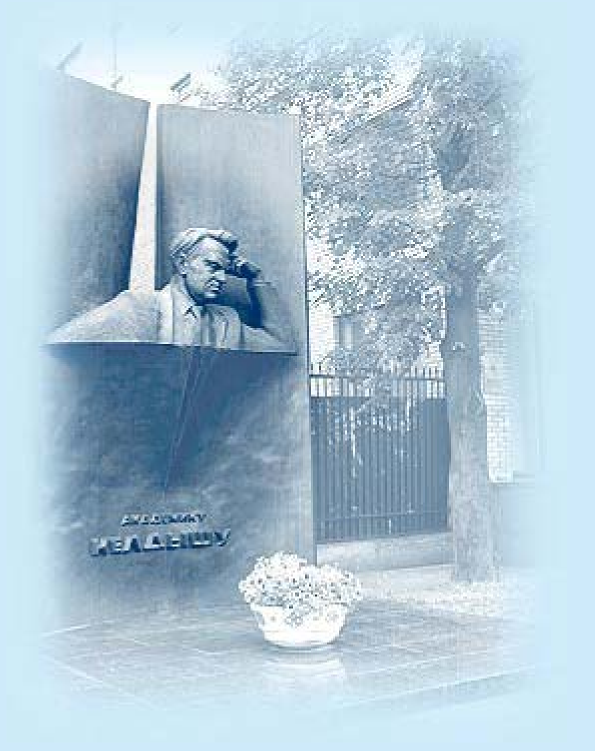
ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 13 за 2020 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Зипунова Е.В., Иванов А.В., Савенков Е.Б.

Решение уравнения смазочного слоя на эволюционирующих поверхностях

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Зипунова Е.В., Иванов А.В., Савенков Е.Б. Решение уравнения смазочного слоя на эволюционирующих поверхностях // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 13. 20 с. http://doi.org/10.20948/prepr-2020-13
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-13

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. КЕЛДЫША

Е.В. Зипунова, А.В. Иванов, Е.Б. Савенков

Решение уравнения смазочного слоя на эволюционирующих поверхностях

Москва, 2020

Е.В. Зипунова, А.В. Иванов, Е.Б. Савенков, Решение уравнения смазочного слоя на эволюционирущих поверхностях

Аннотация. В работе рассмотрен вычислительный алгоритм для решения уравнений на эволюционирующих поверхностях с краем. Основу алгоритма составляет метод проекции ближайшей точки, который используется как для построения аппроксимаций задачи, так и для описания динамики поверхности с краем. Применение алгоритма иллюстрируется на примере решения задачи о течении жидкости в эволюционирующей трещине гидроразрыва пласта в приближении смазочного слоя.

Ключевые слова: уравнения на поверхностях, метод множеств уровня, метод конечных элементов, уравнение смазочного слоя.

E.V. Zipunova, A.V. Ivanov, E.B. Savenkov, Solution of Reynolds lubrication equation on evolving surfaces

Abstract. We consider numerical algorithm for solution of PDEs defined on evolving surfaces with boundary. The approach is based on clsest point projection technique which is used both to contstruct approximations of PDE and to describe surface evolution. The suggested approach is used to solve surface fluid flow inside evolving hydraulic fracture.

Key words and phrases: surface PDEs, closest point projection method, finite elelements method, Reynodls equation.

1 Введение

В работах [Ruuth2008, Merriman2007, Macdonald2008, Macdonald2009, Macdonald2011] был предложен оригинальный метод решения уравнений на поверхностях, основанный на представлении поверхности с помощью оператора проекции ближайшей точки. Суть метода заключается в том, что сначала, с помощью оператора проекции ближайшей точки, строится продолжение уравнения с поверхности в трехмерное пространство. Далее «продолженная» задача аппроксимируется подходящим разностным методом на сетке, не согласованной с геометрией поверхности. В качестве решения исходной задачи на поверхности рассматривается след решения продолженной, трехмерной, задачи на ней. Одновременно с этим, оператор проекции ближайшей точки используется для аппроксимации граничных условий Дирихле (и Неймана) на границе как исходной поверхности, так и трехмерной области, в которой рассматривается продолженное уравнение.

Особенностью этого метода является то, что он естественным (в отличие от ряда других методов, см. [Савенков2020a, Савенков2020b, Зипунова2020]) образом позволяет решать уравнения на поверхностях с *краем* — а также в областях, являющихся объединением многообразий различной (ко)размерности, вложенных в трехмерное пространство.

В работе [Зипунова2020] рассмотрены вопросы применения конечно-элементного варианта метода проекции ближайшей точки для решения ряда модельных задач для уравнения теплопроводности на поверхности с краем и задачи о течении жидкости в приближении смазочного слоя применительно к анализу трещины гидроразрыва пласта. При этом срединная поверхность трещины считалась стационарной, то есть не зависящей от времени.

В настоящей работе рассмотрено применение метода проекции ближайшей точки к расчету течений в эволюционирующих трещинах.

В настоящее время гидравлический разрыв пласта (гидроразрыв пласта, ГРП) является одним из самых распространенных методов увеличения нефтеотдачи, используемых при промышленной разработке нефтегазовых месторождений. Сущность технологии ГРП заключается в закачке в нефтеносный пласт специальной жидкости разрыва с целью создания искусственной (техногенной) трещины значительный протяженности (длина ~ 100 м, высота ~ 10 м, среднее раскрытие $\sim$ 5–10 мм). Созданная трещина заполняется проппантом (калиброванным искусственным или естественным «песком»). В результате создается соединенный со скважиной искусственный канал с большой площадью притока, имеющий высокую (на порядки превышающую пластовую) проницаемость. Это обеспечивает значительное увеличение притока пластового флюида к скважине. Инженерные аспекты технологии рассмотрены, например, в [Экономидес2007, Салимов2013]. Физико–математическое описание динамики трещины ГРП в ходе ее развития сводится к решению сложной связанной задачи, включающей в себя (помимо других групп уравнений) уравнения течения (обычно неньютоновской) жидкости разрыва в эволюционирующей трещине.

