ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 17 за 2020 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Колесниченко А.В.

К построению статистической термодинамики неэкстенсивных систем на основе каппа-энтропии Каниадакиса

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Колесниченко А.В. К построению статистической термодинамики неэкстенсивных систем на основе каппа-энтропии Каниадакиса // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 17. 36 с. http://doi.org/10.20948/prepr-2020-17
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-17

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

А.В. Колесниченко

К построению статистической термодинамики неэкстенсивных систем на основе каппа-энтропии Каниадакиса

Москва — 2020

Колесниченко А.В.

К построению статистической термодинамики неэкстенсивных систем на основе каппа-энтропии Каниадакиса.

Аннотация. В рамках неэкстенсивной статистики Каниадакиса, основанной на параметрической κ-энтропии, показано, как можно получить деформированную термодинамику сложных аномальных систем и определить её свойства. В работе приведены основные математические свойства κ-логарифма и κ-экспоненты, а также другие связанные с ними функции, возникающие при разработке статистической механики Каниадакиса. В результате получено обобщение на неэкстенсивный случай нулевого закона термодинамики для двух независимых подсистем при их тепловом контакте и введена так называемая физическая температура, отличная от инверсии множителя Лагранжа β. С привлечением обобщённого первого закона термодинамики и преобразования Лежандра и на основе введённой энтропии Клаузиуса получены новые термодинамические соотношения, которые отличны от выведенных ранее традиционным для неэкстенсивной статистики способом соотношений, неудовлетворительных с точки зрения макроскопической термодинамики. На основе свойства выпуклости дивергенции Бергмана изучены спонтанные переходы между стационарными состояниями сложной κ-системы и доказаны теорема Гиббса и Н-теорема Больцмана.

Ключевые слова: энтропия Каниадакиса, неэкстенсивная статистика, дивергенция Брегмана.

Aleksandr Vladimirovich Kolesnichenko

Towards the development of thermodynamics of nonextensive systems based on kappa-entropy Kaniadakis.

Resume. In the framework of non-extensive statistical mechanics of Kaniadakis based on parametric κ-entropy, it is shown how to obtain the deformed statistical thermodynamics of complex anomalous systems and determine its properties. The paper presents the basic mathematical properties of the κ-logarithm and κ-exponent, as well as other related functions that arise during the development of the statistical mechanics of Kaniadakis. As a result, a generalization is obtained for the case under consideration of the zero law of thermodynamics for two independent subsystems with their thermal contact and the so-called physical temperature is introduced, which differs from the inversion of the Lagrange multiplier. Using the generalized first law of thermodynamics and the Legendre transformation, and based on the introduced Clausius entropy, new thermodynamic relations are obtained that are different from the relationships that were previously unsatisfactory from the point of view of deformed thermodynamics, which were traditionally used for non-extensive statistics. Based on the property of convexity of Bergman divergence, spontaneous transitions between stationary states of a complex β-system are studied and the Gibbs theorem and the Boltzmann *H*-theorem are proved.

Keywords: Kaniadakis entropy, non-extensive statistics, Bregman divergence.

Введение

Как теперь стало понятно, статистическая механика Больцмана−Гиббса и стандартная термодинамика не являются вполне универсальными теориями, поскольку они имеют ограниченные области применимости. В физике и в других естественных науках, использующих методы статистической механики, известны многочисленные примеры сложных (аномальных) систем, которым присущи эффекты сильного дальнодействия, нелокальные корреляции между отдельными элементами системы (помнящей свое прошлое), фрактальный характер фазового пространства, немарковское поведение. Сложная пространственно-временная структура подобных аномальных систем приводит к нарушению принципа аддитивности для таких важнейших термодинамических величин, как энтропия или внутренняя энергия.

Исследования в области механики неаддитивных (неэкстенсивных) систем стали в последнее время предметом значительного интереса, что объясняется как новизной возникающих здесь общетеоретических проблем, так и важностью практических приложений. Начало систематического изучения в этом направлении связано с работой К. Тсаллиса [1988], в которой была введена формула статистической q-энтропии $S_q^{Ts}(p) := \frac{k_B}{q-1}\int\left(p - p^q\right)d\Gamma$, зависящая от некоторого действительного числа q (так называемого параметра деформации) и обладающая неаддитивностью для совокупности независимых аномальных систем. Теория неэкстенсивных систем, основанная на энтропии Тсаллиса, в настоящее время интенсивно развивается, к сожалению, в основном зарубежными специалистами. В научной литературе доступны систематизированные собрания обзоров, дающие последовательное изложение многочисленных новых результатов, полученных в ходе изучения неэкстенсивных свойств в аномальных физических явлениях (см. библиографию, представленную на сайте http:/tsallis.cat.cbpf.br/biblio.htm, которая постоянно обновляется).

Определение энтропии Тсаллиса не является единственным примером деформированной энтропии. Фундаментом исследований в области неэкстенсивных статистик, проводимых в настоящее время, являются многочисленные нелогарифмические энтропии, введенные, например, в работах (Renyi, 1961, 1970; Tsallis,1988, 2001; Sharma, Mittal, 1977; Taneja, 1989, 1995; Abe, 1997; Landsberg, Vedral, 1998; Papa, 1998; Borges, Roditi, 1998; Landsberg 1999; Frank, Plastino, 2002; Kaniadakis, 2009; Зарипов, 2002, 2010; Колесниченко, 2019c). При этом каждая неэкстенсивная статистика имеет широкий спектр важных приложений, связанных с физикой сложных систем, вероятностные свойства которых определяются не гиббсовым (не гауссовым), а асимптотическим степенным законом распределения вероятностей (проявляющимся при максимизации соответствующих параметрических энтропий), который не зависит от экспоненциального поведения, обусловленного распределением Гиббса. Диапазон применения раз-

нообразных неэкстенсивных параметрических энтропий в настоящее время постоянно расширяется, охватывая различные направления в науке, такие как космология и космогония, теория плазмы, квантовая механика и статистика, специальная и общая теории относительности, стохастическая динамика и фракталы, геофизика, биомедицина и многие другие.

Среди всех деформированных энтропий неэкстенсивных систем особый интерес представляет энтропия Каниадакиса $S_\kappa(p) := -\frac{k_B}{2\kappa}\int\left(p^{\kappa+1} - p^{1-\kappa}\right)d\Gamma$, введенная впервые в работах (Kaniadakis, 2001a,b; Kaniadakis, Scarfone, 2002; Kaniadakis и др., 2002). Основанная на κ-энтропия неэкстенсивная статистика сохраняет математическую и гносеологическую структуру обычной статистической механики и пригодна для описания очень большого класса экспериментально наблюдаемых явлений в физике низких и высоких энергий, а также в естественных, экономических и социальных науках. В частности, деформированная энтропия Каниадакиса естественно возникает в рамках специальной теории относительности Эйнштейна (Kaniadakis, 2002a, 2005). При этом параметр деформации κ зависит от скорость света c и уменьшается до нуля при $c \to \infty$, восстанавливая таким образом обычную статистическую механику и термодинамику. Статистика Каниадакиса возникает в различных прикладных областях. В качестве примера можно упомянуть работы, связанные с космическими эффектами (Kaniadakis, Scarfone 2002; Abreu и др., 2016; Livadiotis, 2018) (в частности, с звездной астрофизикой (Carvalho и др., 2008, 2009; Soares, Silva, 2011)), с кварк-глюонной плазмой (Teweldeberhan и др., 2003), с газокинетическиими моделями, описывающими взаимодействие атомов и фотонов (Rossani, Scarfone, 2004), с квантовой механикой (Kaniadakis, 2002b). Другие приложения касаются динамических систем (Coraddu и др., 2006; Tonelli и др., 2006; Celikoglu, Tirnakli, 2006), фрактальных систем (Olemskoi и др., 2008), теории поля (Olemskoi и др., 2010), теории случайных матриц (Abul-Magd, 2007, 2009; Abul-Magd, Abdel-Mageed, 2012), теории игр (Topsoe, 2004), теории информации (Wada, Suyari, 2007) и т. п. Кроме того, κ- статистика особенно пригодна для описания экономических систем, например, при построении различных финансовых моделей (Rajaonarison и др., 2005), в частности, для изучения распределения личных доходов (Clementi и др., 2007, 2011, 2012).

Данная работа посвящена конструированию на основе параметрической κ-энтропии статистической термодинамики неэкстенсивных систем. Проведенное исследование базируется на свойствах негиббсового канонического κ-распределения, полученного из принципа Джейнса (Jaynes, 1963) максимума κ-энтропии при заданности усредненной внутренней энергии системы, и вероятностной нормировке для функции κ-распределения. Показано, что все важные термодинамические характеристики системы, такие как энтропия, полная и свободная энергия, могут быть выражены с использованием только равновесной функции κ-распределения. Полученные при этом термодинамические равенства для обобщенного канонического ансамбля Гиббса аналогичны класси-

ческим равенствам статистической термодинамики для замкнутых и открытых систем. Кроме этого, показано, что сохраняются принцип максимума равновесной энтропии, лежандрова структура теории, термодинамическая устойчивость, теорема Гиббса и *H*- теорема и т. д. обычной статистической механики Больцмана–Гиббса при приближении параметра деформации κ к нулю. Таким образом, в работе с единых позиций изложен круг вопросов, связанных с конструированием деформированной термодинамики на основе κ-энтропии Каниадакиса и дивергенции Бергмана для сложных аномальных систем.

1. Основные определения, статистические характеристики и свойства энтропии Каниадакиса

В деформированной статистической механике Каниадакиса для непрерывных аномальных систем при вероятностной нормировке

$$\int p(\boldsymbol{r})d\Gamma = 1, \quad 0 \le p(\boldsymbol{r}) < \infty \tag{1}$$

для плотности вероятности распределения систем $p(\boldsymbol{r})$ в фазовом пространстве $\boldsymbol{r} := \{\boldsymbol{q}_1,...,\boldsymbol{q}_N;\ \boldsymbol{p}_1,...,\boldsymbol{p}_N\}$ статистического ансамбля («представляющего» макроскопическое состояние рассматриваемой системы) деформированная κ-энтропия задаётся следующим функционалом (Kaniadakis, 2001a,b, 2002a,b)

$$S_\kappa(p) := -k_{\mathcal{B}}\int p(\boldsymbol{r})\frac{p^\kappa(\boldsymbol{r}) - p^{-\kappa}(\boldsymbol{r})}{2\kappa}d\Gamma = -k_{\mathcal{B}}\int \frac{p^{\kappa+1}(\boldsymbol{r}) - p^{1-\kappa}(\boldsymbol{r})}{2\kappa}d\Gamma. \tag{2}$$

Здесь и далее везде область интегрирования совпадает со всем $6N$-мерным фазовым пространством, причем безразмерный элемент фазового пространства $d\Gamma$ записывается в современной форме $d\Gamma := \left\{N!h^{3N}\right\}^{-1} d\boldsymbol{r}$, где $h = 2\pi\hbar$ – постоянная Планка; $k_{\mathcal{B}}$ – постоянная Больцмана. Энтропийный индекс κ (параметр деформации) в определении κ-энтропии (2) представляет собой вещественное число, принадлежащее области $|\kappa| < 1$. Такая деформация логарифмической функции в выражении для энтропии (по сравнению с классической энтропией Больцмана–Гиббса $S_{\mathcal{BG}}(p) := -k_{\mathcal{B}}\int p\ln(p)d\Gamma$) позволяет учитывать важную особенность поведения многих аномальных систем с длинной памятью и/или дальнодействующими силовыми взаимодействиями, когда вероятность реализации $p(\boldsymbol{r})$ малых значений параметров состояния убывает (при $p \to 0^+$) не экспоненциально быстро, а степенным образом (закон Парето). Благодаря этому статистика Каниадакиса описывает события, практически недостижимые в простых системах, характеризуемых статистикой Больцмана–Гиббса.

Легко показать, что в пределе слабой связи $\kappa \to 0$ κ-энтропия (2) переходит в каноническую формулу $S_{\mathcal{BG}}$ классической статистики Гиббса. Действительно, в пределе $\kappa \to 0$ имеем: $p^{\pm\kappa} = \mathrm{e}^{\pm\kappa \ln p} \to 1 \pm \kappa \ln p$, и энтропия S_κ сводится к $S_{\kappa\to 0}(p) = \lim\limits_{\kappa\to 0}\left\{-k_{\mathcal{B}}\int p\frac{p^{\kappa}-p^{-\kappa}}{2\kappa}d\Gamma\right\} = -k_{\mathcal{B}}\int p\ln p\, d\Gamma = S_{\mathcal{BG}}$.

Энтропия (2) может быть представлена также в следующих эквивалентных формах:

$$S_{\{\kappa\}}(p) := -k_{\mathcal{B}}\int p \ln_{\{\kappa\}} p\, d\Gamma = -k_{\mathcal{B}}\langle \ln_{\{\kappa\}} p\rangle_{\{\kappa\}}, \tag{3}$$

при написании которых использован так называемый «деформированный логарифм» (Kaniadakis, 2013)

$$\ln_{\{\kappa\}}(x) := \frac{x^{\kappa}-x^{-\kappa}}{2\kappa} \equiv \frac{1}{\kappa}\sinh(\kappa \ln x) \quad (\forall x > 0), \tag{4}$$

а также способ получения среднего значения для любой динамической переменной $\mathcal{A}_j(\boldsymbol{r})$, а именно

$$\langle \mathcal{A}_j\rangle_{\{\kappa\}} := \int p(\boldsymbol{r})\mathcal{A}_j(\boldsymbol{r})d\Gamma, \tag{5}$$

где принята нормировка (1).

