ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 117 за 2020 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Е.Н. Аристова, Г.О. Астафуров

О сравнении диссипативно-дисперсионных свойств некоторых консервативных разностных схем

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Аристова Е.Н., Астафуров Г.О. О сравнении диссипативно-дисперсионных свойств некоторых консервативных разностных схем // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 117. 22 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2020-117
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-117

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

Е.Н.Аристова, Г.О.Астафуров

О сравнении диссипативно-дисперсионных свойств некоторых консервативных разностных схем

Москва — 2020

Аристова Е.Н., Астафуров Г.О.

О сравнении диссипативно-дисперсионных свойств некоторых консервативных разностных схем

Схемы с компактным шаблоном являются очень привлекательными для численного решения уравнения переноса при наличии сложных контактных разрывов и внешних границ. Численная схема, в которой построение ведется на минимальном двухточечном шаблоне по каждому направлению, называется бикомпактной. Без расширения списка искомых величин в ячейке максимальный порядок аппроксимации схемы может быть равен двум. К классу таких схем относится схема Головизнина-Четверушкина. Для повышения порядка аппроксимации необходимо расширять список искомых переменных. Порядки аппроксимации могут быть независимыми по пространству и по времени, как в бикомпактных схемах Рогова, так и согласованными, как это чаще всего происходит в интерполяционно-характеристических методах. В данной работе исследованы диссипативно-дисперсионные свойства трех разных консервативных бикомпактных схем для численного решения уравнения адвекции. Показано, что модификация схемы CIP (Cubic Interpolation Polynomial), основанная на эрмитовой интерполяции, обладает экстрамалой дисперсией при практически любых числах Куранта, что делает ее очень слабо немонотонной.

Ключевые слова: уравнение адвекции, уравнение переноса, бикомпактные схемы, характеристические схемы, консервативные схемы, дисперсия разностной схемы, диссипация разностной схемы, модификация CIP

Elena Nikolaevna Aristova, Gleb Olegovich Astafurov

Comparison of dissipative-dispersion properties of some conservative difference schemes

Schemes with a compact template are very attractive for the numerical solution of the transport equation in the presence of complex contact discontinuities and external boundaries. A numerical scheme in which the construction is based on a minimal two-point stensil in each direction is called bicompact. Without expanding the list of required values in the cell, the maximum order of approximation of the scheme is two. The class of such schemes includes the Goloviznin-Chetverushkin scheme. To increase the approximation order, it is needed to expand the list of required variables. The approximation orders can be independent in space and time, both in bicompact Rogov schemes, and consistent, as is most often the case in interpolation-characteristic methods. In this paper, the dissipative-dispersion properties of three different conservative bicompact schemes for advection equation are investigated. It is shown that a modification of the CIP (Cubic Interpolation Polynomial) scheme based on Hermitian interpolation has an extra-small variance for almost any Courant numbers, which makes it very weakly non-monotonic.

Key words: advection equation, transport equation, bicompact schemes, grid-characteristic schemes, conservative schemes, dispersion of the difference scheme, dissipation of the difference scheme, CIP method modification

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 18-01-00857-а.

Оглавление

Введение

В данной работе исследованы диссипативно-дисперсионные свойства эрмитовой характеристической схемы для решения одномерного уравнения адвекции. Метод основан на эрмитовой интерполяции, использующей не только значения функции в узлах, но также и значения пространственной производной функции в узлах. Используется вычисление производных на новом шаге по времени, обеспечивающее консервативность полученной разностной схемы. Отметим, что схема строится в рамках одной ячейки, что позволяет ее отнести к классу бикомпактных схем. Восстановление производных на новом слое по времени производится с использованием интегрального среднего и формулы Эйлера–Маклорена. В этом смысле модификация метода CIP много позаимствовала из идей построения бикомпактных схем Рогова. Проведен сравнительный анализ данной схемы с современными консервативными схемами, такими как бикомпактная схема Б.В. Рогова [8] и схема В.М. Головизнина и Б.Н. Четверушкина [17]. Показано, что эрмитова характеристическая схема обладает малой диссипацией и экстрамалой дисперсией для схем своего класса. Дисперсия эрмитовой характеристической схемы меньше дисперсии полудискретной бикомпактной схемы Рогова. В свою очередь, последняя схема при реализации метода трапеций аппроксимации по времени обладает нулевой диссипацией. Близкие идеи использования характеристических схем с дополнительным алгоритмом, обеспечивающим консервативность, использованы в наиболее простой в реализации схеме Головизнина–Четверушкина. Для сравнения выбраны схемы с компактным шаблоном и близкими чертами, используемыми для замыкания разностной схемы. Все рассмотренные схемы являются консервативными либо за счет прямого введения консервативных переменных типа интегрального среднего, либо за счет специальной процедуры замыкания восстановления пространственной производной на новом шаге по времени с сохранением интегрального среднего.