При этом считается, что:

- геометрически трещина описывается своей срединной поверхностью с заданным в каждой ее точке раскрытием;
- срединная поверхность трещины является произвольной, но заданной поверхностью с краем;
- в фиксированной точке срединной поверхности раскрытие является заданной известной функцией.

Необходимость разработки эффективных и робастных численных методов решения этой задачи связанна, прежде всего с тем, что:

- в ходе процедуры ГРП трещина эволюционирует, причем точный характер этой эволюции заранее неизвестен (другим словами, область решения задачи меняется с течением времени);
- срединная поверхность трещины не является плоской — трещина может «поворачивать», причем направление ее развития может быть различным в разных точках ее фронта.

В отличие от цитированных в начале этого раздела работ, в настоящей работе, так же как и в [Зипунова2020], для построения аппроксимаций задачи используется метод конечных элементов.

Отметим, что метод проекции ближайшей точки применяется как для представления непосредственно эволюционирующей поверхности, так и для построения конечномерных аппроксимаций соответствующей краевой задачи. Аналогичный способ описания поверхности и соответствующие геометрические алгоритмы, подробно изложенные в [Иванов2017], применялись в работах [Савенков2018, Савенков2019] для описания динамики трещины в рамках «расширенного» метода конечных элементов (X-FEM). Общая техническая база предложенных методов для решения частных задач (решение уравнений во вмещающем трещину пространстве, решение уравнений в трещине, представление поверхности и описание ее эволюции) позволяет прозрачно интегрировать разработанные алгоритмы в рамках единого «решателя».

2 Метод проекции ближайшей точки

В настоящем разделе коротко описаны основные идеи метода решения уравнений на поверхностях, предложенного и развитого в работах [Ruuth2008, Merriman2007, Macdonald2011, Macdonald2008, Macdonald2009]. Метод использует неявное представление поверхности и продолжение уравнения на поверхности во вмещающее ее пространство, однако использует с этой целью не распространенный метод множеств уровня (см. обзор в [Савенков2020a]), а метод проекции ближайшей точки.

Рассмотрение будем вести на примере модельной краевой задачи для параболического уравнения с оператором оператора Лапласа–Бельтрами (см., например, [Дубровин1986]) на криволинейной поверхности $\mathcal{F}$ с краем:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_{\mathcal{F}} u = 0, \tag{1}$$

дополненного граничным условием нужного вида.

Будем считать, что поверхность $\mathcal{F}$ целиком расположена внутри пространственной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Пусть для произвольной точки $\boldsymbol{x} \in \Omega$ точка $\boldsymbol{x}_{\text{cp}}$ — ближайшая к ней точка на поверхности $\mathcal{F}$,

$$\boldsymbol{x}_{\text{cp}} = \arg\min_{\boldsymbol{y} \in \mathcal{F}} \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\|,$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^3$. Точку $\boldsymbol{x}_{\text{cp}}$ будем называть проекцией точки $\boldsymbol{x}$ на поверхность $\mathcal{F}$, а соответствующий оператор будем обозначать P,

$$\boldsymbol{x}_{\text{cp}} = \mathrm{P}\boldsymbol{x}.$$

Оператор P является векторнозначным: он отображает область Ω на поверхность $\mathcal{F}$, рассматриваемую как подмножество в $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Если для поверхности $\mathcal{F}$ можно задать функцию знакового расстояния $d_{\mathcal{F}}(\boldsymbol{x})$ (например, если $\mathcal{F}$ — ориентированная поверхность без края), то для оператора P справедливо представление:

$$\mathrm{P}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - d_{\mathcal{F}}(\boldsymbol{x}) \nabla d_{\mathcal{F}}(\boldsymbol{x}), \quad d(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x} - \mathrm{P}\boldsymbol{x}\|.$$

Так же, как и функция знакового расстояния (или пара таких функций, в случае поверхности с краем), проектор P однозначно описывает поверхность $\mathcal{F}$,

$$\mathcal{F} = \{\boldsymbol{x} \in \Omega : \quad \boldsymbol{x} = \mathrm{P}\boldsymbol{x}\}.$$

Однако последний способ является более общим: он позволяет описывать геометрию поверхности с краем, неориентируемые многообразия или многообразия коразмерности больше единицы (то есть, в случае трехмерной области,

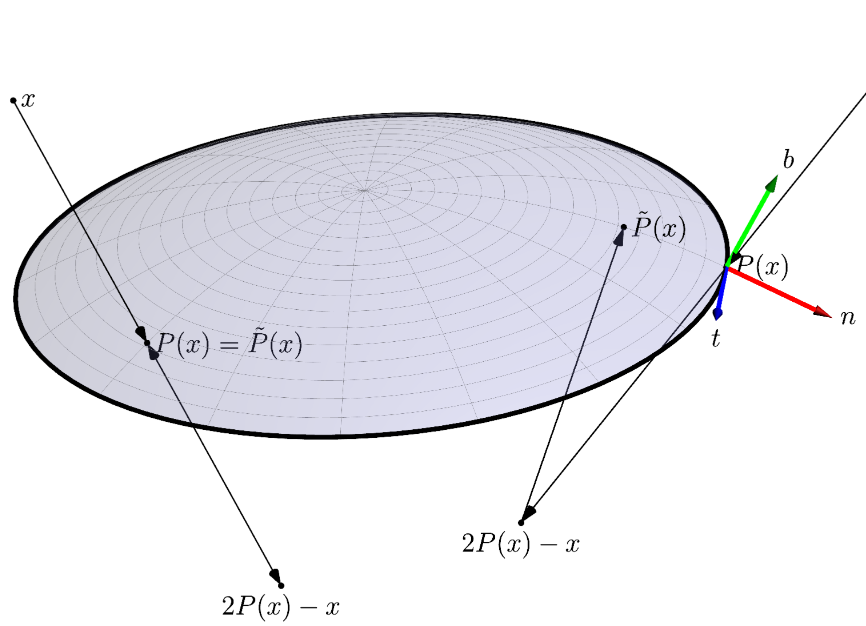


Рис. 1. К определению оператор P и $\tilde{\mathrm{P}}$

кривые (коразмерность 2) и точки (коразмерность 3)), — а также объединение объектов различной коразмерности [Macdonald2011].