Отметим, что в дискретном случае, при условии вероятностной нормировки $\sum_{i=1}^{W} p_i = 1$, нужно в приведённых формулах произвести замену $\int d\Gamma \leftrightarrow \sum_{i=1}^{W}$, где $p := \{p_j\}_{j=1,2,\ldots,W}$ – дискретная функция распределения, а W обозначает количество доступных в системе микросостояний.

Свойства функции $\ln_{\{\kappa\}}(x)$

Как известно, в классической статистической механике особую роль играет логарифм функции распределения со знаком минус $-\ln(p)$, поскольку эта величина связана с энтропией системы. В 1990-х гг. Каниадакис предложил определение деформированного логарифма (4), в котором параметр деформации κ принадлежит интервалу $(-1,1)$, давая в пределе $\kappa \to 0$ обычный логарифм $\ln(x)$. Рассмотрим здесь некоторые наиболее важные свойства деформированного логарифма, которые будут использованы далее.

Легко убедиться, что функция $\ln_{\{\kappa\}}(x)$ обладает следующими свойствами (см., например, Kaniadakis, Scarfone, 2002; Kaniadakis. 2013):

$$\ln_{\{\kappa\}}(x) = \ln_{\{-\kappa\}}(x), \tag{6}$$

$$\ln_{\{\kappa\}}(x^{\lambda}) = \lambda \ln_{\{\lambda\kappa\}}(x), \quad \ln_{\{\kappa\}}(1/x) = -\ln_{\{\kappa\}}(x), \tag{7}$$

$$\ln_{\{\kappa\}}(0^{+}) = -\infty, \quad \ln_{\{\kappa\}}(1) = 0, \quad \ln_{\{\kappa\}}(+\infty) = +\infty. \tag{8}$$

$$\frac{d}{dx}\ln_{\{\kappa\}}(x) = \frac{1}{x}u_{\{\kappa\}}(x), \quad \frac{d}{dx}\left\{x\ln_{\{\kappa\}}(x)\right\} = \lambda \ln_{\{\kappa\}}\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \ln_{\{\kappa\}}(x) + u_{\{\kappa\}}(x). \tag{9}$$

Имеют место также следующие свойства вогнутости функции $\ln_{\{\kappa\}}(x)$:

$$\frac{d}{dx}\ln_{\{\kappa\}}(x) > 0, \quad \frac{d^2}{dx^2}\ln_{\{\kappa\}}(x) < 0, \quad \frac{d^2}{dx^2}\left[x\ln_{\{\kappa\}}(x)\right] > 0, \tag{10}$$

а также ее асимптотическое поведение деформированного логарифма по степенному закону:

$$\ln_{\{\kappa\}}(x) \underset{x\to 0^{+}}{\sim} \frac{1}{|2\kappa|}x^{-|\kappa|}, \quad \ln_{\{\kappa\}}(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{1}{|2\kappa|}x^{|\kappa|}. \tag{11}$$

Тейлоровское разложение функции $\ln_{\{\kappa\}}(1+x)$ сходится в случае, если $-1 < x \le 1$; тогда имеем:

$$\ln_{\{\kappa\}}(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\kappa)(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, \tag{12}$$

где $b_n(-\kappa) = b_n(\kappa)$, $b_1(\kappa) = 1$, $b_n(0) = 1$; при $n > 1$ коэффициенты $b_n(\kappa)$ определяются соотношением:

$$b_n(\kappa) = \frac{1}{2}(1-\kappa)\left(1-\frac{\kappa}{2}\right)\ldots\left(1-\frac{\kappa}{n-1}\right) + \frac{1}{2}(1+\kappa)\left(1+\frac{\kappa}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{\kappa}{n-1}\right).$$

Первые три члена разложения (12) принимают вид:

$$\ln_{\{\kappa\}}(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} = x - \frac{x^2}{2} + \left(1+\frac{\kappa^2}{2}\right)\frac{x^3}{3}. \tag{13}$$

На Рис.1 представлена определенная соотношением (5) функция $\ln_{\{\kappa\}}(x)$ для трех различных значений параметра деформации κ. Непрерывная кривая, соответствующая $\kappa = 0$, является обычной логарифмической функцией $\ln(x)$.

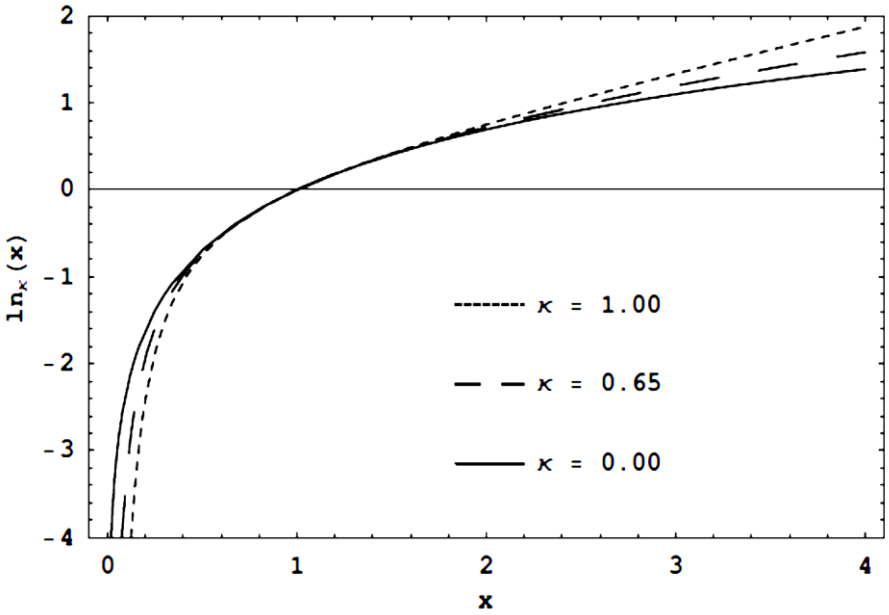

Рис. 1. Изменение вида логарифма Каниадакиса $\ln_{\{\kappa\}}(x)$ при изменении параметра деформации κ.

Первые три члена разложения (12) принимают вид:

$$\ln_{\{\kappa\}}(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} = x - \frac{x^2}{2} + \left(1 + \frac{\kappa^2}{2}\right)\frac{x^3}{3}. \qquad (13)$$

Для деформированного логарифма $\ln_{\{\kappa\}}(x)$ справедливо следующее интегральное представление:

$$\ln_{\{\kappa\}}(x) = \frac{1}{2}\int_{1/x}^{x} \frac{1}{t^{1+\kappa}} dt\,. \qquad (14)$$

Наконец, если ввести так называемые к-сумму и к-произведение – обобщенную сумму и обобщенное произведение статистики Каниадакиса (Scarfone, 2015, 2017)

$$x \overset{\kappa}{\oplus} y := x\sqrt{1+\kappa^2 y^2} + y\sqrt{1+\kappa^2 x^2}\ , \quad (x, y \in \mathbb{R} \text{ и } |\kappa| \le 1),$$

$$x \underset{\kappa}{\otimes} y := \left(\kappa \ln_{\{\kappa\}} x + \kappa \ln_{\{\kappa\}} y + \sqrt{1+(\kappa \ln_{\{\kappa\}} x + \kappa \ln_{\{\kappa\}} y)^2}\right)^{1/\kappa}, \qquad (15)$$

то можно получить еще два важных свойства:

$$\ln_{\{\kappa\}}(xy) = \ln_{\{\kappa\}}(x) \overset{\kappa}{\oplus} \ln_{\{\kappa\}}(y) = \ln_{\{\kappa\}}(x) u_{\{\kappa\}}(y) + \ln_{\{\kappa\}}(y) u_{\{\kappa\}}(x) =$$

$$= \ln_{\{\kappa\}}(x)\sqrt{1+\kappa^2 \ln_\kappa^2(y)} + \ln_{\{\kappa\}}(y)\sqrt{1+\kappa^2 \ln_\kappa^2(x)}\,,$$

$$\ln_{\{\kappa\}}(x) + \ln_{\{\kappa\}}(y) = \ln_{\{\kappa\}}\left(x \underset{\kappa}{\otimes} y \right). \tag{16}$$

Функция $u_{\{\kappa\}}(x)$

В соотношениях (9) и (16), а также везде далее фигурирует важная в статистике Каниадакиса функция (Scarfone, 20015, 2017)

$$u_{\{\kappa\}}(x) := \frac{x^\kappa + x^{-\kappa}}{2} = \sqrt{1+\kappa^2 \ln_{\{\kappa\}}^2(x)} \equiv \cosh(\kappa \ln(x)), \tag{17}$$

которая обладает следующими свойствами (см., например, Scarfone, Wada, 2005, 2014):

$$u_{\{\kappa\}}(x) = u_{\{-\kappa\}}(x), \quad u_{\{\kappa\}}(x) = u_{\{\kappa\}}(1/x), \quad u_{\{\kappa\}}(\alpha) = \frac{1}{\lambda}, \quad \ln_{\{\kappa\}}(\alpha) = -\frac{1}{\lambda}. \tag{18}$$

Здесь введены обозначения

$$\lambda := \sqrt{1-\kappa^2}\,, \quad \alpha := \left[(1-\kappa)/(1+\kappa)\right]^{1/2\kappa}. \tag{19}$$

При учете свойств (18), а также преобразования

$$u_{\{\kappa\}}(x) = \frac{x^\kappa + x^{-\kappa}}{2} = \frac{x^\kappa - x^{-\kappa}}{2\kappa} - \frac{(1-\kappa)x^\kappa - (1+\kappa)x^{-\kappa}}{2\kappa} =$$

$$= \ln_{\{\kappa\}}(x) - \sqrt{1-\kappa^2}\,\ln_{\{\kappa\}}\left\{ x\left(\frac{1-\kappa}{1+\kappa}\right)^{1/2\kappa} \right\} \tag{20}$$

легко получить следующие выражения:

$$u_{\{\kappa\}}(x) = x^\kappa - \kappa \ln_{\{\kappa\}}(x) = \ln_{\{\kappa\}}(x) - \lambda \ln_{\{\kappa\}}(\alpha x) = -\ln_{\{\kappa\}}(x) - \lambda \ln_{\{\kappa\}}\left(\frac{\alpha}{x}\right), \tag{21}$$

$$u_{\{\kappa\}}(xy) = u_{\{\kappa\}}(x)u_{\{\kappa\}}(y) + \kappa^2 \ln_{\{\kappa\}}(x)\ln_{\{\kappa\}}(y). \tag{22}$$

С учетом свойства (21) закон аддитивности (16) деформированного κ-логарифма может быть переписан следующим образом:

$$\ln_{\{\kappa\}}(xy) = 2\ln_{\{\kappa\}}(x)\ln_{\{\kappa\}}(y) - \lambda\left\{ \ln_{\{\kappa\}}(y)\ln_{\{\kappa\}}(\alpha x) + \ln_{\{\kappa\}}(x)\ln_{\{\kappa\}}(\alpha y) \right\}. \tag{23}$$

Легко видеть, что в пределе $\kappa \to 0$ это свойство κ-логарифма сводится к стандартному закону аддитивности обычного логарифма $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.

Наконец, можно убедиться в том, что имеют место следующие дифференциальные соотношения:

$$\frac{d}{dx}u_{\{\kappa\}}(x)=\kappa^2\frac{\ln_{\{\kappa\}}(x)}{x},\quad \frac{d}{dx}\left\{xu_{\{\kappa\}}(x)\right\}=\lambda u_{\{\kappa\}}\left(\frac{x}{\alpha}\right)=\ln_{\{\kappa\}}(x)+u_{\{\kappa\}}(x). \quad (24)$$

Неаддитивность κ-энтропии для независимых систем

Покажем теперь, что, подобно энтропии Тсаллиса (см., например, Колесниченко, 2018 a-c; 2019a-c; Kolesnichenko, Marov, 2019), энтропия Каниадакиса подчиняется псевдоаддитивному закону для двух статистически независимых систем.

Рассмотрим совокупную физическую κ-систему, состояние которой описывается совместным мультипликативным распределением $p^{(12)}:=p^{(1)}\cdot p^{(2)}$, где $p^{(12)}:=p^{(12)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)$, $p^{(1)}:=p^{(1)}(\boldsymbol{r}_1)$, $p^{(2)}:=p^{(2)}(\boldsymbol{r}_2)$. Распределение $p^{(12)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)$ может зависеть также и от времени, а «точки» $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ относятся к двум статистически независимым κ-системам. Тогда полная энтропия системы задается выражением

$$S^{(12)}_{\{\kappa\}}:=-k_{\mathcal{B}}\int\int p^{(12)}\ln_{\{\kappa\}}(p^{(12)})d\Gamma_1 d\Gamma_2, \quad (25)$$

где выполняются условия нормировки

$$\iint p^{(12)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)d\Gamma_1 d\Gamma_2=\int p^{(1)}(\boldsymbol{r}_1)d\Gamma_1=\int p^{(2)}(\boldsymbol{r}_2)d\Gamma_2=1.$$

После подстановки мультипликативного распределения $p^{(12)}=p^{(1)}\cdot p^{(2)}$ в формулу (25) получим (при учете (22)) следующее свойство неаддитивности совокупной энтропии в статистике Каниадакиса для двух независимых систем:

$$S^{(12)}_{\{\kappa\}}=S_{\{\kappa\}}(p^{(1)})\mathcal{I}_{\{\kappa\}}(p^{(2)})+S_{\{\kappa\}}(p^{(2)})\mathcal{I}_{\{\kappa\}}(p^{(1)}). \quad (26)$$

В этом соотношении фигурирует чрезвычайно важная в κ-статистике функция:

$$\mathcal{I}_{\{\kappa\}}(p):=\langle u_{\{\kappa\}}(p)\rangle_\kappa=\int p\,u_{\{\kappa\}}(p)d\Gamma=\int p\sqrt{1+\kappa^2\ln^2_{\{\kappa\}}(p)}d\Gamma. \quad (27)$$

Проверим свойство квазиаддитивности (26) совокупной энтропии:

$$S^{(12)}_{\{\kappa\}}\equiv-k_{\mathcal{B}}\int\int p^{(12)}\ln_{\{\kappa\}}(p^{(12)})d\Gamma_1 d\Gamma_2=-k_{\mathcal{B}}\left\langle\ln_{\{\kappa\}}(p^{(12)})\right\rangle_{\{\kappa\}}=$$

$$= -k_{\mathcal{B}} \left\langle \ln_{\kappa}(p^{(1)} p^{(2)}) \right\rangle_{\{\kappa\}} = -k_{\mathcal{B}} \left\langle \ln_{\{\kappa\}}(p^{(1)}) u_{\{\kappa\}}(p^{(2)}) + \ln_{\{\kappa\}}(p^{(2)}) u_{\{\kappa\}}(p(1)) \right\rangle_{\{\kappa\}} =$$

$$= -k_{\mathcal{B}} \int\int p^{(1)} \cdot p^{(2)} \left\{ \ln_{\{\kappa\}}(p^{(1)}) u_{\{\kappa\}}(p^{(2)}) + \ln_{\{\kappa\}}(p^{(2)}) u_{\{\kappa\}}(p^{(1)}) \right\} d\Gamma_1 d\Gamma_2 =$$

$$= S_{\{\kappa\}}(p^{(1)}) \mathcal{I}_{\{\kappa\}}(p^{(2)}) + S_{\{\kappa\}}(p^{(2)}) \mathcal{I}_{\{\kappa\}}(p^{(1)}). \qquad (28)$$

В случае если $\kappa \to 0$, то $u_{\{0\}}(p) = 1$ и $\mathcal{I}_{\{0\}}(p) = 1$, так что из (26) следует аддитивное правило для энтропии Больцмана–Гиббса.

