ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Орлов Ю.Н.

Уравнение эволюции функции Вигнера для линейных квантований

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

Ю.Н. Орлов

Уравнение эволюции функции Вигнера для линейных квантований

Москва — 2020

Орлов Ю.Н.

Уравнение эволюции функции Вигнера для линейных квантований

Для квантований, представляющих линейную суперпозицию интегральных преобразований, связывающих классический символ с матрицей квантового оператора, получено уравнение эволюции символа матрицы плотности. Это уравнение в общем случае зависит от характеристической функции квантования. На примере гармонического осциллятора показано различие стационарных функций Вигнера для квантований Вейля и Йордана. Рассмотрено ядро квантования, аппроксимирующее квантование Вейля.

Ключевые слова: квантование, функция Вигнера, матрица плотности

Orlov Yu.N.

Evolution equation for Wigner function for linear quantization

An arbitrary linear combination of the so-called tau-quantizations as integral transformations of classical symbol to quantum operator matrix is considered. The evolution equation for Wigner function is derived. In general case this equation depends on the characteristic function of quantization. The case of harmonic oscillator is considered for Weyl and Jordan quantizations.

Keywords: quantization, Wigner function, density matrix

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 19-71-30004.

Содержание

1. Введение

Функция Вигнера в традиционном понимании [1] – это символ Вейля матрицы плотности. В задачах квантовой статистики эта функция используется как квазивероятность в том смысле, что среднее значение квантового оператора получается посредством усреднения соответствующего классического символа в фазовом пространстве классической механики с функцией Вигнера, играющей роль функции распределения. Однако в общем случае эта функция всего лишь вещественна, а не неотрицательна и, кроме того, зависит от постоянной Планка, причем не всегда эта зависимость аналитическая. Тем не менее, удобство проведения вычислений в классическом фазовом пространстве представляет большую привлекательность по сравнению с комплексной матрицей плотности квантовой системы. Так, в работах [2, 3] изучалось томографическое представление квантовой механики с использованием функции Вигнера как аналога функции распределения. Исследовались также свойства функции Вигнера для различных квантовых систем [4, 5] и при различных правилах коммутации [6], то есть для систем, заданных в различных фазовых пространствах.

В большинстве задач квантовой механики рассматриваются относительно простые системы: совокупность нерелятивистских частиц, взаимодействующих с внешним полем или между собой через парный потенциал. Для таких систем квантовый оператор Гамильтона не зависит от правила квантования, то есть от расстановки некоммутирующих операторов в произведении, поскольку таких конструкций в классических механических системах обычно не возникает. Однако с развитием квантовой теории возникли две причины, по которым стало необходимо рассматривать квантовые уравнения в контексте выбора правила квантования. Во-первых, это математическая формализация перехода от классической механики к квантовой, начатая в работах Вейля [7], Борна, Йордана [8], фон Неймана [9] и других основоположников квантовой теории, в дальнейшем развитая в работах Березина [10, 11]. Во-вторых, актуальными стали вопросы квантования механических систем с потенциалом, зависящим не только от координат, но и от импульсов. Это так называемые слаборелятивистские системы с запаздыванием взаимодействия [12, 13, 14].

В этой связи возник интерес к квантовым уравнениям, записанным для некоторого параметрического класса квантований, чтобы определить возможную зависимость наблюдаемых от правила квантования. Такой подход был развит в работах [15, 16]. Выяснилось, что функция Вигнера зависит от правила квантования, однако детального исследования этой зависимости не проводилось. Были получены отдельные результаты [17, 18, 19] для так называемого тау-квантования в рамках построения эквивалентных по Чернову квантовых полугрупп.

В настоящей работе уравнение эволюции для функции Вигнера обобщается на случай произвольного линейного квантования. Этот результат оказалось возможным получить с помощью формулы обращения, связывающей матрицу квантового оператора с ее классическим символом при линейном квантовании. Рассматриваются также примеры решений стационарного уравнения для функции Вигнера в зависимости от квантования.

2. Линейные комбинации тау-квантований

Пусть $A(q,p)$ есть некоторая динамическая величина, заданная в фазовом пространстве R^2 классической гамильтоновой механики, q и p – обобщенные координата и импульс. Обозначим через $\hat{A}$ квантовый оператор, полученный при квантовании функции $A(q,p)$ и действующий в гильбертовом пространстве L функций ψ, реализованном как пространство $L_2(R)$. Функция $A(q,p)$ называется классическим символом оператора $\hat{A}$.

Среди множества различных правил соответствия между функциями и операторами будем рассматривать так называемое линейное квантование, когда связь между матрицей оператора и его символом устанавливается некоторым линейным преобразованием. Идея линейного квантования была сформулирована в работах Ф.А. Березина [10, 11], где использовалось соответствие между матрицей $\tilde{A}(x,y)$ оператора $\hat{A}$ и его классическим символом $A(q,p)$ в виде интегрального преобразования символа с ядром $K(q,p|x,y)$, называемым ядром квантования:

$$\tilde{A}(x,y)=\int A(q,p)K(q,p|x,y)dqdp. \tag{2.1}$$

Сам оператор $\hat{A}$ действует на элемент $\psi \in L$ по формуле

$$\hat{A}\psi(x)=\int \tilde{A}(x,y)\psi(y)dy. \tag{2.2}$$

Здесь интегрирование проводится от $-\infty$ до $+\infty$. Далее для краткости пределы интегрирования указываются только в случае, если они конечны. Как и все вообще операторные соотношения в квантовой механике, эти интегралы понимаются в смысле обобщенных функций.

В работе [15] было введено ядро так называемого τ-квантования:

$$K_\tau(q,p|x,y)=\frac{1}{2\pi\hbar}\delta(q-(1-\tau)x-\tau y)\exp[ip(x-y)/\hbar],\ \ \tau\in[0,1], \tag{2.3}$$

где $\hbar$ есть постоянная Планка.

При квантовании с ядром (2.3) фазовым переменным (обобщенным координате и импульсу) независимо от значения τ отвечают операторы

$$q \leftrightarrow \hat{q}=x, \quad p \leftrightarrow \hat{p}=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}. \tag{2.4}$$

Матрицу оператора, получаемую по формуле (2.1) с ядром квантования (2.3), будем обозначать $\tilde{A}_\tau(x,y)$. Из (2.3), (2.4) легко получить, что матрица оператора $\hat{q}$ имеет вид $\tilde{q}(x,y) = y\delta(x-y)$, а матрица оператора $\hat{p}$ имеет вид $\tilde{p}(x,y) = i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\delta(x-y)$.

Матрица же оператора, символ которого является произведением $A(q,p) = qp$, определена неоднозначно, поскольку оператор произведения зависит от того, в какой последовательности действуют некоммутирующие операторы сомножителей. Для формализации очередности действия операторов рассматриваются символы в виде произведения бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(q)$ и мономов p^m. Каждому из этих символов в отдельности отвечают операторы $\hat{\varphi} = \varphi(\hat{q})$ и $\hat{p}^m$.

Квантование, при котором все операторы $\hat{p}$ действуют после всех операторов $\hat{q}$, называется $\hat{p}\hat{q}$-квантованием. Квантование, при котором все операторы $\hat{q}$ действуют после операторов $\hat{p}$, называется $\hat{q}\hat{p}$-квантованием.