В дальнейшем нам понадобится различать точки области Ω, которые проектируются во внутренние точки поверхности $\mathcal{F}$ или на ее край $\partial\mathcal{F}$. Для этого рассмотрим (см. [Macdonald2011]) вспомогательный оператор $\tilde{\mathrm{P}}$, который определим как

$$\tilde{\mathrm{P}}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{P}(2\mathrm{P}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}). \tag{2}$$

Из геометрических соображений следует (см. рисунок 1), что для точек $\boldsymbol{x}$, проекции которых принадлежат краю поверхности, справедливо соотношение

$$\tilde{\mathrm{P}}(\boldsymbol{x}) \neq \mathrm{P}(\boldsymbol{x}), \tag{3}$$

а для точек, проекции которых принадлежат внутренним точкам $\mathcal{F}$, значения проекторов $\tilde{\mathrm{P}}$ и P совпадают:

$$\tilde{\mathrm{P}}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{P}(\boldsymbol{x}). \tag{4}$$

Совместно с описанным выше способом описания поверхности $\mathcal{F}$ в дальнейшем нам понадобится способ представления функций, заданных на этой поверхности. В силу того, что никаких локальных координат на поверхности $\mathcal{F}$ не вводится, удобно использовать «неявный» способ их представления.

А именно, функцию на поверхности будем задавать как след функции, заданной в области Ω.

Удовлетворяющее последнему свойству продолжение функции, заданной на поверхности, в область Ω может быть построено различными способами. Удобным и используемым в дальнейшем способом является ее продолжение с помощью оператора P. А именно, для произвольной функции u, заданной на поверхности, ее продолжение $\mathcal{E}[u]$ в Ω определим как:

$$\mathcal{E}[u](\boldsymbol{x}) = u(\mathrm{P}\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega.$$

Отметим, что таким образом построенное продолжение постоянно вдоль отрезков, соединяющих точку области Ω и ее проекцию. Этот факт позволяет удобным способом вычислять производные функции на поверхности, а также дифференциальные операторы более высокого порядка (см. ниже в этом разделе).

Таким способом построенный оператор продолжения может быть определен для произвольных функций, заданных в *пространстве*. А именно, любая функция, заданная в пространстве, однозначно определяет функцию на поверхности как свой собственный след на ней. Поэтому для функций, заданных в пространстве, определим оператор $\mathcal{E}$ следующим образом:

$$\mathcal{E}[u](\boldsymbol{x}) = u(\mathrm{P}\boldsymbol{x}).$$

В обоих случаях оператор $\mathcal{E}$ является проектором в том смысле, что $\mathcal{E}^2 = I$, где I — тождественный оператор.

Отметим, что:

- для произвольной функции в Ω, постоянной в направлении нормали к $\mathcal{F}$,

$$\left(\nabla u\right)|_{\mathcal{F}} = \nabla_{\mathcal{F}}\left(u|_{\mathcal{F}}\right);$$

- для произвольного векторного поля в Ω, касательного к поверхности $\mathcal{F}$,

$$\left(\nabla \cdot \boldsymbol{q}\right)|_{\mathcal{F}} = \nabla_{\mathcal{F}} \cdot \left(q|_{\mathcal{F}}\right).$$

Тогда, в силу свойств проектора P и оператора продолжения $\mathcal{E}$, имеем:

$$\nabla\mathcal{E}[u](\boldsymbol{x}) = \nabla u(\mathrm{P}\boldsymbol{x}) = \nabla_{\mathcal{F}} u.$$

В силу того, что восполнение $\mathcal{E}[u](\boldsymbol{x})$ постоянно вдоль направлений, нормальных к поверхности, векторное поле $\nabla\mathcal{E}[u](\boldsymbol{x})$ является касательным к $\mathcal{F}$. Отсюда следует, что

$$\nabla \cdot [\nabla\mathcal{E}[u](\boldsymbol{x})] = \nabla \cdot [\nabla u(\mathrm{P}\boldsymbol{x})] = \nabla_{\mathcal{F}} \cdot \nabla_{\mathcal{F}} u.$$

Аналогичные продолжения можно построить и для более сложных эллиптических операторов дивергентного типа, см. [März2012].

Таким образом, исходное уравнение (1) может быть продолжено во всю область Ω. Далее продолженное уравнение аппроксимируется подходящим разностным методом на трехмерной сетке, введенной в области Ω и не согласованной с геометрией поверхности. Решение исходной задачи на поверхности восстанавливается как след решения трехмерной задачи на поверхности. Строгое обоснование описанных выше построений представлено в работе [März2012]. Детали метода подробно изложены в цитированных выше в данном разделе работах.

В соответствии с описанным выше подходом рассмотрим продолжение уравнения (6) в пространственную область $\Omega_{\mathcal{F}}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (\nabla \mathcal{E}[u]) = \mathcal{E}[f], \quad \boldsymbol{x} \in \Omega_{\mathcal{F}}. \tag{5}$$

След решения этого уравнения на $\mathcal{F}$ является решением уравнения (6).

Относительно области Ω считается, что она (а) мала в том смысле, что в каждой ее точке однозначно определена проекция точки области (то есть значения оператора P) на поверхность и ее край и (б) область Ω включает в себя поверхность $\mathcal{F}$, $\Omega \supset \mathcal{F}$, причем расстояния от граничных точек области до поверхности положительны. Другими словами, все точки поверхности являются внутренними точками области.