Отметим, что с учетом соотношения (21) функцию $\mathcal{I}_{\{\kappa\}}(p)$ можно переписать также в виде

$$\mathcal{I}_{\{\kappa\}}(p) = \langle \ln_{\kappa}(p) \rangle - \lambda \langle \ln_{\kappa}(\alpha p) \rangle = \frac{1}{k_{\mathcal{B}}} \left[-\lambda \alpha S_{\{\kappa\}}(p/\alpha) + S_{\{\kappa\}}(p) \right]. \qquad (29)$$

Тогда для совокупной энтропии Каниадакиса двух независимых систем получим еще одно представление:

$$k_{\mathcal{B}} S_{\{\kappa\}}^{(12)} = S_{\{\kappa\}}(p^{(1)}) \left\{ \lambda S_{\{\kappa\}}(\alpha p^{(2)}) - S_{\{\kappa\}}(p^{(2)}) \right\} +$$

$$+ S_{\{\kappa\}}(p^{(2)}) \left\{ \lambda S_{\{\kappa\}}(\alpha p^{(1)}) - S_{\{\kappa\}}(p^{(1)}) \right\}. \qquad (30)$$

2. Каноническое распределение Гиббса в деформированной κ-статистике

Основные свойства экспоненты Каниадакиса $\exp_{\{\kappa\}}(x)$

Далее нам понадобится так называемая экспонента Каниадакиса. Для определения функции, обратной деформированному логарифму (2), введем переменную $x \equiv \ln_{\{\kappa\}}(y)$, что приводит к алгебраическому уравнению $z^2 - 2x\kappa z - 1 = 0$ для неизвестной $z \equiv y^{\kappa}$. Его решение $z = \kappa x \pm \sqrt{1 + (\kappa x)^2}$ дает выражение $y = \left\{ \kappa x \pm \sqrt{1 + (\kappa x)^2} \right\}^{1/\kappa}$. Функция y, обратная деформированному логарифму $x = \ln_{\{\kappa\}}(y)$, представляет собой так называемую экспоненту Каниадакиса:

$$\exp_{\{\kappa\}}(x) := \left(\sqrt{1+(\kappa x)^2} + \kappa x \right)^{1/\kappa} \equiv \exp\left(\frac{1}{\kappa} \operatorname{arcsinh} \kappa x \right) \in C^{\infty}(\mathbb{R}), \qquad (31)$$

На рис. 2 представлена определенная соотношением (31) функция $\exp_{\{\kappa\}}(x)$, для пяти различных значений параметра деформации κ. Непрерывная кривая, соответствующая $\kappa = 0$, является обычной экспоненциальной функцией $\exp(x)$.

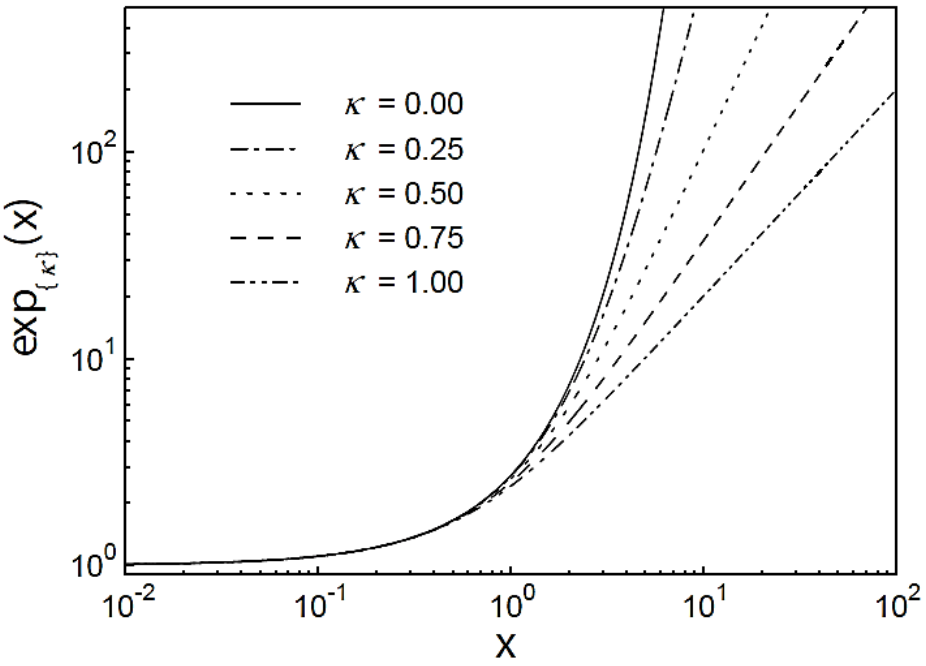

Рис. 2. График в логарифмическом масштабе κ-экспоненты для различных значений параметра κ. Кривая с $\kappa = 0$ соответствует стандартной экспоненте.

Из определения (31) экспоненты Каниадакиса вытекают следующие свойства (Scarfone, 2015, 2017):

$$\exp_{\{0\}}(x) = \lim_{\kappa \to 0} \exp_{\{\kappa\}}(x) = \exp(x), \quad \exp_{\{\kappa\}}(0) = 1, \quad \exp_{\{-\kappa\}}(x) = \exp_{\{\kappa\}}(x),$$

$$\exp_{\{\kappa\}}(-\infty) = 0^{+}, \quad \exp_{\{\kappa\}}(+\infty) = +\infty, \quad \ln_{\{\kappa\}} \exp_{\{\kappa\}}(x) = \exp_{\{\kappa\}} \ln_{\{\kappa\}}(x) = x,$$

$$u_{\{\kappa\}}\left\{ \exp_{\{\kappa\}}(x) \right\} = \sqrt{1+\kappa^2 x^2}, \quad \exp_{\{\kappa\}}(x) \exp_{\{\kappa\}}(-x) = 1. \qquad (32)$$

Последнее свойство (32) проявляется как частный случай более общего соотношения:

$$\exp_{\{\kappa\}}(x) \exp_{\{\kappa\}}(y) = \exp_{\{\kappa\}}\left\{ x\sqrt{1+(\kappa y)^2} + y\sqrt{1+(\kappa x)^2} \right\} \equiv \exp_{\{\kappa\}}\left(x \overset{\kappa}{\oplus} y \right). \qquad (32^{*})$$

Кроме того, функция $\exp_{\{\kappa\}}(x)$ обладает следующими свойствами:

$$(\exp_{\{\kappa\}}(x))^r = \exp_{\{\kappa/r\}}(rx) \tag{33}$$

(с $r \in \mathbb{R}$, которое в пределе $\kappa \to 0$ воспроизводит известное свойство обыкновенной экспоненты),

$$\exp_{\{\kappa\}}(x)\exp_{\{\kappa\}}(y) = \exp_{\{\kappa\}}(x \overset{\kappa}{\oplus} y) = \exp_{\{\kappa\}}\left\{x\sqrt{1+\kappa^2 y^2} + y\sqrt{1+\kappa^2 x^2}\right\},$$

$$\exp_{\{\kappa\}}(x+y) = \exp_{\{\kappa\}}(x) \overset{\kappa}{\otimes} \exp_{\{\kappa\}}(y). \tag{34}$$

Из (18) следует следующее правило дифференцирования κ-экспоненты:

$$\frac{d}{dx}\exp_{\{\kappa\}}(x) = \frac{\exp_{\{\kappa\}}(x)}{u_{\{\kappa\}}\left\{\exp_{\{\kappa\}}(x)\right\}} = \frac{1}{\sqrt{1+\kappa^2 x^2}}\exp_{\{\kappa\}}(x). \tag{35}$$

Имеет место следующее свойство выпуклости:

$$\frac{d^2}{dx^2}\exp_{\{\kappa\}}(x) > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \kappa^2 < 1. \tag{36}$$

Несомненно, одним из наиболее интересных свойств функции $\exp_{\{\kappa\}}(x)$ является ее и асимптотическое поведение по степенному закону:

$$\exp_{\{\kappa\}}(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \left|2\kappa x\right|^{\pm 1/|\kappa|}, \tag{37}$$

$$\exp_{\{\kappa\}}(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\left|2\kappa\right|^{-1} x^{-|\kappa|}, \quad \exp_{\{\kappa\}}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \left|2\kappa\right|^{-1} x^{|\kappa|}. \tag{38}$$

Разложение Тейлора экспоненты $\exp_{\{\kappa\}}(x)$ имеет следующий вид (Kaniadakis, 2002a):

$$\exp_{\{\kappa\}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n(\kappa)\frac{x^n}{n!}, \quad \kappa^2 x^2 < 1, \tag{39}$$

где $\xi_0(\kappa)=\xi_1(\kappa)=\xi_2(\kappa)=1,\quad \xi_n(\kappa)=\prod_{j=1}^{n-1}\left[1-(2j-n)\kappa\right]$. Заметим, что первые три члена в разложении Тейлора функции $\exp_{\{\kappa\}}(x)$ точно такие, как и для обыкновенной экспоненты:

$$\exp_{\{\kappa\}}(x)\underset{x\to 0}{\sim}=1+x+\frac{x^2}{2}+(1-\kappa^2)\frac{x^3}{3!}. \qquad (39^*)$$

Экспоненту $\exp_{\{\kappa\}}(x)$ можно также записать как бесконечное произведение обычных экспонент (Kaniadakis, 2013):

$$\exp_{\{\kappa\}}(x)=\prod_{n=0}^{\infty}\exp(c_n\kappa^{2n}x^{2n+1}),\quad c_n:=\frac{(-1)^n(2n)!}{(2n+1)2^{2n}(n!)^2}. \qquad (40)$$

Наконец, для κ-экспоненты справедливы следующие интегральные соотношения (см., например, Kaniadakis. 2005):

$$\exp_{\{\kappa\}}(-x)=\int_0^{\infty}\frac{1}{\kappa s}J_{1/\kappa}\left(\frac{s}{\kappa}\right)\exp(-sx)ds,\quad \operatorname{Re}x\geq 0, \qquad (41)$$

$$M_{\{\kappa\}}(r):=\int_0^{\infty}x^{r-1}\exp_{\{\kappa\}}(-x)dx=\frac{|2\kappa|^{-r}}{1+|\kappa|r}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{|2\kappa|}-\frac{r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{|2\kappa|}+\frac{r}{2}\right)}\Gamma(r), \qquad (42)$$

где $0<r<1/|\kappa|$; $J_{\nu}(s)-$ функция Бесселя, $\Gamma(x)-$ гамма- функция. Из (42) легко получить выражение

$$M_{\{\kappa\}}(r+2)=\frac{r(r+1)}{1-\kappa^2(r+2)^2}\cdot M_{\{\kappa\}}(r).$$

Деформированное каноническое распределение

Равновесные состояния сложных κ-систем характеризуются распределениями, которые не меняются с течением времени. Каноническое распределение Гиббса в статистике Каниадакиса может быть получено, как и в классическом случае, из экстремума κ-энтропии (4) при выполнении следующих дополнительных условий: заданности средней энергии системы

$$\mathcal{E}_{\{\kappa\}}:=\langle\mathcal{H}\rangle_{\{\kappa\}}=\int p(\boldsymbol{r})\mathcal{H}(\boldsymbol{r})d\Gamma=const \qquad (43)$$

и сохранении вероятностной нормировки (1) распределения $p(\boldsymbol{r})$. Здесь $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\boldsymbol{r})$ – функция Гамильтона, которая определяется математической моделью изучаемых физических процессов в системе. Заметим, что в общем случае эта функция может зависеть от ряда внешних параметров $a_1, a_2, ...a_s$, макроскопически характеризующих состояние статистического равновесия рассматриваемого ансамбля аномальных динамических систем, $\mathcal{H} := \mathcal{H}(\boldsymbol{r}, \{a_j\})$ (Зубарев, 1971).