Оператор, получаемый при $\hat{q}\hat{p}$-квантовании символа $A(q,p) = \varphi(q)p^m$, имеет вид

$$\hat{A}_{qp} = (-i\hbar)^m\varphi(x)\frac{\partial^m}{\partial x^m}.$$

Если же мы применяем $\hat{p}\hat{q}$-квантование, то тому же самому символу отвечает оператор

$$\hat{A}_{pq} = (-i\hbar)^m\sum_{k=0}^{m}C_m^k\varphi^{(k)}(x)\frac{\partial^{m-k}}{\partial x^{m-k}}.$$

Из (2.1) и (2.3) получаем, что при τ-квантовании символу $\varphi(q)p^m$ отвечает оператор

$$A = q^n p^m \leftrightarrow \hat{A}_\tau = (i\hbar)^m\sum_{k=0}^{m}C_m^k\tau^k\varphi^{(k)}(x)\frac{\partial^{m-k}}{\partial x^{m-k}}, \qquad (2.5)$$

матрица которого имеет вид

$$\tilde{A}(x,y)_\tau = (i\hbar)^m\varphi((1-\tau)x+\tau y)\frac{\partial^m}{\partial y^m}\delta(x-y). \qquad (2.6)$$

Легко проверить, что выражение для оператора при $\hat{q}\hat{p}$-квантовании отвечает τ-квантованию со значением параметра $\tau = 0$, а $\hat{p}\hat{q}$-квантованию отвечает выбор ядра (2.3), в котором положено $\tau = 1$. Для τ-квантования связь между матрицами операторов и их символами дается формулой

$$\tilde{A}_\tau(x,y) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int A((1-\tau)x+\tau y, p)\exp(ip(x-y)/\hbar)dp\ . \qquad (2.7)$$

Среди τ-квантований существует единственное эрмитово квантование, которое получается при $\tau = 1/2$. В этом случае формула (2.3) определяет так называемое квантование Вейля. Другие варианты линейных эрмитовых квантований можно получить, например, с помощью линейной комбинации ядер вида (2.3), как это сделано в [15]. Такая комбинация может быть представлена в виде линейного интегрального преобразования ядра квантования (2.3) с некоторой обобщенной функцией $Q(\tau)$, обращающейся в ноль вне промежутка [0;1] и удовлетворяющей условию

$$\int_0^1 Q(\tau)d\tau = 1. \tag{2.8}$$

В результате симметризации ядра τ-квантования с функцией $Q(\tau)$ получается ядро квантования, которое представляется следующим образом:

$$K(q,p|x,y) = \int_0^1 Q(\tau)K_\tau(q,p|x,y)d\tau, \quad \widetilde{A}(x,y) = \int_0^1 Q(\tau)\widetilde{A}_\tau(x,y)d\tau. \tag{2.9}$$

Задавая различные функции симметризации $Q(\tau)$ ядер τ-квантований, получаем разные правила расстановки операторов $\hat{q}, \hat{p}$ в произведении вида $q^n p^m$. Например, применительно к символу $A(q,p) = \varphi(q)p^m$ результат квантования (2.9) имеет вид:

$$\hat{A} = (i\hbar)^m \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sigma_k \varphi^{(k)}(x) \frac{\partial^{m-k}}{\partial x^{m-k}}, \quad \sigma_k = \int_0^1 \tau^k Q(\tau)d\tau. \tag{2.10}$$

Величины σ_k будем называть моментами функции симметризации. Из (2.10) следует, что для задания вида оператора, отвечающего полиномиальному по импульсам классическому символу, достаточно указать моменты σ_k. Обобщая правило (2.10), будем считать, что символы, которые не имеют полиномиального вида, проквантованы с тем же правилом квантования, определяемым ядром (2.9), что и символ, отвечающий оператору (2.10).

Через моменты функции симметризации выражается характеристическая функция квантования:

$$X_Q(z) = \int_0^1 Q(\tau)e^{iz\tau}d\tau = \sum_{n=0}^\infty \sigma_n \frac{(iz)^n}{n!}. \tag{2.11}$$

Приведем функции симметризации для некоторых часто используемых эрмитовых квантований.

Квантование Вейля:

$$Q(\tau) = \delta\left(\tau - \frac{1}{2}\right), \quad \sigma_k = \frac{1}{2^k}, \quad X_Q(z) = e^{iz/2}. \tag{2.12}$$

Квантование Борна:

$$Q(\tau) = 1, \quad \sigma_k = \frac{1}{k+1}, \quad X_Q(z) = \frac{e^{iz} - 1}{iz}. \tag{2.13}$$

Квантование Йордана:

$$Q(\tau) = \frac{1}{2}(\delta(\tau) + \delta(\tau - 1)), \quad \sigma_k = \frac{1}{2}, k \geq 1; \quad X_Q(z) = \frac{1 + e^{iz}}{2}. \tag{2.14}$$

Таким образом, произвольное линейное квантование можно рассматривать как вероятностную смесь τ-квантований, причем «вероятности» могут быть и отрицательными: можно, например, взять два квантования Йордана и вычесть квантование Вейля. Характеристическая функция квантования для такого примера равна $X_Q(z) = e^{iz/2}\left(2ch(z/2)-1\right)$.

Пусть задано некоторое линейное эрмитово квантование. Оно определяется условием $Q(\tau) = Q(1-\tau)$. Отсюда следует, что моменты нулевого и первого порядка определены однозначно, а между моментами высших порядков существует связь, поскольку тогда

$$\sigma_n = \int_0^1 \tau^n Q(\tau) d\tau = \int_0^1 \tau^n Q(1-\tau) d\tau = \int_0^1 (1-\tau)^n Q(\tau) d\tau = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \tau^k Q(\tau) d\tau .$$

В результате получаем условие связи между моментами функции симметризации в виде:

$$\sigma_0 = 1, \quad \sigma_1 = \frac{1}{2}, \quad \sigma_{2k+1} = \sum_{n=0}^{2k+1} (-1)^n C_{2k+1}^n \sigma_n . \tag{2.15}$$

Заметим, что рекуррентная формула (2.15) родственна аналогичной формуле для чисел Бернулли [20, стр. 804]:

$$B_0 = 1, \; B_k = \sum_{n=0}^{k} B_n C_k^n, \; k \geq 1. \tag{2.16}$$

Отличие моментов функции симметризации от чисел Бернулли в том, что сумма в (2.15) содержит знакопеременный множитель. Это приводит к тому, что моменты четного порядка выше нулевого могут быть заданы произвольно, а моменты нечетного порядка выражаются через них. В частности:

$$\sigma_3 = \frac{1}{4}\left(-1+6\sigma_2\right), \quad \sigma_5 = \frac{1}{2}(1-5\sigma_2+5\sigma_4), \quad \sigma_7 = \frac{1}{8}(-17+84\sigma_2-70\sigma_4+28\sigma_6).$$

Для эрмитовых квантований и для неотрицательной функции симметризации $Q(\tau)$ можно определить минимальное и максимальное значения второго момента σ_2. Для этого рассмотрим сдвиг аргумента на $1/2$, т.е. введем $\nu = \tau - 1/2$. Тогда при вычислении σ_2 имеем следующую цепочку выражений:

$$\sigma_2 = \int_0^1 Q(\tau)\tau^2 d\tau = \int_{-1/2}^{1/2} Q\left(\nu+1/2\right)\cdot\left(\nu+1/2\right)^2 d\nu =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-1/2}^{1/2} Q\left(\nu+1/2\right) d\nu + \int_{-1/2}^{1/2} \nu Q\left(\nu+1/2\right) d\nu + \int_{-1/2}^{1/2} \nu^2 Q\left(\nu+1/2\right) d\nu.$$