В том случае, если поверхность $\mathcal{F}$ является поверхностью без края, значение решения $u(t, \boldsymbol{x})$ последней задачи в точках, лежащих на поверхности $\mathcal{F}$, будет совпадать с решением исходной задачи на поверхности (в этом случае $\partial\mathcal{F} = \emptyset$ и задача (6) является задачей Коши).

Отдельной задачей в рамках рассмотренного подхода является учет граничных условий на границе $\partial\mathcal{F}$ поверхности $\mathcal{F}$. В работе [Macdonald2011] предложен удобный вариант способа их задания, основанный на использовании специального вида операторе продолжении с поверхности в пространство.

Далее предполагается, что метод проекции ближайшей точки используется в варианте, предложенном в [Зипунова2020].

3 Постановка задачи

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу: определить зависящую от времени заданную в области $\bar{\mathcal{F}}_t$ функцию $u = u(\boldsymbol{x}, t)$, удовлетворяющую уравнению и граничным условиям

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla_{\mathcal{F}} \cdot (-\nabla_{\mathcal{F}} u) = f, \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{F}_t, \tag{6}$$
$$u|_{\partial \mathcal{F}} = g, \quad \boldsymbol{x} \in \partial \mathcal{F}_t,$$

с начальным условием

$$u(\boldsymbol{x}, t = 0) = u_0(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{F}_0.$$

Будем считать, что $\mathcal{F}_t \equiv \mathcal{F}(t)$ — поверхность с краем, геометрия которой зависит от времени t. В начальный момент времени $\mathcal{F}_{t=0} = \mathcal{F}_0 \equiv \mathcal{F}$.

На примере этой задачи ниже будут расмотрены основные элементы предлагаемого алгоритма.

4 Модель эволюции поверхности

Характер эволюции поверхности $\mathcal{F}_t$ в постановке (6) не может быть произвольным. В настоящем разделе представлены соответствующие допущения как принципиального, так и технического характера. Они отражают специфику рассматриваемой задачи, а именно тот факт, что $\mathcal{F}_t$ — срединная поверхность эволюционирующей трещины.

Пусть задача (6) решается на интервале времени $t \in [0, T]$ и при $t_1 \geqslant t_2$ выполняется условие $\mathcal{F}_{t_1} \subset \mathcal{F}_{t_2}$. Другими словами, семейство поверхностей, соответствующих меньшим моментам времени, содержится внутри поверхности, соответствующей любому большему моменту времени. Или, что то же самое, поверхность может эволюционировать только за счет движения ее края.

Будем считать, что:

- в каждый момент времени t в рассматриваемом интервале поверхность $\mathcal{F}_t$ целиком содержится внутри некоторой пространственно области Ω;
- эволюция поверхности $\mathcal{F}$ является «гладкой», то есть поверхность в каждый момент времени может быть гладко и взаимно-однозначно отображена на, например, диск единичного радиуса в $\mathbb{R}^2$. В частности, в ходе эволюции у $\mathcal{F}$ не должны появляться самопересечения и так далее.

В этом случае семейство поверхностей $\{\mathcal{F}_t,\ t \geqslant 0\}$ может быть представлено как объединение «начальной» поверхности $\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}_0$ и следа движения криволинейной образующей (края поверхности). А именно, пусть $\gamma(t) \equiv \partial \mathcal{F}_t$ — край поверхности $\mathcal{F}_t$ в момент времени t. Тогда поверхность $\mathcal{F}_t$ представима в виде:

$$\mathcal{F}_t = \{\mathcal{F}_0 \cup \gamma(t') \,|\, 0 \leqslant t' \leqslant t\},$$

где $\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}_0$ — поверхность при $t = 0$.

Таким образом, эволюция поверхности задается движением ее края $\gamma(t)$. В дальнейшем будем считать, что в каждый момент времени на линии $\gamma(t)$ задано векторное поле «скорости» $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$, $\boldsymbol{x} \in \gamma(t)$, описывающее ее эволюцию. Движение (лагранжевой) точки границы описывается уравнением

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t), \quad \boldsymbol{x}|_{t=0} = \boldsymbol{x}_0 \in \gamma(0). \tag{7}$$

Будем считать, что поле скорости $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ (а) является гладкой функцией точки $\boldsymbol{x} \in \gamma(t)$ в каждый фиксированный момент времени t и (б) для каждой фиксированной (лагранжевой) точки границы является гладкой функцией времени.

Такая модель эволюции поверхности соответствует задаче о динамике трещины гидроразрыва пласта. В этом случае направление развития поверхности известно только в точках ее границы (фронта трещины) и определяется с помощью соответствующих критериев разрушения (см., например, [Рамазанов2017, Ramazanov2018]).

Отметим, что в ряде случаев (в частности, для целей теоретического анализа) удобно считать, что поле скоростей $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$, $\boldsymbol{x} \in \partial\mathcal{F}_t$ является следом на $\partial\mathcal{F}_t$ некоторого гладкого (и без особых точек) поля $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t)$, заданного в области Ω, содержащей семейство поверхностей $\mathcal{F}_t$ во все моменты времени $t \in [0, T]$. Естественным требованием к полю $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t)$ является то, что оно является касательным к поверхностям $\mathcal{F}_{\tilde{t}}$ для всех $\tilde{t} < t$ (другими словами, оно не меняет уже образовавшуюся поверхность трещины).

При подходящем выборе поля $\boldsymbol{V}$ оно порождает гладкое и взаимнооднозначное отображение поверхности $\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}_0$ на поверхность $\mathcal{F}_t$ для любого $t \in (0, T]$.

