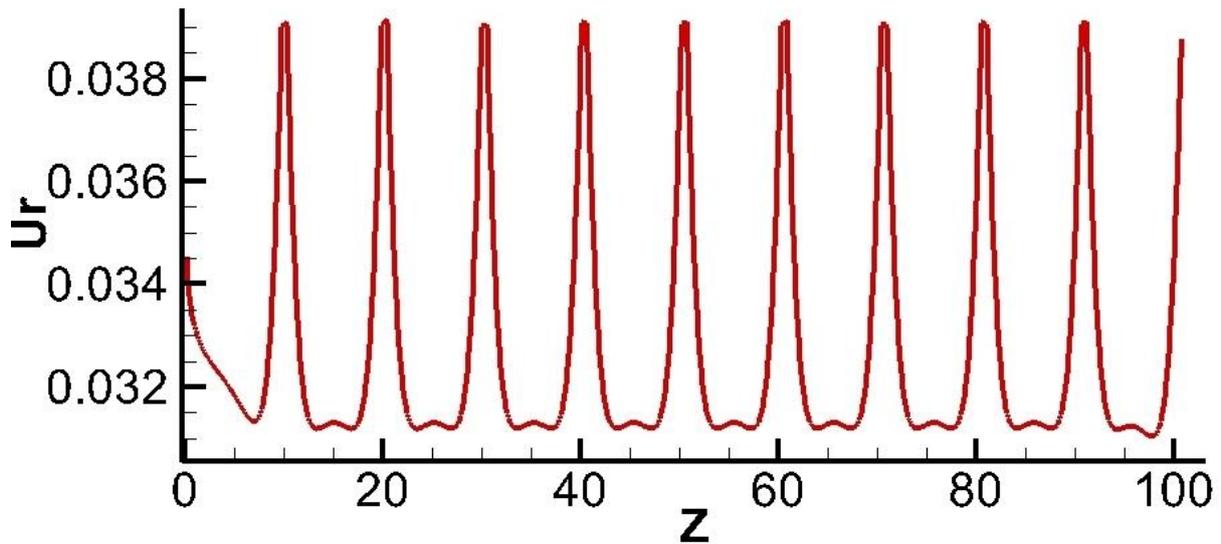


Рис. 1. Радиальные перемещения в узлах на внешней поверхности таблеток

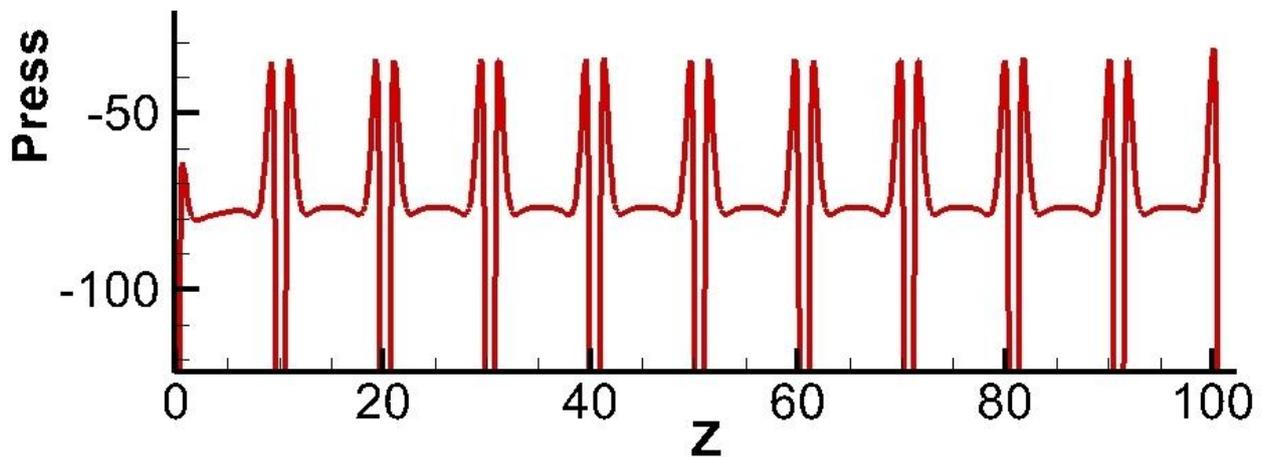


Рис. 2. Контактные давления в узлах на внешней поверхности таблеток

### Заключение

В работе описано несколько вариантов метода декомпозиции области и представлены результаты их применения для решения двумерной задачи нагружения участка упругой трубы давлением. Показано, что двухуровневый аддитивный метод Шварца обладает следующими привлекательными свойствами: в нем все локальные задачи решаются независимо друг от друга, количество внешних итераций не зависит от шага сетки (оптимальность метода) и от количества подобластей, на которое разбивается исходная область (масштабируемость метода). Данный метод обобщен на случай решения задачи с контактом столба тел. В этом случае при решении локальной задачи нужно учитывать наличие контакта между участками тел, расположенных в рассматриваемой подобласти. Для учета контакта использован метод Нейман-Дирихле, который является вариантом МДО без перекрытия. Представлены результаты применения двухуровневого аддитивного метода Шварца для

численного моделирования НДС участка твэла с учетом контакта топливных таблеток друг с другом и оболочкой. Задача решена в осесимметричной термоупругой постановке, количество таблеток в расчетной области варьировалось от 2 до 100. Расчеты показали, что предложенный метод в целом сохраняет свои свойства оптимальности и масштабируемости для данной задачи.

Авторы выражают глубокую благодарность безвременно ушедшему Игорю Васильевичу Станкевичу за плодотворные идеи и активное обсуждение различных методов решения контактных задач.

## Список литературы

- [1] Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. М.: Мир. 2001. 430 с.
- [2] Toselli A., Widlund O. Domain Decomposition methods – Algorithms and Theory. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag. 2005. 450 p.
- [3] Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989. 608 с.