Первый интеграл в правой части результирующего равенства равен нормировке функции симметризации, т.е. единице. Второй интеграл равен нулю в силу того, что интегрируется нечетное выражение по симметричным пределам. Третий интеграл неотрицателен в силу неотрицательности функции симметризации. Таким образом, доказано, что $\sigma_2 \geq \frac{1}{4}$. С другой стороны, поскольку на отрезке $[0;1]$ $\tau^2 \leq \tau$, то $\sigma_2 \leq \sigma_1 = \frac{1}{2}$. Таким образом, получаем, что $\frac{1}{4} \le \sigma_2 \le \frac{1}{2}$. Заметим, что граница снизу отвечает квантованию Вейля, а сверху – квантованию Йордана. Это ограничение, в свою очередь, позволяет найти границы изменения третьего момента: $\frac{1}{8} \le \sigma_3 \le \frac{1}{2}$. Естественно, эти границы также отвечают квантованиям Вейля и Йордана. Таким же способом, что и выше, аналогичное утверждение доказывается для моментов всех порядков. Тем самым квантования Вейля и Йордана – в определенном смысле предельные квантования, поскольку моменты других неотрицательных эрмитовых функций симметризации находятся между ними:

$$\frac{1}{2^n} \le \sigma_n \le \frac{1}{2}, \; n \ge 1. \tag{2.17}$$

3. Обращение ядра суперпозиции квантования

Известно [10], что для $\hat{q}\hat{p}$-квантования, $\hat{p}\hat{q}$-квантования, а также для квантования Вейля существует обратное преобразование, связывающее матрицу оператора с его символом. Обратное преобразование существует для любого τ-квантования. Именно, если связь между символом и матрицей оператора дается правилом квантования (2.1) с ядром (2.3), то для любого $\tau \in [0; 1]$ существует обратное преобразование, имеющее вид:

$$\begin{aligned} &A(q, p) = \int L_\tau(x, y|q, p)\tilde{A}_\tau(x, y)dxdy, \\ &L_\tau(x, y|q, p) = \delta(q - (1-\tau)x - \tau y)\exp[-ip(x-y)/\hbar]. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Формула (3.1) доказывается прямой подстановкой выражения для $\tilde{A}_\tau(x, y)$ из (2.1) в интеграл (3.1), понимаемый как преобразование Фурье обобщенных функций. Как и должно быть для прямого и обратного преобразований Фурье, ядро $L_\tau(x, y|q, p)$ связано с ядром $K_\tau(q, p|x, y)$ из (2.3) формулой

$$L_\tau(x, y|q, p) = 2\pi\hbar K_\tau^*(q, p|x, y), \tag{3.2}$$

где звездочка * означает комплексное сопряжение.

Однако для произвольной линейной комбинации τ-квантований с ядром вида (2.9) обратное преобразование ранее не рассматривалось. Это затрудняло исследование свойств квантовых статистических распределений, таких как функция Вигнера. В частности, в [16] было получено уравнение эволюции функции Вигнера для τ-квантования, но при усреднении полученного уравнения с функцией симметризации $Q(\tau)$ из (2.8), (2.9) оказалось невозможным трансформировать его в уравнение относительно усредненной функции Вигнера. Для этого требовалось провести обращение ядра квантования $K(q, p|x, y)$, определяемого формулой (2.9). В такой постановке формула (2.9) является интегральным уравнением первого рода относительно

$K(q,p|x,y)$. В настоящей работе строится обратное ядро для линейного квантования. Это построение основано на следующей теореме.

Теорема. Пусть связь между символом $A(q,p)$ и матрицей $\tilde{A}(x,y)$ оператора дается правилом квантования $\tilde{A}(x,y)=\int A(q,p)K(q,p|x,y)dqdp$, где ядро квантования определяется посредством (2.9) для некоторой функции симметризации $Q(\tau)$. Тогда существует обратное преобразование

$$A(q,p)=\int L(x,y|q,p)\tilde{A}(x,y)dxdy, \tag{3.3}$$

где ядро обратного преобразования имеет вид

$$L(x,y|q,p)=\int_0^1 S(\tau)L_\tau(x,y|q,p)d\tau, \tag{3.4}$$

причем характеристическая функция $X_S(z)=\int_0^1 S(\tau)e^{iz\tau}d\tau$, отвечающая функции симметризации обратных ядер τ-квантований (3.2), связана с характеристической функцией (2.11) $X_Q(z)=\int_0^1 Q(\tau)e^{iz\tau}d\tau$ для прямого ядра (2.3) τ-квантований условием

$$\mathrm{X}_S(z)\mathrm{X}_Q^*(z)=1. \tag{3.5}$$

Доказательство. Подставим в (3.3) выражения (2.1) и (2.9), определяющие $\tilde{A}(x,y)$. Тогда интеграл в (3.3) примет вид:

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\int_0^1 S(\tau)d\tau\int\delta(q-(1-\tau)x-\tau y)\exp[-ip(x-y)/\hbar]dxdy\cdot$$

$$\cdot\int_0^1 Q(\lambda)d\lambda\int\delta(\xi-(1-\lambda)x-\lambda y)\exp[i\eta(x-y)/\hbar]A(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

Введем новые переменные интегрирования $u=x-y, v=x+y$. В этих переменных $dxdy=dudv/2$, а аргументы у дельта-функций имеют вид $q+\tau u-(u+v)/2$ и $\xi+\lambda u-(u+v)/2$. Интеграл по $dv/2$ от первой дельта-функции дает выражение вида

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\int_0^1 S(\tau)d\tau\int\exp[-iu(p-\eta)/\hbar]du\int_0^1 Q(\lambda)d\lambda\int\delta(\xi-q+u(\tau-\lambda))A(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

Представим теперь оставшуюся дельта-функцию в виде интеграла Фурье:

$$\delta(\xi-q+u(\tau-\lambda))=\frac{1}{2\pi}\int e^{ik(\xi-q+u(\tau-\lambda))}dk.$$

Интегралы по $d\tau$ и $d\lambda$ дают соответствующие характеристические функции, так что получаем

$$\frac{1}{4\pi^2\hbar}\int e^{ik(q-\xi)-iu(p-\eta)/\hbar}A(\xi,\eta)\mathrm{X}_S(uk)\mathrm{X}_Q^*(uk)d\xi d\eta dkdu.$$

Используем теперь условие (3.5): $\mathrm{X}_S(z)\mathrm{X}_Q^*(z)=1$. Тогда интегрирования по dk и по du могут быть проведены независимо, так что получаем соответственно $2\pi\delta(q-\xi)$ и $2\pi\hbar\delta(p-\eta)$. В итоге оставшийся интеграл преобразуется к виду

$$\int A(\xi,\eta)\delta(q-\xi)\delta(p-\eta)d\xi d\eta = A(q,p).$$

Теорема доказана.

Легко проверяется, что для τ-квантования, когда $Q(\lambda)=\delta(\lambda-\tau)$, характеристическая функция равна $\mathrm{X}_Q(z)=e^{iz\tau}$, так что $\mathrm{X}_S(z)=\mathrm{X}_Q(z)$, как это и должно быть в соответствии с (3.5).