5 Вычислительный алгоритм

Особенностью рассмотренной в настоящей работе постановки является то, что область определения решения задачи зависит от времени. Основной сложностью построения дискретных аппроксимаций по времени в задачах рассматриваемого класса является то, что в дискретном (по времени) случае решение определено в областях Ω_t и $\Omega_{t+\Delta t}$, не совпадающих между собой, $\Omega_t \neq \Omega_{t+\Delta t}$. Это не позволяет определить разностную производную решения по времени стандартным способом как

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{1}{\Delta t}\left(u(t + \Delta t) - u(t)\right).$$

Для решения этой проблемы могут быть использованы различные подходы, в частности:

- методы на основе смешанных эйлерово-лагранжевых постановок (ALE, “arbitrary lagrangian-eulerian”). Различные варианты таких постановок приведены, например, в [Formaggia1999] (см. также [Donea2004]). Этот подход часто применяется в случаях, когда изменение геометрии расчетной области связано с движением сплошной среды. Примерами являются задачи гидродинамики со свободной границей, задачи аэро- и гидроупругости (“fluid-structure interaction problems”). Метод основан на том, что путем замены переменных задача сводится к решению задачи в исходной (лагранжевой) области, геометрия которой не меняется;

- пространственно-временной метод конечных элементов (“space-time finite elements”), см. [Langer2019];

- эйлеровы методы, не требующие использования эйлерово-лагранжевой постановки задачи.

Для целей настоящей работы естественным является использование последнего, эйлерового, подхода. Недавние результаты в этой области представлены в работах [Lehrenfeld2019] и [Burman2019]. В этих же работах дан обзор недавних результатов по методам (в том числе, упомянутым выше) решения уравнений на эволюционирующих поверхностях.

5.1 Формальные аппроксимации по времени

Запишем задачу (6) в операторном виде как

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}(w(u);u) = f, \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{F}_t,$$
$$u|_{\partial\mathcal{F}} = g, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\mathcal{F}_t,$$

с начальным условием

$$u(\boldsymbol{x}, t=0) = u_0(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{F}_0.$$

Пусть задача решается на отрезке $t \in [0,T]$. Разобьем его на интервалы (шаги по времени) Δt, так что

$$0 = t_0 < \Delta t < \ldots < n\Delta t = t_n < \ldots N\Delta t = t_N = T.$$

В соответствии с разделом 4 в момент времени t решение $u_n = u(t_n)$ определено в области $\mathcal{F}_{t_n} \equiv \mathcal{F}_n$, причем $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$.

Полудискретная (по времени) аппроксимация задачи (8) на интервале $[t_n, t_{n+1}]$ может быть определена как

$$\frac{u_{n+1} - \mathrm{E}[u_n]}{\Delta t} + \mathcal{A}(w(u_{n+1}); u_{n+1}) = f_{n+1}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{F}_{n+1}.$$

Здесь $\mathrm{E}[\cdot]$ — оператор продолжения, сопоставляющий функции, заданной в области $\mathcal{F}_n$, функцию, заданную в области $\mathcal{F}_{n+1}$. Для корректности задачи оператор продолжения должен удовлетворять определенным свойствам гладкости и ограниченности. В терминах соболевских норм такие свойства оператора продолжения сформулированы в [Lehrenfeld2019].

В настоящей работе строгое теоретическое обоснование использованного метода не дается, однако можно ожидать, что необходимые для его корректности условия выполняются в силу того, что:

- для гладких областей с гладкой границей естественные свойства гладкости решения совпадают с таковыми для случая плоских областей (подмножеств $\mathbb{R}^2$). Более того, поверхность $\mathcal{F}_t$ для всех t может быть, в порядке допущения, взаимно-однозначно отображена гладким образом на двумерную область $\tilde{\mathcal{F}}_t \subset \mathbb{R}^2$ (и даже на не зависящую от времени каноническую область, например круг заданного радиуса на плоскости);

- заданное в пространстве векторное поле $\boldsymbol{V}$, определяющее эволюцию поверхности (см. раздел 4), определяет гладкое отображение $\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}_0$ на $\mathcal{F}_t$.

Отметим также следующее. В работах [Lehrenfeld2019] и [Burman2019] оператор продолжения не используется явным образом. Вместо этого используется неявный способ продолжения решения из области Ω_n в область Ω_{n+1}, который технически реализуется путем добавления в слабую постановку задачи дополнительной билинейной формы специального вида. В результате ограниченность и требуемая гладкость дискретного продолжения является следствием модифицируемой вариационной постановки задачи. Указанный метод носит название “ghost penalty stabilization”. Он может непосредственно применяться для решения рассматриваемой в настоящей работе задачи.

Ниже рассмотрен алгоритм, который предполагает явное определение продолжение $\mathrm{E}[u]$ решения u. А именно, заданное в области $\mathcal{F}_n$ решение продолжается в область $\mathcal{F}_{n+1}$ константой в направлении нормали к границе области $\mathcal{F}_n$.

В качестве альтернативного варианта может быть использован способ продолжения, типичный для метода X-FEM и описанный, например, в [Moës2002, Gravouil2002]:

1. сначала для заданного на границе $\partial\mathcal{F}_t$ векторного поля $\boldsymbol{v}$ строится его продолжение в трубчатую окрестность $\partial\mathcal{F}_t$ (или во всю трехмерную область, содержащую поверхность);

2. далее это заданное в пространстве поле используется для построения продолжения решения из области $\mathcal{F}_n$ в бóльшую область путем решения уравнения типа уравнения переноса.

5.2 Аппроксимации по пространству

На каждом временном слое задача (5.1) решается на поверхности $\mathcal{F}_{n+1}$. Для ее решения может быть применен целый ряд методов, в том числе вариационный вариант метода проекции ближайший точки. Соответствующий алгоритм подробно описан в [Зипунова2020] и цитированных выше первичных работах; ниже он не рассматривается.

Далее будем считать, что в ходе своей эволюции поверхность $\mathcal{F}_t$ (и поверхности $\mathcal{F}_n$, $n = \overline{0, N}$) всегда расположены внутри пространственной области $\tilde{\Omega}$. Будем считать, что в этой области введена конечно-элементная сетка $\mathcal{T}_h$, ячейки которой используются для построения пространственных аппроксимаций задач (5.1) для $n = \overline{1, N}$.