Согласно вариационному принципу Джейнса (Jaynes, 1963) определим функционал

$$\mathcal{L}(p) := -k_{\mathcal{B}} \int p(\boldsymbol{r}) \ln_{\kappa} p(\boldsymbol{r}) d\Gamma - \beta \int p(\boldsymbol{r}) \mathcal{H}(\boldsymbol{r}) d\Gamma - k_{\mathcal{B}} \gamma \int p(\boldsymbol{r}) d\Gamma \qquad (44)$$

и найдём его безусловный экстремум. Здесь β и γ суть множители Лагранжа. В соответствии с теоремой Лагранжа вероятностное распределение $p(\boldsymbol{r})$, «экстремизирующее» κ-энтропию $S_{\kappa}(p)$ при указанных ограничениях, определяется из условия:

$$\frac{\delta \mathcal{L}(p)}{\delta p} = -k_{\mathcal{B}} \int \left[\ln_{\{\kappa\}} \left(p(\boldsymbol{r}) \right) + u_{\{\kappa\}} \left(p(\boldsymbol{r}) \right) \right] d\Gamma - \beta \int \mathcal{H}(\boldsymbol{r}) d\Gamma - k_{\mathcal{B}} \gamma \int d\Gamma = 0 . \quad (45)$$

При написании (45) использовано соотношение (9). Из (35), с учетом (19), (21) и (33), следует уравнение

$$\ln_{\{\kappa\}} \left(\alpha / p(\boldsymbol{r}) \right) - \frac{1}{\lambda} \left[\gamma + \frac{\beta}{k_{\mathcal{B}}} \mathcal{H}(\boldsymbol{r}) \right] = 0 , \quad \lambda := \sqrt{1 - \kappa^2} , \quad \alpha = \exp_{\{\kappa\}}(-1/\lambda), \quad (46)$$

решение которого дает следующее нормированное κ-распределение $p^{eq}(\boldsymbol{r})$ в состоянии статистического равновесия системы (каноническое распределение Гиббса в статистике Каниадакиса)

$$p^{eq}(\boldsymbol{r}, \beta) = \alpha / \exp_{\{\kappa\}} \left\{ \frac{1}{\lambda} \left(\gamma + \frac{\beta}{k_{\mathcal{B}}} \mathcal{H}(\boldsymbol{r}) \right) \right\} = \alpha \exp_{\{\kappa\}} \left\{ -\frac{1}{\lambda} \left(\gamma + \frac{\beta}{k_{\mathcal{B}}} \mathcal{H}(\boldsymbol{r}) \right) \right\} . \quad (47)$$

В пределе $\kappa \to 0$ равновесное κ-распределения (47) сводится к каноническому распределению Гиббса классической статистики.

Отметим, что с учетом свойств (16) и (34) распределению (47) можно придать следующий вид (Scarfone, Wada, 2006, 2014):

$$p^{eq}(\boldsymbol{r}) = \exp_{\{\kappa\}} \left(-\frac{1}{\lambda} \right) \exp_{\{\kappa\}} \left(-\frac{\mathcal{X}(\boldsymbol{r})}{\lambda} \right) =$$

$$= \exp_{\{\kappa\}}\left[-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\kappa}\oplus\left(-\frac{\mathcal{X}(\boldsymbol{r})}{\lambda}\right)\right] = \exp_{\{\kappa\}}\left[-\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\mathcal{X}(\boldsymbol{r})}{\lambda}+\sqrt{1+\kappa^2\,\frac{\mathcal{X}^2(\boldsymbol{r})}{\lambda^2}}\right)\right] =$$

$$= \exp_{\{\kappa\}}\left[-u_{\{\kappa\}}\left(p^{eq}(\mathcal{X})\right)-\mathcal{X}\right], \qquad (48^{*})$$

где в силу (22) и (48) имеем

$$u_{\{\kappa\}}\left(p^{eq}(\boldsymbol{r})\right) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\kappa^2}{\lambda}\mathcal{X}(\boldsymbol{r})+\sqrt{1+\frac{\kappa^2}{\lambda^2}\mathcal{X}^2(\boldsymbol{r})}\right), \quad \mathcal{X}(\boldsymbol{r}) := \gamma+\frac{\beta}{k_{\mathcal{B}}}\mathcal{H}(\boldsymbol{r}).$$

Заметим, что хвост распределения (48) описывается степенной асимптотикой (это так называемый закон Парето), определяемой в силу (37) выражением $p^{eq} \underset{\mathcal{X}\to\infty}{\sim} \left|\frac{2\kappa}{\sqrt{1-\kappa^2}}\mathcal{X}\right|^{1/\kappa}$, которое существенно отличается от экспоненциальной асимптотики, характеризующей классическое распределение Больцмана− Гиббса.

Найдем теперь вторую вариацию функционала (44). В результате получим

$$\delta^2\mathcal{L}(p) = -k_{\mathcal{B}}\int\frac{1}{p}\left[\kappa^2\ln_{\{\kappa\}}(p)+u_{\{\kappa\}}(p)\right]\delta p^2\,d\Gamma = -k_{\mathcal{B}}\kappa^2\int\left[\kappa+\frac{p^{2\kappa}+1}{p^{2\kappa}-1}\right]\delta p^2\,d\Gamma.$$

Легко убедиться в том, что экстремум соответствует максимуму и минимуму рассматриваемого функционала, соответственно, при $0<\kappa<1$ $(\delta^2\mathcal{L}<0)$ и $-1<\kappa<0$ $(\delta^2\mathcal{L}>0)$. Таким образом, распределение (48) максимизирует или минимизирует энтропию Каниадакиса.

В заключение этого раздела заметим, что в неэкстенсивной статистической кинетике, также как и в классической кинетике, имеет место термодинамическая эквивалентность статистических ансамблей. Все ансамбли статистической механики определяются заданием внешних условий, в которых находятся системы, их составляющие. Например, канонический ансамбль Гиббса определяется постоянством числа частиц, объема и контактом с термостатом, большой канонический ансамбль Гиббса − постоянством объема, контактом с термостатом и резервуаром частиц, изобарически-изотермический ансамбль − постоянством числа частиц, давления и контактом с термостатом. Вместе с тем при выборе ансамбля часто руководствуются удобством вычислений, а не условиями, в которых находится система, поскольку было показано, что вычисленные с их

помощью термодинамические функции мало отличаются между собой и совпадают в термодинамическом пределе (см., например, Зубарев, 1971) .

3. Термодинамические соотношения

Приступим теперь к основной цели данной работы – конструированию равновесной термодинамики, основанной на неэкстенсивной статистике Каниадакиса. Используя распределение (48*), получим следующее выражение:

$$\ln_{\{\kappa\}}(p^{eq}(\boldsymbol{r})) + u_{\{\kappa\}}(p^{eq}(\boldsymbol{r})) + \gamma + \frac{\beta}{k_{\mathcal{B}}}\mathcal{H}(\boldsymbol{r}) = 0\,. \tag{49}$$

(Заметим, что это выражение может быть получено также путем преобразования свойства (16), в котором $x := p^{eq}(\boldsymbol{r})$ и $y := 1/\alpha$, если использовать при этом формулы (7), (19) и (48).).

Усредняя выражение (49) с помощью равновесного распределения $p^{eq}(\boldsymbol{r})$ и учитывая определения (27) и (43), в результате получим экстремальное значение энтропии Каниадакиса (Scarfone,Wada, 2006)

$$S^{eq}_{\{\kappa\}} = k_{\mathcal{B}}(\mathcal{I}^{eq}_{\{\kappa\}} + \gamma) + \beta\mathcal{E}^{eq}_{\{\kappa\}}\ . \tag{50}$$

При сравнении κ-энтропии (50) с ее классической версией ($\kappa \to 0$, $\mathcal{I}^{eq}_{\{0\}} = 1$) естественно определить аналог $\mathcal{Z}_{\{\kappa\}}$ статистического интеграла $\mathcal{Z}$ соотношением (см., например, Tsallis и др., 1998):

$$k_{\mathcal{B}} \ln_{\{\kappa\}}(\mathcal{Z}_{\{\kappa\}}) := k_{\mathcal{B}}(\mathcal{I}_{\{\kappa\}} + \gamma) + \beta\mathcal{E}^{eq}_{\{\kappa\}}\,. \tag{51}$$

Далее везде будем опускать индекс "eq" у термодинамических параметров, когда это не вызывает двусмысленности. Тогда по аналогии с классической статистикой Больцмана–Гиббса выражение (50) принимает вид:

$$S^{eq}_{\{\kappa\}} := k_{\mathcal{B}} \ln_{\{\kappa\}} \mathcal{Z}_{\{\kappa\}}\ , \tag{52}$$

откуда следует, что $\mathcal{Z}_{\{\kappa\}} = \left(\kappa S^{eq}_{\{\kappa\}}/k_{\mathcal{B}} + \sqrt{1 + \kappa S^{eq}_{\{\kappa\}}/k_{\mathcal{B}}} \right)^{1/\kappa}$.

Продифференцируем теперь логарифм $\ln_{\{\kappa\}} \mathcal{Z}_{\{\kappa\}}$ по множителю Лагранжа β. Используя определение (27) функции $\mathcal{I}_{\{\kappa\}}$, а также соотношения (9), (21) и (49), в результате получим

$$\frac{d}{d\beta}\ln_{\{\kappa\}}(\mathcal{Z}_{\{\kappa\}}) = \frac{\beta}{k_{\mathcal{B}}}\frac{d\mathcal{E}^{eq}_{\{\kappa\}}}{d\beta} + \frac{\mathcal{E}_{\{\kappa\}}}{k_{\mathcal{B}}} + \frac{d}{d\beta}\int u_{\{\kappa\}}\left(p^{eq}(\boldsymbol{r})\right)p^{eq}(\boldsymbol{r})d\Gamma =$$

$$= \frac{\beta}{k_{\mathcal{B}}}\frac{d\mathcal{E}^{eq}_{\{\kappa\}}}{d\beta} + \frac{\mathcal{E}_{\{\kappa\}}}{k_{\mathcal{B}}} + \int\left\{u_{\{\kappa\}}(p^{eq})\frac{dp^{eq}}{d\beta} + p^{eq}\frac{du_{\{\kappa\}}(p^{eq})}{d\beta}\right\}d\Gamma =$$

$$= \frac{\beta}{k_{\mathcal{B}}}\frac{\mathcal{E}^{eq}_{\{\kappa\}}}{d\beta} + \frac{\mathcal{E}_{\{\kappa\}}}{k_{\mathcal{B}}} + \int\left\{u_{\{\kappa\}}(p^{eq})\frac{dp^{eq}}{d\beta} - p^{eq}\frac{d}{d\beta}\left(\gamma + \frac{\beta}{k_{\mathcal{B}}}\mathcal{H}(\boldsymbol{r})\right) - u_{\{\kappa\}}(p^{eq})\frac{dp^{eq}}{d\beta}\right\}d\Gamma =$$

$$= \frac{\beta}{k_{\mathcal{B}}}\frac{d\mathcal{E}^{eq}_{\{\kappa\}}}{d\beta} + \frac{\mathcal{E}_{\{\kappa\}}}{k_{\mathcal{B}}} - \int p^{eq}\frac{d}{d\beta}\left(\frac{\beta}{k_{\mathcal{B}}}\mathcal{H}(\boldsymbol{r})\right)d\Gamma = \frac{\beta}{k_{\mathcal{B}}}\frac{d\mathcal{E}^{eq}_{\{\kappa\}}}{d\beta}\ . \qquad (53)$$

Следовательно, для усредненной энергии системы будем иметь

$$\beta\frac{d\mathcal{E}_{\{\kappa\}}}{d\beta} = k_{\mathcal{B}}\frac{d}{d\beta}\ln_{\{\kappa\}}\mathcal{Z}_{\{\kappa\}}\,. \qquad (54)$$

Если продифференцировать экстремальную к-энтропию $S_{\{\kappa\}}(p^{eq})$ по $\mathcal{E}_{\{\kappa\}}$ и учесть соотношения (9), (21) и (47), то в результате получим известное дифференциальное соотношение равновесной термодинамики:

$$\frac{dS_{\{\kappa\}}}{d\mathcal{E}_{\{\kappa\}}} = -k_{\mathcal{B}}\int\frac{d\left[p^{eq}(\boldsymbol{r})\ln_{\{\kappa\}}p^{eq}(\boldsymbol{r})\right]}{dp^{eq}(\boldsymbol{r})}\frac{dp^{eq}(\boldsymbol{r})}{d\mathcal{E}_{\{\kappa\}}}d\Gamma =$$

$$= -k_{\mathcal{B}}\int\frac{d\left[\ln_{\{\kappa\}}p^{eq}(\boldsymbol{r}) + u_{\{\kappa\}}\left(p^{eq}(\boldsymbol{r})\right)\right]}{dp^{eq(\boldsymbol{r})}}\frac{dp^{eq}(\boldsymbol{r})}{d\mathcal{E}_{\{\kappa\}}}d\Gamma = -k_{\mathcal{B}}\lambda\int\ln_{\{\kappa\}}\left(\frac{p^{eq}(\boldsymbol{r})}{\alpha}\right)\frac{dp^{eq}(\boldsymbol{r})}{d\mathcal{E}_{\{\kappa\}}}d\Gamma =$$

$$= k_{\mathcal{B}}\lambda\int\left(\frac{\gamma + \beta k_{\mathcal{B}}^{-1}\mathcal{H}(\boldsymbol{r})}{\lambda}\right)\frac{dp^{eq}}{d\mathcal{E}_{\{\kappa\}}}d\Gamma = \beta. \qquad (55)$$

Здесь использованы условия $\int dp^{eq}d\Gamma = 0$ и $\int\mathcal{H}(\boldsymbol{r})\,dp^{eq}(\boldsymbol{r})\,d\Gamma = d\mathcal{E}_{\{\kappa\}}$.