4. Моменты функции симметризации обратного ядра

Обозначим моменты обратной функции симметризации $S(\tau)$ в (3.4) через μ_n, так что

$$X_S(z)=\int_0^1 S(\tau)e^{iz\tau}d\tau=\sum_{n=0}^{\infty}\mu_n\frac{(iz)^n}{n!}. \tag{4.1}$$

Для полиномиальных символов моменты μ_n могут быть определены из уравнения (3.5), если известны моменты σ_n прямой функции симметризации (2.11). Записывая условие (3.5) совместно с (4.1) в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-iz)^k}{k!}\sigma_k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}\mu_n=1$$

и приравнивая в этом выражении коэффициенты при одинаковых степенях z, получаем треугольную систему уравнений, позволяющих последовательно выразить μ_k через σ_k:

$$\begin{gathered}\mu_0\sigma_0=1;\Rightarrow\mu_0=1;\\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\mu_{n-k}\sigma_k}{k!(n-k)!}=0,\ \ n\ge 1.\end{gathered} \tag{4.2}$$

В частности:

$$\mu_1=\sigma_1;\quad \mu_2=2\sigma_1^2-\sigma_2;\quad \mu_3=6\sigma_1^3-6\sigma_1\sigma_2+\sigma_3;\ \dots\ . \tag{4.3}$$

Интересно отметить, что обращение линейного квантования тесно связано с числами Бернулли. Как известно [20], числа Бернулли B_n являются коэффициентами разложения в ряд Тэйлора производящей функции

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{x^n}{n!}. \tag{4.4}$$

Рассмотрим обращение квантования Борна. Согласно (3.5) и (2.13), симметризация обратного ядра $S(\tau)$ имеет в этом случае характеристическую функцию $X_S(z)=\dfrac{-iz}{e^{-iz}-1}$. Из (4.4) следует, что она представляет собой производящую функцию чисел Бернулли, но с меняющимися знаками, так что для этого квантования

$$\mu_n = (-1)^n B_n,\ n \ge 0. \tag{4.5}$$

В действительности, поскольку отличны от нуля только четные числа Бернулли (кроме первого), то формула (4.5) касается только первого момента. Для остальных моментов имеем $\mu_n = B_n,\ n > 1$.

Большой практический интерес представляет также квантование Йордана (2.14). Для него моменты μ_n функции $S(\tau)$ в формуле обращения (3.4), (3.5) оказываются в некотором смысле двойственны числам Бернулли. Поскольку характеристическая функция для квантования Йордана есть $\mathrm{X}_Q(z) = \dfrac{1+e^{iz}}{2}$, то при обращении этого квантования получаем, что моменты μ_n соответствующей функции $S(\tau)$ имеют производящую функцию $\mathrm{X}_S(z) = \dfrac{2}{1+e^{-iz}}$. Из (4.2) тогда следует, что моменты μ_n удовлетворяют соотношению

$$\mu_n + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \mu_{n-k} = 0,\ n \ge 1. \tag{4.6}$$

Момент нулевого порядка равен единице $\mu_0 = 1$ (как и число Бернулли $B_0 = 1$); все моменты четного порядка $2k,\ k \ge 1$ равны нулю (все числа Бернулли с нечетными номерами $2k+1,\ k \ge 1$ равны нулю); моменты нечетного порядка $2n+1$ имеют знак $(-1)^n$ (числа Бернулли с четными номерами $2n$ имеют знак $(-1)^{n+1}$).

Приведем несколько первых ненулевых чисел μ_k, получаемых рекуррентно из системы (4.6) (это их точные значения):

$$\begin{gathered}\mu_0 = 1;\ \mu_1 = 0{,}5;\ \mu_3 = -0{,}25;\ \mu_5 = 0{,}5;\ \mu_7 = -2{,}125;\\ \mu_9 = 15{,}5;\ \mu_{11} = -172{,}75;\ \mu_{13} = 2730{,}5;\ \mu_{15} = -58098{,}0625.\end{gathered} \tag{4.7}$$

Отметим особенность статистической интерпретации формул обращения для квантований Борна и Йордана. Сами эти квантования представляют собой статистическую смесь τ-квантований с положительно определенной обобщенной плотностью вероятности $Q(\tau)$. Однако обратные преобразования к ним таковы, что функция $S(\tau)$ не может считаться обычной неотрицательной плотностью вероятности в силу того, что часть моментов этого «распределения» на отрезке $[0;1]$ равна нулю (Борн) или даже отрицательна (Йордан).

5. Связь между функциями от оператора и символами

Рассмотрим теперь вопрос о сопоставлении символа произведению операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ и, в более общем смысле, символа для функции от оператора. Поскольку функция от результата квантования символа и квантование функции от символа в общем случае являются различными операторами, необходимо понимать, какие действия с квантовыми операторами корректны. Пусть $\widetilde{A}(x,y)$ и $\widetilde{B}(x,y)$ – матрицы соответствующих операторов. Тогда оператору $\hat{C}=\hat{A}\hat{B}$ отвечает матрица $\widetilde{C}(x,y)=\int\widetilde{A}(x,z)\widetilde{B}(z,y)dz$. Согласно формулам (2.3) и (2.9) получаем, что

$$\widetilde{C}(x,y)=\frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\int A(q',p')B(q'',p'')e^{ip'(x-z)/\hbar+ip''(z-y)/\hbar}\cdot \qquad (5.1)$$
$$\cdot\delta(q'-\tau'z-(1-\tau')x)\delta(q''-\tau''y-(1-\tau'')z)Q(\tau')Q(\tau'')d\tau'd\tau''dq'dp'dq''dp''dz.$$

Возникают два вопроса. Какой символ отвечает оператору $\hat{C}$ при квантовании с функцией симметризации Q? При каком квантовании символа $A(q,p)B(q,p)$ получается оператор $\hat{C}=\hat{A}\hat{B}$, если сомножители проквантованы с функцией симметризации Q?

Ответ на первый вопрос дается применением формулы обращения (3.3), (3.5) к матрице $\widetilde{C}(x,y)$. В результате получаем

$$C(q,p)=\int A(q',p')B(q'',p'')\mathrm{X}_Q(k'(u-z))\overline{\mathrm{X}}_Q((k+k')z)\mathrm{X}_S(ku)\cdot$$
$$\cdot e^{ik(q-u)+ik'(q'-u)+i(k+k')(z-q'')-ipu/\hbar+ip'(u-z)/\hbar+ip''z/\hbar}\cdot \qquad (5.2)$$
$$\cdot dkdk'dudzdq'dp'dq''dp''/\left((2\pi\hbar)^2(2\pi)^2\right).$$

Отсюда следует, что формальный символ, отвечающий произведению операторов или, в более общем случае, функции от оператора, не имеет классического физического смысла, поскольку содержит зависимость от выбранного правила квантования, о каковом классическому символу «знать не положено».

В относительно простых случаях полиномиальных символов вопрос о рассматриваемом соответствии сводится к определению конечного числа моментов функции симметризации согласно формуле (4.3).