В каждый момент времени с поверхностью $\mathcal{F}_n$ связана трехмерная (сеточная) область Ω_n^h, в которой решение задачи (5.1) будет аппроксимироваться методом проекции ближайшей точки. Конструктивно область Ω_n^h может быть построена как множество конечных элементов $\omega \in \mathcal{T}_h$, все узлы которых удалены от поверхности $\mathcal{F}_n$ на расстояние, не превышающее значение заданного параметра δ, кратного шагу расчетной сетки. Всюду в области Ω_n^h будем считать определенным оператор проекции ближайшей точки P_n (индекс «n» указывает на номер временного шага).

Далее для решения задачи в области Ω_{n+1} непосредственно могут применяться алгоритмы из работы [Савенков2020a, Савенков2020b, Зипунова2020].

5.3 Схема алгоритма

В настоящем разделе приведем полную схему используемого вычислительного алгоритма. Последовательность его шагов приведена ниже.

1. Задать начальные параметры задачи: поверхность $\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}_0$, поле скорости «роста» поверхности $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$, заданное на ее крае $\boldsymbol{x} \in \partial\mathcal{F}$; начальное условие $u_0(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \mathcal{F}$.

2. Задать область Ω и расчетную сетку $\mathcal{T}_h$ в ней.

3. Положить $n = 0$, $t = 0$.

4. Вычислить дискретные аппроксимации проектора P_0^h ближайшей точки для поверхности $\mathcal{F}_0$.

5. Для $n = \overline{1, N}$:

   (a) Положить $n := n + 1$.

   (b) Определить поле скорости развития фронта (края поверхности) $\boldsymbol{v}$.

(c) Задать сеточную область Ω_n^h как корректное подмножество конечных элементов сетки $\mathcal{T}_h$.

(d) На основе заданного поля $\boldsymbol{v}$ и сеточного проектора P_{n-1}^h определить сеточную область Ω_n^h и проектор ближайшей точки P_n^h. Алгоритм вычисления проектора подробно описан в [Иванов2017].

(e) Вычислить продолжение решения $\mathrm{E}u_{n-1}$ из области Ω_{n-1}^h в область Ω_n^h.

(f) Построить и решить конечномерную аппроксимацию задачи (5.1) методом проекции ближайшей точки в соответствии с [Зипунова2020].

(g) Перейти к шагу 5a.

6. Завершение работы алгоритма.

Отметим, что в ходе работы алгоритма поверхность задается непосредственно только на первом шаге работы алгоритма, при его инициализации. В дальнейшем рассчитывается только эволюция проектора P_n^h с течением времени. Образ этого проектора является аппроксимацией поверхности; непосредственно поверхность в ходе работы алгоритма в том или ином виде не восстанавливается (и в этом нет необходимости). Ее геометрические характеристики, если это необходимо, могут быть вычислены в соответствии с алгоритмами, описанными [Иванов2017].

6 Пример расчета

В настоящем разделе приведен пример решения задачи о течении жидкости в развивающейся трещине.

Уравнение течения в трещине имеет вид:

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} + \left(-\frac{1}{12\nu}\rho w^3 \nabla p\right) = f_{\mathrm{m}}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{F}_t, \tag{8}$$

где ρ — плотность жидкости; $w = w(\boldsymbol{x})$ — раскрытие трещины, $\boldsymbol{x} \in \mathcal{F}$ — точка срединной поверхности трещины $\mathcal{F}$; ν — вязкость жидкости, $p = p(\boldsymbol{x})$ — ее давление, f_{m} — массовая мощность внешних источников.

Будем считать, что плотность жидкости линейно зависит от давления, то есть

$$\rho = \rho_0[1 + c_{\mathrm{f}}(p - p_0)]$$

— плотность жидкости как функция давления, ρ_0 и p_0 — опорные значения плотности и давления, c_{f} — коэффициент сжимаемости жидкости.

Уравнение (8) должно быть дополнено начальным и граничным условием вида
$$p(\boldsymbol{x}, t=0) = p_{\mathrm{ini}}(\boldsymbol{x}), \quad p|_{\partial\mathcal{F}} = p_{\partial\mathcal{F}}.$$

Раскрытие трещины зависит от давления. Соответствующая зависимость является линейной и имеет вид

$$w(\boldsymbol{x}) = \mathcal{W}(\boldsymbol{x}; p(\boldsymbol{x})), \quad \mathcal{W}(\boldsymbol{x}; p) = w_{\mathrm{ref}}(\boldsymbol{x}) \left(1 + c_{\mathrm{w}}[p(\boldsymbol{x}) - p_{\mathrm{ref}}]\right), \tag{9}$$

где $w_{\mathrm{ref}}(\boldsymbol{x})$ — раскрытие трещины при заданном постоянном опорном значении давления p_{ref}, c_{w} — коэффициент, описывающий «сжимаемость» трещины (точнее, вмещающей трещину среды).

Задача (8) является нелинейной. В дискретном случае соответствующая система нелинейных алгебраических уравнений решается методом простой итерации, см. [Зипунова2020].

Считается, что в пространстве, вмещающем срединную поверхность трещины, задано поле скорости, в соответствии с которым сдвигаются точки фронта трещины (кра́я срединной поверхности). В рассматриваемом случае поле скорости являлось осесимметричным,

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = v_{\mathrm{m}} \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\mathrm{m}}}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\mathrm{m}}\|}, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\mathcal{F}_t,$$

рост трещины происходил в плоскости $\mathcal{O}xy$. Соответственно, поле скоростей задавалось координатой «центра роста» $\boldsymbol{x}_{\mathrm{m}}$ и постоянной (не зависящей от момента времени и точки пространства) скоростью v_{m}. За интервал времени Δt координата точки фронта трещины $\boldsymbol{x}$ изменялась как

$$\boldsymbol{x}(t + \Delta t) = \boldsymbol{x}(t) + \Delta t v_{\mathrm{m}} \frac{\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_{\mathrm{m}}}{\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}r_{\mathrm{m}}\|}.$$

Считалось, что область Ω в каждый момент времени содержит внутри себя срединную поверхность трещины. Область $\Omega_{\mathcal{F}}$, в которой решается задача, растет соответственно росту трещины.