Определим теперь деформированную свободную энергию Гельмгольца $\mathcal{F}_{\{\kappa\}}$ выражением

$$\mathcal{F}_{\{\kappa\}} := \mathcal{E}_{\{\kappa\}} - \frac{k_{\mathcal{B}}}{\beta}\ln_{\{\kappa\}}(\mathcal{Z}_{\{\kappa\}}), \tag{56}$$

которое при $\kappa \to 0$ совпадает со свободной энергией в классической статистике $\mathcal{F} := \mathcal{E} - \frac{k_{\mathcal{B}}}{\beta}\ln \mathcal{Z}$. Тогда из формул (52), (54) и (56) вытекают следующие дифференциальные термостатические соотношения деформированной статистики Каниадакиса для средних величин:

$$S_{\{\kappa\}} = k_{\mathcal{B}} \ln_{\{\kappa\}}(\mathcal{Z}_{\{\kappa\}}), \quad \mathcal{F}_{\{\kappa\}} \equiv \mathcal{E}_{\{\kappa\}} - \frac{1}{\beta} S_{\{\kappa\}} = \mathcal{E}_{\{\kappa\}} - \frac{k_{\mathcal{B}}}{\beta}\ln_{\{\kappa\}}(\mathcal{Z}_{\{\kappa\}}),$$

$$\beta = \frac{dS_{\{\kappa\}}}{d\mathcal{E}_{\{\kappa\}}} = k_{\mathcal{B}} \frac{d\ln_{\{\kappa\}}(\mathcal{Z}_{\{\kappa\}})}{d\mathcal{E}_{\{\kappa\}}}, \quad \beta \frac{d\mathcal{E}_{\{\kappa\}}}{d\beta} = k_{\mathcal{B}} \frac{d}{d\beta}\ln_{\{\kappa\}} \mathcal{Z}_{\{\kappa\}}, \quad \mathcal{E}_{\{\kappa\}} = \frac{d(\beta \mathcal{F}_{\{\kappa\}})}{d\beta}. \tag{57}$$

Усреднение микроскопических динамических величин

Здесь важно подчеркнуть, что величина $\mathcal{Z}_{\{\kappa\}}$ определяется относительно внутренней энергии $\mathcal{E}_{\{\kappa\}}$ системы (см. (51)). Иногда удобнее использовать другое определение этой величины, задаваемое выражением (Scarfone, Wada, 2006)

$$\ln_{\{\kappa\}} \ddot{\mathcal{Z}}_{\{\kappa\}} := \ln_{\{\kappa\}} \mathcal{Z}_{\{\kappa\}} - k_{\mathcal{B}}^{-1}\beta \mathcal{E}_{\{\kappa\}} = \mathcal{I}_{\{\kappa\}} + \gamma, \tag{51*}$$

которое не зависит от выбора нуля энергии и при условии $\kappa \to 0$ обращается в хорошо известную формулу для классического статистического интеграла $\mathcal{Z}$, связаного с множителем Лагранжа γ соотношением $\ln \mathcal{Z} = 1 + \gamma$. В этом случае уравнения равновесной термодинамики (50) принимают почти классическую форму

$$S_{\{\kappa\}} = \beta\left(\mathcal{E}_{\{\kappa\}} - \ddot{\mathcal{F}}_{\{\kappa\}}\right), \quad dS_{\{\kappa\}} = \beta\, d\mathcal{E}_{\{\kappa\}},$$

$$\ddot{\mathcal{F}}_{\{\kappa\}} = -\frac{k_{\mathcal{B}}}{\beta}\ln_{\{\kappa\}} \ddot{\mathcal{Z}}_{\{\kappa\}}, \quad \mathcal{E}_{\{\kappa\}} = \frac{d(\beta \ddot{\mathcal{F}}_{\{\kappa\}})}{d\beta}, \quad C_{\{\kappa\}} = -\beta^2 \frac{d\mathcal{E}_{\{\kappa\}}}{d\beta}. \tag{58}$$

С помощью деформированного канонического распределения Гиббса (47) можно вычислить также среднее значение любой динамической переменной $\mathcal{A}_j(\boldsymbol{r})$. Дифференцируя для этого логарифм статистического интеграла $\ddot{\mathcal{Z}}_{\{\kappa\}}$ по микроскопической энергии $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\boldsymbol{r})$ и учитывая (49), в результате получим:

$$\frac{d}{d\mathcal{H}}\ln_{\{\kappa\}}\ddot{\mathcal{Z}}_{\{\kappa\}}=\frac{d}{d\mathcal{H}}\left(\mathcal{I}_{\{\kappa\}}+\gamma\right)=\frac{d\gamma}{d\mathcal{H}}+\int\frac{d}{dp^{eq}}\left[p^{eq}u_{\{\kappa\}}(p^{eq})\right]\frac{dp^{eq}}{d\mathcal{H}}d\Gamma=$$

$$=\frac{d\gamma}{d\mathcal{H}}+\int\left(u_{\{\kappa\}}(p^{eq})+p^{eq}\frac{du_{\{\kappa\}}(p^{eq})}{dp^{eq}}\right)\frac{dp^{eq}}{d\mathcal{H}}d\Gamma=$$

$$=\frac{d\gamma}{d\mathcal{H}}+\int\left(-p^{eq}\frac{d}{dp^{eq}}\left(\gamma+\frac{\beta}{k_{\mathcal{B}}}\mathcal{H}(\boldsymbol{r})\right)\right)\frac{dp^{eq}}{d\mathcal{H}}d\Gamma=$$

$$=\frac{d\gamma}{d\mathcal{H}}+\int\left(-p^{eq}\frac{d}{d\mathcal{H}}\left(\gamma+\frac{\beta}{k_{\mathcal{B}}}\mathcal{H}(\boldsymbol{r})\right)\right)d\Gamma=-\frac{\beta}{k_{\mathcal{B}}}p^{eq}. \qquad (59)$$

При написании соотношения (59) нами было использовано преобразование

$$\frac{du_{\{\kappa\}}(p^{eq})}{dp^{eq}}=-\frac{u_{\{\kappa\}}(p^{eq})}{p^{eq}}-\frac{d}{dp^{eq}}\left(\gamma+\frac{\beta}{k_{\mathcal{B}}}\mathcal{H}(\boldsymbol{r})\right), \qquad (60)$$

полученное с учетом соотношения (49) и формулы $d(\ln_{\{\kappa\}}x)/dx=x^{-1}u_{\{\kappa\}}x$.

Таким образом, зная к -свободную энергию Гельмгольца $\mathcal{F}_{\kappa}$ (58), можно вычислить равновесную функцию распределения

$$p^{eq}(\boldsymbol{r})=-\frac{k_{\mathcal{B}}}{\beta}\frac{d}{d\mathcal{H}}\ln_{\{\kappa\}}\ddot{\mathcal{Z}}_{\{\kappa\}}=\frac{d\ddot{\mathcal{F}}_{\{\kappa\}}}{d\mathcal{H}}. \qquad (61)$$

Отсюда следует, что усредненные значения микроскопических динамических переменных $\mathcal{A}_j(\boldsymbol{r})$ могут быть найдены при использовании функций $\ddot{\mathcal{Z}}_{\{\kappa\}}$ или $\mathcal{F}_{\kappa}$:

$$\langle\mathcal{A}_j\rangle_{\kappa}\equiv\int p^{eq}(\boldsymbol{r})\mathcal{A}_j(\boldsymbol{r})d\Gamma=$$

$$=-\frac{k_{\mathcal{B}}}{\beta}\int\mathcal{A}_j(\boldsymbol{r})\frac{d}{d\mathcal{H}}\ln_{\{\kappa\}}\left(\ddot{\mathcal{Z}}_{\{\kappa\}}\right)d\Gamma=\int\mathcal{A}_j(\boldsymbol{r})\frac{d\ddot{\mathcal{F}}_{\kappa}}{d\mathcal{H}}d\Gamma. \qquad (62)$$

Выше было отмечено, что для системы, которая находится в состоянии статистического квазиравновесия, функция Гамильтона $\mathcal{H}=\mathcal{H}(\boldsymbol{r},\{a_j\})$ может зависеть от ряда внешних параметров $a_1,a_2,...a_s$, которые можно рассматри-

вать как обобщенные координаты системы. Определим теперь обобщенные силы $\mathcal{A}_j(\boldsymbol{r})$ по аналогии с классической статистикой соотношениями (см., например, Зубарев, 1971)

$$\mathcal{A}_j(\boldsymbol{r}) = -d\mathcal{H}(\boldsymbol{r},\{a_j\}) / d\,a_j . \tag{63}$$

Тогда наблюдаемые значения обобщенных сил $\mathcal{A}_j(\boldsymbol{r})$, равные среднему значению по равновесному статистическому ансамблю, могут быть вычислены следующим образом:

$$\langle \mathcal{A}_j \rangle_{\text{к}} = \int \mathcal{A}_j(\boldsymbol{r}) p^{eq}(\boldsymbol{r}) d\Gamma = -\int \frac{d\mathcal{H}(\boldsymbol{r},\{a_j\})}{d\,a_j} p^{eq}(\boldsymbol{r}) d\Gamma =$$

$$= \frac{k_{\mathcal{B}}}{\beta} \int \frac{d\mathcal{H}}{da_j} \frac{d \ln_{\{\text{к}\}} \ddot{\mathcal{Z}}_{\{\text{к}\}}}{d\mathcal{H}} d\Gamma = \frac{k_{\mathcal{B}}}{\beta} \int \frac{d \ln_{\{\text{к}\}} \ddot{\mathcal{Z}}_{\{\text{к}\}}}{da_j} d\Gamma = -\frac{d\ddot{\mathcal{F}}_{\text{к}}}{da_j} . \tag{64}$$

4. Условие равновесия и закон композиции энергии для систем с энтропией Каниадакиса

Нахождение условия термодинамического равновесия двух независимых систем требует привлечения законов композиции для энтропий и энергий. В статистической термодинамике Больцмана–Гиббса эти законы имеют свойство аддитивности. Для неэкстенсивных κ-систем важным является свойство псевдоаддитивности энтропий, которое в данной работе не распространяется на энергии. Это приводит к равенству так называемых физических температур для двух независимых κ-систем, при сохранении усреднения физических величин нормированным распределением (см.(5)).

Начиная с работы (Tsallis и др., 1998), имеет место дискуссия по методу усреднения функции Гамильтона $\mathcal{H} = \mathcal{H}\left(\boldsymbol{r}\right)$ и, соответственно, по закону композиции осреднённых энергий двух независимых κ-систем. В основном предполагается аддитивность функции Гамильтона

$$\mathcal{H}^{(12)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \mathcal{H}^{(1)}(\boldsymbol{r}_1) + \mathcal{H}^{(2)}(\boldsymbol{r}_2), \tag{65}$$

которой мы здесь воспользуемся. Тогда усреднение (65) нормированным κ-распределением Каниадакиса приводит к следующему закону аддитивности усреднённых энергий:

$$\mathcal{E}_{\text{к}}^{(12)} = \mathcal{E}_{\text{к}}^{(1)} + \mathcal{E}_{\text{к}}^{(2)}, \tag{66}$$

где

$$\mathcal{E}_{\kappa}^{(12)}=\iint p^{eq}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)\mathcal{H}^{(12)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)d\Gamma_1 d\Gamma_2\,,$$

$$\mathcal{E}_{\kappa}^{(1)}=\int p^{eq}(\boldsymbol{r}_1)\mathcal{H}^{(1)}(\boldsymbol{r}_1)d\Gamma_2 \quad \mathcal{E}_{\kappa}^{(2)}=\int p^{eq}(\boldsymbol{r}_2)\mathcal{H}^{(2)}(\boldsymbol{r}_2)d\Gamma_2.$$

Варьирование условия (66) аддитивности усреднённой энергии $\mathcal{E}_{\kappa}^{(12)}$ и условия квазиаддитивности (28) совокупной энтропии $S_{\kappa}^{(12)}$ (записанного в виде $S_{\kappa}^{(12)}=S_{\{\kappa\}}^{(1)}\mathcal{I}_{\{\kappa\}}^{(2)}+S_{\{\kappa\}}^{(2)}\mathcal{I}_{\{\kappa\}}^{(1)}$) равновесной замкнутой системы с постоянными значениями энергии $\mathcal{E}_{\kappa}^{(12)}=const$ и энтропии $S_{\kappa}^{(12)}=const$ приводит к равенствам:

$$\delta\mathcal{E}_{\kappa}^{(12)}=\delta\mathcal{E}_{\kappa}^{(1)}+\delta\mathcal{E}_{\kappa}^{(2)}=0, \tag{67}$$

$$\delta S_{\kappa}^{(12)}=\mathcal{I}_{\{\kappa\}}^{(2)}\delta S_{\{\kappa\}}^{(1)}+S_{\{\kappa\}}^{(1)}\delta\mathcal{I}_{\{\kappa\}}^{(2)}+\mathcal{I}_{\{\kappa\}}^{(1)}\delta S_{\{\kappa\}}^{(2)}+S_{\{\kappa\}}^{(2)}\delta\mathcal{I}_{\{\kappa\}}^{(1)}=0\,. \tag{68}$$

В итоге, учитывая формулу (50) для экстремального значения энтропии Каниадакиса, записанную для равновесного состояния κ-системы (при использовании (57)), в виде

$$S_{\{\kappa\}}^{(r)}=k_{\mathcal{B}}(\mathcal{I}_{\{\kappa\}}^{(r)}+\gamma_r)+\frac{\delta S_{\{\kappa\}}^{(r)}}{\delta\mathcal{E}_{\{\kappa\}}^{(r)}}\mathcal{E}_{\{\kappa\}}^{(r)}\,,\ (r=1,2), \tag{69}$$