В последнее десятилетие был предложен класс бикомпактных схем на основе использования метода прямых [1-8]. Пространственные производные дискретизуются, временные производные оставляются в дифференциальной форме. Полученная полудискретная бикомпактная схема может интегрироваться по времени любым методом, чаще всего используются диагонально-неявные методы Рунге–Кутты, например, третьего порядка аппроксимации. Для увеличения порядка аппроксимации по пространству используется либо расширение списка переменных и включение в него дополнительных переменных, например, интегрального среднего по ячейке, либо введение дополнительных внутренних точек шаблона. Схема консервативна, позволяет считать задачи методом бегущего счета или итерируемой факторизации в многомерных геометриях [9]. Метод не использует характеристические свойства уравнения переноса. Этот метод активно развивается, и на его основе получены прекрасные результаты в приложениях к задачам газовой динамики. С нашей точки зрения, этот метод обладает двумя недостатками. Первый – он работает на регулярных прямоугольных пространственных сетках, которые могут быть не слишком удобны при моделировании геометрии реальных технических устройств. Второй связан с особенностями решения уравнения переноса излучений и частиц. В этом случае уравнение переноса содержит недифференциальный член поглощения, так что точное решение уравнения вдоль каждой характеристики содержит экспоненциальный член. Развиваемый в настоящее время метод лебеговского осреднения уравнения переноса по энергии [10-15] обладает той особенностью, что сохраняет полный диапазон изменения коэффициента поглощения, который в центрах и в крыльях линий может отличаться на несколько порядков. Это означает, что при любом разумном выборе пространственной сетки в каких-то частях спектра ячейки будут оптически толстыми. Поэтому для нас важно, какая именно пространственная аппроксимация достигается в бикомпактных схемах. В [6] этот вопрос был исследован и показано, что пространственная аппроксимация бикомпактных схем четвертого порядка может быть получена для модельного уравнения Далквиста методом коллокации с функцией устойчивости $R(z)=\dfrac{1+z/2+z^2/12}{1-z/2+z^2/12}$, где z – оптическая толщина ячейки. Это означает, что данный способ пространственной аппроксимации не обладает "L–устойчивостью", т.е. плохо передает экспоненциально затухающие решения в ситуации большой оптической толщины ячеек. Эти причины побудили вернуться к интерполяционно-характеристическим (или сеточно-характеристическим) схемам, в которых экспоненциальные зависимости решения могут быть частично учтены явно. Порядки аппроксимации по пространству и времени в характеристических схемах жестко связаны между собой и определяются точностью построения интерполянта для вычисления значения искомой величины в точке пересечения характеристики, выпущенной назад, до пересечения с границами ячейки, на которых решение известно. В [16] была предложена консервативная модификация известного CIP метода. CIP метод и его модификация основаны на использовании эрмитовой интерполяции, требующей знания не только узловых значений переменных, но и узловых значений пространственной производной. Для данной схемы нельзя исследовать отдельно пространственную аппроксимацию и найти ее "функцию устойчивости" для уравнения Далквиста. Консервативность предлагаемой модификации CIP метода достигается за счет способа вычисления пространственных производных на новом временном шаге (т.е. замыкания метода). В классическом CIP методе вычисление производных на новом временном слое производится путем решения еще одного уравнения переноса, записанного для пространственных производных искомой функции (так называемых продолженных уравнений). Обсуждение отличий двух подходов будет проведено ниже.

Построение модификации CIP схемы

Поскольку диссипативно-дисперсионный анализ схем проводят для уравнения адвекции, повторим построение схемы для этого простейшего случая, не вдаваясь в его расширение на случай неоднородного уравнения переноса. Описание построения модификации схемы для неоднородного уравнения переноса, а также численные примеры приведены в работе [16].

Пусть задано линейное однородное уравнение переноса (уравнение адвекции)

$$Lu \equiv \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + a\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0. \tag{1}$$

Дополним уравнение (1) начальными условиями

$$u(x,0) = u_0(x),\ 0 \le x \le X. \tag{2}$$

В предположении положительности скорости переноса a краевые условия поставим на левой границе

$$u(0,t) = \varphi(t),\ 0 \le t \le T. \tag{3}$$

Интерполяционно-характеристическая схема будет построена в рамках одной расчетной ячейки. Будем использовать аппроксимацию уравнения в рамках квадратной ячейки с вершинами (x_m,t^n), (x_{m+1},t^n), (x_m,t^{n+1}), (x_{m+1},t^{n+1}). Для положительной скорости переноса a неизвестным сеточным значением искомой функции в каждой ячейке будет y_{m+1}^{n+1}. Выпустим из точки (x_{m+1},t^{n+1}) характеристику $x - at = \mathrm{const}$ назад до пересечения либо с нижней, либо с боковой гранью ячейки (рис.1). В первом случае число Куранта $\sigma = a\tau/h \le 1$, во втором $\sigma \ge 1$. Обозначим координату пересечения обратной характеристики с границами ячейки либо x^* $(\sigma \le 1)$, либо t^* $(\sigma \ge 1)$.

Для точного решения (1) значение из этой точки переносится без изменений в точку (x_{m+1},t^{n+1}). Таким образом, точность метода определяется точностью восстановления неузлового значения y^*. В сеточно-характеристических методах для восстановления неузлового значения используется та или иная интерполяция.

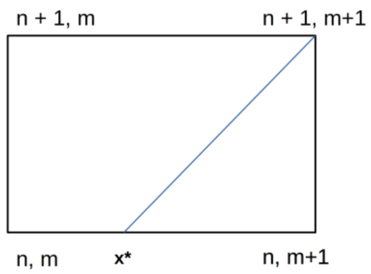


Рис. 1. Расчетная ячейка

Будем использовать кубическую интерполяцию Эрмита. Для случая $\sigma \le 1$ пересечения с нижней гранью ячейки она в барицентрических пространственных координатах p и q на отрезке $[x_m, x_{m+1}]$ имеет вид:

$$P_3(p,q) = H^R(p,q) y_{m+1}^n + H^L(p,q) y_m^n + G^R(p,q) d_{m+1}^n h + G^L(p,q) d_m^n h. \qquad (4)$$

Здесь H, G – базисные функции Эрмита:

$$\begin{aligned} &p = (x^* - x_m)/h, \quad q = (x_{m+1} - x^*)/h, \quad p+q = 1, \quad h = x_{m+1} - x_m, \\ &H^R = p(p + 2qp), \qquad G^R = -p \cdot qp, \\ &H^L = q(q + 2qp), \qquad G^L = q \cdot qp, \end{aligned} \qquad (5)$$

y_m^n – сеточные значения искомой функции, а d_m^n – сеточные значения пространственных производных искомой функции. Для случая $\sigma \ge 1$ точка начала характеристики, приходящей в точку (x_{m+1}, t^{n+1}), попадает на левую границу, интерполяция на этой границе расчетной ячейки рассматривается аналогично с учетом производных по времени для искомой функции. Если в массиве данных хранятся только пространственные производные, производные по времени могут быть рассчитаны из уравнения переноса (1).

