ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 128 за 2020 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

С.Б. Попов

Исследование боковой воздушной электромагнитной волны в электроразведке

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Попов С.Б. Исследование боковой воздушной электромагнитной волны в электроразведке // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 128. 36 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2020-128
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-128

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

С. Б. Попов

Исследование боковой воздушной электромагнитной волны в электроразведке

Москва — 2020

Попов С.Б.

Исследование боковой воздушной электромагнитной волны в электроразведке

Данная работа носит методический характер и связана с разработкой эффективного численно-аналитического решения уравнений Максвелла для задач электроразведки на основе 1D плоскослоистой модели геосреды. В [1] была разработана «аддитивная» схема вычислений для решения такой задачи. Одной из составных частей данной схемы является расчет волн разных типов, распространяющихся непосредственно из источника на приемник в двухслойном пространстве вода-воздух. Такие волны, и особенно так называемая боковая воздушная электромагнитная волна, представляют собой «паразитический» сигнал, способный «забить» полезный сигнал от неоднородностей в толще земли. В связи с этим в настоящей работе проведено актуальное исследование распространения волн разных типов в двухслойной среде вода-воздух с упором на боковую волну, выделенную и изученную как самостоятельный объект. Получены соответствующие эффективные представления в виде формул в частотной и временной областях, представлены результаты численных расчетов боковой волны по разработанным аппроксимациям. Также в работе рассмотрено применение сверхкороткого импульса электрического тока для радиолокации ближней зоны.

Ключевые слова: электроразведка, боковая волна, плоскослоистая модель геосреды.

Popov, Sergey Borisovich

Investigation of a lateral air electromagnetic wave in electrical prospecting

This work is of a methodological nature and is related to the development of an effective numerical and analytical solution of Maxwell's equations for electrical prospecting problems based on the 1D plane-layered geological space model. In [1], an "additive" computational scheme was developed to solve such a problem. One of the components of this scheme is the calculation of different types of waves propagating directly from the source to the receiver in a two-layer water-air space. Such waves, and especially the so-called lateral air electromagnetic wave, are a "parasitic" signal that can "crush" the useful signal from inhomogeneities in the earth's thickness. In this regard, in this paper, an actual investigation of the propagation of waves of different types in a water-air medium is carried out, with an emphasis on the lateral wave, isolated and studied as an independent object. The corresponding effective representations in the form of formulas in the frequency and time domains are obtained, and the results of numerical calculations of the lateral wave using the developed approximations are presented. The paper also considers the application of an ultrashort electric current pulse for near-field radar.

Key words: electrical prospecting, computational scheme, lateral air wave, plane-layered geological space model.

1. Введение

Данная работа является продолжением работы [1], в которой рассмотрены вопросы эффективного численно-аналитического решения уравнений Максвелла для задач электроразведки на основе классической 1D многослойной модели геосреды. В [1] кратко описан ряд основных методов активной электроразведки, применяемых для геологоразведочных работ, - по типу излучаемого сигнала различают метод зондирования становлением поля (ЗСП) и метод частотного зондирования (ЧЗ) [2–8]. В основе интерпретации получаемых данных лежит задача расчета распространения электромагнитных (ЭМ) волн в среде на основе решения уравнений Максвелла. При этом при моделировании широко применяется 1D плоскослоистая модель исследуемой среды, в которой предполагается, что электромагнитные свойства среды кусочно-постоянны, изотропны и изменяются только по вертикальной оси глубины. В [1] описан процесс решения в частотной и временной областях на основе преобразования Лапласа и сведения решения системы уравнений Максвелла к вычислению интегралов типа Ханкеля со сложными комплекснозначными ядрами, предложены методы для ускорения численных расчетов интегралов и повышения точности. А именно, в [1] разработана «аддитивная схема», в которой решение представляется в виде суммы по $n = 1,\ldots,N$ слагаемых. Каждое слагаемое отвечает случаю с числом слоев по вертикали, равным n+1, и вычисляется отдельно, независимо от остальных. Причем выражения для разных слоев имеют различное асимптотическое и осциллирующее поведение подынтегральных функций и, соответственно, должны интегрироваться со своими шагами интегрирования. Заметим, что затраты на численное интегрирование снижаются с ростом n, несмотря на нарастание громоздкости соответствующих формул (их построение и вычисление производится рекурсивно). При этом наиболее трудоемким для вычислений (при прямом численном интегрировании) является расчет 1-го слагаемого ($n = 1$), отвечающего двухслойному пространству вода-воздух. Данный двухслойный случай описывает возмущения, распространяющиеся непосредственно из источника на приемник и представляющие собой «паразитический» сигнал, способный «забить» полезный сигнал, отвечающий возмущениям, отраженным от неоднородностей в толще земли, в частности, от углеводородного слоя (УВС). В связи с этим требуется отдельное детальное исследование указанного двухслойного случая для эффективного численного расчета. В настоящей работе проведено математическое моделирование процесса распространения волн разного типа, включая наиболее мощную и одновременно затратную с вычислительной точки зрения составляющую – так называемую «боковую» воздушную волну. Получены соответствующие аналитические формульные представления для отдельных составляющих ЭМ отклика. Это важно, в частности, для учета «паразитического» сигнала и выделения полезного сигнала.

Заметим, что в задачах электроразведки традиционно применяют так называемое низкочастотное диффузионное приближение, упрощающее задачу. В этом **приближении** пренебрегают влиянием токов смещения по сравнению с влиянием токов проводимости, что эквивалентно обнулению значений относительных диэлектрических проницаемостей сред. Это связано с тем, что для практически применяемого диапазона частот в методе ЧЗ значение токов смещения по сравнению с токами проводимости для реальных сред (вода, земля) пренебрежимо малоv широком диапазоне частот (до десятков килогерц). Что касается метода ЗСП, то разложение в частотный спектр нестационарного затухающего процесса показывает, что высокочастотные составляющие играют заметную роль только на самой начальной стадии после возникновения (первые десятки микросекунд), поэтому для исследования более поздних стадий установления ЭМ поля можно пренебречь токами смещения.

При этом возможность пренебречь токами смещения в воздухе apriori не ясна, т.к. его электропроводность пренебрежимо мала. В [9] исследовался данный вопрос для случая среды из двух полубесконечных однородных сред (воздух и земля), когда излучающий диполь - вертикальный магнитный или горизонтальный электрический - лежит на плоской поверхности земли. Распространение возбуждения при этом имеет два типа. Возбуждение первого типа (так называемая «боковая» или «воздушная» волна) распространяется сначала по воздуху со скоростью v, равной скорости света, и лишь затем проникает в землю. Возбуждение второго типа распространяется непосредственно в земле. Пренебрежение токами смещения в воздухе приводит к бесконечной скорости распространения возмущения по воздуху, $v = \infty$. Таким образом, пренебрежение токами смещения приводит к замене скорости распространения возмущения порядка скорости света на бесконечную скорость распространения, что оправдано в большинстве задач радиозондирования.

В настоящей работе на примере случая двухслойной среды вода-воздух исследован получаемый на приемнике ЭМ сигнал и его отдельные составляющие (при расположении и источника и приемника в воде). При этом применялось полноволновое, недиффузионное приближение с реальными ненулевыми значениями относительных диэлектрических проницаемостей. Такое рассмотрение не только удобно для физической интерпретации отдельных составляющих ЭМ возмущения, приходящего на приемник, но и позволяет выявить границы применимости низкочастотного приближения.

В работе получены аналитические представления в частотной и временной областях для отдельных составляющих ЭМ возмущения в двухслойной среде как в полноволновом, так и в низкочастотном приближениях. В частности, получены эффективные представления для наиболее трудоемкой составляющей - **боковой воздушной волны**, выделенной и исследованной как самостоятельный объект.

Полученные представления реализованы в виде компьютерного модуля расчета компонент ЭМ поля в двухслойной среде. Этот модуль предназначен

для использования в качестве составной части для расчета N-слойной среды по «аддитивному» методу, изложенному в [1].

В работе представлены результаты численных расчетов боковой волны по разработанным аппроксимациям, в которых сопоставлены полноволновое и низкочастотное приближения. Эти результаты показывают границы применения этих аппроксимаций.

Заметим, что существуют задачи электрозондирования (например, при зондировании ближней зоны окрестности скважины), в которых следует применять именно полноволновое рассмотрение, позволяющее отслеживать моменты прихода волн разных типов и тем самым дающее, вообще говоря, больше информации об окружающей источник среде. При этом перспективным является использование коротких и сверхкоротких [10-14] мощных импульсов электрического тока на источнике вместо импульсов постоянного тока. В связи с этим приведены результаты расчета отклика ЭМ поля на приемнике при применении сверхкороткого импульса электрического тока в двухслойной среде. На представленных графиках хорошо прослеживаются моменты прихода волн разных типов на приемник.

2. Математическая формулировка задачи

Напомним постановку задачи [1]. Рассматривается вопрос вычисления компонент вектора напряженности электромагнитного поля (ЭП), генерируемого точечным источником в геологической среде. В качестве модели среды рассматривается 1D плоскослоистая модель, состоящая из N+1 горизонтального слоя. Пусть ось OZ направлена вертикально вниз (вглубь земли), а оси OX и OY лежат в горизонтальной плоскости. Нумерация слоев начинается с нуля и идет сверху вниз вдоль оси OZ. Границы разделов сред совпадают с горизонтальными плоскостями $z = h_j$, $j = 0,..., N$. При этом

«нулевой» слой: $-\infty < z < h_0 = 0$ – полубесконечный слой воздуха;

слой номер 1: $h_0 < z < h_1$ – отвечает водной среде;

слои с номерами 2, 3,... – слои породы земли;

самый нижний слой с номером N – полубесконечный слой земли.

В водном слое расположены и излучающий и приемный точечные горизонтальные электрические диполи (HED), направленные вдоль оси OX. Требуется определить величину E_X вектора напряженности электрического поля на приемном диполе, расположенном в том же слое, в котором расположен излучающий диполь (так называемая аксиальная установка).

Уравнения Максвелла в системе СИ можно записать в следующем виде в частотной области (после преобразования Фурье или Лапласа [15, 16]):

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = p\varepsilon_j + \mathbf{J}^E;\ \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -p\mu\mathbf{H},$$

где $\varepsilon_j = \varepsilon_0 \varepsilon_{rj} + \sigma_j / p$ – электрическая проницаемость среды, зависящая от номера слоя j, ε_{rj} – относительная диэлектрическая проницаемость, σ_j – проводимость (См/м); $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Г/m – магнитная проницаемость среды, предполагающаяся всюду равной магнитной проницаемости вакуума, μ_0; $\varepsilon_0 = 10^7 / \left(4\pi c^2\right)$ Ф/m – диэлектрическая проницаемость вакуума, $c = \left(\varepsilon_0 \mu_0\right)^{-1/2}$ – скорость света в вакууме.

В случае преобразования Лапласа $p = \alpha - i\omega$, где $\alpha > 0$, $\omega = 2\pi f$ – круговая частота, f – частота. В случае преобразования Фурье $p = -i\omega$.

При переходе в частотную область предполагается, что все величины меняются по времени как $\exp\left(-i\omega t\right)$.

Источник (HED) находится в «водном» слое в точке с координатами $\left(x_S = 0, y_S = 0, z_S\right)$. В системе уравнений Максвелла ему будет соответствовать источник $\mathbf{J}^E = \left(J_X, 0, 0\right)$. Приемник (HED) расположен в точке $M = \left(x_R, y_R = y_S, z_R\right)$.

Как известно, [17-21], решение уравнений Максвелла для плоскослоистой среды с расположенным в ней горизонтальным электрическим диполем сводится к нахождению двух компонент векторного потенциала $\mathbf{A} = \left(A_X, 0, A_Z\right)$, через которые вычисляются векторы электрической и магнитной напряжённости:

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_Z}{\partial y}, \frac{\partial A_X}{\partial z} - \frac{\partial A_Z}{\partial x}, -\frac{\partial A_X}{\partial y} \right), \mathbf{E} = -p\mu \left[\mathbf{A} + \frac{1}{k^2} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} \right],$$

где k – волновое число, $k^2 = -p^2 \mu\varepsilon = -\mu_0 \left(p^2 \varepsilon_0 \varepsilon_{rj} + p\sigma_j \right)$, $\operatorname{Im} k > 0$.

В рассматриваемых задачах электроразведки в методе ЧЗ и ЗСП обычно используется **низкочастотное приближение**, при котором пренебрегают влиянием токов смещения по сравнению с влиянием токов проводимости, т.е. полагают: $\varepsilon_j = \sigma_j / p$, $k_j^2 = -p\mu_0 \sigma_j$.