получим условие

$$\frac{1}{\mathcal{I}_{\{\kappa\}}^{(1)}}\frac{\delta S_{\{\kappa\}}^{(1)}}{\delta\mathcal{E}_{\{\kappa\}}^{(1)}}=\frac{1}{\mathcal{I}_{\{\kappa\}}^{(2)}}\frac{\delta S_{\{\kappa\}}^{(2)}}{\delta\mathcal{E}_{\{\kappa\}}^{(2)}},\ \text{где}\ \ \frac{\delta S_{\{\kappa\}}^{(r)}}{\delta\mathcal{E}_{\{\kappa\}}^{(r)}}=\beta^{(r)},\ \ (r=1,2). \tag{70}$$

Это условие удовлетворяется тождественно только при равенстве так называемых физических температур

$$T_{ph}:=\mathcal{I}_{\{\kappa\}}^{eq}T,\ \text{где}\qquad \frac{\delta S_{\{\kappa\}}}{\delta\mathcal{E}_{\{\kappa\}}}=\beta\equiv\frac{1}{T}, \tag{71}$$

двух независимых κ-систем при их тепловом контакте. Отношение эквивалентности (71) является обобщением нулевого закона термодинамики на неэкстенсивные системы, описываемые статистикой Каниадакиса. Оно показывает что в отличие от классического случая физическая температура T_{ph} не является обратной величиной множителя Лагранжа, β^{-1}, но определяется соотношением $T_{ph}(p)\equiv\mathcal{I}_{\{\kappa\}}/\beta$. Если $\kappa=0$, то $T_{ph}\equiv T$ и законы композиции всех средних и

микроскопических величин становятся аддитивными. Подчеркнём важный факт, что температуры $T=1/\beta$ и $T_{ph}\equiv\mathcal{I}^{eq}_{\{\kappa\}}/\beta$ не зависят от выбора нуля энергий, и поэтому они допускают физическую интерпретацию. Вместе с тем, переопределение эффективной температуры в κ-статистике противоречит основным принципам классической термодинамики, где абсолютная температура T является интенсивным параметром, а не функционалом $T_{ph}(p)$.

В связи с этим сделаем следующее общее замечание. В большинстве неэкстенсивных систем важную роль играют длинномасштабные пространственно-временные корреляции в фазовом или геометрическом пространстве. Это означает, в частности, что существенное значение имеет та часть внутренней энергии системы, которая связана с силовым взаимодействием отдалённых друг от друга её частей, а именно потенциальная энергия. В классической статистике внутренняя энергия определяется, как правило, суммой кинетических энергий всех молекул совокупной системы. В такой системе «тепловой баланс» достигается в основном за счёт локального теплообмена между близко расположенными её частями, т.е. «тепло» связано с передачей кинетической энергии молекулами. Поскольку физическая температура T_{ph} отвечает за «глобальный тепловой баланс» между различными частями системы, то её энергетический баланс будет сильно отличаться от локального теплового баланса. Локальный тепловой баланс, как известно, можно охарактеризовать абсолютной обратной температурой $\beta=1/T$, измеряемой термометром. Однако любое измерение физической температуры T_{ph} нереально, что связано с наличием коэффициента, $\mathcal{I}^{eq}_{\{\kappa\}}$ зависящего, согласно (27), от параметра деформации κ системы:

$$\mathcal{I}^{eq}_{\{\kappa\}}=\int p^{eq}\sqrt{1+\kappa^2\ln^2_{\{\kappa\}}(p^{eq})}d\Gamma\,.$$

Этот факт неизбежно должен приводить к модификации полученных выше термодинамических соотношений (57) и (58), включая определение термодинамической энтропии Клаузиуса. В работе (Abe и др., 2001; Abe, Okamoto, 2001), в качестве основных предпосылок, взятых за исходный пункт построения модифицированной макроскопической термодинамики Тсаллиса, выбраны первый закон термодинамики и структура преобразования Лежандра. Далее мы также воспользуемся этим подходом при разработке макроскопической термодинамики в рамках статистики Каниадакиса на основе энтропии Клаузиуса.

5. Деформированные термодинамические соотношения

Покажем теперь, как сконструировать неэкстенсивную макроскопическую термодинамику на основе энтропии Клаузиуса с использованием результатов микроскопической неаддитивной статистики.

Для этой цели введём прежде всего, по аналогии с физической температурой T_{ph}, физическое давление P_{qh} путём рассмотрения механического равновесия двух независимых κ-систем, представляющих собой общую замкнутую систему с постоянными значениями энтропии $S^{(12)}_{\{\kappa\}} = const$ и объёма $V^{(12)} = V^{(1)} + V^{(2)} = const$. В этом случае энтропия совокупной системы должна экстремизироваться с фиксацией общего объёма. В результате получим

$$\frac{1}{\mathcal{I}^{(1)}_{\{\kappa\}}} \frac{\delta S^{(1)}_{\{\kappa\}}}{\delta V^{(1)}} = \frac{1}{\mathcal{I}^{(2)}_{\{\kappa\}}} \frac{\delta S^{(2)}_{\{\kappa\}}}{\delta V^{(2)}} = \frac{P_{ph}}{T_{ph}}, \tag{72}$$

где P_{ph} – так называемое физическое давление, которое определяется соотношением

$$P_{ph} := \frac{T_{ph}}{\mathcal{I}^{eq}_{\{\kappa\}}} \frac{\delta S^{eq}_{\{\kappa\}}}{\delta V}. \tag{73}$$

С учетом введенных таким способом физических температуры и давления определим макроскопическую энтропию Клаузиуса. Рассмотрим для этого структуру преобразования Лежандра. Уравнение (55) $\beta = dS_{\{\kappa\}} / d\mathcal{E}_{\{\kappa\}}$ указывает на то, что параметры β и $\mathcal{E}_{\{\kappa\}}$ образуют пару переменных Лежандра. Это приводит к следующему определению свободной энергии Гельмгольца (изохорно-изотермического потенциала) (см.(57)):

$$\mathcal{F}_{\{\kappa\}}(T) := \mathcal{E}_{\{\kappa\}} - TS_{\{\kappa\}} = \mathcal{E}_{\{\kappa\}} - k_{\mathcal{B}} T \ln_{\{\kappa\}} \mathcal{Z}_{\{\kappa\}}. \tag{74}$$

Это определение, однако, неудовлетворительно с точки зрения деформированной термодинамики. Свободная энергия должна зависеть от физической температуры T_{ph}, а не от переменной $T := 1/\beta$.

По аналогии с подходом, предложенным в работе (Abe, 2000) при модификации первого закона термодинамики в статистике Тсаллиса, переопределим макроскопическую κ-свободную энергию (74) следующим образом:

$$\mathcal{F}_{\{\kappa\}}(T_{ph}) := \mathcal{E}_{\{\kappa\}} - k_{\mathcal{B}} T_{ph} \ln \mathcal{Z}_{\{\kappa\}}, \tag{75}$$

что отличается от соответствующего выражения в традиционной термодинамике. Используя соотношения (51), (52) и (71), можно убедиться, что переопределённая таким образом свободная энергия $\mathcal{F}_{\{\kappa\}}$ является функцией T_{ph}. Дифференцируя функцию $\mathcal{F}_{\{\kappa\}}$, в результате получим

$$d\mathcal{F}_{\{\kappa\}} = d\,\mathcal{E}_{\{\kappa\}} - k_{\mathcal{B}} \ln \mathcal{Z}_{\{\kappa\}} dT_{ph} - T_{ph} w_{\{\kappa\}} dS_{\{\kappa\}} . \tag{76}$$

При написании (76) использовано выражение

$$d \ln \mathcal{Z}_{\{\kappa\}} = \frac{1}{k_{\mathcal{B}}} \frac{1}{u_{\{\kappa\}}(\mathcal{Z}_{\{\kappa\}})} dS_{\{\kappa\}} = \frac{w_{\{\kappa\}}}{k_{\mathcal{B}}} dS_{\{\kappa\}} , \tag{77}$$

полученное с учетом соотношений (9), (21) и (52). Здесь для весовой функции введено следующее обозначение $w_{\{\kappa\}} := 1 / \sqrt{1 + \left(\kappa S^{eq}_{\{\kappa\}} / k_{\mathcal{B}} \right)^2}$.

Если теперь использовать первый закон термодинамики

$$d'Q_{\{\kappa\}} = d\mathcal{E}_{\{\kappa\}} + P_{ph} dV , \tag{78}$$

где $Q_{\{\kappa\}}$ – количество теплоты, подводимое к термодинамической κ-системе (или отводимое от неё), то (76) можно переписать в виде

$$d\mathcal{F}_{\{\kappa\}} = d'Q_{\{\kappa\}} - P_{ph} dV - k_{\mathcal{B}} \ln \mathcal{Z}_{\{\kappa\}} dT_{ph} - T_{ph} w_{\{\kappa\}} dS_{\{\kappa\}} . \tag{79}$$

Отсюда следует, переопределение термодинамической энтропии Клаузиуса для неаддитивных систем:

$$d\tilde{S}_{\{\kappa\}} = d'Q_{\{\kappa\}} / w_{\{\kappa\}} T_{ph} . \tag{80}$$

Введем теперь следующие характеристические функции: обобщённую энтальпию $H_{\{\kappa\}} = \mathcal{E}_{\{\kappa\}} + P_{ph} V$ и обобщённый термодинамический потенциал $G_{\{\kappa\}} = \mathcal{F}_{\{\kappa\}} + P_{ph} V$. Напомним, что все характеристические функции обладают следующим свойством: если известна характеристическая функция, выраженная через соответствующие (свои для каждой функции) переменные, то с ее помощью можно вычислить любую термодинамическую величину. В этом нетрудно убедиться из уравнений

$$d\mathcal{E}_{\{\kappa\}} = T_{ph} w_{\{\kappa\}} d\tilde{S}_{\{\kappa\}} - P_{ph} dV , \tag{81}$$

$$dH_{\{\kappa\}} = T_{ph} w_{\{\kappa\}} d\tilde{S}_{\{\kappa\}} + V dP_{ph} , \tag{82}$$

$$d\mathcal{F}_{\{\kappa\}} = - k_{\mathcal{B}} \ln \mathcal{Z}_{\{\kappa\}} dT_{ph} - P_{ph} dV , \tag{83}$$

$$dG_{\{\kappa\}} = -k_{\mathcal{B}} \ln \mathcal{Z}_{\{\kappa\}} dT_{ph} + P_{ph} dV, \tag{84}$$

из которых следуют обобщённые термодинамические соотношения

$$\left(\frac{\partial \mathcal{E}_{\{\kappa\}}}{\partial V}\right)_{\tilde{S}_{\{\kappa\}}} = \left(\frac{\partial \mathcal{F}_{\{\kappa\}}}{\partial V}\right)_{T_{ph}} = -P_{ph}, \quad \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{\{\kappa\}}}{\partial S_{\{\kappa\}}}\right)_{V} = \left(\frac{\partial H_{\{\kappa\}}}{\partial S_{\{\kappa\}}}\right)_{P_{ph}} = T_{ph} w_{\{\kappa\}}, \tag{85}$$

$$\left(\frac{\partial H_{\{\kappa\}}}{\partial P_{ph}}\right)_{\tilde{S}_{\{\kappa\}}} = \left(\frac{\partial G_{\{\kappa\}}}{\partial P_{ph}}\right)_{T_{ph}} = V, \quad \left(\frac{\partial \mathcal{F}_{\{\kappa\}}}{\partial T_{ph}}\right)_{V} = \left(\frac{\partial \mathcal{G}_{\{\kappa\}}}{\partial T_{ph}}\right)_{P_{ph}} = k_{\mathcal{B}} \ln \mathcal{Z}_{\{\kappa\}}. \tag{86}$$

Уравнение для теплоёмкостей

Как известно, в классической термодинамике теплоёмкость вещества в наиболее общем виде определяется следующим образом:

$$C_z := T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_z.$$

Здесь C_z – теплоёмкость в таком процессе, в котором сохраняется постоянным параметр z, где z – любые обобщённые координаты. Наиболее распространёнными являются изобарная теплоёмкость и изохорная теплоёмкость, которые в нашем случае определим соотношениями:

$$C_p := T_{ph} w_{\{\kappa\}} \left(\frac{\partial \tilde{S}_{\{\kappa\}}}{\partial T_{ph}}\right)_{P_{ph}}, \quad C_V := T_{ph} w_{\{\kappa\}} \left(\frac{\partial \tilde{S}_{\{\kappa\}}}{\partial T_{ph}}\right)_{V}. \tag{87}$$

Так как в соответствии с формулой $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_z \left(\frac{\partial u)}{\partial x}\right)_z$ (справедливой для случая двух переменных, когда $y = y(x,z)$ и $u = u(x,z)$) имеем

$$\left(\frac{\partial \tilde{S}_{\{\kappa\}}}{\partial T_{ph}}\right)_{P_{ph}} = \left(\frac{\partial \tilde{S}_{\{\kappa\}}}{\partial H_{\{\kappa\}}}\right)_{P_{ph}} \left(\frac{\partial H_{\{\kappa\}}}{\partial T_{ph}}\right)_{P_{ph}} \text{ и } \left(\frac{\partial \tilde{S}_{\{\kappa\}}}{\partial T_{ph}}\right)_{V} = \left(\frac{\partial \tilde{S}_{\{\kappa\}}}{\partial \mathcal{E}_{\{\kappa\}}}\right)_{V} \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{\{\kappa\}}}{\partial T_{ph}}\right)_{V}, \tag{88}$$