Как уже было указано, интерполяция вида (4)-(5) была использована во многих работах, см., например, [18-24] и литературу в них. Отличие предлагаемого подхода от упомянутых работ заключается в способе определения величин d_m^{n+1}, необходимых для возможности расчета величин на следующем временном слое. Как уже было сказано, в методе CIP стандартной процедурой является использование дифференциального продолжения уравнения (1), т.е. для пространственной производной также выписывается дифференциальное уравнение вида (1), которое должно решаться совместно с исходным уравнением переноса:

$$\frac{\partial}{\partial x} Lu \equiv \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0. \qquad (1')$$

В качестве начальных данных для вычисления d_{m+1}^{n+1} в точке x* берется значение пространственной производной интерполянта (4). С нашей точки зрения, в приложении к задачам переноса излучений и частиц у этого подхода есть два недостатка: во-первых, уравнение (1) допускает разрывные решения, и в этом случае производная уже должна рассматриваться как обобщенная функция, и, во-вторых, при рассмотрении неоднородного уравнения переноса с переменным коэффициентом поглощения продолженное уравнение будет содержать не только производную, но и саму функцию, что затрудняет построение схемы.

В предлагаемой модификации CIP метода не используется дифференциальное продолжение уравнения (1'). Предположим, что в начальный момент времени мы знаем не только узловые значения функции $u_0(x_m)$, но и значения ее производной:

$$d_m^0 = u_0'(x_m). \tag{6}$$

Для замыкания алгоритма нам необходима процедура получения сеточных значений d_{m+1}^{n+1}. Для граничного узла значение производной в случае краевых условий (3) может быть рассчитано из (1), (3) как $d_0^{n+1} = -\dot{\varphi}(t^{n+1})/a$. Для однородного уравнения переноса производная d_{m+1}^{n+1} может быть вычислена как производная интерполянта в точке x*: $d_{m+1}^{n+1} = P_3'(p,q)$. Однако такой вариант вычисления производной не обобщается на неоднородное уравнение. Мы поступим иначе. Вычислим интегральное среднее на нижнем отрезке $[x^*, x_{m+1}]$ либо точно от интерполянта P_3, либо по формуле Симпсона. В силу характеристических свойств однородного уравнения (1) это интегральное среднее будет совпадать с интегральным средним по отрезку $[t^n, t^{n+1}]$ в точке x_{m+1} справа. Значение пространственной производной d_{m+1}^n может быть из уравнения (1) пересчитано в производную по времени: $g_{m+1}^n = -a d_{m+1}^n$. Тогда на правой границе нам известны два узловых значения y_{m+1}^n, y_{m+1}^{n+1}, интегральное среднее $\bar{y}_{m+1}$ и значение временной производной искомой функции g_{m+1}^n. Эти данные позволяют получить значение g_{m+1}^{n+1} из формулы Эйлера–Маклорена:

$$\bar{y}_{m+1} \equiv \frac{1}{\tau}\int_{t^n}^{t^{n+1}} u(x_{m+1},t)\,dt = \frac{1}{2}(y_{m+1}^n + y_{m+1}^{n+1}) - \frac{\tau}{12}(g_{m+1}^{n+1} - g_{m+1}^n) + \frac{1}{720}u_{tttt}^{(4)}\tau^4. \tag{7}$$

В свою очередь, величина g_{m+1}^{n+1} может быть пересчитана в пространственную производную $d_{m+1}^{n+1} = -g_{m+1}^{n+1}/a$ из уравнения (1). Восстановление производных исходя из сохранения интегральных средних делает модификацию метода CIP консервативной, а также позволяет обобщить схему на случай неоднородного уравнения переноса. Использование формулы Эйлера-Маклорена для замыкания системы уравнений идеологически очень близко к бикомпактным схемам Рогова.

В дальнейшем при ссылках на эту схему мы будем использовать обозначение CIP(3,3) как указание на порядки аппроксимации по времени и пространству.

Краткий вывод полудискретной бикомпактной схемы Рогова

Бикомпактная схема Рогова строится методом прямых. Полудискретная форма уравнений получается смешанным FD-FV методом. Для повышения порядка аппроксимации рассматриваются не только узловые значения переменных, но и интегральные средние величины по пространственной ячейке. Интегрированием уравнения (1) по пространственной ячейке получается первое уравнение полудискретной формы схемы:

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{y}_m + \frac{a}{h}\left(y_{m+1} - y_m\right) = 0. \tag{8}$$

Интегрированием уравнения (1’) с использованием замыкающего соотношения формулы Эйлера-Маклорена (7) можно получить второе уравнение полудискретной системы:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(y_{m+1} - y_m\right) + \frac{6a}{h}\left(y_{m+1} - 2\bar{y}_m + y_m\right) = 0. \tag{9}$$

Система уравнений (8)-(9) может быть проинтегрирована по времени любым из известных методов, обычно используются диагонально-неявные методы Рунге-Кутты третьего порядка аппроксимации. Методы третьего порядка аппроксимации сложны для диссипативно-дисперсионного анализа. Автор схемы в [8] провел анализ полностью дискретных схем для неявной схемы Эйлера по времени и метода трапеций, который он называет методом типа Кранка-Николсон. Мы будем сравнивать диссипативно-дисперсионные свойства с реализацией метода трапеций по времени, а также с идеальными результатами полудискретной схемы (8)-(9).