Следуя [17-21], компоненты векторного потенциала в каждом слое j=0,1,...,N ищутся в виде преобразования Ханкеля по функциям Бесселя нулевого порядка, J_0:

$$A_X^{(j)} = \frac{F}{4\pi} \int_0^\infty X_j(z) J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_j}, \; A_Z^{(j)} = \frac{\partial}{\partial x} \tilde{A}_Z^{(j)}, \; \tilde{A}_Z^{(j)} = \frac{F}{4\pi} \int_0^\infty Z_j(z) J_0(\lambda r) \lambda \frac{d\lambda}{\gamma_j}.$$

Здесь коэффициент $F = J_X dx_S$ – момент излучающего диполя, отвечающий точечному источнику длины dx_S, ориентированному вдоль оси X, и с величиной тока J_X в электрической цепи источника;

$r = \sqrt{(x - x_S)^2 + (y - y_S)^2}$, $\gamma_j = \sqrt{\lambda^2 - k_j^2}$, $\mathrm{Re}\,\gamma_j > 0$.

Искомый отклик ЭП в частотной области на приемном диполе равен:

$$\hat{E}_X(M, p) = -p\mu\left[A_X^{(1)} + \frac{1}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(A_X^{(1)} + \frac{\partial}{\partial z}\tilde{A}_Z^{(1)} \right) \right]. \qquad (1)$$

В случае метода ЗСП необходимо выполнить переход из частотной области во временную, т.е. осуществить обратное преобразование Лапласа,

$$\hat{E}_X(M, p) \Rightarrow E_X(M, t),$$

например, используя формулу Меллина [15, 16]:

$$E_X(M, t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\hat{E}_X(M, p)\right](t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \exp(pt)\hat{E}_X(M, p)dp .$$

В [1] предложена «аддитивная схема» вычислений интегралов Ханкеля в N-слойной среде, в которой решение представляется в виде суммы n = 1,…,N членов, отвечающих случаям с различным числом слоев по вертикали (равным n+1). Такое представление дает возможность осуществлять эффективное вычисление каждого члена аддитивной схемы, т.к. позволяет производить индивидуальную настройку параметров интегрирования для каждого члена, учитывающую разное экспоненциальное поведение подынтегральных функций.

Заметим, что затраты на численное интегрирование снижаются с ростом n, несмотря на нарастание громоздкости соответствующих формул (их построение и вычисление производится рекурсивно). При этом случай двухслойной среды, входящий в аддитивную схему вычислений и отвечающий n = 1, наиболее плохо сходится с точки зрения численного интегрирования и требует отдельного детального рассмотрения. Поэтому в данной работе продолжено исследование именно данного случая, начатое в [1]. Причем рассмотрено «полное», не низкочастотное приближение, показан физический смысл отдельных членов для отклика ЭП и ограничения, накладываемые низкочастотным приближением. Получен ряд асимптотических оценок и представлений, которые можно эффективно использовать в процессе вычислений ЭМ отклика в N-слойной среде по «аддитивной» схеме.

3. Двухслойная среда (*n*= 1) в полно-волновом приближении

Низкочастотное (диффузионное) приближение (обозначаемое ниже как приближение LF) упрощает вычисления, но при этом теряется часть информации в получаемом численно отклике ЭМ поля и во многом утрачивается физический смысл процесса распространения ЭМ возмущения. Выясним физический смысл отдельных составляющих приходящего на приемник возмущения на примере случая двухслойной среды вода-воздух (*n*=1). Для этого рассмотрим отклик x-компоненты ЭМ поля в полноволновом,

недиффузионном приближении (y-компонента рассматривается аналогичным образом).

Имеем в частотной области следующее представление x-компоненты напряженности ЭМ поля, вытекающее из (1):

$$\hat{E}_X^{(n=1)}(M,p)=\hat{\phi}_X(M,p)+\hat{\psi}_X(M,p), \tag{2}$$

где

$$\hat{\phi}_X=\frac{\mu_0 pF}{4\pi}\left\{\hat{G}(\rho,p)-\hat{G}(R,p)+\right. \tag{3}$$
$$\left.+\frac{1}{k_1^2}\left[\frac{2}{1-\upsilon}\frac{\partial^2}{\partial h^2}\hat{G}(\rho,p)+\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{x}^2}\left(\hat{G}(R,p)-\hat{G}(\rho,p)\right)\right]\right\};$$

$$\hat{\psi}_X=-\frac{\mu_0 pF}{2\pi}\left[1-\upsilon+\frac{1}{k_1^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial h^2}+\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{x}^2}\right)\right]I_A(r,h,p); \tag{4}$$

$$\hat{G}(R,p)=\frac{\exp(ik_1R)}{R},\hat{G}(\rho,p)=\frac{\exp(ik_1\rho)}{\rho}, \tag{5}$$

$$I_A(r,h,p)=\int_0^\infty \exp(-\gamma_1 h)J_0(\lambda r)\frac{\lambda d\lambda}{\gamma_0}, \tag{6}$$

$\upsilon=k_0^2/k_1^2,\gamma_j=\sqrt{\lambda^2-k_j^2}$, $\mathrm{Re}\,\gamma_j>0$,

$r=\sqrt{(x-x_S)^2+(y-y_S)^2}$, $R=\sqrt{r^2+(z-z_S)^2}$, $\rho=\sqrt{r^2+h^2}$, $h=z+z_S$.

Распространение ЭМ возбуждения можно разбить на два типа. К первому типу отнесем слагаемое $\hat{\psi}_X$ (4), выражающееся через интеграл (6), – это будет так называемая, «боковая» «воздушная» волна, которая распространяется сначала по воздуху со скоростью v, равной скорости света, и лишь затем проникает в воду, если выполнены условия существования такой волны.

Ко второму типу отнесем слагаемое $\hat{\phi}_X$ (3), выражающееся через $\hat{G}(R,p)$, $\hat{G}(\rho,p)$ (5). Возбуждение второго типа распространяется непосредственно в водной среде.

В приближении LF полагают все относительные диэлектрические проницаемости нулевыми, $\varepsilon_{rj}=0$. При этом получают, в частности, $k_0=0,\ \gamma_0=|\lambda|$.

Физический смысл слагаемых в представлении компоненты ЭП с математической точки зрения связан с экспоненциальными членами, а также с точками ветвления функций γ_j в интеграле $I_A(r,h,p)$ (6). Ниже исследовано, к чему приведет учет ненулевых значений $\varepsilon_{rj}=0$. При этом, для упрощения, в

правых частях членов φ_X, ψ_X положим $\upsilon = 0$, так как $|\upsilon| << 1$, и такое упрощение не влияет на осмысление отдельных членов. Оставляем, однако, в исходном виде функцию $\gamma_0 = \sqrt{\lambda^2 - k_0^2}$ в интеграле $I_A(r,h,p)$, т.к. для этой функции точка $\lambda = k_0$ является точкой ветвления и именно с ней, как показано ниже, связана боковая (воздушная) волна.

Ниже в основном рассмотрен случай импульса постоянного тока величины J_0, $pF = m_0 = J_0 \cdot 1м$, включаемого в момент времени t = 0.

Наряду с импульсом постоянного тока также рассмотрено применение сверхкоротких импульсов электрического тока для зондирования ближней зоны источника.

Ниже рассмотрены предельные соотношения во временной области для больших и малых моментов времени, которые можно получить непосредственно на основании изображения Лапласа.

3.1. Большие моменты времени

Предельные соотношения при $p \to 0$ изображений Лапласа отвечают большим моментам времени [15, 16] и позволяют определить установившиеся с течением времени значения.

Найдем предел при t $\to\infty$ для волн первого типа, ψ_X:

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{L}^{-1}[\psi_X](M,t) = \lim_{p\to 0} p\,\psi_X(M,p) = -\frac{\mu_0 m_0}{2\pi} \lim_{p\to 0} p\left[1 + \frac{1}{k_1^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial h^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{x}^2}\right)\right] I_A(r,h,p) =$$

$$= -\frac{\mu_0 m_0}{2\pi} \lim_{p\to 0} \frac{p}{k_1^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial h^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{x}^2}\right) I_A(r,h,p) = \frac{m_0}{2\pi\sigma_1}\left(\frac{\partial^2}{\partial h^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{x}^2}\right)\frac{1}{\rho},$$

при этом использовали, что при $p \to 0$ имеем случай $k_0 = 0$, для которого имеется известное представление интеграла $I_A(r,h,p)$ (6) через **интеграл Фока,** I_F (см., например, [4]):

$$I_A(r,h,p)\big|_{k_0=0} = \int_0^\infty \exp(-\gamma_1 h) J_0(\lambda r) d\lambda = -\frac{\partial}{\partial h} I_F(r,h,k_1), \qquad (7)$$

$$I_F(r,h,k_1) = \int_0^\infty \exp(-\gamma_1 h) J_0(\lambda r) \frac{d\lambda}{\gamma_1} = \frac{i\pi}{2} J_0\left[\frac{k_1}{2}(\rho - h)\right] \cdot H_0^{(1)}\left[\frac{k_1}{2}(\rho + h)\right].$$

Откуда, используя асимптотику малых аргументов функции Ханкеля, $H_1^{(1)}(\zeta) \sim -2i/(\pi\zeta)$, можно получить

$$\lim_{p\to 0} I_A(r,h,p) = -\frac{\partial}{\partial h} \lim_{p\to 0} I_F(r,h,k_1) = -\frac{i\pi}{2} \lim_{p\to 0} \frac{\partial}{\partial h} H_0^{(1)}\left[\frac{k_1}{2}(\rho + h)\right] = \frac{1}{\rho}. \qquad (8)$$

Для волн второго типа имеем

$$\lim_{t\to\infty}\mathcal{L}^{-1}\left[\hat{\phi}_X\right](M,t)=\lim_{p\to 0}p\hat{\phi}_X(M,p)=-\frac{m_0}{4\pi\sigma_1}\left[2\frac{\partial^2}{\partial h^2}\left(\frac{1}{\rho}\right)+\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{x}^2}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{\rho}\right)\right],$$

т.к. $\lim_{p\to 0}\frac{p}{k_1^2}=\frac{-1}{\mu_0\sigma_1}$.

3.2. Начальные моменты времени для возбуждений второго типа и физический смысл этих волн

Предельные соотношения при $p\to\infty$ изображений Лапласа отвечают начальным моментам времени [15,16] и позволяют определить моменты времени прихода возмущений из источника на приемник.

Устремляя $p\to\infty$ (либо обнуляя σ_1), получим:

$$\hat{G}(R,p\to\infty)\sim\exp(-pt_R)/R,$$

где $t_R=R/\mathrm{v}_1$ означает время прихода переднего фронта ЭМ возмущения из источника на приемник, находящийся на расстоянии R от источника, при распространении в среде 1 со скоростью света в этой среде, $\mathrm{v}_1=1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}$. Под временем прихода будем понимать промежуток времени между моментом включения тока и моментом прихода волны на приемник.

Математически задержка времени прихода волны на приемник может быть выражена, используя теорему запаздывания для преобразования Лапласа:

$$\hat{G}(R,p)=\tilde{f}(p)\exp(-pt_R)\Leftrightarrow\tilde{F}(t-t_R)\eta(t-t_R),t_R>0,$$

$\eta(t-t_R)$– единичная функция Дирака.

Нетрудно видеть, что члены, содержащие $\hat{G}(R,p)$, отвечают возмущению, распространяющемуся по среде 1 «напрямую» от источника к приемнику. Это можно установить, исходя из времени прихода переднего фронта такого «прямого» сигнала, равного $t_R=R/\mathrm{v}_1$.

Аналогично нетрудно убедиться, что члены, содержащие $\hat{G}(\rho,p)$, отвечают возмущению, распространяющемуся от источника к приемнику, претерпевая полное зеркальное отражение от границы раздела сред воздух-вода. Время прихода переднего фронта такого «отраженного» сигнала равно $t_\rho=\rho/\mathrm{v}_1$.

На рис.1 изображены оптические пути распространения волн, возникающих в двухслойной среде вода-воздух с источником в водной среде:

- «прямая» волна (отрезок OM),
- «отраженная» волна (путь из двух отрезков, OLM),
- «боковая» волна (путь из трех отрезков, OPQM).

Боковая воздушная волна будет рассмотрена ниже.