Например, пусть $A(q,p)=qp$. При некотором линейном квантовании ему отвечает оператор $\hat{A}=-i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial x}+\sigma_1\right)$. Квадрат этого оператора, как легко проверить, имеет вид

$$\hat{B}=\hat{A}^2=-\hbar^2\left(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+(1+2\sigma_1)x\frac{\partial}{\partial x}+\sigma_1^2\right).$$

Найдем квантование, при котором этому оператору отвечает символ $B(q,p)=A^2(q,p)=q^2p^2$. Пусть ν_k – моменты искомой прямой функции симметризации. Тогда при квантовании символа q^2p^2 получаем

$$\hat{B}=-\hbar^2\left(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+4\nu_1 x\frac{\partial}{\partial x}+2\nu_2\right).$$

Приравнивая в двух этих выражениях для оператора $\hat{B}$ коэффициенты при одинаковых мономах $x^k \partial^m / \partial x^m$, получаем явные выражения для моментов ν_k через σ_k: $4\nu_1 = 1 + 2\sigma_1$, $2\nu_2 = \sigma_1^2$. Так можно поступить для мономов любого порядка, т.е. для таких символов задача о квантовании степени монома имеет решение. Однако если рассмотреть более сложный оператор в виде линейной комбинации данных операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ и поставить задачу о нахождении квантования, например, символа $\alpha qp + \beta q^2 p^2$ с заданными коэффициентами α и β так, чтобы получался оператор $\alpha\hat{A} + \beta\hat{A}^2$, то решение будет менее осмысленным. Из тождественного равенства

$$-i\alpha\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial x} + \sigma_1\right) - \beta\hbar^2\left(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (1+2\sigma_1)x\frac{\partial}{\partial x} + \sigma_1^2\right) \equiv$$

$$\equiv -i\alpha\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial x} + \nu_1\right) - \beta\hbar^2\left(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 4\nu_1 x\frac{\partial}{\partial x} + 2\nu_2\right)$$

находим, что

$$\nu_1 = \frac{1+2\sigma_1}{4},\ \nu_2 = \frac{\sigma_1^2}{2} + \frac{2i\alpha}{8\beta\hbar}(2\sigma_1 - 1).$$

Отсюда следует, во-первых, что ν_2 зависит от $\hbar$, чего не должно быть для линейных квантований, и, во-вторых, что моменты вероятностной меры комплексны, что также не предполагалось. В данном конкретном случае эти «неправильные» зависимости исчезают при $\sigma_1 = 1/2$, т.е. для эрмитовых квантований. Но для мономов степени выше двух в общем случае устранить эти несоответствия не удается. Например, если добавить в рассмотрение третью степень оператора $\hat{A}$, т.е. проквантовать символ $\alpha qp + \beta q^2 p^2 + \gamma q^3 p^3$ так, чтобы получался оператор $\alpha\hat{A} + \beta\hat{A}^2 + \gamma\hat{A}^3$, то выясняется, что тогда должно быть $\sigma_1 = 1/2$, $\nu_1 = 1/2$, $\nu_2 = 17/72$, а $\nu_3 = 1/48 - i\beta/(27\gamma\hbar)$. Теперь уже момент ν_3 зависит от $\hbar$ при любом квантовании. Более того, при $\hbar \to 0$ для него не существует конечного предела.

Рассмотрим другой пример. Найдем, при каком квантовании квадрату оператора Гамильтона гармонического осциллятора отвечает квадрат символа гамильтониана. Гамильтониан осциллятора имеет вид $H(q,p) = \frac{q^2}{2} + \frac{p^2}{2}$. При любом квантовании ему отвечает оператор $\hat{H} = \frac{x^2}{2} - \frac{\hbar^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Квадрат оператора $\hat{H}$ имеет вид

$$\hat{A} = \hat{H}^2 = \frac{x^4}{4} - \frac{\hbar^2}{2}\left(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x\frac{\partial}{\partial x} + 1\right) + \frac{\hbar^4}{4}\frac{\partial^4}{\partial x^4}.$$

Этот последний оператор зависит от правила квантования, если рассматривать его как результат квантования соответствующего классического символа. Согласно формуле (2.10) получаем, что теперь квантуется символ

$$A(q,p) = H^2(q,p) + \hbar^2\left(\sigma_2 - \frac{1}{2}\right).$$

Таким образом, при любом эрмитовом квантовании, отличном от квантования Йордана, символ оператора квадрата энергии гармонического осциллятора не имеет классического смысла, так как содержит постоянную Планка. Для куба гамильтониана подобрать подходящее квантование уже не удается, поскольку для получения $\hat{H}^3$ требуется проквантовать символ

$$A(q,p) = H^3(q,p) + \frac{7+18\sigma_2}{4}\hbar\left(p^2 - q^2\right),$$

который при положительном σ_2 всегда содержит зависимость от $\hbar$.

Приведенные примеры показывают, что в общем случае не существует линейного квантования с неотрицательной функцией симметризации, которое переводило бы функцию от некоторого заданного символа в оператор, представляемый функцией от оператора, которому отвечает данный символ.

6. Уравнение эволюции функции Вигнера

Используем результат п.3 для придания замкнутой формы уравнению эволюции функции Вигнера для линейного квантования. Для квантования Вейля уравнение эволюции функции Вигнера было получено Мойалом [21]. Здесь мы рассмотрим более общий случай симметризации.

Обозначим через $\tilde{\rho}(x,y)$ матрицу оператора плотности. Среднее значение оператора $\hat{A}$ в состоянии $\hat{\rho}$ определяется по формуле

$$\left\langle \hat{A} \right\rangle = Tr\hat{\rho}\hat{A} = \int \tilde{\rho}(x,y)\tilde{A}(y,x)dxdy. \qquad (6.1)$$

Если подставить в (6.1) формулу (2.9) для матрицы $\tilde{A}(x,y)$, то получаем

$$\left\langle \hat{A} \right\rangle = \int W(q,p)A(q,p)dqdp, \qquad (6.2)$$

где введена функция $W(q,p)$, называемая функцией Вигнера [1]:

$$W(q,p) = \int K(q,p|y,x)\tilde{\rho}(x,y)dxdy = \int_0^1 W_\tau(q,p)Q(\tau)d\tau, \qquad (6.3)$$

$$W_\tau(q,p) = \int K_\tau(q,p|y,x)\tilde{\rho}(x,y)dxdy. \qquad (6.4)$$

Из вида ядра квантования (2.3), (2.9) с учетом его связи (3.2) с обратным ядром следует, что

$$K(q,p|y,x) = K^*(q,p|x,y) = \frac{1}{2\pi\hbar}L(x,y|q,p).$$

Тогда формула (6.3) имеет следующую трактовку: функция Вигнера с точностью до множителя $1/(2\pi\hbar)$ является символом матрицы плотности. Из анализа п. 5 следует, что этот символ не является классическим, то есть функция Вигнера содержит постоянную Планка и зависит от квантования.

Как уже говорилось выше, в работе [16] уравнение эволюции было получено только для функции $W_\tau(q,p)$, то есть для τ-квантования, а эволюция полной функции (6.3) не могла быть записана в замкнутой форме.