Для реализации метода трапеций будем использовать ссылку на схему как BiC(4,2) как указание на четвертый порядок аппроксимации по пространству и второй по времени, а на полудискретную схему как BiC(4,∞).

Краткий вывод консервативной схемы Головизнина-Четверушкина

Консервативная схема Головизнина-Четверушкина также использует переменные двух видов: характеристические и консервативные. Узловые характеристические переменные вычисляются интерполяционно-характеристическим методом второго порядка (по схеме Бима-Уорминга) с использованием значения в полуцелом пространственном узле. Для обеспечения консервативности схемы введены консервативные переменные, отвечающие серединам сторон ячеек. На нижней стороне ячейки по известным значениям $y_m^n, y_{m+1/2}^n, y_{m+1}^n$ в трех точках строится интерполяция второго порядка, значение которой в точке пересечения с обратной характеристикой определяет y_{m+1}^{n+1}. Таким образом, с учетом $\sigma = a\tau/h$ получаем для характеристических переменных

$$y_{m+1}^{n+1} = y_{m+1}^n - 2\sigma\left(1.5y_{m+1}^n - 2y_{m+1/2}^n + 0.5y_m^n\right) + 2\sigma^2\left(y_{m+1}^n - 2y_{m+1/2}^n + y_m^n\right). \qquad (10)$$

В полуцелых узлах по времени промежуточные консервативные переменные определяются из соотношений $y_{m+1}^{n+1/2} = \left(y_{m+1}^n + y_{m+1}^{n+1}\right)/2, \quad y_m^{n+1/2} = \left(y_m^n + y_m^{n+1}\right)/2$. Для расчета значений консервативных переменных в полуцелых узлах по пространству используется схема «крест» для уравнения переноса

$$\frac{y_{m+1/2}^{n+1} - y_{m+1/2}^n}{\tau} + a\frac{y_{m+1}^{n+1/2} - y_m^{n+1/2}}{h} = 0. \qquad (11)$$

Исключая промежуточные величины, для консервативных переменных получим:

$$y_{m+1/2}^{n+1} = y_{m+1/2}^n - 0.5\sigma\left(y_{m+1}^n + y_{m+1}^{n+1} - y_m^n - y_m^{n+1}\right). \qquad (12)$$

Ссылки на схему (10),(12) будем оформлять в виде GC(2,2) как указание на порядки аппроксимации по пространству и по времени.

Диссипативно-дисперсионный анализ схемы CIP(3,3) при числах Куранта, меньших единицы

В силу того что и формула Симпсона, и формула Эйлера–Маклорена точны на многочленах третьей степени, то нетрудно показать, что для уравнения адвекции предлагаемый в разделе 2 способ вычисления пространственной производной на новом слое по времени эквивалентен переносу ее значения, получаемого дифференцированием интерполянта в точке x^*, вдоль характеристики. Этот же способ вычисления производной для уравнения адвекции применяется для анализа и в классической схеме CIP [21]. Проведем упрощенный (по сравнению с [21]) Фурье-анализ полученной разностной схемы на диссипативно-дисперсионные свойства. Будем искать точное решение дифференциального уравнения адвекции в виде:

$$u(x,t)=e^{\lambda t}e^{ikx}. \qquad (13)$$

Подстановка Фурье-гармоники в уравнение (1) для точного решения задачи дает связь

$$\lambda=-ika. \qquad (14)$$

Каждая Фурье-гармоника движется с одной и той же скоростью a, не изменяясь по амплитуде (λ – чисто комплексное). Для численного решения используем аналог (13) для узловых значений функции и узловых значений производной

$$y_m^n=e^{\lambda n\tau}e^{ikmh},\quad d_m^n=\beta e^{\lambda n\tau}e^{ikmh}. \qquad (15)$$

Пусть число Куранта меньше 1, тогда характеристика приходит на нижнюю грань ячейки. Вычисление производных базисных функций дает

$$\begin{gathered}\frac{\partial H^R}{\partial x}=\frac{1}{h}\left(\frac{\partial H^R}{\partial p}-\frac{\partial H^R}{\partial q}\right)=\frac{6pq}{h},\quad \frac{\partial H^L}{\partial x}=\frac{1}{h}\left(\frac{\partial H^L}{\partial p}-\frac{\partial H^L}{\partial q}\right)=-\frac{6pq}{h},\\ \frac{\partial G^R}{\partial x}=\frac{p(1-3q)}{h},\quad \frac{\partial G^L}{\partial x}=\frac{q(1-3p)}{h}.\end{gathered} \qquad (16)$$

Точка пересечения характеристики с нижним слоем x^* соответствует значению барицентрических координат $q=\sigma, p=1-\sigma$. Перенос значений функции и производной из этой точки в узел (t^{n+1},x_{m+1}) эквивалентен системе

$$\begin{gathered}y_{m+1}^{n+1}=p(p+2pq)y_{m+1}^n+q(q+2pq)y_m^n-p^2qh\cdot d_{m+1}^n+pq^2h\cdot d_m^n,\\ hd_{m+1}^{n+1}=6pq\cdot y_{m+1}^n-6pq\cdot y_m^n+p(1-3q)h\cdot d_{m+1}^n+q(1-3p)h\cdot d_m^n.\end{gathered} \qquad (17)$$

Подстановка в эту систему гармоники (15) приводит к системе для коэффициента β:

$$\begin{cases} e^{\lambda\tau} = p(p+2pq) + q(q+2pq)e^{-ikh} - p^2qh\beta + pq^2h\beta e^{-ikh}, \\ h\beta e^{\lambda\tau} = 6pq - 6pqe^{-ikh} + p(1-3q)h\beta + q(1-3p)h\beta e^{-ikh}. \end{cases} \tag{18}$$