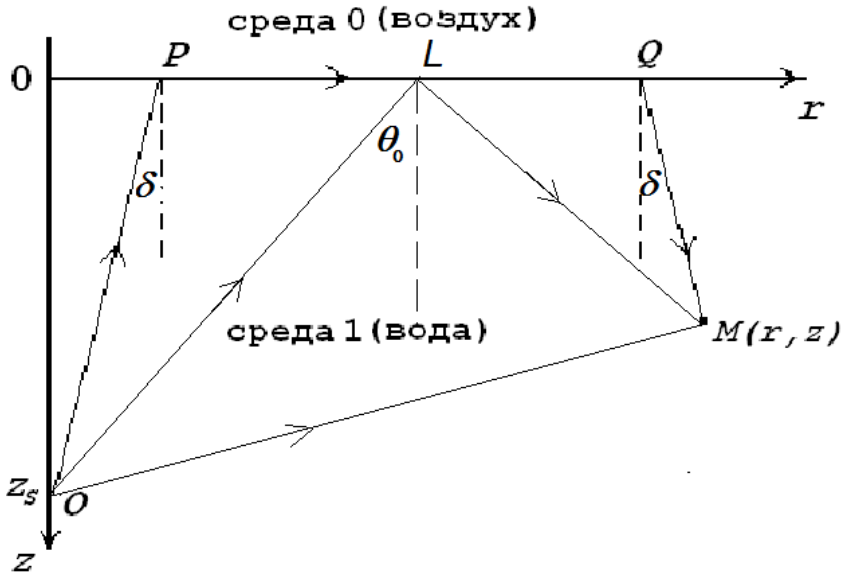

Рис.1. Оптические пути распространения прямой, отраженной и боковой волн

Учет ненулевого значения σ_1 не меняет времени прихода переднего фронта ЭМ возмущения, но, как следует из дальнейшего, меняет форму приходящего возмущения.

4. Обратное преобразование Лапласа возбуждений второго типа

Получение оригинала выражения $\hat{\varphi}_X(M,p)$ (3) сводится к обратному преобразованию Лапласа функций вида $\exp(ik_1R), \exp(ik_1R)/k_1^2$.

Представим k_1^2 в виде:

$$k_1^2 = -\alpha_1^2 p(p+2\chi_1),\ \alpha_1 = \sqrt{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_{r1}} = 1/\mathrm{v}_1,\ \chi_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0\varepsilon_{r1}},$$

$$k_1 = i\alpha_1\sqrt{p(p+2\chi_1)},\ \mathrm{Re}\sqrt{p(p+2\chi_1)} > 0,$$

$$\mathcal{L}^{-1}\exp(ik_1R) = \mathcal{L}^{-1}\exp\left(-t_R\sqrt{p(p+2\chi_1)}\right), t_R = R/\mathrm{v}_1.$$

Из таблицы преобразований Лапласа [16, 22] имеем

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{\exp\left(-\theta\sqrt{p(p+2\chi)}\right)}{\sqrt{p(p+2\chi)}} = \exp(-\chi t)I_0\left(\chi\sqrt{t^2-\theta^2}\right)\eta(t-\theta),$$

откуда, дифференцируя по параметру θ, получим

$$\mathcal{L}^{-1}\exp\left(-\theta\sqrt{p(p+2\chi)}\right) = -\exp(-\chi t)\frac{\partial}{\partial\theta}I_0\left(\chi\sqrt{t^2-\theta^2}\right)\eta(t-\theta) = F_0(t,\theta,\chi).$$

Следовательно,

$$\mathcal{L}^{-1}\exp(ik_1R) = F_0(t,t_R,\chi_1),$$

$$\mathcal{L}^{-1}\hat{G}(R,p) = \frac{1}{R}F_0(t,t_R,\chi_1), \mathcal{L}^{-1}\hat{G}(\rho,p) = \frac{1}{\rho}F_0(t,t_\rho,\chi_1), \qquad (9)$$

$t_\rho = \rho / \mathrm{v}_1$,

где обозначено

$$F_0(t,\theta,\chi) = \eta(t-\theta) S_0(t,\theta,\chi) + \delta(t-\theta)\exp(-\chi\theta),$$
$$S_0(t,\theta,\chi) = \exp(-\chi t) I_1\left(\chi\sqrt{t^2-\theta^2}\right)\frac{\chi\theta}{\sqrt{t^2-\theta^2}}, \qquad (10)$$

$F_0(t,\theta,\chi)$ – обобщенная функция [23], содержащая δ-функцию.

Заметим, что появление δ-функции связано с предположением о мгновенном включении источника постоянного электрического тока в начальный момент времени. Эту особенность надо учитывать при проведении численных расчетов. Из выписанных формул следует, что, как и ожидалось на основании исследования для $p \to \infty$, члены, связанные с $\hat{G}(R,p)$ и $\hat{G}(\rho,p)$, «включаются» (становятся неравными нулю) только спустя соответствующее время, t_R и t_ρ, после включения импульса тока.

Рассмотрим теперь обратное преобразование Лапласа функции $\exp(ik_1R)/k_1^2$. Представляя

$$\frac{\exp(ik_1R)}{k_1^2} = -\frac{1}{\alpha_1^2}\frac{\exp\left(-t_R\sqrt{p(p+2\chi_1)}\right)}{p(p+2\chi_1)},$$

получим:

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{\exp(ik_1R)}{k_1^2} = \frac{-1}{2\alpha_1^2\chi_1}\left[\int_0^t F_0(\tau,t_R,\chi_1)d\tau - \exp(-2\chi_1 t)\int_0^t \exp(2\chi_1\tau)F_0(\tau,t_R,\chi_1)d\tau\right].$$

При выводе использовали теорему смещения:

$$\mathcal{L}^{-1}[f(p-a)](t) = \exp(at)\mathcal{L}^{-1}[f(p)](t),$$
$$\mathcal{L}^{-1}\exp\left(-\theta\sqrt{p(p-2a)}\right) = F_0(t,\theta,-a) = \exp(2at)F_0(t,\theta,a),$$

и теорему об интегрировании оригинала преобразования Лапласа:

$$\int_0^t G(\tau)d\tau \Leftrightarrow \frac{1}{p}\hat{G}(p).$$

В результате получим

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\hat{\varphi}_X^{(1)} + \hat{\varphi}_X^{(2)}\right](t) = -\frac{\mu_0 m_0}{4\pi}\left[\frac{1}{R}F_0(t,t_R,\chi_1) - \frac{1}{\rho}F_0(t,t_\rho,\chi_1)\right] +$$
$$+\frac{\mu_0 m_0}{4\pi}\left[\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{x}^2}\frac{1}{R}\mathcal{L}^{-1}\frac{\exp(ik_1R)}{k_1^2} + \left(2\frac{\partial^2}{\partial h^2} - \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{x}^2}\right)\frac{1}{\rho}\mathcal{L}^{-1}\frac{\exp(ik_1\rho)}{k_1^2}\right].$$

Форма приходящего импульса зависит от коэффициента затухания $\chi_1 = \sigma_1/(2\varepsilon_0\varepsilon_{r1})$.

Как показано в [1], используя асимптотику модифицированных функций Бесселя для больших значений аргумента:

$$I_\nu(\zeta) \sim \exp(\zeta)/\sqrt{2\pi\zeta},$$

можно получить выражение для приближения LF как предел при $\varepsilon_r \to 0$.

$$\lim_{\varepsilon_r \to 0} S_0\left(t, \theta = R\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r}, \chi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon_r}\right) = \frac{bR}{\sqrt{\pi t^3}}\exp\left(-\frac{R^2b^2}{t}\right) = B_0(t, R, \sigma), \qquad (11)$$

где $b = \frac{1}{2}\sqrt{\mu_0\sigma}$.

Такое же значение получаем в пределе $t >> t_R$:

$$S_0\left(t, \theta = R\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r}, \chi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon_r}\right)\Big|_{t>>t_R} = B_0(t, R, \sigma).$$

Таким образом, в приближенииLF имеем:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\hat{G}(R, p)\right]^{LF}(t) = \eta(t)\frac{1}{R}B_0(t, R, \sigma) + \frac{1}{R}\delta(t), \qquad (12)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\hat{G}(R, p)/p\right]^{LF}(t) = \frac{1}{R}\int_0^t B_0(\tau, R, \sigma)d\tau = \frac{\eta(t)}{R}\left[1 - \mathrm{erf}\left(\frac{Rb}{\sqrt{t}}\right)\right], \qquad (13)$$

где $\mathrm{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^u \exp\left(-\xi^2\right)d\xi$ – интеграл вероятности.

Можно заметить, что функция $B_0(t, R, \sigma)$ немонотонна по переменной времени: сначала возрастает до своего максимума, а затем убывает до нуля при $t \to 0$. Максимум достигается в точке $t_0 = \frac{1}{3}R^2\mu_0\sigma$. Аналогично ведет себя и функция $S_0(t, t_R, \chi_1)$, достигая максимума практически в той же точке t_0.

Как уже говорилось выше, приближение LF означает замену скорости распространения возмущения в среде, $\mathrm{v} = c/\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$,на бесконечно большую скорость распространения, $\mathrm{v} = \infty$, что является обычно практически оправданным. Нетрудно показать, что форма приходящего импульса в низкочастотном приближении и полноволновом отличается только в промежутке $0 < t < t_R + \delta$, где $\delta << (Rb)^2$. Этим в большинстве задач радио-георазведки можно пренебречь.

5. Обратное преобразование Лапласа возбуждений первого типа

Обратное преобразование Лапласа слагаемого $\hat{\psi}_X(M, p)$ (5), отвечающего волне первого типа, связано с обратным преобразованием интеграла (6), $I_A(r, h, p)$ и $I_A(r, h, p)/p$:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[I_A(r,h,p)\right](t)=\int_0^{\infty}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\exp(-\gamma_1 h)}{\gamma_0}\right](t)J_0(\lambda r)\lambda d\lambda, \qquad (14)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}I_A(r,h,p)\right](t)=\int_0^{t}\mathcal{L}^{-1}\left[I_A(r,h,p)\right](\tau)d\tau.$$

Используя представление:

$$J_0(u)=\frac{1}{2}\left[H_0^{(1)}(u)-H_0^{(1)}(\exp(i\pi)u)\right],$$

запишем интеграл (6), $I_A(r,h,p)$, в следующем тождественном виде

$$I_A(r,h,p)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}F(\gamma_0,\gamma_1)\cdot H_0^{(1)}(\lambda r)\lambda d\lambda, \qquad (15)$$

$$F(\gamma_0,\gamma_1)=\exp(-\gamma_1 h)/\gamma_0.$$

Учитывая асимптотику больших аргументов функции Ханкеля $H_0^{(1)}$,

$$H_0^{(1)}(\zeta)\sim\exp(i\zeta)\sqrt{2/(\pi i\zeta)},$$

преобразуем интеграл (15) к следующему виду:

$$I_A(r,h,p)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\gamma_1 h+i\lambda r)\tilde{H}_0^{(1)}(\lambda r)\frac{\lambda d\lambda}{\gamma_0}, \qquad (16)$$

где в функции Ханкеля выделена экспоненциальная часть:

$$\tilde{H}_0^{(1)}(\zeta)=H_0^{(1)}(\zeta)\exp(-i\zeta)\sim\sqrt{2/(\pi i\zeta)}.$$

Ниже содержится исследование интеграла (16) в полноволновом диапазоне и дается определение боковой волны. Для сокращения записи часто будем опускать явное указание параметра *p*.

5.1. Исследование интеграла по Зоммерфельду и определение боковой волны

Для исследования интегралов вида (16) часто применяют следующий метод, предложенный Зоммерфельдом (см., например, [18,24]). Этот метод приводит к упрощению подынтегрального выражения и устраняет точку ветвления, связанную с функцией γ_1. В книге Бреховских Л.М. [18] содержится пример такого исследования в предположении вещественных k_0, k_1. Опишем основные моменты этого исследования в применении к интегралу (16).

Во-первых, делается замена переменных (предполагая k_0, k_1 вещественными):

$$\lambda=k_1\sin\theta,$$

тогда

$$\gamma_1=\sqrt{\lambda^2-k_1^2}=-ik_1\cos\theta,\ \gamma_0=\sqrt{\lambda^2-k_0^2}=-ik_1 w(\theta),\ w(\theta)=\sqrt{\sin^2\delta-\sin^2\theta},$$

$$\sin\delta = \frac{k_0}{k_1} \cong \left[p \to \infty\right] = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{r1}}},$$

переходя при этом к интегралу

$$I_A(r,h,p) = \int_\gamma f(\theta)\exp\left(\rho S(\theta)\right)d\theta, \qquad (17)$$

где

$$\rho S(\theta) = ik_1\left(h\cos\theta + r\sin\theta\right) = ik_1\rho\cos\left(\theta - \vartheta_0\right),$$

$$f(\theta) = \frac{ik_1}{2}\tilde{H}_0^{(1)}\left(k_1 r\sin\theta\right)\frac{\sin\theta\cos\theta}{w(\theta)},$$

$$r = \rho\sin\vartheta_0,\ h = \rho\cos\vartheta_0,\ \vartheta_0 = \arcsin\left(r/\rho\right),\ \rho = \sqrt{r^2+h^2}.$$

С физической точки зрения δ – угол полного внутреннего отражения, ϑ_0 – угол зеркального отражения от границы раздела сред (см. Рис.1, на котором изображены оптические пути ЭМ волн в двухслойной среде).