- [4] Wriggers P. Computational Contact Mechanics. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag. 2006. 520 p.
- [5] Eck C., Wohlmuth B. Convergence of a contact- Neumann iteration for the solution of two-body contact problems // Mathematical models methods application science. 2003. V. 13. P. 1103-1118.
- [6] Bayada G., Sabil J., Sassi T. Neumann-Neumann domain decomposition algorithm for the Signorini problem // Applied Mathematics Letters. 2004. V 17. P. 1153-1159.
- [7] Цвик Л.Б. Принцип поочередности в задачах о сопряжении и контакте твердых деформируемых тел // Прикладная механика. 1980. Т. 16, № 1. С. 13-18.
- [8] Галанин М.П., Крупкин А.В., Кузнецов В.И., Лукин В.В., Новиков В.В., Родин А.С., Станкевич И.В. Математическое моделирование контактного взаимодействия системы термоупругих тел методом Шварца для многомерного случая // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2016. № 12(681). С. 9 - 20.
- [9] Бате К.-Ю. Методы конечных элементов. М.: Физматлит. 2010. 1024 с.
- [10] Bayada G., Sabil J., Sassi T. Convergence of a Neumann-Dirichlet algorithm for two-body contact problems with non local Coulomb's friction law // Mathematical Modeling and Numerical Analysis. 2008. V 42. P. 243-262.
- [11] Родин А.С. Решение задачи контакта двух упругих тел методом Шварца при использовании сеток с существенно отличающимися шагами // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2017. № 120. 28 с.

## Оглавление

1. Введение.....	3
2. Математическая постановка задачи.....	4
2.1 Методы Шварца .....	5
2.2 МДО без перекрытия .....	5
2.3 Задача контактного взаимодействия N тел.....	7
3. Вычислительная модель .....	9
3.1 Вычислительная модель для методов Шварца .....	10
3.2 Вычислительная модель для МДО без перекрытия .....	11
3.3 Вычислительная модель для контактной задачи .....	12
4. Результаты применения метода декомпозиции области.....	14
4.1. Задача нагружения упругой трубы давлением.....	14
4.2. Задача о контакте столба тел .....	21
4.3. Задача о контактном взаимодействии тел в тепловыделяющем элементе .....	24
Заключение.....	28