Или:

$$\begin{cases} h\beta[pq(-p+qe^{-ikh})] + [p(p+2pq) + q(q+2pq)e^{-ikh} - e^{\lambda\tau}] = 0, \\ h\beta[p(1-3q) + q(1-3p)e^{-ikh} - e^{\lambda\tau}] + [6pq - 6pqe^{-ikh}] = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Условие совместности системы приводит к квадратному уравнению относительно $e^{\lambda\tau}$:

$$\begin{gathered} \left(e^{\lambda\tau}\right)^2 - e^{\lambda\tau}[p(p+2pq) + q(q+2pq)e^{-ikh} + p(1-3q) + q(1-3p)e^{-ikh}] + \\ [p(p+2pq) + q(q+2pq)e^{-ikh}][p(1-3q) + q(1-3p)e^{-ikh}] - \\ 6p^2q^2[1-e^{-ikh}][p-qe^{-ikh}] = 0. \end{gathered} \tag{20}$$

Это уравнение имеет два корня; корень, отвечающий дисперсионному соотношению для данной схемы, соответствует знаку "плюс" перед корнем из детерминанта. При $q=\sigma,\ p=1-\sigma$:

$$\begin{gathered} \lambda = \frac{1}{\tau}\ln\Big(1-2\sigma+\sigma^3+\sigma e^{-ikh}(-1+3\sigma-\sigma^2) + e^{-ikh}\sigma(1-\sigma)\times \\ \times\sqrt{\sigma^2-4\sigma+1-2e^{ikh}(\sigma^2-\sigma-5)+e^{2ikh}(\sigma^2+2\sigma-2)}\Big). \end{gathered} \tag{21}$$

Разложение (21) в ряд Тейлора для длинноволновых гармоник $kh \ll 1$ дает

$$\begin{gathered} \lambda = -iak + \frac{1}{72}ak(\sigma-1)(\sigma^2-\sigma+1)(kh)^3 + \\ + \frac{i}{540}ak(\sigma^2-1)(2\sigma-1)(\sigma-2)(kh)^4 - \\ - \frac{1}{648}ak(\sigma-1)(\sigma^2-\sigma+1)^2(kh)^5 + O\left((kh)^6\right). \end{gathered} \tag{22}$$

Выражение (22) показывает, что эрмитова характеристическая схема действительно обладает третьим порядком аппроксимации, главный член погрешности по сравнению с (10) – диссипативный. На (рис. 2) представлена величина коэффициента при $(kh)^3$. Отрицательность коэффициента означает, что схема диссипативна (и, следовательно, устойчива).

Коэффициент при дисперсионном члене разложения представлен на (рис. 3). Для длинноволновых гармоник фазовая скорость переноса

$$a^* \approx a\left(1-(\sigma^2-1)(2\sigma-1)(\sigma-2)(kh)^4/540\right). \tag{23}$$

Там, где коэффициент отрицателен (для $0<\sigma<0.5$), дисперсия опережающая, т.к. эффективная скорость выше, чем a. И наоборот, там, где коэффициент положителен, дисперсия запаздывающая (для $0.5<\sigma<1$).

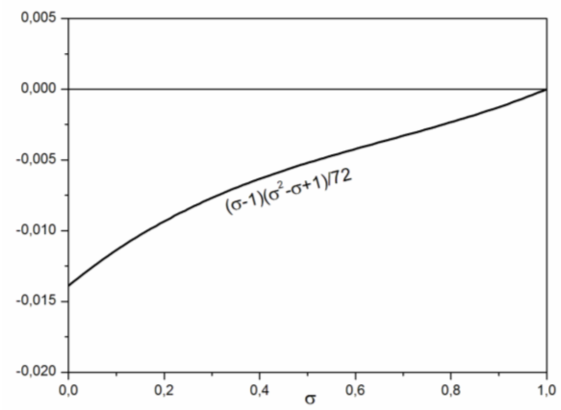


Рис. 2. Коэффициент диссипации схемы в зависимости от числа Куранта при малых значениях безразмерного волнового числа *kh*.

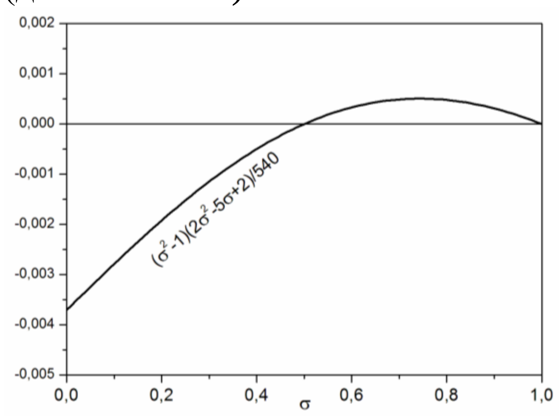
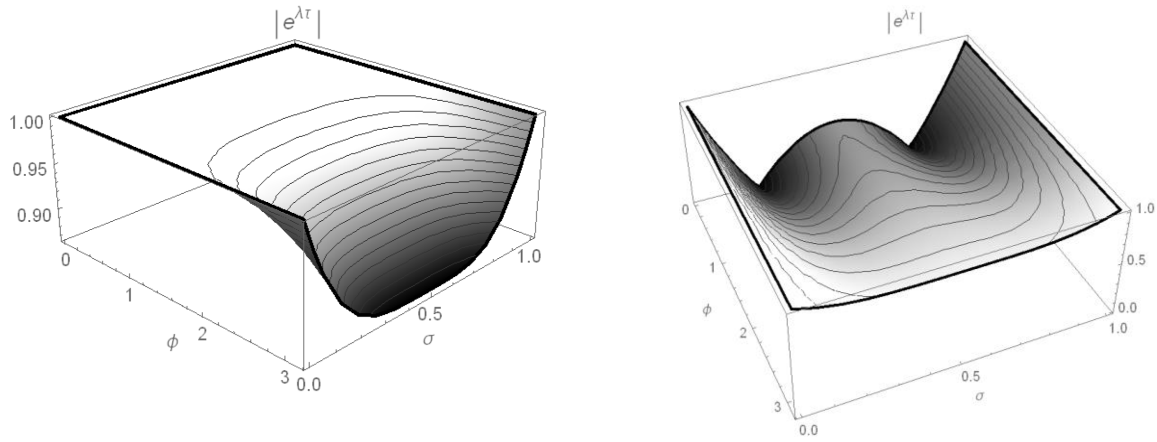


Рис. 3. Коэффициент при дисперсионном члене разложения (22) при различных числах Куранта при малых значениях безразмерного волнового числа *kh*.