Путь интегрирования γ проходит на комплексной плоскости $\vartheta = \vartheta' + i\vartheta''$,

$$\gamma = \left\{\theta' = -\frac{\pi}{2} + \phi, +\infty > \theta'' > 0\right\} \cup \left\{\left|\theta'\right| < \frac{\pi}{2} - \phi, \theta'' = 0\right\} \cup \left\{\theta' = \frac{\pi}{2} - \phi, 0 > \theta'' > -\infty\right\},$$

$\phi = \arg k_1$.

Интегралы вида (17) называют интегралами типа Зоммерфельда. Такие интегралы возникают, например, в задачах дифракции волн.

Во-вторых, для получения **асимптотических оценок интеграла** в соответствии с методом перевала [18, 25] находят седловую точку θ_S (см. Приложение. П2.):

$$\theta_S = \vartheta_0,\ \rho S(\theta_S) = ik_1\rho.$$

В-третьих, деформируют контур интегрирования γ, строя путь $\Gamma=\Gamma_{SDP}$ наискорейшего спуска (Steepest Descent Path), проходящий через эту точку. Уравнение пути SDP, как функции действительного параметра x, имеет следующий вид:

$$ik_1\left[\cos\left(\theta - \vartheta_0\right) - 1\right] = -x^2/2.$$

Главная асимптотика интеграла при $|p|\rho >> 1$ по методу перевала равна

$$I_A \sim \exp\left[\rho S(\xi_S)\right] f(\xi_S)\sqrt{\frac{2\pi}{-\rho S''(\xi_S)}} = A_R\exp\left(ik_1\rho\right),$$

$$A_R = \frac{h}{r\rho}\frac{-ik_1}{\sqrt{k_1^2 - \left(k_0\rho/r\right)^2}} = \frac{h}{\rho^2}\frac{1}{w(\vartheta_0)}, \qquad (18)$$

что функционально соответствует отраженной волне.

В-четвертых, исследуют случай, когда путь Г на комплексной плоскости θ пересекает линию разреза двулистной функции $w(\theta)=\sqrt{\sin^2\delta-\sin^2\theta}$.
Такой случай соответствует появлению так называемой «**боковой» волны** (lateral wave по английской терминологии). При этом приходится преобразовать путь интегрирования Г, чтобы учесть разрез. Бреховских Л.М. предлагает следующий способ. Получаемый полный путь интегрирования изображен на рис.2а (рисунок взят из [18] и отвечает случаю $\phi=\arg k_1=0$). Этот путь от точки $-\pi/2+\vartheta_0+i\infty$ идет до точки i∞ и затем охватывает разрез по контуру, обозначенному как Γ_2. После этого он пересекает разрез и уже по **нижнему листу** идет снова в исходную точку $-\pi/2+\vartheta_0+i\infty$. Из нее интегрирование идет по перевальному пути Γ_{SDP}, начальная часть которого, обозначенная пунктиром, теперь лежит на нижнем листе (но после повторного пересечения разреза происходит возвращение на верхний лист). В результате, полное выражение для приходящей волны, отвечающее рассматриваемому интегралу, будет состоять из двух частей: $I_A=\psi_{отр}+\psi_{бок}$, где $\psi_{отр}$ — собственно, «отраженная» волна, выражающаяся в виде интеграла по перевальному пути Г, $\psi_{бок}$ – «боковая» волна – определяется интегралом по контуру Γ_2 (интегралом по берегам разреза).

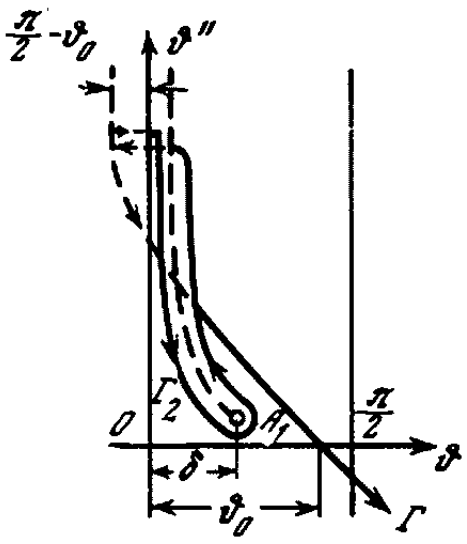

Рис. 2а. Преобразование пути интегрирования Г на комплексной плоскости θ с обходом разреза по [18], A_1 – точка ветвления.

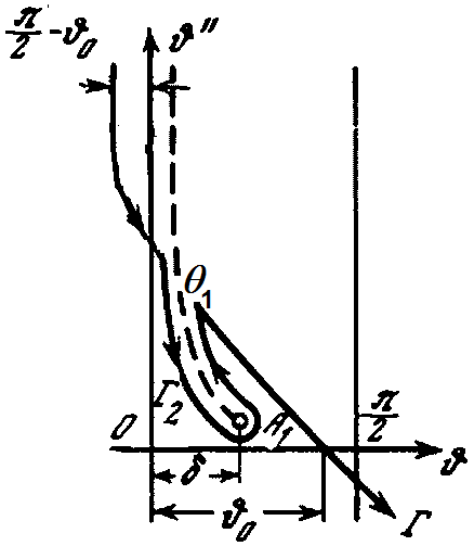

Рис. 2b. Преобразование пути интегрирования Г на комплексной плоскости θ с обходом разреза по [25], θ_1 – точка пересечения Г с разрезом.

Бреховских Л.М. отмечает следующие два условия **существования боковой волны** в двухслойной среде, состоящей из слоев 0 и 1 при источнике в среде 1:
Первое условие существования: скорость распространения ЭМ возмущения в среде 0 (воздухе в нашем случае) должна быть больше, чем в среде 1 (в воде), $\varepsilon_{r0}<\varepsilon_{r1}$.

Второе условие существования: $\delta < \vartheta_0$. Можно показать, что это эквивалентно требованию, чтобы оптический путь боковой волны был короче (эффективнее с точки зрения времени прохождения), чем путь для «отраженной» волны.

Заметим, что при выполнении условия существования боковой волны, $\delta < \vartheta_0$, формально наряду с $\psi_{бок}$ в приходящей на приемник волне имеется член $\psi_{отр}$, выражающийся в виде интеграла по перевальному пути Г. Однако из оценки (18) следует, что $w(\vartheta_0)$ будет мнимой величиной при $\delta < \vartheta_0$. Поэтому в действительности члена $\psi_{отр}$, отвечающего «отраженной» волне, не существует, когда существует боковая волна. Таким образом, имеем

$$I_A = \begin{cases} \psi_{отр} \sim A_R \exp(ik_1\rho), \delta > \vartheta_0 \\ \psi_{бок}, \delta < \vartheta_0 \end{cases}, \qquad (19)$$

что очевидно с физической точки зрения, т.к. электромагнитная волна распространяется по кратчайшему оптическому пути.

Выше, на рис.1, были показаны оптические пути волн, возникающих в рассматриваемой двухслойной среде, включая отраженную и боковую волны. Оптический путь боковой волны изображен состоящим из трех отрезков: OP, PQ, QM – от источника в точке O в водной среде до границы раздела двух сред – под углом падения δ, затем вдоль границы вода-воздух, а затем от границы до приемника, находящегося в точке M в водной среде. Такие волны, оптический путь которых включает распространение вдоль границы с воздухом, также называют «воздушными» (“airwaves”). Угол падения δ боковой волны на границу раздела двух сред равен углу полного внутреннего отражения. При этом отрезки OP и QM возмущение боковой волны проходит со скоростью света в среде 1, а отрезок PQ – со скоростью света в среде 0. Можно показать, что при этом мы получаем время прохождения пути OPQM боковой волной, равное $t_L = (h\cos\delta + r\sin\delta)\sqrt{\varepsilon_{r1}}/c$, $c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$.

Федорюк М.В. в [25] рассмотрел асимптотику интегралов типа Зоммерфельда и сделал вывод, что при условии $\mathrm{Re}\,k \geq 0$ асимптотика при больших k равна вкладу от точки перевала $\theta_S = \vartheta_0$. Там же рассматривается случай, когда функция $f(\theta)$ имеет вещественную точку ветвления θ_0, $f(\theta) = g(\theta)\sqrt{\theta - \theta_0}$. Тогда в асимптотике интеграла появляется дополнительное слагаемое, равное интегралу по «носику» разреза от точки ветвления до точки пересечения с SDP (рис.2b). Фактически это слагаемое и будет боковой волной (в [25] оно оставлено без названия). Заметим, что исследование в [25] проделано более аккуратно, чем в [18], кроме того, при обходе разреза нет нежелательного пересечения линии разреза и выхода на нижний лист двухзначной функции.

Отметим, что рассматриваемый нами случай (Imk>0) отличается от случая, рассмотренного Бреховским Л.М. (Imk=0), и от случая, рассмотренного Федорюком М.В. ($\mathrm{Re}\,k \ge 0$), тем не менее, определение боковой волны и условия ее существования остаются справедливы и для этого случая.

5.2. Оценка слагаемого, отвечающего боковой волне

Получим оценку слагаемого $\psi_{бок}$ для боковой волны. Согласно [18, 25], в случае $\delta < \vartheta_0$ имеется точка пересечения пути интегрирования SDP с разрезом, связанным с двухзначной функцией $w(\theta) = \sqrt{\sin^2\delta - \sin^2\theta}$ на комплексной плоскости θ, и возникает боковая волна. В соответствии с [25] боковая волна равна интегралу по берегам этого разреза по «носику» разреза от точки ветвления до точки пересечения с SDP.

Заметим, что в нашем случае (Imk>0) правильнее рассмотреть разрез, связанный не с функцией $w(\theta)$, а с функцией $\gamma_0 = \sqrt{\lambda^2 - k_0^2} = -ik_1 w(\theta)$, на которую наложено условие: $\mathrm{Re}\,\gamma_0 > 0$ на действительной оси λ. И вообще, удобнее и естественнее проводить рассмотрении разреза не на комплексной плоскости θ, а на исходной плоскости λ. Обозначим через q точку пересечения пути SDP с фундаментальным разрывом γ_0 на плоскости λ.

Заметим, что функция Ханкеля $H_0^{(1)}(\lambda r)$, стоящая под интегралом (17), при малых аргументах ведет себя как $\ln\lambda$, в связи с чем имеет собственную точку ветвления $\lambda = 0$ и связанный с ней разрез, проходящий вдоль отрицательной части вещественной оси, λ<0, который, впрочем, обходится сверху, и его не надо учитывать. Функция Ханкеля $H_0^{(1)}(\lambda r)$ асимптотически при больших аргументах ведет себя как $\exp(i\lambda r)$ и поэтому обращается в нуль на бесконечности в верхней полуплоскости комплексной плоскости λ. Поэтому для нее там выполнены условия леммы Жордана [26, 27] (см. Приложение. П1).

Продолжим двухзначную функцию $\gamma_0 = \sqrt{\lambda^2 - k_0^2}$, определенную на действительной оси λ, на всю комплексную плоскость λ таким образом, чтобы на действительной оси выполнялось условие $\mathrm{Re}\,\gamma_0 > 0$. Следующая функция будет однозначной:

$$\gamma_0 = \left|\lambda^2 - k_0^2\right|^{1/2} \exp\left[i\arg(\lambda - k_0)/2 + i\arg(\lambda + k_0)/2\right],$$

если ее рассматривать на римановой поверхности, склеенной из 4 листов

$$L_1^{\pm}: 0 < \arg(\lambda \pm k_0) < 2\pi,\ L_2^{\pm}: 0 < \arg(\lambda \pm k_0) < 4\pi,$$

с разрезами вдоль лучей $\arg(\lambda \pm k_0) = 0$ и $\arg(\lambda \pm k_0) = 2\pi$.

В качестве разреза для функции $\gamma_0 = \sqrt{\lambda^2 - k_0^2}$ в верхней полуплоскости можно рассмотреть произвольную кривую, начинающуюся в точке ветвления $\lambda = k_0$ и уходящую на $i\cdot\infty$ в верхней полуплоскости λ (главное, чтобы эта

кривая не пересекала действительную ось). Для определенности будем рассматривать так называемый фундаментальный разрез, являющийся кривой, на которой $\mathrm{Re}\,\gamma_0 = 0$.

На фундаментальном разрезе имеем: $\mathrm{Re}\,\gamma_0 = 0$, или $\lambda^2 - k_0^2 = -\xi^2$, где ξ действительный параметр, $\gamma_0 = i\xi$, причем на правом берегу разреза в верхней полуплоскости λ параметр $\xi > 0$. При обходе точки ветвления k_0 аргумент $\arg(\lambda - k_0)$ меняется на 2π. Поэтому на правом (R) и левом (L) берегах каждого разреза значения функции имеют противоположные знаки:

$$\gamma_{0,R} = \exp(i\pi)\gamma_{0,L},\ \gamma_{0,R} = -\gamma_{0,L} = i\xi,\ 0 < \xi < s = \sqrt{k_0^2 - q^2},$$

$$\lambda = \lambda_0(\xi) = \sqrt{k_0^2 - \xi^2},\ \mathrm{Im}\,\lambda > 0,$$

т.к. рассматривается верхняя полуплоскость комплексной плоскости λ.