Расчетная область является кубом со стороной $l = 50$ м, соответственно шаг сетки $h = 1$ м. Уравнение решается в сеточной области Ω_h^n, состоящей из тетраэдров, все узлы которых удалены от трещины на расстояние, не превышающее $\delta = 2$ м. Шаг по времени $\Delta t = 0.5 \cdot 10^{-7}$ с.

Радиус трещины в начальный момент времени $L = 10$ м, трещина лежит в плоскости $\mathcal{O}xy$ с центром в начале координат. Скорость роста трещины выбрана так, что $v_{\mathrm{m}} \Delta t = 0.5$ м.

Считается, что опорное раскрытие является постоянным по поверхности трещины, $w_{\mathrm{ref}}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{const}$.

Физические параметры задачи имеют следующие значения: кинематическая вязкость жидкости $\nu = 1004 \cdot 10^{-6}$ Па·с, величина опорного давления $p_0 = 300$ бар, сжимаемость жидкости $c_{\rm f} = 4.16 \cdot 10^{-10}$ Па$^{-1}$, плотность $\rho_0 = 1000$ кг/м^3. Опорное значение раскрытия $w_{\rm ref} = 10$ мм.

В центре трещины, в круге $\Omega^h_{\rm bc}$ радиусом $R = h$, где h — характерный шаг сетки, задается постоянное по времени давление, равное $1.1p_0$. В начальный момент времени давление в трещине равняется p_0.

Параметр точности в критерии остановки метода простых итераций равнялся $\epsilon_{\rm iter} = 1.0 \cdot 10^{-6}$, максимальное число итераций равнялось $N^{\max}_{\rm iter} = 10$.

Параметры уравнения (9) $c_{\rm w} = 1/p_0$, $p_{\rm ref} = p_0$.

Результаты расчетов представлены на рисунке 2.

7 Заключение

В работе рассмотрен вычислительный алгоритм для решения уравнений на эволюционирующих поверхностях с краем. Основу алгоритма составляет конечно-элементный вариант метода проекции ближайшей точки, который используется как для построения аппроксимаций задачи, так и для описания динамики поверхности с краем. Применение алгоритма иллюстрируется на примере решения задачи о течении жидкости в эволюционирующей трещине гидроразрыва пласта в приближении смазочного слоя.

Аналогичный способ описания поверхности и соответствующие геометрические алгоритмы, подробно изложенные в [Иванов2017], применялись в работах [Савенков2018, Савенков2019] для описания динамики трещины в рамках «расширенного» метода конечных элементов (X-FEM). Общая техническая база подхода (применение метода проекции ближайшей точки для решения уравнения на поверхности. в рамках метода X-FEM и представления поверхности в обоих случаях) позволяет прозрачно интегрировать разработанные алгоритмы в рамках единого «решателя».