Сравнение диссипативных свойств разностных схем

На (рис. 4) представлены значения амплитудного множителя CIP(3,3) схемы при значениях безразмерной величины $\phi = kh$ от 0 до π и числе Куранта от 0 до 1. Паразитный корень приведен только для того, чтобы убедиться в устойчивости схемы.



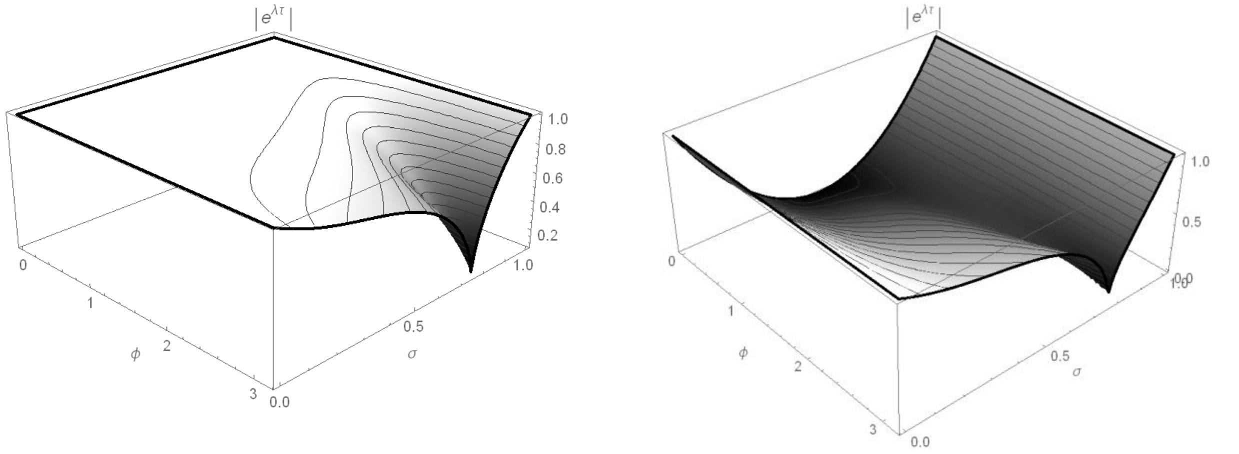
а) физический корень (шаг линий уровня 0,01) *б)* паразитный корень (шаг линий уровня 0,1)

Рис. 4. Временной множитель амплитуды $\left|e^{\lambda\tau}\right|$ в зависимости от числа Куранта $0 \le \sigma \le 1$ и безразмерного волнового числа $0 \le kh \le \pi$ для схемы CIP(3,3).

Схемы Рогова BIC(4,2) и BIC(4,∞) бездиссипативны в силу полной симметричности схемы. Поэтому рисунки $\left|e^{\lambda\tau}\right| = 1$ не приводятся. Для схемы Головизнина-Четверушкина GC(2,2) Фурье-анализ дает дисперсионное соотношение

$$e^{\lambda\tau} = \frac{1}{2}\left(2 - 3\sigma + 2\sigma^3 - \sigma\left(e^{-i\phi}\left(1 - 4\sigma + 2\sigma^2\right) - \begin{bmatrix} e^{-i2\phi}\left(1 - 4\sigma + 2\sigma^2\right)^2 + \\ + e^{-i\phi}\left(22 - 40\sigma + 8\sigma^2 + 16\sigma^3 - 8\sigma^4\right) - \\ -7 + 16\sigma - 12\sigma^2 + 4\sigma^4 \end{bmatrix}^{0.5}\right)\right).$$

На рис. 5 представлены значения амплитудного множителя схемы GC(2,2) при значениях безразмерной величины $\phi = kh$ от 0 до π и числе Куранта от 0 до 1.



а) физический корень (шаг линий уровня 0,05) *б)* паразитный корень (шаг линий уровня 0,05)

Рис. 5. Временной множитель амплитуды $\left|e^{\lambda\tau}\right|$ в зависимости от числа Куранта $0 \le \sigma \le 1$ и безразмерного волнового числа $0 \le kh \le \pi$ для схемы GC(2,2).

Сравнение (рис. 4) и (рис. 5) показывает, что схема CIP(3,3) обладает достаточно малой диссипацией по сравнению со схемой GC(2,2). Эти схемы обладают разным порядком аппроксимации. Однако заметим, что схемы четного порядка аппроксимации обладают преимущественной дисперсионной ошибкой. Диссипативная ошибка появляется в следующем члене разложения λ по степеням ϕ. Схемы нечетного порядка аппроксимации обладают преимущественной диссипативной ошибкой. Поэтому сравнение схемы CIP(3,3) со схемой GC(2,2) по диссипации происходит в одном и том же порядке по ϕ (в третьем). Нетрудно видеть, что эрмитова схема обладает значительно меньшей диссипацией.