В результате из интеграла (15) получим выражение для интеграла по разрезу, отвечающего боковой волне:

$$\psi_{бок} = I_{A,s}^{(0)} = -\frac{1}{2}\int_0^s \left[F(\gamma_0 = i\xi, \gamma_1(\xi)) - F(\gamma_0 = -i\xi, \gamma_1(\xi))\right] H_0^{(1)}(r\lambda_0(\xi))\xi d\xi = \\ = \frac{i}{2}\int_{-s}^{s} \exp\left[-\gamma_1(\xi)h\right] H_0^{(1)}(r\lambda_0(\xi))d\xi, \tag{20}$$

где $\gamma_1(\xi) = \sqrt{\lambda_0^2(\xi) - k_1^2} = \sqrt{k_0^2 - k_1^2 - \xi^2}$, $\mathrm{Re}\,\gamma_1 > 0$, $\lambda_0(\xi) = \sqrt{k_0^2 - \xi^2}$, $\mathrm{Im}\,\lambda_0 > 0$.

С учетом асимптотики больших аргументов функции Ханкеля имеем эквивалентное представление боковой волны в форме интеграла Лапласа

$$\psi_{бок}(r, h, p) = I_{A,s}^{(0)} = \int_{-s}^{s} \exp\left[\rho S_0(\xi)\right] f_0(\xi) d\xi, \tag{21}$$

где обозначено

$$\rho S_0(\xi) = -\gamma_1(\xi)h + ir\lambda_0(\xi),\ f_0(\xi) = \frac{i}{2}\tilde{H}_0^{(1)}(r\lambda_0(\xi)),$$

$$\tilde{H}_0^{(1)}(\zeta) = H_0^{(1)}(\zeta)\exp(-i\zeta) \sim \sqrt{2/(\pi i\zeta)},\ \rho = \sqrt{r^2 + h^2}.$$

Рассмотрим **асимптотику** интеграла (21) при больших $|p|\rho$, используя метод перевалов. Будем предполагать, что выполнены условия применимости этого метода. Найдем точки перевала:

$$\xi_S : \frac{d}{d\xi} S_0(\xi) = \frac{\xi}{\rho}\left(h / \sqrt{k_0^2 - k_1^2 - \xi^2} - r / \sqrt{\xi^2 - k_0^2}\right) = 0,$$

откуда получаем две точки перевала, $\xi_S^{(j)}$, $j = 1, 2$:

$\xi_S^{(1)} = 0,\ \xi_S^{(2)} = \sqrt{k_0^2 - k_1^2 r^2 / \rho^2}$.

Первая точка перевала дает следующее подэкспоненциальное выражение:

$$\rho S_0(0) = -\left(h\sqrt{k_0^2 - k_1^2} + r\sqrt{-k_0^2}\right).$$

Устремляя $p \to \infty$, получим

$$\exp\left[\rho S_0(0)_{|p\to\infty}\right] \sim \exp(-pt_L),$$

где $t_L = \left[h\sqrt{\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r0}} + r\sqrt{\varepsilon_{r0}}\right]\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$,

как уже говорилось выше, это выражение имеет физический смысл момента времени прихода переднего фронта боковой волны из источника на приемник.

Для **второй точки перевала** имеем

$$\rho S_0\left(\xi_S^{(2)}\right) == -\gamma_1\left(\xi_S^{(2)}\right)h + ir\lambda_0\left(\xi_S^{(2)}\right) = i\rho k_1,\ \lambda_0\left(\xi_S^{(2)}\right) = k_1 r / \rho .$$

Данное выражение, очевидно, отвечает «отраженной» волне, причем для нее получается асимптотическая оценка, совпадающая с оценкой (18).

Из двух точек перевала следует выбрать ту, которая дает большее значение $\exp\left(\rho \operatorname{Re} S\left(\xi_S\right)\right)$. Это эквивалентно выбору той точки, для которой будет короче оптический путь (см. рис.1). Можно показать, что в случае $\delta < \vartheta_0$, оптический путь для боковой волны короче, чем путь для отраженной волны, и для асимптотической оценки интеграла по разрезу тогда следует выбрать первую точку перевала, отвечающую боковой волне. Напомним, что интеграл по разрезу рассматривается именно только в случае $\delta < \vartheta_0$.

В результате имеем следующую асимптотическую оценку при больших $|p|\rho$:

$$\psi_{бок}(r,h,p) = I_{A,s}^{(0)} \sim I_{A,L}^{AS} = A_L \exp\left[-\left(h\sqrt{k_0^2 - k_1^2} + r\sqrt{-k_0^2}\right)\right],\ \delta < \vartheta_0,$$
$$A_L = \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1 - (tg\delta)/r}},\ \sin\delta = \upsilon = \frac{k_0}{k_1}. \qquad (22)$$

Как следует из асимптотик (18), (22), в полноволновом приближении интеграл $I_A(r,h,p)$ и связанный с этим интегралом член $\psi_X(M,t)$ отвечает либо отраженной волне, либо боковой (если выполнены условия ее существования).

Подчеркнем, что асимптотика (20), (24) получена в приближении больших аргументов $|p|\rho$, что нарушается при $p \to 0$. Однако интересно проверить (формально), чему равен этот предел для полученных асимптотик отраженной и боковой волн. Заметим, что при достаточно малых |p| отраженной волны, формально содержащейся в интеграле (15), не существует, т.к. $\sin\delta \to 0$ при $p \to 0$, и нарушается условие существования такой волны. Для боковой волны

$$\lim_{p\to 0} A_L = 1/r .$$

Напомним, что выше мы получили точное значение $\lim_{p\to 0} I_A(r,h,p) = 1/\rho$.

Здесь проявляется ограниченность полученной асимптотики, которая передает только начальные моменты времени и не может правильно определить установившийся режим для больших моментов времени, $t\to\infty$.

Можно получить точное предельное выражения для $p\to 0$ интеграла по всему рассматриваемому разрезу (используя известный интеграл 2.14.1 в [28]):

$$\lim_{p\to 0} I^{(0)}_{A,s=\infty} = i\int_0^\infty \exp(-i\xi h) H_0^{(1)}(ir\xi)\,d\xi = \psi_{бок}\Big|_{p\to 0} = \frac{1}{\rho} - \frac{2i}{\pi\rho}\ln\frac{h+\rho}{r}.$$

Можно показать, что при этом $\psi_{отр}\Big|_{p\to 0} = \dfrac{2i}{\pi\rho}\ln\dfrac{h+\rho}{r}$ - равна чисто мнимому выражению. В сумме $\left(\psi_{бок}+\psi_{отр}\right)\Big|_{p\to 0}$ дает искомое точное значение $1/\rho$. Отсюда можно заключить, что физический смысл имеет только действительная часть оригинала интеграла $I_A^{(0)}$ по разрезу для точки ветвления k_0 функции γ_0.

5.3. Обратное преобразование Лапласа асимптотики боковой волны

Найдем обратное преобразование Лапласа выражения (22), отвечающего асимптотике боковой волны, преобразовав подэкспоненциальное выражение:

$$-\left(h\sqrt{k_0^2-k_1^2}+r\sqrt{-k_0^2}\right) = -\left[t_h\sqrt{p(p+2\chi_L)}+pt_{r0}\right],$$

где $t_{r0} = r\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_{r0}}$, $\chi_L = \dfrac{\sigma_1}{2\varepsilon_0(\varepsilon_{r1}-\varepsilon_{r0})}$, $t_h = h\sqrt{\varepsilon_{r1}-\varepsilon_{r0}}\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$.

Для упрощения положим $A_L \cong A_L\big|_{k_0=0} = 1/r$.

Используя теорему запаздывания

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\exp(-bp)f(p)\right] = F(t-b)\eta(t-b),\ b>0,$$

получим

$$\mathcal{L}^{-1}\exp\left\{-\left[t_h\sqrt{p(p+2\chi_L)}+pt_{r0}\right]\right\}(t) =$$
$$= \eta(t-t_{r0})F_0(t-t_{r0},t_h,\chi_L) = \eta(t-t_{r0}-t_h)F_0(t-t_{r0},t_h,\chi_L).$$

Следовательно,

$$\mathcal{L}^{-1}\psi_{бок}\Big|_{|p|\rho>>1} = \mathcal{L}^{-1}\left\{A_L\exp\left[-\left(h\sqrt{k_0^2-k_1^2}+r\sqrt{-k_0^2}\right)\right]\right\} =$$
$$= I_A^{AS}(r,h,t) = \frac{\eta(t-t_{r0}-t_h)}{r}F_0(t-t_{r0},t_h,\chi_L). \qquad (23)$$

5.4. Низкочастотное приближение для воздушной среды

Заметим, что электрическая проницаемость воздуха много меньше электрической проницаемости воды: $\varepsilon_{r0} << \varepsilon_{r1}$. Поэтому имеет смысл использовать приближение $\varepsilon_{r0}=0$, являющееся низкочастотным приближением

только для воздушной среды (обозначим это приближение как LF0 - низкочастотное приближение в среде 0), причем это эквивалентно допущению $k_0 = 0$ (ниже будет рассмотрено, к чему приводит такое допущение). Рассмотрим в приближении LF0 асимптотики (18), (22) для волн, которые функционально содержатся в интеграле I_A. Заметим, однако, что в данном приближении отраженная волна отсутствует, т.к. $\upsilon \to 0$. Осуществим предельный переход $k_0 \to 0$ в формуле (22) для боковой волны. Получим:

$$\left[-\left(h\sqrt{k_0^2 - k_1^2} + r\sqrt{-k_0^2}\right)\right]_{k_0=0} = ik_1 h;\ A_L\big|_{k_0=0} = \frac{1}{r}.$$

Физически это соответствует оптическому пути боковой волны в виде буквы П: в среде 1 (в воде) волна идет из источника под прямым углом к границе раздела сред со скоростью света в этой среде, v_1, затем с бесконечной скоростью вдоль границы и, наконец, снова под прямым углом к границе – в среде 1 со скоростью v_1 – идет к приемнику. Формальные условия для существования такой волны выполнены всегда, т.к. для нее $\delta = 0 < \vartheta_0$.

В этом проявляется одно из отличий полноволнового подхода от низкочастотного приближения: даже при частичном низкочастотном приближении (LF0) боковые волны существуют всегда. Тогда как при полном рассмотрении они существуют, только если угол падения волны на границу раздела сред больше угла полного внутреннего отражения, $\delta < \vartheta_0$.

Таким образом, при $k_0 \to 0$ имеем следующую асимптотику для $|p|\rho >> 1$:

$$\psi_{бок}\big|_{k_0=0} = I_A(r,h,p)\big|_{k_0=0} \sim I_A^{AS} = \exp(ik_1 h)/r$$

$$\mathcal{L}^{-1}\psi_{бок}\big|_{k_0=0,|p|\rho>>1} = \frac{1}{r}\eta(t - t_{h1})F_0(t, t_{h1}, \chi_1), \qquad (24)$$

$$t_{h1} = h\sqrt{\varepsilon_{r1}}\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\ .$$

Сравнивая с обращением Лапласа (23) для полноволнового приближения, заключаем, что учет ненулевого k_0 практически «сдвигает» момент вступления боковой волны на величину, равную t_{r0}, т.к. t_h, χ_L близки к t_{h1}, χ_1, тогда как на форму приходящего сигнала, как функцию времени, учет ненулевого k_0 влияет слабо.

Получили, что в приближении LF0 интеграл $I_A(r,h,p)$, а, следовательно, и член $\psi_X(M,t)$, отождествляется с боковой (воздушной) волной с точки зрения его асимптотики.