Используя формулу обращения (3.3), получаем представление матрицы плотности через функцию Вигнера:

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(x,y) &= \int W(q,p)L(y,x|q,p)dqdp = \\ &= \int_0^1 S(\tau)d\tau\int W(q,p)L_\tau(y,x|q,p)dqdp.\end{aligned} \tag{6.5}$$

Выведем теперь уравнение эволюции функции Вигнера (6.3). Зависящие от времени матрицу плотности и функцию Вигнера будем обозначать теми же символами, но с добавлением временного аргумента. Отправной точкой является квантовое уравнение Лиувилля [22], которое при заданном гамильтониане $\hat{H}$ имеет вид $i\hbar\dfrac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H},\hat{\rho}]$. В терминах матричных элементов это уравнение представляется разностью интегралов:

$$\begin{aligned}i\hbar\frac{\partial\tilde{\rho}(x,y,t)}{\partial t} &= \int\left(\tilde{H}(x,z)\tilde{\rho}(z,y,t) - \tilde{H}(z,y)\tilde{\rho}(x,z,t)\right)dz = \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar}\int_0^1 Q(\tau)\int H\left(\tau z + (1-\tau)x, p\right)\tilde{\rho}(z,y,t)e^{ip(x-z)/\hbar}dzdpd\tau - \\ &- \frac{1}{2\pi\hbar}\int_0^1 Q(\tau)\int H\left(\tau y + (1-\tau)z, p\right)\tilde{\rho}(x,z,t)e^{ip(z-y)/\hbar}dzdpd\tau.\end{aligned} \tag{6.6}$$

Дифференцируя (6.3) по t и подставляя вместо $i\hbar\partial\tilde{\rho}(x,y,t)/\partial t$ правую часть уравнения Лиувилля (6.6), получаем:

$$\begin{aligned}i\hbar\frac{\partial W(q,p,t)}{\partial t} &= \int K(q,p|y,x)\left(\tilde{H}(x,z)\tilde{\rho}(z,y,t) - \tilde{H}(z,y)\tilde{\rho}(x,z,t)\right)dxdydz = \\ &= \int\left(U(q,p;q',p';q'',p'') - V(q,p;q',p';q'',p'')\right)H(q',p')W(q'',p'',t)dq'dp'dq''dp'',\end{aligned} \tag{6.7}$$

где

$$\begin{aligned}U(q,p;q',p';q'',p'') &= \int K(q,p|y,x)K(q',p'|x,z)L(y,z|q'',p'')dxdydz, \\ V(q,p;q',p';q'',p'') &= \int K(q,p|y,x)K(q',p'|z,y)L(z,x|q'',p'')dxdydz.\end{aligned} \tag{6.8}$$

Интегралы в (6.8) преобразуются с учетом (3.4), (3.5) следующим образом.

Сначала дельта-функции, входящие в ядра квантований (2.3) и (3.2), представляются в виде интегралов Фурье:

$$\delta\left(q-(1-\tau)y-\tau x\right) = \frac{1}{2\pi}\int e^{ik\left(q-(1-\tau)y-\tau x\right)}dk.$$

Для каждой из функций U и V получается трехкратный интеграл такого вида в дополнение к уже имеющимся.

Затем делается замена переменных $u = x - y, v = x + y, z' = z - x$. После этого проводится интегрирование по аргументам трех функций симметризации, что приводит к следующим выражениям:

$$U(q,p;q',p';q'',p'') = \int \frac{X_Q^*(su)X_Q(-s'z')}{X_Q^*(-s''(u+z'))} \frac{d(v/2)dudz'}{(2\pi\hbar)^2} \frac{dsds'ds''}{(2\pi)^2} \cdot$$
$$\cdot e^{is(q-v/2+u/2)+is'(q'-v/2-u/2)+is''(q''-v/2+u/2)-ipu/\hbar-ip'z'/\hbar+ip''(z'+u)/\hbar}; \qquad (6.9)$$
$$V(q,p;q',p';q'',p'') = \int \frac{X_Q^*(su)X_Q(s''(u+z'))}{X_Q^*(s'z')} \frac{d(v/2)dudz'}{(2\pi\hbar)^2} \frac{dsds'ds''}{(2\pi)^2} \cdot$$
$$\cdot e^{is(q-v/2+u/2)+is'(q'-v/2-u/2-z')+is''(q''-v/2-u/2-z')-ipu/\hbar-ip'z'/\hbar+ip''(z'+u)/\hbar}.$$

Интегрирование каждого из выражений в (6.9) по $dv/2$ приводит к дельта-функции $2\pi\delta(s+s'+s'')$, что позволяет провести интегрирование по ds''. Таким образом, уравнение эволюции функции Вигнера для линейного квантования имеет весьма громоздкий вид и зависит от правила квантования. Эта зависимость входит в виде трех характеристических функций. Собственно эволюция определяется разностью $U - V$ в (6.7). Дальнейшее преобразование в (6.7), (6.8) проводится переходом к Фурье-образу для функции Гамильтона:

$$H(q',p') = \int H_{k\omega} e^{-ikq'-i\omega p'} dkd\omega. \qquad (6.10)$$

Подставляя (6.10) в (6.7), получаем с учетом (6.9) после интегрирования по $dq'dp'$ уравнение эволюции функции Вигнера, где интегральная часть представлена 6-кратным интегралом. Кратность интегралов можно уменьшить на четыре, если перейти к Фурье-образу $\Lambda(\xi,\eta,t)$ функции Вигнера по формуле:

$$\Lambda(\xi,\eta,t) = \int W(q,p,t) e^{-i\xi q + i\eta p} dqdp. \qquad (6.11)$$

Тогда получаем после преобразований Фурье дельта-функций выражение:

$$\frac{i\hbar}{X_Q^*(\hbar\xi\eta)} \frac{\partial\Lambda(\xi,\eta,t)}{\partial t} = \int \frac{X_Q(\hbar k\omega)e^{-i\hbar k\eta}}{X_Q^*(\hbar(\xi+k)(\eta-\omega))} H_{k,\omega}\Lambda(\xi+k,\eta-\omega,t)dkd\omega -$$
$$- \int \frac{X_Q(\hbar k\omega)e^{i\hbar\xi\omega}}{X_Q^*(\hbar(\xi+k)(\eta-\omega))} H_{k\omega}\Lambda(\xi+k,\eta-\omega,t)dkd\omega.$$

Удобно вместо Фурье-образа функции Вигнера ввести функцию

$$F(\xi,\eta,t) = \Lambda(\xi,\eta,t) / X_Q^*(\hbar\xi\eta), \qquad (6.12)$$

а вместо Фурье-образа гамильтониана – функцию

$$G(k,\omega) = X_Q(\hbar k\omega) H_{k\omega}. \qquad (6.13)$$

Тогда получаем более компактную окончательную запись обобщения уравнения Мойала на произвольное линейное квантование вида (2.9):

$$i\hbar \frac{\partial F(\xi,\eta,t)}{\partial t} = \int \left(e^{-i\hbar k\eta} - e^{i\hbar\xi\omega}\right) G(k,\omega) F(\xi+k,\eta-\omega,t) dkd\omega. \qquad (6.14)$$

Традиционно уравнение Мойала записывают для квантования Вейля, хотя система может быть проквантована и иным способом. Это уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial W(q,p,t)}{\partial t} = \\ = \frac{i}{\hbar}\int H_{k\omega} e^{ikq+i\omega p}\left(W\left(q+\frac{\hbar\omega}{2}, p-\frac{\hbar k}{2}, t\right) - W\left(q-\frac{\hbar\omega}{2}, p+\frac{\hbar k}{2}, t\right)\right) dk d\omega. \tag{6.15}$$

Легко проверить, что для квантования Вейля уравнения (6.15) и (6.14) совпадают. Действительно, переходя к Фурье-образу функции Вигнера в (6.15), получаем уравнение

$$\hbar\frac{\partial\Lambda(\xi,\eta,t)}{\partial t} = -\int H_{k\omega}\Lambda(\xi+k,\eta-\omega,t)\sin(\hbar(\xi\omega+k\eta)/2)dkd\omega, \tag{6.16}$$

с которым совпадает уравнение (6.14) с учетом (6.12), (6.13) и (2.12).