а из (85) и (86) следует, что $\left(\frac{\partial \tilde{S}_{\{к\}}}{\partial H_{\{к\}}}\right)_{P_{ph}} = \frac{1}{w_{\{к\}} T_{ph}}$, $\left(\frac{\partial \tilde{S}_{\{к\}}}{\partial \mathcal{E}_{\{к\}}}\right)_{V} = \frac{1}{w_{\{к\}} T_{ph}}$, то соотношения (87) можно записать в виде

$$C_p = \left(\frac{\partial H_{\{к\}}}{\partial T_{ph}}\right)_{P_{ph}}, \quad C_V = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{\{к\}}}{\partial T_{ph}}\right)_{V}. \tag{89}$$

Уравнение, устанавливающее связь между теплоёмкостями C_p и C_V, может быть получено следующим образом. В соответствии с соотношением (см. Сычев, 1991)

$$\left(\frac{\partial z}{\partial m}\right)_n = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial m}\right)_n + \left(\frac{\partial z)}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial m}\right)_n, \tag{90}$$

являющимся следствием выражения для полного дифференциала функции $z = z(x, y)$, можно получить (полагая в (90) $m = x$) уравнение

$$\left(\frac{\partial \tilde{S}_{\{к\}}}{\partial T_{ph}}\right)_{P_{ph}} = \left(\frac{\partial \tilde{S}_{\{к\}}}{\partial T_{ph}}\right)_{V} + \left(\frac{\partial \tilde{S}_{\{к\}}}{\partial V}\right)_{T_{ph}} \left(\frac{\partial V}{\partial T_{ph}}\right)_{P_{ph}}. \tag{91}$$

Отсюда, при использовании уравнения Максвелла $(\partial S_{\{к\}}/\partial V)_{T_{ph}} = (\partial P_{ph}/T_{ph})_V$, следует

$$C_p - C_V = w_{\{к\}}^2 T_{ph} \left(\frac{\partial P_{ph}}{\partial T_{ph}}\right)_{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T_{ph}}\right)_{P_{ph}}. \tag{92}$$

Это выражение может быть представлено и в другом виде, если использовать так называемую «*связку трёх производных*» $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -1$ (следствие соотношения (90) при $m = x,\ n = z$), из которой следует

$$\left(\frac{\partial P_{ph}}{\partial T_{ph}}\right)_{V} = -\left(\frac{\partial V}{\partial T_{ph}}\right)_{P_{ph}} \left(\frac{\partial P_{ph}}{\partial V}\right)_{T_{ph}}. \tag{93}$$

С учётом этого соотношения связь между теплоёмкостями приобретает почти классический вид:

$$C_p - C_V = -w_{\{\kappa\}}^2 T_{ph} \left(\frac{\partial V}{\partial T_{ph}} \right)_{P_{ph}}^2 \Big/ \left(\frac{\partial V}{\partial P_{ph}} \right)_{T_{ph}} . \qquad (94)$$

Таким образом, применяя обобщенную энтропию Клаузиуса к сложной неэкстенсивной системе, мы получили основной набор неэкстенсивных термодинамических соотношений. Полученная стандартная форма соотношений (85), (86) и (94) в термодинамике Каниадакиса позволяет заключить, что они остаются инвариантными относительно неаддитивной модификации их классических аналогов. Заметим, что в дополнение к структуре Лежандра различные другие важные теоремы и свойства остаются κ-инвариантными (см. Tsallis, 2009). К сожалению, при таком подходе весовой коэффициент энтропии $w_{\{\kappa\}}$, связывающий микроскопические и макроскопические величины, никогда не может быть исключен из неэкстенсивной макроскопической термодинамики.

6. Дивергенция Бергмана. Обобщенная *H*-теорема

Порожденная энтропией $S_{\{\kappa\}}$ дивергенция Брегмана (см. Bregman, 1967; Cichocki, Amari, 2010)

$$D_{\{\kappa\}}\left[p : p_0\right] := S_{\{\kappa\}}(p_0(\boldsymbol{r})) - S_{\{\kappa\}}(p(\boldsymbol{r})) +$$

$$+\lambda k_{\mathcal{B}} \int \left(p_0(\boldsymbol{r}) - p(\boldsymbol{r})\right) \ln_{\{\kappa\}} \left(\frac{p_0(\boldsymbol{r})}{\alpha} \right) d\Gamma \geq 0 \qquad (95)$$

относится к наиболее существенным статистическим характеристикам неэкстенсивной динамической κ-системы Каниадакиса (Scarfone, 2018). Являясь функционалом, она определяет меру статистической упорядоченности в микросостояниях системы с распределением $p(\boldsymbol{r})$ относительно состояния с распределением $p_0(\boldsymbol{r})$. Выражение (95) представляет собой функционал для двух нормированных распределений $\int p(\boldsymbol{r}) d\Gamma = \int p_0(\boldsymbol{r}) d\Gamma = 1$.

Различные свойства дивергенции Брегмана можно найти в работе (Cichocki, Amari, 2010). Здесь же мы отметим, что величина $D_{\{\kappa\}}(p : p_0)$ является вещественным, положительным, выпуклым (в первом аргументе) функционалом. Легко видеть, что при $\kappa \to 0$ эта величина переходит в различающую информацию Кульбака–Лейблера (см. Кульбак, 1967; Зарипов, 2010)

$$D_{\{\kappa\}\to 0}(p : p_0) \Rightarrow K(p : p_0) := k_{\mathcal{B}} \iint p(\boldsymbol{r}) \ln \left(\frac{p(\boldsymbol{r})}{p_0(\boldsymbol{r})} \right) d\Gamma . \qquad (96)$$

Кроме этого, поскольку при $p = p_0$ имеет место равенство $D_{\{\kappa\}}(p:p) = 0$, то дивергенция Брегмана является функцией Ляпунова[1)].

Принцип максимума энтропии равновесного распределения

Пусть распределение $p_0(\boldsymbol{r})$ является равновесным, для которого справедливо представление (47): $p_0(\boldsymbol{r}) = \alpha \exp_{\{\kappa\}}\{-\mathcal{X}(\boldsymbol{r})/\lambda\}$, а распределение $p(\boldsymbol{r})$ соответствует произвольному состоянию системы. Кроме этого, будем полагать, что для обоих представлений справедливо соотношение (так называемое, условие Гиббса, $\mathcal{E}_{\{\kappa\}} = \mathcal{E}^{eq}_{\{\kappa\}}$):

$$\int p_0(\boldsymbol{r})\mathcal{X}(\boldsymbol{r})d\Gamma = \int p(\boldsymbol{r})\mathcal{X}(\boldsymbol{r})d\Gamma, \quad \text{где} \quad \mathcal{X}(\boldsymbol{r}) := \gamma + \frac{\beta}{k_{\mathcal{B}}}\mathcal{H}(\boldsymbol{r}). \tag{97}$$

Покажем, что в этом случае справедливо следующее равенство

$$\int \big(p_0(\boldsymbol{r}) - p(\boldsymbol{r})\big)\ln_{\{\kappa\}}\big(p_0(\boldsymbol{r})\big)d\Gamma = \int \big(p(\boldsymbol{r}) - p_0(\boldsymbol{r})\big)u_{\{\kappa\}}\big(p_0(\boldsymbol{r})\big)d\Gamma. \tag{98}$$

Действительно, поскольку в силу (21) и (47), мы имеем

$$u_{\{\kappa\}}(p_0) = -\ln_{\{\kappa\}}(p_0) - \lambda \ln_{\{\kappa\}}(\alpha / p_0) = -\ln_{\{\kappa\}}(p_0) - \mathcal{X}, \tag{99}$$

то отсюда, при учете (97), следует соотношение (98).

Из определения дивергенции Брегмана (95) при учете тождества (97) и справедливости принятых выше предположений, следует соотношение

$$S_{\{\kappa\}}(p(\boldsymbol{r})) = S_{\{\kappa\}}(p_0(\boldsymbol{r})) - D_{\{\kappa\}}\big[p:p_0\big] + k_{\mathcal{B}}\int \big(p_0(\boldsymbol{r}) - p(\boldsymbol{r})\big)\mathcal{X}d\Gamma =$$

$$= S^{eq}_{\{\kappa\}}(p_0(\boldsymbol{r})) - D_{\{\kappa\}}\big[p:p_0\big], \tag{100}$$

где информация различия представлена в виде отрицательного вклада в энтропию и называется негэнтропией. Понятие негэнтропии, т.е. изменения энтропии с обратным знаком, было предложено Э. Шредингером (1947). В общем случае выполняется негэнтропийный принцип Бриллюэна (1960)

$$D_{\{\kappa\}}\big[p:p_0\big] + S_{\{\kappa\}}(p(\boldsymbol{r})) - S^{eq}_{\{\kappa\}}(p_0(\boldsymbol{r})) \geq 0, \tag{101}$$

[1)] Напомним, что функцией Ляпунова называется знакоопределённая функция, которая обращается в нуль в точке равновесия системы. Состояние равновесия является аттрактором, когда производная по времени от функции Ляпунова имеет знак, противоположный знаку самой функции.

где знак неравенства соответствует необратимым процессам в замкнутой системе. Из неравенства (100) следует, что энтропия равновесного состояния больше, чем энтропия произвольного состояния, $S_{\{\kappa\}}(p(\boldsymbol{r})) \le S^{eq}_{\{\kappa\}}$.

Теорема Гиббса и *H*-теорема

Как известно, открытая система представляет собой часть большой замкнутой системы и находится с внешним окружением в неравновесном контакте. В окружении отсутствуют неравновесные явления, и можно считать, что она находится в равновесном состоянии с распределением $p_0(\boldsymbol{r})$. Сравнивая значения энтропий при условии Гиббса (97), получим из (100) теорему Гиббса в виде неравенства

$$D_{\{\kappa\}}\left[p : p_0\right] = -\left[S_{\{\kappa\}}(p(\boldsymbol{r}),t) + S_{\{\kappa\}}(p_0(\boldsymbol{r}))\right] \ge 0. \qquad (102)$$

Таким образом, увеличение энтропии системы до ее максимального значения в равновесии происходит совместно с потерей информации различия, то есть имеет место совместное увеличение статистической разупорядочпнности и уменьшение статистической упорядоченности микросостояний неэкстенсивной системы.

Поскольку согласно свойству выпуклости (Cichocki, Amari, 2010) дивергенции Брегмана $D_{\{\kappa\}}\left[p : p_0\right]$ является знакоопределенной функцией Ляпунова, то для того, чтобы состояние полного равновесия $p_0(\boldsymbol{r})$ было устойчивым, необходимо выполнение следующего неравенства

$$\frac{d}{dt} D_{\{\kappa\}}\left[p : p_0\right] = -\frac{d}{dt}\left[S_{\{\kappa\}}(p(\boldsymbol{r}),t) - S^{eq}_{\{\kappa\}}(p_0(\boldsymbol{r}))\right] \le 0. \qquad (103$$

Таким образом, при стремлении κ-системы к равновесному состоянию во временной эволюции информация различия уменьшается. Из (102) следует H-теорема для открытых неравновесных неэкстенсивных κ-систем (неравенство для энтропии Каниадакиса)

$$\frac{d}{dt} S_{\{\kappa\}}(p(\boldsymbol{r}),t) > 0, \qquad (104)$$

которая справедлива при приближении к состоянию полного статистического равновесия. Эта теорема утверждает, что κ-энтропия системы непрерывно растет в направлении равновесия, где энтропия становится максимальной и достигает конечного значения. Таким образом, происходит хаотизация макроскопической системы Каниадакиса при спонтанных переходах.

Заметим, что тот факт, что к-энтропия квазиаддитивна и энтропия совокупной системы больше, чем сумма энтропий отдельных подсистем, указывает

на то, что совокупная система термодинамически более стабильна (Landsberg, Vedral, 1998).

7.Заключение

Исследования в области статистической механики и термодинамики неэкстенсивных систем приобретают в настоящее время значительный общетеоретический интерес в связи с проявлениями неэкстенсивных свойств в аномальных физических явлениях и важностью приложений. Диапазон применения разнообразных неэкстенсивных параметрических энтропий в настоящее время постоянно расширяется, охватывая различные направления в науке, такие как космология и космогония, квантовая механика и статистика, специальная и общая теории относительности, стохастическая динамика и фракталы, геофизика, биомедицина и многие другие. В последнее десятилетие κ-статистика Каниадакиса привлекается все больший интерес, поскольку она обладает многими интересными свойствами (принцип максимальной энтропии, термодинамическая устойчивость, устойчивость Леша, непрерывность и т. п.). Это позволяет быть этой статистике одной из самых удачных обобщений статистической механики Больцмана−Гиббса особенно в контексте специальной теории относительности, и полученных распределений, которые наблюдаются в различных физических, природных и искусственных системах.

В настоящей работе даётся логическая схема построения модифицированная термодинамики неэкстенсивных систем, основанная на κ-энтропии. Показано, что энтропия Каниадакиса подчиняется псевдоаддитивному закону для двух статистически независимых подсистем. Положительность энтропии совокупной системы указывает на существование силы притяжения между отдельными подсистемами, и это взаимодействие явно происходит от взаимодействия между их составными частицами. Найдено универсальное распределение степенного закона на основе максимизации энтропии Каниадакиса при заданных ограничениях на усредненные значения параметров системы, полученные по нормированному распределению вероятностей. Получено обобщение нулевого закона термодинамики для двух независимых неэкстенсивных систем при их тепловом контакте, вводящее в рассмотрение так называемую физическую температуру $T_{ph}(p)$, отличающуюся от инверсии множителя Лагранжа β. Этот факт потребовал переопределения ряда термодинамических соотношений, полученных ранее естественным путем в рамках статистики Каниадакиса. В качестве основных предпосылок, взятых за исходный пункт нахождения новых термодинамических соотношений, в работе выбраны первый закон термодинамики и структура преобразования Лежандра. Путем применения обобщенной энтропии Клаузиуса к аномальной κ-системе был получен набор макроскопических термодинамических соотношений для неэкстенсивной κ-системы. Наконец, на основе так называемой дивергенции Брегмана были сформулиро-

ваны и доказаны *H*-теорема и теорема Гиббса, описывающие хаотизацию макроскопической системы Каниадакиса при спонтанных переходах.