5.5. Боковая волна в низкочастотном приближении

В низкочастотном приближении имеем:

$\gamma_0(\lambda, p) = |\lambda|$,

$$\gamma_1(\lambda, p)=\sqrt{\lambda^2+p\mu_0\sigma_1}=\sqrt{\mu_0\sigma_1}\sqrt{p+a}\,,a=\lambda^2/(\mu_0\sigma_1),$$

откуда, используя свойства преобразования Лапласа и известное соотношение из таблицы преобразований Лапласа [16, 22]

$$\exp\left(-\beta\sqrt{p}\right)\Leftrightarrow\eta(t)\frac{\beta}{2\sqrt{\pi t^3}}\exp\left(-\frac{\beta^2}{4t}\right),$$

можно получить:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\exp(-\gamma_1 h)\right]^{LF}=\mathcal{L}^{-1}\left[\exp\left(-\beta\sqrt{p+a}\right)\right]=\eta(t)\frac{\beta}{2\sqrt{\pi t^3}}\exp\left(-\frac{\beta^2}{4t}-at\right),$$

где $\beta=h\sqrt{\mu_0\sigma_1}$. Следовательно,

$$\mathcal{L}^{-1}\psi_{бок}^{LF}(r,h,p)=I_A^{LF}(r,h,t)=\frac{\eta(t)\beta}{2\sqrt{\pi t^3}}\exp\left(-\frac{\beta^2}{4t}\right)\int_0^\infty\exp\left(-\zeta\lambda^2\right)J_0(\lambda r)d\lambda= \tag{25}$$

$$=\eta(t)\frac{hb^2}{t^2}\exp\left[-\frac{\left(r^2+2h^2\right)b^2}{2t}\right]I_0\left(\frac{r^2b^2}{2t}\right),$$

где $\zeta=t/(\mu_0\sigma_1), b^2=\mu_0\sigma_1/4$.

При этом использовали известный «интеграл Ханкеля» (см. [28, 29]), который выражается через модифицированную функцию Бесселя I_0:

$$\int_0^\infty\exp\left(-\zeta\lambda^2\right)J_0(\lambda r)d\lambda=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\zeta}}\exp\left(-\frac{r^2}{8\zeta}\right)I_0\left(\frac{r^2}{8\zeta}\right).$$

При больших $\frac{r^2b^2}{2t}>>1$, имеем

$$I_A^{LF}(r,h,t)_{|r^2b^2>>2t}=I_A^{LF,AS}(r,h,t)=\eta(t)\frac{bh}{r\sqrt{\pi t^3}}\exp\left(-\frac{h^2b^2}{t}\right). \tag{26}$$

Можно показать:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}I_A^{LF}(r,h,p)\right](t)=\eta(t)\cdot\left\{\frac{1}{\rho}-2h\int_0^{s/t}\exp\left[-\left(r^2+2h^2\right)\xi\right]I_0\left(r^2\xi\right)d\xi\right\},$$

где $s=\mu_0\sigma_1/8=b^2/2$.

Это соотношение согласуется с тем, что $\lim_{p\to0}I_A(r,h,p)=1/\rho$.

В результате, получим следующее аналитическое представление для волны первого типа, $\psi_X(M,t)$, в приближении LF для импульса постоянного тока:

$$\psi_X^{LF}(M,t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\psi_X^{LF}(M,p)\right](t)=\frac{2m_0}{4\pi\sigma_1}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\left(k_1^2+\frac{\partial^2}{\partial h^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)I_A^{LF}(r,h,p)\right]=$$

$$=\frac{m_0}{2\pi\sigma_1}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial h^2}\right)\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p}I_A^{LF}(r,h,p)\right)-\mu_0\frac{m_0}{2\pi}\mathcal{L}^{-1}I_A^{LF}(r,h,p)=$$

$$=-\eta(t)\mu_0\frac{m_0}{2\pi}\frac{hb^2}{t^2}\exp\left(-\frac{\left(r^2+2h^2\right)b^2}{2t}\right)I_0\left(\frac{r^2b^2}{2t}\right)+$$

$$+\eta(t)\frac{m_0}{2\pi\sigma_1}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial h^2}\right)\left\{\frac{1}{\rho}-2h\times\int_0^{b^2/(2t)}\exp\left[-\left(r^2+2h^2\right)\xi\right]I_0\left(r^2\xi\right)d\xi\right\}.$$

Интеграл в этом выражении эффективно вычисляется при ненулевых значениях $h>0$.

Рассмотрим отдельно случай $h = 0+$ (т.е. случай расположения источника на поверхности воды, $z=z_S=0$). Данный случай поверхностного расположения источника исследовался, например, в работе [9]. Получим, что выражение для боковой (воздушной) волны для источника на поверхности не зависит от времени:

$$\psi_X^{LF}(M,t)_{|h=0+}=\eta(t)\frac{m_0}{2\pi\sigma_1}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial h^2}\right)\left(\frac{1}{\rho}\right)_{|h=0+}=\eta(t)\frac{m_0}{2\pi\sigma_1}\left(\frac{3x^2}{r^5}-\frac{2}{r^3}\right).$$

Зависимость от времени будет только в члене, отвечающем отраженной волне:

$$\varphi_X^{LF}(M,t)_{|h=0+}=-\frac{m_0}{2\pi\sigma_1}\frac{\partial^2}{\partial h^2}F_{-1}(\rho,t)_{|h=0+}=-\eta(t)\frac{m_0}{2\pi\sigma_1 r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1-\operatorname{erf}\left(rb/\sqrt{t}\right)}{r},$$

$$E_X^{LF}(M,t)_{|h=0+}=\eta(t)\frac{m_0}{2\pi\sigma_1}\left\{3\frac{x^2}{r^5}-\frac{2}{r^3}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1-\operatorname{erf}\left(br/\sqrt{t}\right)}{r}\right\}.$$

Данная формула согласуется с формулой для $E_X(M,t)_{|h=0+}$, полученной в работе [9] (в системе единиц СГС в низкочастотном приближении) и сделанными там выводами. Из полученной формулы, в частности, следует, что после включения тока x – компонента электрического поля – меняется скачком на значение, отвечающее воздушной волне:

$$E_X^{LF}(M,t=0+)_{|h=0+}=\eta(t)\frac{m_0}{2\pi\sigma_1 r^3}\left(3\frac{x^2}{r^2}-2\right)=\psi_X^{LF}(M,t)_{|h=0+}.$$

Это связано с бесконечной скоростью распространения боковой волны в LF приближении и, тем самым, мгновенным появлением соответствующего отклика на приемнике после включения тока.

С течением времени E_X стремится к следующему выражению (для импульса постоянного тока):

$$E_X^{LF}\left(M,t\to+\infty\right)_{|h=0+}=\eta(t)\frac{m_0}{2\pi\sigma_1 r^3}\left(3\frac{x^2}{r^2}-1\right).$$

6. Численные расчеты

6.1. Результаты численных экспериментов для боковой волны

С целью сопоставления полученных приближений во временной области для боковой волны: асимптотики для малых моментов времени (23) и низкочастотного (25) – был проведен ряд расчетов.

При этом в качестве единицы измерения времени выбрана малая величина:

$[time]=\frac{\text{м}}{c}=\frac{\sec}{3\cdot10^8}, c=\left(\mu_0\varepsilon_0\right)^{-1/2}$ – скорость света в вакууме.

Это связано с тем, что время распространения ЭМ возмущения от источника к приемнику в полноволновом приближении обратно пропорционально скорости света в среде и, соответственно, интервалы времени от момента включения тока до прихода ЭМ волны на приемник очень малы.

Соответственно, время в безразмерных единицах равно $\tilde{t}=t/[time]=t\cdot c/\text{м}$; аналогично, значения интеграла в безразмерном виде равны $I_A\cdot[time]$.

На рис.3-6 приведены графики зависимости от времени приближений $I_A^{AS}(r,h,t)$ (IA_AS, синий цвет) и $I_A^{LF}(r,h,t)$ (IA_LF, красный цвет) при различных значениях r, h,σ_1.

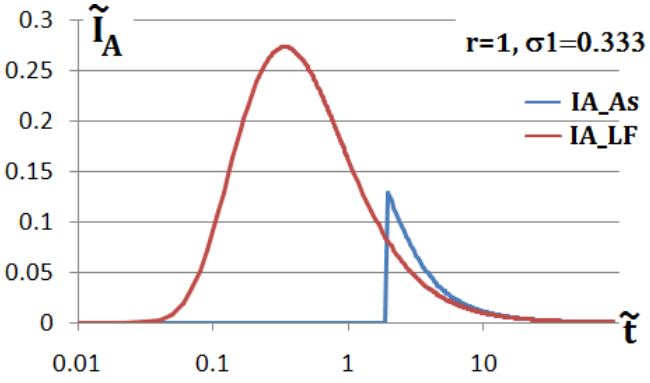

Рис.3.Графики зависимости во времени приближений $I_A^{LF}(r,h,t)$ и $I_A^{AS}(r,h,t)$для параметров: $r=1м;h=0.1м;\sigma_1=0.333См$

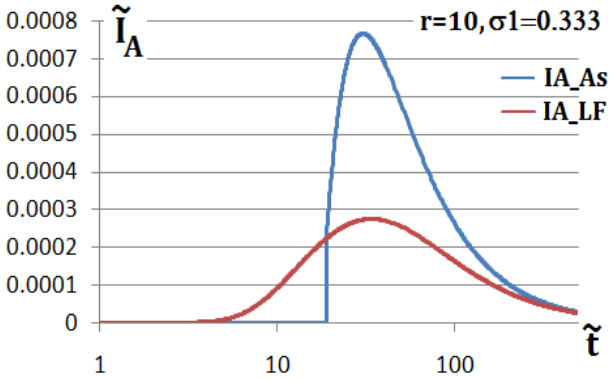

Рис.4.Графики зависимости во времени приближений $I_A^{LF}(r,h,t)$ и $I_A^{AS}(r,h,t)$ для параметров: $r=10м;h=1м;\sigma_1=0.333См$

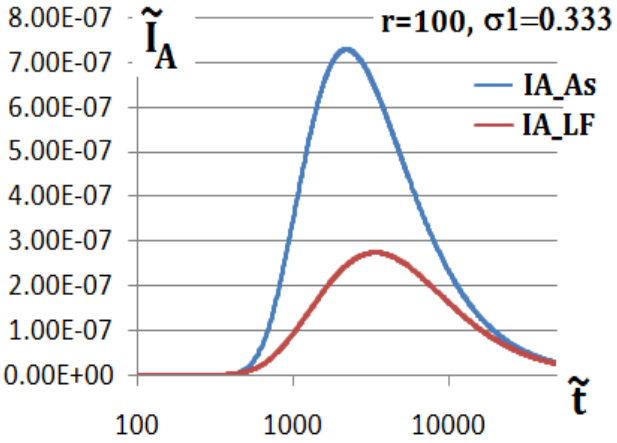

Рис.5. Графики зависимости во времени приближений $I_A^{LF}(r,h,t)$ и $I_A^{AS}(r,h,t)$ при следующих параметрах: $r=100м; h=10м; \sigma_1=0.333См$

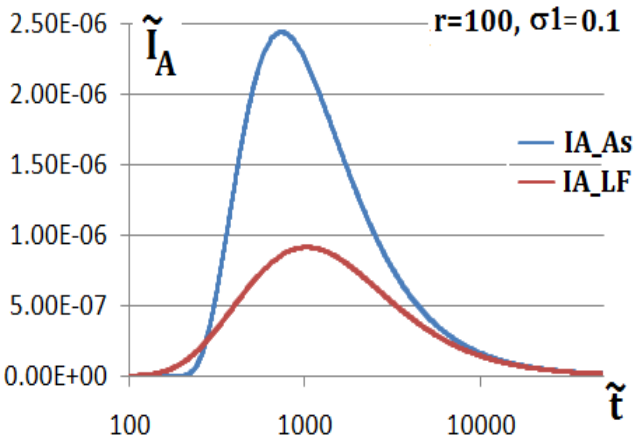

Рис.6. Графики зависимости во времени приближений $I_A^{LF}(r,h,t)$ и $I_A^{AS}(r,h,t)$ при следующих параметрах: $r=100м; h=10м; \sigma_1=0.1См$

На графиках видно, что низкочастотное приближение (25) дает некорректные результаты для малых моментов времени и корректные для больших моментов времени. В подавляющем большинстве задач георазведки рассмотрением начальных моментов времени можно пренебречь. Асимптотика (23), напротив, дает корректные результаты для малых моментов времени. При необходимости иметь эффективное представление во всем диапазоне времен следует использовать асимптотику (23) полноволнового приближения для малых моментов времени и соотношения (25) для низкочастотного для больших моментов времени со «сшиванием» полученных выражений.

6.2. Использование сверхкоротких (СКИ) импульсов электрического тока

Заметим, что существует класс задач электроразведки типа геолокации, например, при исследовании ближней зоны окрестности скважины, в которых одной из информативных составляющихв отклике ЭМ поля служат времена прихода возмущений от различных структур среды. В таких задачах используется полноволновое приближение с применением мощных коротких и сверхкоротких импульсов тока [10-14] определенной формы в электрической цепи источника вместо импульса постоянного тока. Например, можно использовать импульс тока так называемого гауссового вида (см. рис.7):

$$m(t)=m_0\exp\left[-\beta^2(t-\tau_0)^2\right], \qquad (27)$$

m_0,β,τ_0 – параметры импульса.

Изображение Лапласа такого импульса:

$$m(p) = m_0 \frac{\sqrt{\pi}}{2\beta} \exp\left[\left(\frac{p}{2\beta}\right)^2 - p\tau_0\right] erfc\left(\frac{p}{2\beta} - \beta\tau_0\right),$$

$erfc(w) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^w \exp(-\tau^2) d\tau$ – дополнительный интеграл вероятностей.