Для других линейных квантований вида (2.9) уравнение эволюции функции Вигнера существенно отличается от (6.16). Однако подчеркнем, что отличие связано не с физикой квантования гамильтониана или иных наблюдаемых, а вытекает из математического определения функции Вигнера (6.3), которая сама по себе зависит от квантования, даже если оператор Гамильтона от него не зависит.

Дальнейший анализ зависит от конкретного вида гамильтониана, определяющего интегральное ядро в (6.14). Если рассматривается частица единичной массы с импульсом p в поле с потенциалом $U(q)$, то $H(q,p) = \frac{p2}{2} + U(q)$, и тогда $H_{k\omega} = -\frac{1}{2}\delta(k)\delta''(\omega) + \delta(\omega)U_k$. Для этой модели уравнение (6.14) принимает вид:

$$\frac{\partial\Lambda(\xi,\eta,t)}{\partial t} + \xi\frac{\partial\Lambda(\xi,\eta,t)}{\partial\eta} - \frac{i\hbar}{2}\xi^2\Lambda(\xi,\eta,t)\cdot\left(1-2i\frac{X_Q'^*(\hbar\xi\eta)}{X_Q^*(\hbar\xi\eta)}\right) = \\ = -\frac{i}{\hbar}X_Q^*(\hbar\xi\eta)\int\left(X_Q(-\hbar k\eta)e^{-i\hbar\eta k} - 1\right)U_k\frac{\Lambda(\xi+k,\eta,t)}{X_Q^*(\hbar(\xi+k)\eta)}dk. \tag{6.17}$$

Из (6.17) следует, что в общем случае произвольного линейного квантования левая (переносная) часть уравнения содержит слагаемое с мнимым источником. Это слагаемое отсутствует только в том случае, если скобка с логарифмической производной характеристической функции квантования равна нулю, т.е. тогда, когда $2iX'^*(z) = X^*(z)$. Это уравнение имеет общее решение $X^*(z) = const\cdot e^{-iz/2}$. Отсюда и из (2.11), (2.12) следует, что только для квантования Вейля член с источником обращается в ноль.

7. Гармонический осциллятор

Различия между квантованиями в уравнении (6.17) рассмотрим на примере гармонического осциллятора. Для него $U_k = -\frac{1}{2}\delta''(k)$, так что (6.17) переходит в уравнение

$$\begin{gathered}\frac{\partial\Lambda(\xi,\eta,t)}{\partial t} + \xi\frac{\partial\Lambda(\xi,\eta,t)}{\partial\eta} - \eta\frac{\partial\Lambda(\xi,\eta,t)}{\partial\xi} = \\ = \frac{i\hbar}{2}\left(\xi^2 - \eta^2\right)\Lambda(\xi,\eta,t)\left(1 - 2i\frac{X_Q'^*(\hbar\xi\eta)}{X_Q^*(\hbar\xi\eta)}\right).\end{gathered} \tag{7.1}$$

Найдем стационарное решение уравнения (7.1) как сумму частного решения и общего однородного решения. Общее решение однородного уравнения (7.1) при условии $\frac{\partial\Lambda}{\partial t} = 0$ представляет собой произвольную дифференцируемую функцию от суммы квадратов аргументов $g\left(\xi^2/2 + \eta^2/2\right)$. Частное решение этого уравнения относительно функции $w = \ln\Lambda(\xi,\eta)$ есть $\frac{1}{2}i\hbar\xi\eta + \ln X_Q^*(\hbar\xi\eta)$. В результате получаем стационарную функцию Вигнера (вернее, ее образ Фурье) для гармонического осциллятора:

$$\Lambda(\xi,\eta) = e^{i\hbar\xi\eta/2}X_Q^*(\hbar\xi\eta)\cdot\exp\left(g\left(\xi^2/2 + \eta^2/2\right)\right). \tag{7.2}$$

Множитель перед экспонентой от функции $g\left(\xi^2/2 + \eta^2/2\right)$ в (7.2) отвечает выбору симметризации в правиле квантования. Этот множитель равен единице только тогда, когда $X_Q^*(z) = e^{-iz/2}$, то есть для квантования Вейля. В остальных случаях получаем решение с источником квазивероятности.

Например, для квантования Йордана (2.14) решение (7.2) имеет вид:

$$\Lambda(\xi,\eta) = \cos\left(\frac{\hbar}{2}\xi\eta\right)\cdot\exp(g). \tag{7.3}$$

Множитель с косинусом в (7.3) приводит к тому, что функция Вигнера для гармонического осциллятора становится знакопеременной. Интересно выяснить, как меняется эта функция, если начинать сближать дельта-функции при квантовании (2.14) к середине отрезка [0;1], т.е. вместо квантования Йордана использовать квантование со сдвигом на $\pm a$ от точки середины отрезка $\tau = 1/2$:

$$Q(\tau) = \frac{1}{2}\left(\delta(\tau - a - 1/2) + \delta(\tau + a - 1/2)\right), \quad X_Q(z) = e^{iz/2}\cos(az). \tag{7.4}$$

Для этого квантования вместо (7.3) получаем решение вида:

$$\Lambda(\xi,\eta) = \cos(a\hbar\xi\eta)\cdot\exp(g). \tag{7.5}$$

Как и должно быть, при $a \to 0$ получаем из (7.5) результат для квантования Вейля, но надо заметить, что сходимость не является равномерной по $\xi\eta$ при больших значениях $\xi\eta$, т.е. при малых значениях qp, что актуально именно в квантовой области. Следовательно, при сколь угодно малых значениях параметра $|a|$ функция (7.5) всегда будет неположительной. Таким образом, модель симметрично сближающихся дельта-функций имеет свойства, принципиально отличающиеся от свойств квантования Вейля, и потому не может служить для его аппроксимации. Необходимость же в такой аппроксимации возникает потому, что в физике дельта-функции реализуются не точно, а в виде «шапочки», т.е. несколько «размазаны».

Рассмотрим тогда вместо набора дельта-функций модель с непрерывным «размазыванием» носителя функции симметризации по всему отрезку [0;1]. Примером такого размазывания является биноминальное квантование, задаваемое следующей симметризацией:

$$Q(\tau) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\left[\tau(1-\tau)\right]^n, \ \sigma_k = \frac{(2n+1)!(n+k)!}{n!(2n+k+1)!} \to \frac{1}{2^k}, \ n \to \infty. \qquad (7.6)$$

Как следует из предельных значений моментов, такая аппроксимация в слабом смысле сходится к квантованию Вейля. Для симметризации (7.6) характеристическая функция квантования выражается через функцию Бесселя:

$$\begin{aligned} X_Q(z) &= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2 2^{2n}} e^{iz/2} \int_0^1 \left(1-t^2\right)^n \cos(zt/2)dt = \\ &= \frac{(2n+1)!}{n!} e^{iz/2} \sqrt{\pi} z^{-n-1/2} J_{n+1/2}(z/2) = \qquad (7.7) \\ &= \frac{(2n+1)!}{n!} e^{iz/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{(m+n)!}{(2m+2n+1)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m} \equiv e^{iz/2} f_n(z). \end{aligned}$$

Тогда соответствующее стационарное решение (7.2) имеет вид

$$\Lambda(\xi,\eta) = f_n(\hbar\xi\eta)\cdot\exp(g). \qquad (7.8)$$

При $n \to \infty$ имеем $f_n(z) \to 1$, но функция $f_n(z)$, пропорциональная функция Бесселя, также осциллирующая, как и в решении (7.5). Поэтому функциональная последовательность, отличная от нуля на всем отрезке [0;1], столь же не подходит для аппроксимации квантования Вейля, как и совокупность дельта-функций.