Сравнение дисперсионных свойств консервативных разностных схем

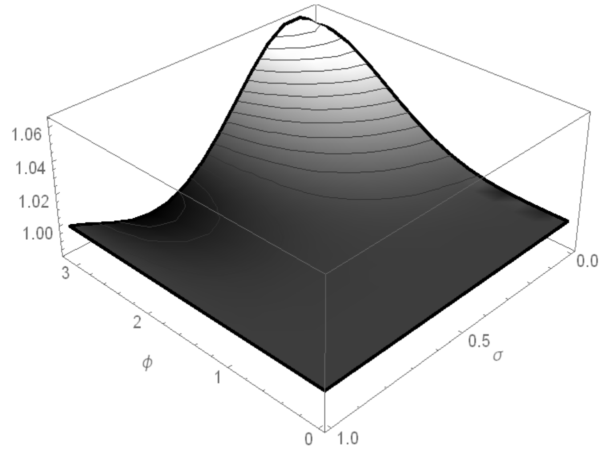
Бикомпактные схемы Рогова обладают численной дисперсией, поэтому приведем дисперсионные соотношения для полудискретной схемы BiC(4, ∞):

$$\lambda = \frac{a\left(3+3e^{i\phi} - \left[-3+42e^{i\phi} - 3e^{i2\phi}\right]^{0.5}\right)}{h\left(1-e^{i\phi}\right)}, \tag{24}$$

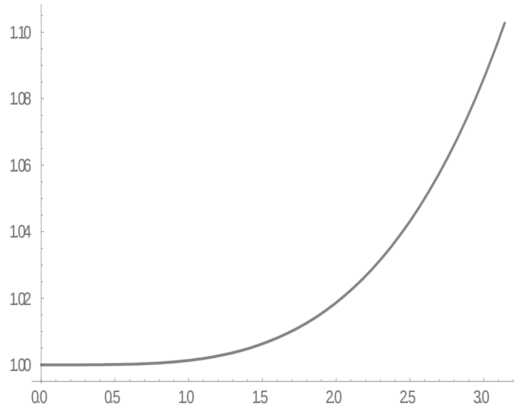
и схемы метода трапеций BiC(4, 2):

$$e^{\lambda\tau} = \frac{\sin(\phi/2)\left(2-6\sigma^2\right) + i\sigma\left[42-6\cos\phi\right]^{0.5}}{\sin(\phi/2)\left(2+6\sigma^2\right) - i6\sigma\cos(\phi/2)}. \tag{25}$$

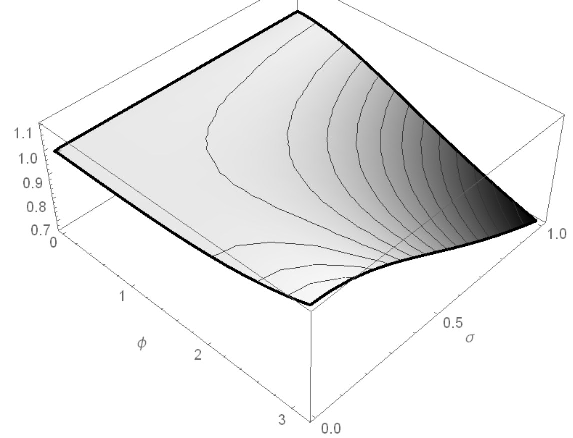
Заметим, что для полудискретной бикомпактной схемы (24) у временного показателя пропадает зависимость от числа Куранта. На (рис. 6) приведены зависимости отношения численной скорости переноса гармоник к их точному значению a^*/a в зависимости от числа Куранта σ и безразмерного волнового числа ϕ.



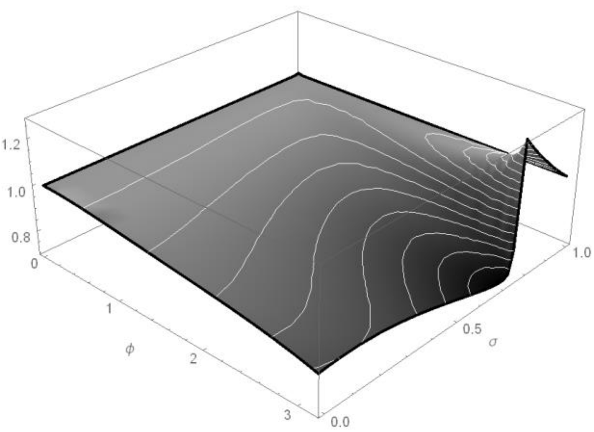
а) CIP(3,3)
(шаг линий уровня 0,005)



б) BiC(4,∞)



в) BiC(4,2)
(шаг линий уровня 0,03)



г) GC(2,2)
(шаг линий уровня 0,05)

Рис. 6. Зависимость отношения a^*/a скорости переноса гармоники с безразмерным волновым числом $0 \le \phi \le \pi$ к точной скорости переноса, равной a, при различных числах Куранта для эрмитовой схемы CIP(3,3), бикомпактных схем Рогова BiC(4,∞) и BiC(4,∞) и схемы Головизнина–Четверушкина GC(2,2).

Главные дисперсионные члены эрмитовой схемы и схемы Рогова имеют четвертый порядок аппроксимации по ϕ, а схема Головизнина–Четверушкина – второй. Поэтому наиболее интересно сравнение по свойствам со схемой своего класса: с полудискретной схемой Рогова BiC(4,∞). Эрмитова схема CIP(3,3) показывает экстрамалую дисперсию Фурье-гармоник по сравнению с полудискретной бикомпактной схемой Рогова. Если отношение a^*/a для эрмитовой схемы для коротковолновых возмущений изменяется в пределах от 0.98 до 1.06, то для полудискретной бикомпактной схемы диапазон изменения от 1 до 1.1.