Была проведена серия численных расчетов величины напряженности электрического поля, E_x, на приемнике, отвечающего соотношению (2), во временной области с использованием сверхкороткого импульса вида (27) для ряда наборов параметров задачи. При этом для рассмотрения малых промежутков времени использовались нормированные величины:

$$\tilde{p} = p/c, \tilde{t} = tc, \varepsilon(\tilde{p}) = c\varepsilon_0\varepsilon_r + \sigma/\tilde{p}, k(\tilde{p}) = \sqrt{-\tilde{p}(\tilde{p}\varepsilon_r + \sigma\eta_0)},$$

$$\tilde{\tau} = \tau c,\ \tilde{\beta} = \beta/c,\ \tilde{\tau}_0 = \tau_0 c,\ \tilde{m}_0 = m_0 c,$$

где $c = (\mu_0\varepsilon_0)^{-1/2}$ – скорость света, $\eta_0 = (\mu_0/\varepsilon_0)^{1/2}$.

В численных расчетах использовался сверхкороткий импульс (СКИ) гауссового вида с параметрами: $\tilde{m}_0 = 1,\ \tilde{\beta} = 2,\ \tilde{\tau}_0 = 2$, - см. рис.7.

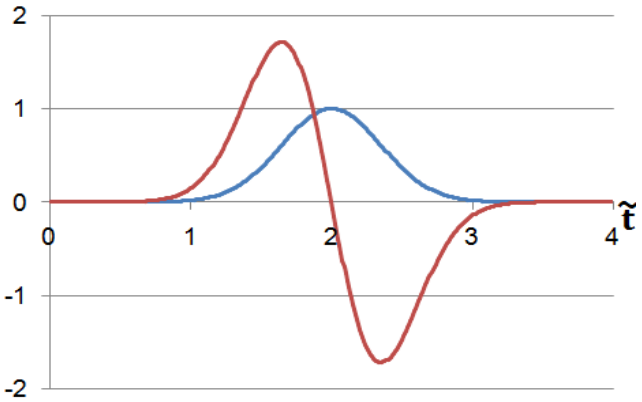

Рис.7. Импульс гауссового вида (синий цвет)и его производная по времени (красный цвет). Параметры импульса: $\tilde{m}_0 = 1,\ \tilde{\beta} = 2,\ \tilde{\tau}_0 = 2$

На рис.8-10 показаны результаты численных расчетов отклика ЭМ поля. В подписях к рисункам указаны расчетные времена прихода боковой волны, прямого сигнала и отраженной волны соответственно: $\tilde{t}_{Lat}, \tilde{t}_R, \tilde{t}_\rho$. Варьировались: удаление приемника от источника, $r = x_R$; глубина расположения источника и приемника, $h = z_S + z_R$; электропроводность водной среды, σ_1. На графиках хорошо видны моменты прихода на приемник волн разного типа. Например, для боковой волны при удалении приемника от источника, равном r = 1 м, (см. рис.8,9) имеем: момент прихода максимума равен 4.45, минимума – равен 5.15. «Нуль» между максимумом и минимумом находится в точке t = 4.8 (это равно $\tilde{t}_{Lat} + \tilde{\tau}_0$). Заметим, что эта точка, а также указанные точки достижения максимума и минимума отвечают соответствующим точкам производной импульса (см. рис.7). Это связано с тем,

что изображение Лапласа умножается на p, что эквивалентно дифференцированию оригинала. Несложно определить, что точки экстремума производной импульса достигаются при $\tilde{t}_m = \tilde{\tau}_0 \pm 1/\left(\beta\sqrt{2}\right)$.

Для «прямой» и «отраженной» волн при удалении приемника от источника, равном r = 1 м (см. рис.8,9), обе эти волны приходят в близкие друг к другу моменты времени, образуя суммарный сигнал. Суммарный сигнал имеет один максимум и два минимума и близок по форме ко второй производной импульса (со знаком минус). Максимум суммарного сигнала достигается при t = 11.1 (это равно $\tilde{\tau}_0 + \left(\tilde{t}_R + \tilde{t}_\rho\right)/2$).

Рис.8. Величина *Ex* для $r = 1м,\ h = 0.2\,м,\ \sigma_1 = 0.01Cм$, СКИ гауссового вида, $\tilde{t}_{Lat} = 2.8, \tilde{t}_R = 9, \tilde{t}_\rho = 9.2$

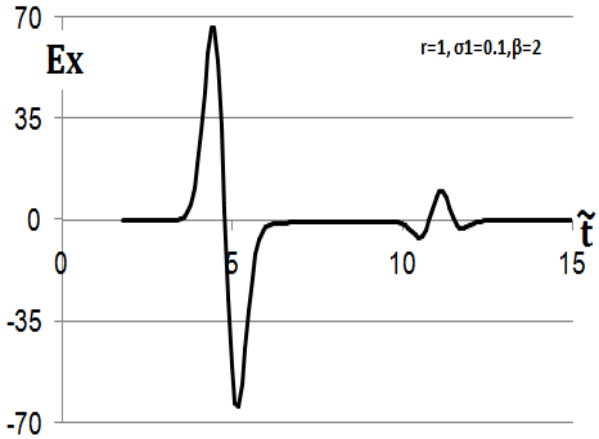

Рис.9. Величина *Ex* для $r = 1м,\ h = 0.2\,м, \sigma_1 = 0.1Cм$, СКИ гауссового вида, $\tilde{t}_{Lat} = 2.8, \tilde{t}_R = 9, \tilde{t}_\rho = 9.2$

При б**о**льшем удалении приемника от источника (*r* = 10 м, см. рис.10a,b,c) можно наблюдать моменты прихода как прямой, так и отраженной волн.

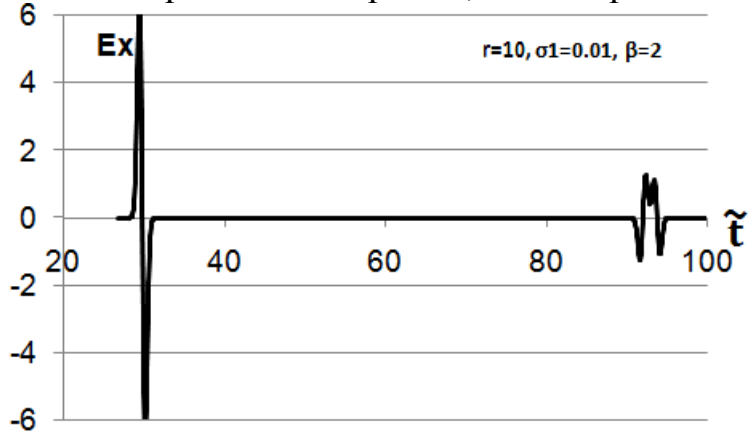

Рис.10a. Величина *Ex*, на приемнике в расчете с параметрами: $r = 10\,м,\ h = 2\,м, \sigma_1 = 0.01Cм$ для СКИ гауссового вида. $\tilde{t}_{Lat} = 27.9, \tilde{t}_R = 90, \tilde{t}_\rho = 91.8$

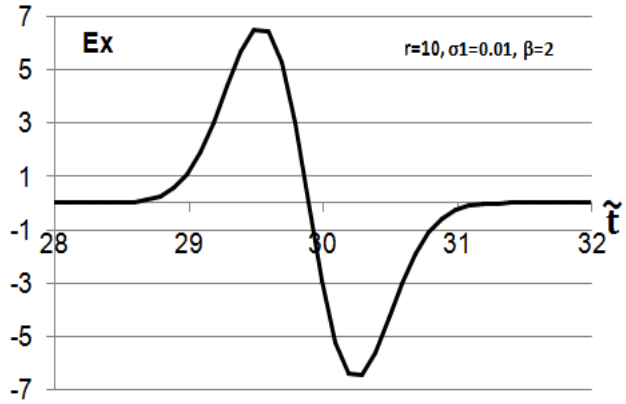

Рис.10b.Участок графика, отвечающий приходу боковой волны.

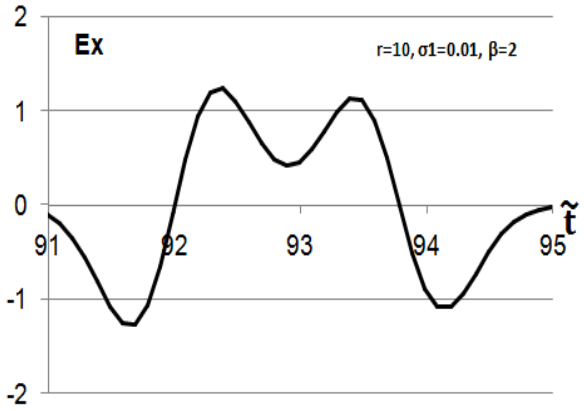

Рис.10c. Участок графика, отвечающий приходу прямой и отраженной волн.

Для боковой волны при удалении приемника от источника, равном r = 10 м (рис.10b), имеем: момент прихода максимума равен 29.55, минимума – равен 30.25. «Нуль» между максимумом и минимумом находится в точке t=29.9 (это равно $\tilde{t}_{Lat}+\tilde{\tau}_0$). Аналогично имеем и для «прямой» и «отраженной» волн (рис.10c). Для данного расчета можно по отдельности на графике наблюдать моменты прихода каждой из этих волн. «Нуль» между минимумом и максимумом «прямой» волны достигается в точке t=92 (это равно $\tilde{t}_R+\tilde{\tau}_0$). «Нуль» между максимумом и минимумом «отраженной» волны достигается при t=93.8 (это равно $\tilde{t}_\rho+\tilde{\tau}_0$). Еще раз подчеркнем, что эта точка, а также указанные точки достижения максимума и минимума отвечают соответствующим точкам графика производной импульса (рис.7).

Заключение

В настоящей работе проведено исследование ЭМ волн, возникающих в двухслойном пространстве вода-воздух (случай n = 1). Такие волны, распространяющиеся непосредственно из источника на приемник, представляют собой «паразитический» сигнал, способный «забить» полезный сигнал, отраженный от неоднородностей в толще земли. Несмотря на кажущуюся простоту, этот случай трудоемок в вычислительном отношении (при прямом численном интегрировании) и требует отдельного детального рассмотрения для эффективного численного расчета. Поэтому в работе проведено исследование данного случая. Причем рассмотрено «полное», не традиционное низкочастотное приближение, с реальными значениями относительных диэлектрических проницаемостей сред. Такое рассмотрение дает возможность интерпретации с физической точки зрения отдельных составляющих ЭМ возмущения, приходящего на приемник в двухслойной среде: прямая волна, волна, отраженная от границы раздела сред, и боковая

(воздушная) волна, а также позволяет выявить границы применимости низкочастотного приближения. Например, заметим, что в низкочастотном приближении возмущение, отвечающее боковой волне, присутствует всегда. Тогда как при «полном» рассмотрении боковая волна существует, только если угол падения волны на границу раздела вода-воздух больше угла полного внутреннего отражения, $\delta < \vartheta_0$.

В работе получены аналитические представления в виде формул в частотной и временной областях для разных типов ЭМ волн в двухслойной среде (боковой, прямой и отраженной) как в полноволновом, так и в низкочастотном приближениях, выяснены условия их применимости. В частности, получены эффективные представления для наиболее трудоемкой составляющей – **боковой воздушной волны**, выделенной и исследованной как самостоятельный объект.

Для боковой волны получено, что для малых моментов времени хорошо работает асимптотика ($|p|\rho >> 1$) полноволнового приближения, а для больших времен хорошо работает низкочастотное приближение. Поэтому для получения решения во всем диапазоне времени следует использовать состыкованную пару двух приближений: для начальных моментов времени – асимптотика полноволнового приближения, и низкочастотное для не слишком малых моментов времени.

Полученные представления реализованы в виде компьютерного модуля расчета компонент ЭМ поля в двухслойной среде. Этот модуль предназначен для использования в качестве составной части для расчета N-слойной среды по «аддитивному» методу, изложенному в [1].

В работе представлены результаты численных расчетов боковой волны по разработанным аппроксимациям, показывающие границы применения используемых аппроксимаций.

Заметим, что для геолокации ближней зоны скважины перспективным является использование мощных коротких и сверхкоротких импульсов электрического тока [10-14] с отслеживанием времен прихода волн разных типов, так как это может дать дополнительную информацию о параметрах среды и границах пластов в ближней зоне. В связи с этим в работе даны результаты расчета отклика ЭМ поля на приемнике при применении сверхкороткого импульса электрического тока в двухслойной среде. На представленных графиках хорошо видны моменты прихода волн разных типов на приемник.