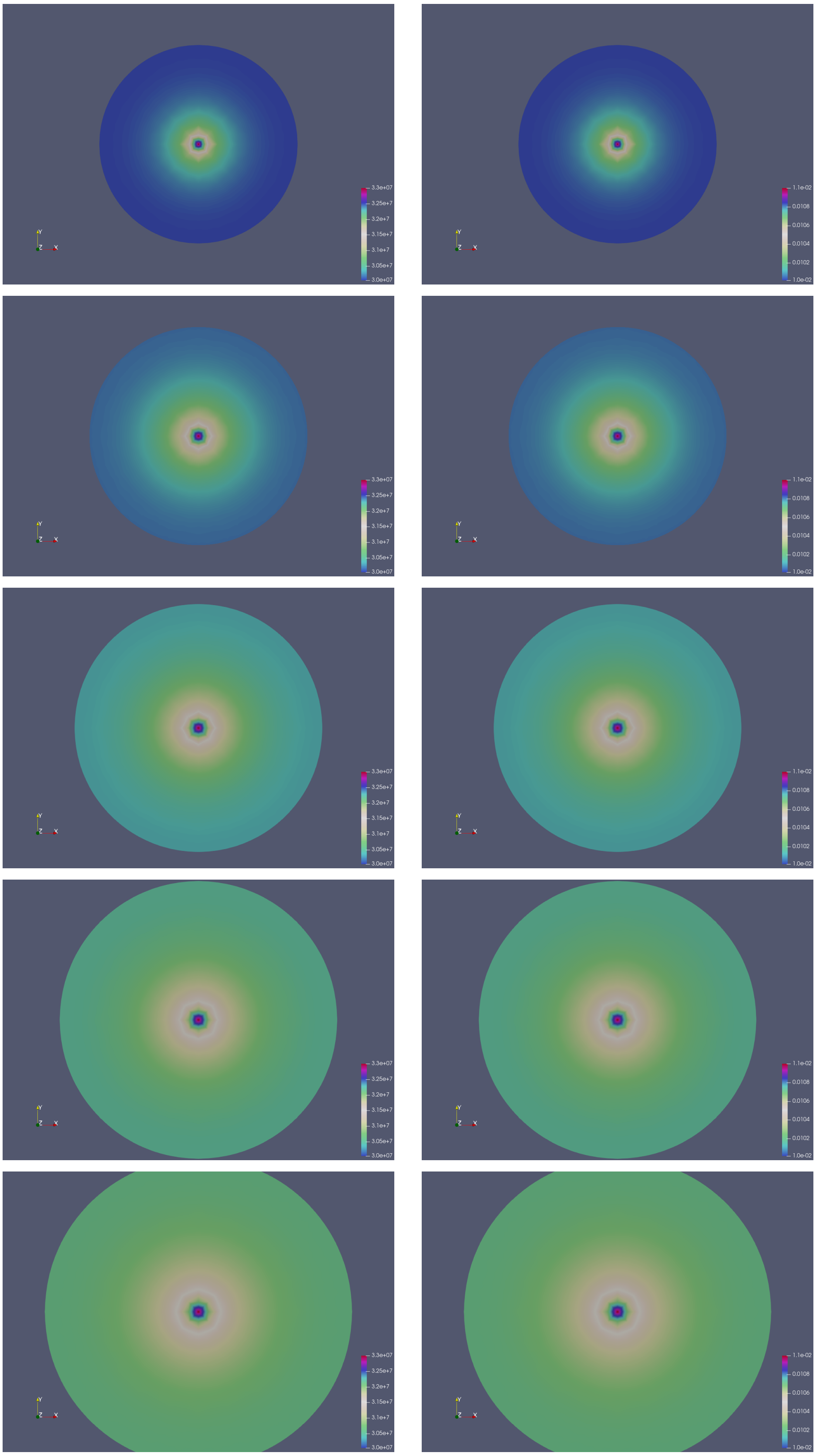


Рис. 2. Распределение давления (слева) и раскрытия (справа) в моменты времени $t \in (1, 3, 6, 9, 12)\Delta t$ (сверху вниз).

Список литературы

[Дубровин1986] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия: методы и приложения, М.: Наука, 1986. 760 с.

[Зипунова2020] Зипунова Е.В., Савенков Е.Б. Применение метода проекции ближайшей точки для решения уравнений гидродинамики в приближении смазочного слоя // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2020. № 10. 32 с.

[Иванов2017] Иванов А.В., Савенков Е.Б. Моделирование и визуальное представление динамики поверхности с подвижным краем на стационарной неструктурированной сетке // Научная визуализация. 2017, том 9, № 2, с. 64-81.

[Рамазанов2017] Рамазанов М.М., Критский Б.В., Савенков Е.Б. Формулировка J-интеграла для модели пороупругой среды Био // Инженерно-физический журнал, Т. 91, № 6. 2017. с. 1677-1684.

[Савенков2018] Савенков Е.Б., Борисов В.Е., Критский Б.В. Алгоритм метода X-FEM с представлением поверхности трещины на основе проекции ближайшей точки // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 42. 36 с.

[Савенков2019] Савенков Е.Б., Борисов В.Е., Критский Б.В. Представление поверхности с помощью проекции ближайшей точки в методе X-FEM // Матем. моделирование, 31:6 (2019), с. 18–42.

[Савенков2020a] Савенков Е.Б. Решение уравнений в частных производных на поверхностях: обзор алгоритмов // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2020. № 5. 18 с.

[Савенков2020b] Савенков Е.Б. Конечноэлементный вариант метода проекции ближайшей точки для решения уравнений на поверхностях с краем // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2020. № 8. 36 с.

[Салимов2013] Салимов В.Г., Ибрагимов Н.Г., Насыбуллин А.В., Салимов О.В. Гидравлический разрыв карбонатных пластов. М.: Нефтяное хозяйство, 2013. 471 с.

[Экономидес2007] Экономидес М., Олини Р., Валько П. Унифицированный дизайн гидроразрыва пласта. От теории к практике. М.: Институт компьютерных исследований, 2007. 236 с.

[Burman2019] Burman, E., Frei, S., Massing, A. Eulerian time-stepping schemes for the non-stationary Stokes equations on time-dependent domains // arXiv:1910.03054v1 [math.NA] 7 Oct 2019.

[Donea2004] Donea, J., Huerta, A., Ponthot, J.P., Rodriguez-Ferran, A. Arbitrary Lagrangian-Eulerian Methods. J. Wiley & Sons, 2004.

[Formaggia1999] Formaggia, L., Nobile, F. A Stability Analysis for the Arbitrary Lagrangian Eulerian Formulation with Finite Elements // East-West Journal of Numerical Mathematics, 7, 2, 105-132 (1999).

[Gravouil2002] Gravouil, A., Moës, N., Belytschko, T. Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets — Part II: Level set update // Int. J. Num. Meth. Eng. vol. 53, issue 11. pp. 2569-2586. 2002.

[Langer2019] Langer, U., Steinbach, O. (eds.) Space-Time Methods Applications to Partial Differential Equations // Radon Series on Computational and Applied Mathematics, vol. 25, 2019.

[Lehrenfeld2019] Lehrenfeld, C., Olshanskii, M. An Eulerian finite element method for pdes in time-dependent domains // ESAIM: M2AN, 53(2):585–614, 2019.

[Macdonald2008] Macdonald, C.B., Ruuth, S.J. Level set equations on surfaces via the Closest Point Method // J. Sci. Comput., 35 (2008), pp. 219–240.

[Macdonald2009] Macdonald, C.B., Ruuth, S.J. The implicit Closest Point Method for the numerical solution of partial differential equations on surfaces // SIAM J. Sci. Comput., 31 (2009), pp. 4330–4350.

[Macdonald2011] Macdonald, C.B., Brandman, J., Ruuth, S.J. Solving eigenvalue problems on curved surfaces using the Closest Point Method // J. Comput. Phys., 230 (2011), pp. 7944–7956.

[März2012] März, T., Macdonald, C.B. Calculus on Surfaces with General Closest Point Functions // SIAM J. Numer. Anal., 50(6), 3303–3328.

[Merriman2007] Merriman, B., Ruuth, S.J. Diffusion generated motion of curves on surfaces // Journal of Computational Physics 225 (2007) pp. 2267–2282.

[Moës2002] Moës, N., Gravouil, A., Belytschko, T. Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets — Part I: Mechanical Model // Int. J. Num. Meth. Eng. vol. 53, issue 11. pp. 2549-2568. 2002.

[Ramazanov2018] Ramazanov, M., Borisov, V., Kritsky, B., Savenkov, E. Fracture growth criterion for poroelastic media // AIP Conference Proceedings, 2018, 2051, 020250. 2018.

[Ruuth2008] Ruuth, S.J., Merriman, B. A simple embedding method for solving partial differential equations on surfaces // Journal of Computational Physics, 227, pp. 1943–1961, 2008.

Содержание