Более адекватным представляется треугольное приближение функции симметризации с уменьшающимся носителем. Пусть

$$Q(\tau) = \begin{cases} \dfrac{\tau - 1/2 + a}{a^2}, \ 1/2 - a \le \tau \le 1/2; \\ \dfrac{1/2 + a - \tau}{a^2}, \ 1/2 < \tau \le 1/2 + a; \\ 0, \ |\tau - 1/2| > a. \end{cases} \qquad (7.9)$$

Моменты этого распределения равны следующим величинам:

$$\sigma_n(a)=\int\limits_{1/2-a}^{1/2+a}\tau^n Q(\tau)d\tau=\frac{1}{2^n(n+1)(n+2)}\sum_{k=2}^{n+2}C_{n+2}^k\left(1+(-1)^k\right)(2a)^{k-2}. \qquad (7.10)$$

Поскольку $\lim\limits_{a\to 0}\sigma_n(a)=2^{-n}$, то такое распределение также аппроксимирует квантование Вейля. Его характеристическая функция равна

$$X_Q(z)=e^{iz/2}\frac{\sin^2(az/2)}{(az/2)^2}. \qquad (7.11)$$

Следовательно, решение (7.2) в этом случае принимает вид

$$\Lambda(\xi,\eta)=\frac{\sin^2(a\hbar\xi\eta/2)}{(a\hbar\xi\eta/2)^2}\cdot\exp\left(g\left(\xi^2/2+\eta^2/2\right)\right) \qquad (7.12)$$

и является неотрицательным, в отличие от решений (7.5) и (7.8). Тем самым оно сохраняет вероятностную интерпретацию и показывает, что если квантование Вейля физически реализовалось в виде «слабо размазанной» дельта-функции, то парадоксов с отрицательной квазивероятностью не возникает. Сходимость при $a\to 0$ к решению для квантования Вейля, естественно, неравномерна.

8. Заключение

В работе получены три результата.

Первый относится к связи между символами и матрицами операторов при линейном квантовании. Для ядра квантования $K(q,p|x,y)$, представляющего суперпозицию τ-квантований, выведена формула обращения, которая определяет обратное ядро $L(x,y|q,p)$, связывающее матрицу оператора с его символом при заданном линейном квантовании.

Эта формула позволила получить второй результат: для произвольного линейного квантования было получено обобщение уравнения Мойала для функции Вигнера. В частности, получены уравнения эволюции функции Вигнера для квантования Йорадана и различных аппроксимаций квантования Вейля. Показано, что для линейных квантований только квантование Вейля не содержит источника квазивероятности в стационарном решении.

Третий результат состоит в построении аппроксимации квантования Вейля, которая имеет неотрицательную функцию Вигнера для стационарного решения в случае гармонического осциллятора.

Таким образом, описание эволюции квантовой системы в терминах классического фазового пространства приводит к ряду математических артефактов, которые затрудняют физическое понимание. Тем не менее функция Вигнера имеет определенные технические удобства использования по сравнению с матрицей плотности. В этой связи представляется важным исследовать влияние аппроксимации квантования Вейля на наблюдаемые квантовые величины, чтобы оценить, в какой мере дельта-функция является подходящей идеализацией для описания правила квантования.

Литература

1. Wigner E.P. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium // Phys. Rev., 1932. V.40. P.749.
2. Mancini S., Man’ko V.I., Tombesi P. Different realizations of the tomographic principle in quantum state measurement // J. of Modern Optics, 1997. V. 44. Nos. 11-12. P. 2281-2292.
3. Mancini S., Man’ko V.I., Tombesi P. Classical-Like Description of Quantum Dynamics by Means of Symplectic Tomography. // Found. of Phys., 1997. V. 27. No. 6. P. 801-824.
4. Nasiri S., Bahrami S. Reality of the Wigner functions and quantization // Research Letters in Physics, 2009. V. 1.
5. Case W.B. Wigner functions and Weyl transformation for pedestrians // American J. Phys., 2008. V. 76. № 10.
6. Nuno Costa Dias, Joao Nuno Prata. Deformation quantization and Wigner function // Modern Physics Letters A, 2015. V. 20. № 17.
7. Weyl H. Gruppentheorie und Quantenmechanik, 2-te Aufl. Verlag S. Hirzel, Leipzig. 1931.
8. Born M., Jordan P. Zur Quantenmechanik // Z. Physik, 1925. V. 34. P. 858–888.
9. von Neumann J. Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. – Berlin, Verlag von Julius Springer, 1932. – 269 p.
10. Березин Ф.А. Невинеровские континуальные интегралы // ТМФ, 1971. Т. 6. № 2. С. 194-212.
11. Berezin F.A. General concept of quantization // Communications Math. Phys., 1975. V. 40. P. 153-174.
12. Гайда Р.П. Квазирелятивистские системы взаимодействующих частиц // ЭЧАЯ, 1982. Т. 13. № 2. С. 427 – 493.
13. Павлоцкий И.П. Введение в слаборелятивистскую статистическую механику. – М.: Наука, 1987. – 187 с.
14. Orlov Yu. N., Pavlotsky I.P. Quantum BBGKY Hierarchies and Wigner Equation in Postgalilean Approximation // Physica A. 1989. V. 158. P. 607-618.
15. Орлов Ю.Н. Линейное квантование динамических систем и квантовые кинетические уравнения // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 1999. № 14. 19 с.
16. Орлов Ю.Н. Основы квантования вырожденных динамических систем. – М.: МФТИ, 2004. – 236 с.
17. Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г. Формулы Фейнмана как метод усреднения случайных гамильтонианов // Труды МИРАН, 2014. Т. 285. С. 232-243.
18. Борисов Л.А., Орлов Ю.Н. Анализ зависимости конечнократных аппроксимаций равновесной матрицы плотности гармонического осциллятора и функции Вигнера от правила квантования // Теоретическая и математическая физика, 2015. Т.184, №1. С. 106-116.

19. Borisov L.A., Orlov Yu.N., Sakbaev V.Zh. Feynman formulas for averaging semigroups, generating by Schrödinger operators // Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, 2018. V21. № 2.
20. Abramowitz M., Stegun I.A. Handbook of Mathematical Functions with Tables. – National Bureau of Standards, 1972. Tenth Printing, December 1972, with corrections.
21. Moyal J.E. Quantum mechanics as a statistical theory // Proc. Cambridge Philos. Soc., 1949. V. 45. P. 99-124.
22. Боголюбов Н.Н., Боголюбов Н.Н. (мл.). Введение в квантовую статистическую механику. – М.: Наука, 1984.