Приложение

П1. Лемма Жордана

В основе леммы Жордана [15,26,27] лежит следующее утверждение:

Если функция f(z) аналитична при $|z| > R_0$ *и* $z \cdot f(z) \to 0$ *при* $|z| \to \infty$, *и* $Re z \geq 0$, *то*

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(\zeta)d\zeta = 0$$

где C_R – дуга окружности |z| = R в верхней полуплоскости. Это, в частности, выполняется, если $|f(z)| < K/|z|^{1+\alpha}$, $\alpha > 0$, при всех достаточно больших |z|.

Для интегралов вида

$$\int_C F(\zeta)\exp(i\lambda\zeta)d\zeta = 0$$

лемма Жордана формулируется следующим образом:

если функция F(z) аналитична в верхней полуплоскости, за исключением, возможно, конечного числа полюсов, и стремится к 0 при |z| → ∞, когда Rez≥0, то для любого действительного λ>0,

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} F(\zeta)\exp(i\lambda\zeta)d\zeta = 0,$$

где C_R – дуга окружности |z| = R в верхней полуплоскости.

Для интегралов вида

$$\int_C G(p)\exp(pt)dp,$$

к которым приводит формула Меллина для обращения Лапласа,

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(p)](t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\exp(pt)G(p)dp,$$

лемма Жордана формулируется следующим образом:

если функция G(p) аналитична в левой полуплоскости $\operatorname{Im} p \le 0$*, за исключением, возможно, конечного числа полюсов, и стремится к 0 при |p| → ∞, когда* $\operatorname{Im} p \le 0$*, то для любого действительного t>0,*

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} G(p)\exp(pt)dp = 0,$$

где C_R – дуга окружности |p| = R в левой полуплоскости.

Если же t<0, то следует взять правую полуплоскость, $\operatorname{Im} p \ge 0$ *и дугу окружности в правой полуплоскости.*

П2. Метод перевала

Рассматривается интеграл типа интеграла Лапласа с большим параметром ρ:

$$I = \int_C \exp[\rho S(\xi)] f(\xi)d\xi$$

где C – некая кривая на комплексной плоскости ξ, конечная или бесконечная, $S(\xi)$, $f(\xi)$ – аналитичные в окрестности C функции комплексного переменного.

Для получения **асимптотических оценок интегралов типа Лапласа** применяется метод перевалов [25-27], впервые предложенный П.Дебаем. В этом методе используется то, что поведение интегралов с экспонентой вида $\exp[\rho S(\xi)]$ при $\rho >> 1$ определяется, в первую очередь, показателем экспоненты $S(\xi)$.

В методе перевалов ищутся точки перевала ξ_S (называемые также седловыми точками), являющиеся корнями уравнения $dS(\xi)/d\xi = 0$.

Находятся значения второй производной в точках перевала, $S_S'' = d^2 S(\xi_S)/d\xi^2$. Будем предполагать, что эти значения не равны нулю (если же равны нулю, то следует искать производные более высоких порядков).

Путь интегрирования деформируется в новый путь интегрирования, γ_{SDP}, (проходящий через точку перевала) – путь наискорейшего спуска (steepest descent path, SDP), вдоль которого функция $\mathrm{Re}\, S(\xi)$ убывает, причем максимум действительной части достигается в точке перевала. Можно показать, что мнимая часть вдоль этого пути равна константе. Отсюда получаем систему из двух условий для определения SDP:

$$\mathrm{Im}(S(\xi_l) - S(\xi_S)) = 0,\ \mathrm{Re}(S(\xi_l) - S(\xi_S)) < 0, \qquad (28)$$

откуда следует параметрическое уравнение кривой γ_{SDP}, $\xi_{SDP}(x)$ как функции действительного параметра x: $S(\xi_{SDP}) - S(\xi_S) = -x^2/2$.

Нетрудно определить поведение кривой γ_{SDP} в окрестности точки перевала, используя разложение функции $S(\xi)$ в ряд Тейлора:

$$S(\xi) - S(\xi_S) \approx A(\xi - \xi_S)^2,\ A = \frac{1}{2} S''(\xi_S).$$

Применяя представление

$$A = |A| \exp(i\theta_0), \theta_0 = \arg A, \xi - \xi_S = r_0 \exp(i\varphi),$$

имеем соотношения для мнимой и действительно части:

$$\mathrm{Im}[S(\xi) - S(\xi_S)] \approx |A| r_0^2 \sin(2\varphi + \theta_0), \mathrm{Re}[S(\xi) - S(\xi_S)] \approx |A| r_0^2 \cos(2\varphi + \theta_0).$$

Из условий (28) получаем два значения угла φ для касательной к кривой γ_{SDP} в точке перевала:

$$\varphi_m = -\frac{1}{2}(\pi + \theta_0) + \pi m,\ m = 0,1.$$

Эти два значения угла отвечают двум возможным направлениям вдоль γ_{SDP}.

В случае если вторая производная в точке перевала равна нулю, то ищется первая из ненулевых производных. Пусть, например, это будет $S^{(n)}(\xi_S) \neq 0$. В таком случае будем иметь n возможных углов φ для γ_{SDP}:

$$\varphi_m = -\frac{1}{n}(\pi + \theta_0) + \pi m,\ m = 0,1,\ldots,n-1$$

Асимптотика рассматриваемого интеграла при больших ρ определяется интегралом вдоль кривой γ_{SDP} в окрестности точки перевала (в области размером 1/ρ). Предполагая $f(\xi_S)\neq 0$, имеем следующую асимптотику

$$I=\int_C \exp[\rho S(\xi)]f(\xi)d\xi \approx \exp[\rho S(\xi_S)]\int_{\gamma_{SDP}} \exp(-\rho x^2) f(\xi_{SDP}(x))\frac{d\xi_{SDP}(x)}{dx}dx = \tag{29}$$
$$=\exp[\rho S(\xi_S)]f(\xi_S)\exp(i\varphi_m)\sqrt{\frac{2\pi}{\rho|S''(\xi_S)|}}\left[1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right].$$

При этом использовались соотношения:

$$f(\xi_{SDP}(x))\frac{d\xi_{SDP}(x)}{dx}\approx f(\xi_{SDP}(0))\exp(i\varphi_m)\sqrt{\frac{2}{|S''(\xi_S)|}},$$

$$\int_{\gamma_{SDP}}\exp(-\rho x^2)dx\approx\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\exp(-\rho x^2)dx\approx\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\rho x^2)dx=\sqrt{\frac{\pi}{\rho}},\ \operatorname{Re}\rho>0,$$

и известный эталонный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\rho\cdot x^2)dx=\sqrt{\frac{\pi}{\rho}},\quad \operatorname{Re}\rho>0.$$

Замечания

В (29) имеем:

$$\exp(i\varphi_m)\sqrt{\frac{2\pi}{\rho|S''(\xi_S)|}}=\sqrt{\frac{2\pi}{-\rho S''(\xi_S)}},$$

при этом $\arg\sqrt{-S''(\xi_S)}$ равен углу между положительным направлением касательной к γ_{SDP} в точке перевала и положительным направлением к вещественной оси [25].

В случае, когда точка перевала совпадает с начальной или конечной точкой контура интегрирования, асимптотическое значение будет в два раза меньше, чем для внутренней точки.

В случае если вторая производная равна нулю или значение $f(\xi_S)=0$, следует использовать другие эталонные интегралы, например,

$$A(\alpha,\beta,\eta)=\int_0^{\infty}x^{\beta-1}\exp(-\eta\cdot x^{\alpha})dx=\frac{1}{2}\eta^{-\beta/\alpha}\Gamma(\beta/\alpha),\quad \alpha,\beta,\operatorname{Re}\eta>0.$$

Если точек перевала несколько, то для оценки следует выбирать ту из них, для которой больше $\exp[\operatorname{Re}\rho S(\xi_S)]$, а если эти значения совпадают, то надо взять сумму асимптотик по этим точкам.

Библиографический список

[1] Попов С.Б. Численно-аналитические методы в задаче морской электроразведки в плоскослоистой среде // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 2019, №33, 34 с.

[2] Заборовский А.И. Электроразведка. М.: Гостоптехиздат,1963, - 424 с.

[3] Ваньян Л.Л. Основы электромагнитных зондирований. М.: Недра, 1965.

[4] Жданов М.С. Электроразведка. М.: Недра, 1986.

[5] Якубовский Ю.В., Ренард И.В. Электроразведка / 3-е изд., М.: Недра, 1991.

[6] Хмелевской В.К. и др. Геофизические методы исследований. Уч. пособие для геологич. специальностей вузов. Петропавловск-Камчатский: изд-во КГПУ, 2004, - 232 с.

[7] Zhdanov, M.S. Geophysical Electromagnetic Theory and Methods, Methods in Geochemistry and Geophysics / 43, Elsevier, 2009, 868 pages, ISBN-10: 0-444-52963-2.

[8] Петров А.А. Возможности метода становления электрического поля при поисках углеводородов в шельфовых зонах // Геофизика. – 2000, №5, с. 21-26.

[9] Шейнман С.М. Об установлении электромагнитных полей в земле // Прикладная геофизика, выпуск 3, 1947.

[10] Дворецкий П.И., Ярмахов И.Г., Микин М.Л., Попов С.Б., Дахнов М.Г., Пузаков В.К. Способ геофизических исследований скважин сложной конфигурации, основанный на применении направленных широкополосных электромагнитных импульсов, возбуждаемых щелевой цилиндрической антенной решеткой / **Патент на изобретение RUS 2107313**, Бюллетень № 8 (1998) от 20 марта 1998.

[11] Ярмахов И.Г., Попов С.Б. Импульсное возбуждение идеально проводящего цилиндра в радиально слоистой среде с потерями // Радиотехника и электроника, 2000, т.45, №1, с. 39.

[12] Попов С.Б. Процесс распространения коротких электромагнитных импульсов в слоисто-неоднородных средах // Математическое моделирование, 2000, т.12, №2, с.84–100.

[13] Попов С.Б., Ярмахов И.Г. Математическое моделирование при зондировании околоскважинного пространства приборами со сверхкороткими электромагнитными импульсами // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 2013, № 10, 32 с.

[14] Попов С.Б., Ярмахов И.Г. Зондирование в скважинах сверхкороткими электромагнитными импульсами. Изд-во: LAP LAMBERT Academic Publishing, ISBN: 978-3-659-82580-4, 2016,84 с.

[15] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. Для научных работников и инженеров / 4-е изд., М.: Наука, Физматлит, 1977, - С. 832.

[16] Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / под ред. Абрамовиц М., Стиган И. М.: Наука, 1979.

[17] Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М.: Энергия, 1967.

[18] Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах / Изд.2. М.: Наука, 1973.

[19] Дворецкий П.И., Ярмахов И.Г. Электромагнитные и гидродинамические методы при освоении нефтегазовых месторождений. М.: Недра, 1998, - 318с.

[20] Wait J.R. Geo-electromagnetism // Academic Press, 1982.

[21] Key K. 1D inversion of multicomponent, multifrequency marine CSEM data. Methodology and synthetic studies for resolving thin resistive layers // Geophysics, 2009, Vol.74, No.2, p.F9-F20.

[22] Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т.1. М.: Наука, Физматлит, 1969, - С.344.

[23] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. / 4-е изд., перераб. и доп., М.: Наука, Глав. ред. физ-мат. лит., 1976, - 543 стр.

[24] Banos A. Dipole radiation in the presence of a conducting half – space // Oxford, England: Pergamon Press, 1966.

[25] Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука, 1977, – С. 366.

[26] Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной / 5-е изд., М.: Наука, Физматлит, 1999, – С. 319,
ISBN 5-02-015233-1.

[27] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного / 4-е изд., М.: Наука, Физматлит, 1973, - С.736.

[28] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, Физматлит, 1983, - С.752

[29] Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Гостехиздат, 1943.

Оглавление

1. Введение 3
2. Математическая формулировка задачи 5
3. Двухслойная среда ($n = 1$) в полноволновом приближении 7
    3.1. Большие моменты времени 9
    3.2. Начальные моменты времени для возбуждений второго типа и физический смысл этих волн 10
4. Обратное преобразование Лапласа возбуждений второго типа 11
5. Обратное преобразование Лапласа возбуждений первого типа 13
    5.1. Исследование интеграла по Зоммерфельду и определение боковой волны 14
    5.2. Оценка слагаемого, отвечающего боковой волне 18
    5.3. Обратное преобразование Лапласа асимптотики боковой волны 21
    5.4. Низкочастотное приближение для воздушной среды 21
    5.5. Боковая волна в низкочастотном приближении 22
6. Численные расчеты 25
    6.1. Результаты численных экспериментов для боковой волны 25
    6.2. Использование сверхкоротких (СКИ) импульсов электрического тока 26
Заключение 29
Приложение 30
    П1. Лемма Жордана 30
    П2. Метод перевала 31
Библиографический список 34