Развитый в работе подход позволяет моделировать, в частности, сложные космологические и космогонические среды (от галактик и астрофизических дисков до космической пыли), отличительной чертой которых является наличие динамических структур с нецелой топологической размерностью (фракталов), дальнодействующего силового взаимодействия, а также эридитальности и немарковости эволюционных процессов (Kolesnichenko, 2020).

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ № 18-01-00064.

Список литературы

Бриллюэн Л. Наука и теория информации // М.: ИЛ 1960.392 с.

Зарипов Р.Г. Самоорганизация и необратимость в неэкстенсивных системах // Казань: Фэн. 2002. 251 с.

Зарипов Р.Г. Принципы неэкстенсивной статистической механики и геометрия мер беспорядка и порядка. Казань: Изд-во Казан. Гос. техн. ун-та. 2010. 404 с.

Зубарев Д.П. Неравновесная статистическая механика // М.: Наука, 1971. 416 с.

Колесниченко А.В. К построению неаддитивной термодинамики сложных систем на основе статистики Курадо−Тсаллиса // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018a. № 25. 40 с.

Колесниченко А.В. К конструированию термодинамики неаддитивных сред на основе статистики Тсаллиса−Мендеса−Пластино // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018b. № 23. 28 с.

Колесниченко А.В. К разработке статистической термодинамики и техники фрактального агализ для неэкстенсивнх систем на основе энтропии и различающецй информации Реньи // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018c. № 60. 44 с.

Колесниченко А. В. К построению термодинамики квантовых неэкстенсивных систем в рамках статистики Тсаллиса // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2019a, № 16. 44 с.

Колесниченко А.В. Двухпараметрический энтропийный функционал Шарма-Миттала как основа семейства обобщенных термодинамик неэкстенсивных систем // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2018d, № 104. 35 с.

Колесниченко А.В. К обоснованию в рамках неэкстенсивной статистики Тсаллиса соотношений взаимности Онзагера для кинетических коэффициентов // Mathematica Montisnigri. 2019b. Vol XLIV, pp. 41-59.

Колесниченко А. В. Статистическая механика и термодинамика Тсаллиса неаддитивных систем. Введение в теорию и приложения // М.: ЛЕНАНД. 2019. 360 с.

Кульбак С. Теория информации и статистика // М.: Наука. 1967. 408 с.

Сычев В.В. Дифференциальные уравнения термодинамики // М.: Высш. школа. 1991. 224 с.

Шредингер Э. Что такое жизнь с точки зрения физики? // М.: ИЛ. 1947. 147 с.

Abe S. A note on the q-deformation-theoretic aspect of the generalized entropies in nonextensive physics // Physics Letters A. 1997. V. 224. P. 326-330.

Abe S .Heat and generalized Clausius entropy of nonextensive systems // Eprint arXiv:cond-mat/0012115. 2000. V. 3. P. 1-14.

Abe S., Martinez S., Pennini F., Plastino A. Nonextensive thermodynamic relations // Physics Letters A. 2001. V.281. № 2-3. P.126-130.

Abe S., Okamoto Y. Eds., "Nonextensive Statistical Mechanicsand Its Applications". Series Lecture Notes in Physics. Springer: Verlag, Berlin, New York. 2001.

Abreu E.M.C., Ananias Neto J., Barboza E. M., Nunes R. C. Holographic considerations on non-gaussian statistics and gravothermal catastrophe // Physica A, 2016. V. 441. P. 141-150.

Abul-Magd A.Y. Nonextensive random-matrix theory based on Kaniadakis entropy // Phys. Lett. A. 2007. V. 361. P. 450-454.

Abul-Magd A.Y. Nonextensive and superstatistical generalizations of random-matrix theory // Eur. Phys. J. B. 2009. V. 70. P. 39-48.

Abul-Magd A.Y., Abdel-Mageed M. Kappa-deformed random-matrix theory based on Kaniadakis statistics // Mod. Phys. Lett. B. 2012, V. 26. P. 1250059.

Borges E.P., Roditi I. A family of nonextensive entropies // Physics Letters A 1998. V.246. P.399-402.

Bregman L.M. The relaxation method of finding the common point of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming // USSR computational mathematics and mathematical physics, 1967. V. 7. № 3. P. 200-217.

Carvalho J. C., Silva R., do Nascimento J. D. Jr., De Medeiros J. R. Power law statistics and stellar rotational velocities in the Pleiades // Europhys. Lett. 2008. V. 84. № 5. P. 59001 (pp.5).

Carvalho J. C., do Nascimento J. D.Jr., Silva R., De Medeiros J.R. Non-Gaussian Statistics and Stellar Rotational Velocities of Main-Sequence Field Stars// Astrophys. Journ. Lett. 2009. V.696. P. L48-L51

Celikoglu A., Tirnakli U. Sensitivity function and entropy increase rates for z-logistic map family at the edge of chaos // Physica A. 2006. V. 372. P. 238-242.

Cichocki A., Amari S. Families of Alpha- Beta- and Gamma- Divergences: Flexible and Robust Measures of Similarities // Entropy. 2010. V. 12. P. 1532-1568.

Clementi F., Gallegati M., Kaniadakis G. κ-generalized statistics in personal income distribution // Eur. Phys. J. B. 2007. V. 57. P. 187-193.

Clementi F., Gallegati M., Kaniadakis G. A model of personal income distribution with application to Italian data //. Empirical Econ. 2011. V. 39. P. 559-591.

Clementi F., Gallegati M., Kaniadakis G. A new model of income distribution: The κ -generalized distribution //. J. Econ. 2012. V. 105. P. 63-91.

Coraddu M., Lissia M., Tonelli R. Statistical descriptions of nonlinear systems at the onset of chaos // Physica A. 2006. V. 365. P. 252-257.

Frank T.D., Plastino A.R. Generalized thermostatics based on the Sharma-Mittal entropy and escort mean value // Eur. Phys. J. B. 2002. V. 30. P. 543-549.

Jaynes E.T. Information theory and statistical mechanics // В сб. «Statistical Physics». Brandeis Ltctures. 1963. V. 3. P. 160.

Kaniadakis G. Non-linear kinetics underlying generalized statistics // Physica A 2001a, V.296. P. 405-425.

Kaniadakis G. H-theorem and generalized entropies within the framework of nonlinear kinetics // Phys. Lett. A. 2001b, V. 288. P. 283-291.

Kaniadakis G. Statistical origin of quantum mechanics // Physica A. 2002b. V. 307 P. 172-184.

Kaniadakis G. Statistical mechanics in the context of special relativity // Phys. Rev. E 2002a, V. 66. P. 056125.

Kaniadakis G. Statistical mechanics in the context of special relativity II. // Phys. Rev. E. 2005. V. 72. P. 036108.

Kaniadakis G. Maximum entropy principle and power-law tailed distributions // Eur. Phys. J. B. 2009. V. 70. № 1. P. 3-13.

Kaniadakis G. Theoretical Foundations and Mathematical Formalism of the Power-Law Tailed Statistical Distributions // Entropy. 2013. V.15. P. 3983-4010

Kaniadakis G., Quarati P., Scarfone A. M. Kinetical foundations of nonconventional statistics // Physica A. 2002. V. 305 P. 76- 83.

Kaniadakis G., Scarfone A.M. A new one-parameter deformation of the exponential function // Physica A. 2002. V. 305. P. 69-75.

Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. Thermodynamics of Rényi as an indispensable support basis for evolution modeling protoplanetary gas and dust disk with fractal structure // Solar System Research. 2019. V. 53. № 6. pp. 436–455.

Kolesnichenko A.V. Jeans Instability of a Protoplanetary Gas Cloud with Radiation in Nonextensive Tsallis Kinetics // Solar System Research. 2020. V. 54. № 2. P. 137-149.

Landsberg P.T. Entropies Galove! // Brazilian J. Phys. 1999. V. 29. № 1. P. 46-49.

Landsberg P.T., Vedral V. Distributions and channel capacities in generalized statistical mechanics // Phys. Lett. A. 1998. V. 247. P. 211-216.

Livadiotis G. Kappa Distributions: Statistical Physics and Thermodynamics of Space and Astrophysical Plasmas /Selected Papers from the 7th International Conference on New Frontiers in Physics -ICNFP 2018)// Universe. 2018. V 4. №144. P.1-19.

Marov M.Ya., Kolesnichenko A.V. Turbulence and Self-Organization: Modeling Astrophysical Objects // Published by Springer-Verlag New York Inc., United States. 2015. 657s.

Olemskoi A.I., Kharchenko V.O., Borisyuk V.N. Multifractal spectrum of phase space related to generalized thermostatistics // Physica A. 2008. V. 387. P. 1895-1906.

Olemskoi A.I., Borisyuk V.N., Shuda I.A. Statistical field theories deformed within different calculi //. Eur. Phys. J. B. 2010. V. 77. P. 219-231.

Papa A.R.R . On one-parameter-dependent generalizations of Boltzmann–Gibbs statistical mechanics // J. Phys. A: Math. Gen. 1998. V. 31. P. 5271-5276.

Rajaonarison D., Bolduc D., Jayet H. The K-deformed multinomial logit model // Economics Letters,Elsevier. 2005. V. 86. № 1. P. 13-20.

Renyi A. Probability Theory. Amsterdam: North-Holland Publ. Co. 1970. 573 p.

Renyi A. On Measures of Entropy and Information, in Proc. 4th Berkeley Symp. on Math. Stat. Prob. 1960. V. 1. University of California Press. Berkeley, Los Angeles. 1961. P. 547-561.

Rossani A., Scarfone A.M. Generalized kinetic equations for a system of interacting atoms and photons: theory and simulations // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2004. V. 37. № 18. P. 4955-4975.

Scarfone A.M. On the κ-Deformed Cyclic Functions and the Generalized Fourier Series in the Framework of the κ-Algebra // Entropy. 2015. V. 17. P. 2812-2833.

Scarfone A.M. κ-Deformed Fourier Transform // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2017. V. 480. P. 63-78

Scarfone A. M. A Maximal Entropy Distribution Derivation of the Sharma-Taneja-Mittal Entropic Form // Open Systems & Information Dynamics. 2018. V. 25, №. 1. P. 1850002-1−1850002-11.

Scarfone A.M.,Wada T. Thermodynamic equilibrium and its stability for microcanonical systems described by the Sharma-Taneja-Mittal entropy // Physical Review E. 2005. V. 72. № 2. P. 026123

Scarfone A.M., Wada T. Canonical partition function for anomalous systems described by the κ-entropy // Prog. Theor. Phys. Suppl. 2006. V.162. P. 45 -52.

Scarfone A.M., Wada T. Legendre structure of κ-thermostatistics revisited in the framework of information geometry // J. Phys. A. 2014. V. 47. P. 275002 (17 pp).

Sharma B.D., Mittal D.P. New Nonadditive Measures of Relative Information// J. Comb. Inform. and Syst. Sci. 1977. V. 2. P. 122-133.

Soares B. B. Silva J.R.P. On the rotation of ONC stars in the Tsallis formalism context // Europhys. Lett. 2011. V. 96. P. 19001 (pp.6)

Taneja I.J. On Generalized Information Measures and Their Applications. Chapter in: Advances in Electronics and Electron Physics, ed. P.W. Hawkes. London: Academic Press. 1989. V. 76. P. 327-413.

Taneja I.J. New Developments in Generalized Information Measures. Chapter in: Advances in Imaging and Electron Physics, ed. P.W. Hawkes. London: Academic Press. 1995. V. 91. P. 37-135

Teweldeberhan A.M., Miller H.G., Tegen R. κ-Deformed statistics and the formation of a quark-gluon plasma // Int. J. Mod. Phys. E. 2003. V.12. P. 669-673.

Tsallis C. Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs-Statistics // J. Stat. Phys. 1988. V. 52. № 1-2. P. 479-487. (a regular updated bibliography is accessible at http:/tsallis. cat.cbpf.br/biblio.htm).

Tsallis C. Nonextensive Statistical Mechanics and Thermodynamics: Historical Backgroud and Present Status // Nonextensive Statistical Mechanics and Its Applica-

tions, ed. S. Abe and Y.Okamoto, Series Lecture Notes in Physics. Berlin, New York, Heidelberg: 2001. Springer-Verlag. P. 3-99.

Tsallis C. Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics. Approaching a Complex World. New York: Springer. 2009. 382 p.

Tsallis C., Mendes R.S., Plastino A.R. The role of containts within generalized nonextensive statistics // Physica A. 1998. V. 261. P. 534-554.

Tonelli R., Mezzorani G., Meloni F., Lissia M., Coraddu M. Entropy production and Pesin identity at the onset of chaos // Prog. Theor. Phys. 2006. V. 115. P. 23-29.

Topsoe F. Entropy and equilibrium via games of complexity// Physica A. 2004. V. 340. P. 11-31.

Wada T., Suyari H. A two-parameter generalization of Shannon-Khinchin axioms and the uniqueness teorem // Phys. Lett. A. 2007. V. 368. P. 199-205.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 3

1. Основные определения, статистические характеристики и свойства энтропии Каниадакиса 5

2. Каноническое распределение Гиббса в деформированной статистике 12

3. Термодинамические соотношения 17

4. Условие равновесия и закон композиции энергии для систем с энтропией Каниадакиса 21

5. Деформированные термодинамические соотношения 23

6. Дивергенция Бергмана. Обобщённая H-теорема 28

7. Заключение 31

Список литературы 32