Диссипативно-дисперсионный анализ схемы при числах Куранта больше единицы

В этом случае интерполяция будет вестись по левому ребру ячейки.

$$P_3(p,q)=H^U(p,q)y_m^{n+1}+H^D(p,q)y_m^n+G^U(p,q)g_m^{n+1}\tau+G^D(p,q)g_m^n\tau. \qquad (26)$$

Здесь H,G – базисные функции Эрмита:

$$\begin{aligned} &p=(t^*-t^n)/\tau, \quad q=(t^{n+1}-t^*)/\tau, \quad p+q=1, \quad \tau=t^{n+1}-t^n,\\ &H^U=p(p+2qp), \quad G^U=-p\cdot qp,\\ &H^D=q(q+2qp), \quad G^D=q\cdot qp. \end{aligned} \qquad (27)$$

В этом случае схема для уравнения адвекции также будет эквивалентна переносу из точки t^* не только значения функции, но и значения ее временной производной. Аналогичный Фурье-анализ типа (18) для функции и ее производной по времени

$$\begin{aligned} e^{ikh}&=p(p+2qp)+e^{-\lambda\tau}q(q+2qp)+\tau\beta(-p^2q)+\tau\beta e^{-\lambda\tau}pq^2,\\ \tau\beta e^{ikh}&=6pq+e^{-\lambda\tau}(-6pq)+\tau\beta\cdot p(1-3q)+\tau\beta e^{-\lambda\tau}q(1-3p), \end{aligned}$$

с учетом связи $p+q=1$ приводит к квадратному уравнению

$$\begin{aligned} &\left(e^{2ikh}+(1-q)^4-2e^{ikh}(1-2q+q^3)\right)\left(e^{\lambda\tau}\right)^2-\\ &-2q[1-2q^2+q^3-e^{ikh}(1-3q+q^2)]\left(e^{\lambda\tau}\right)+q^4=0. \end{aligned}$$

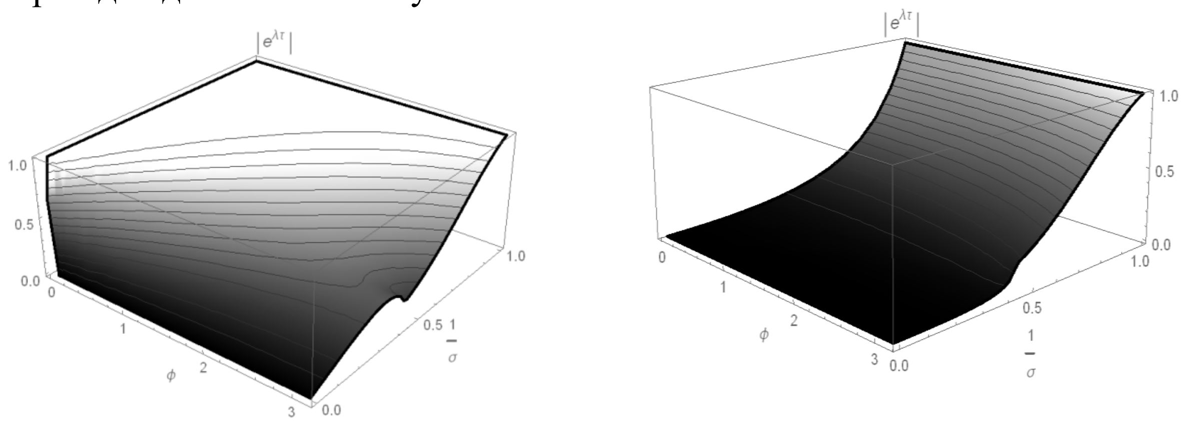
Точка пересечения t^* с левым ребром ячейки будет иметь координаты $q=\dfrac{h/a}{\tau}=\sigma^{-1}$, тогда корни этого квадратного уравнения

$$\begin{aligned} e^{\lambda\tau}=q\Big[&1-2q^2+q^3-e^{ikh}(1-3q+q^2)\pm(1-q)\times\\ &\times\sqrt{1+2q-2q^2+2e^{ikh}\left(-1+q+5q^2\right)+e^{2ikh}\left(1-4q+q^2\right)}\Big]\times\\ &\times\left(\left(1-q\right)^4-2e^{ikh}\left(1-2q^2+q^3\right)+e^{2ikh}\right)^{-1} \end{aligned} \qquad (28)$$

Выраженный через число Куранта физически осмысленный корень соответствует дисперсионному соотношению со знаком "+" перед корнем. Разложение в ряд Тейлора для длинноволновых гармоник дает дисперсионное соотношение:

$$
\begin{aligned}
\lambda = {} & -iak - \frac{1}{72}ak(\sigma-1)(\sigma^2-\sigma+1)(kh)^3 + \\
& + \frac{i}{540}ak(\sigma^2-1)(2\sigma-1)(\sigma-2)(kh)^4 - \\
& + \frac{1}{648}ak(\sigma-1)(\sigma^2-\sigma+1)^2(kh)^5 + O\left((kh)^6\right)
\end{aligned} \qquad (29)
$$

На (рис. 7) представлен временной множитель амплитуды в зависимости от обратного числа Куранта при числах Куранта больше единицы. Представлены оба корня для доказательства устойчивости схемы.

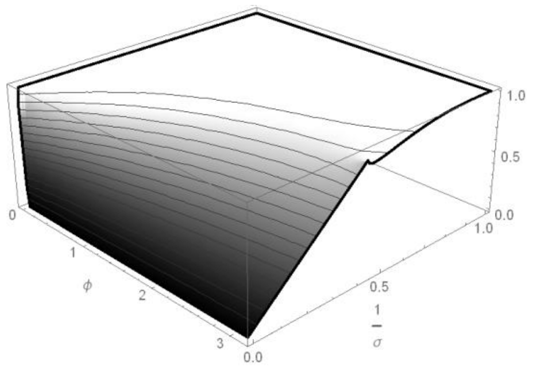


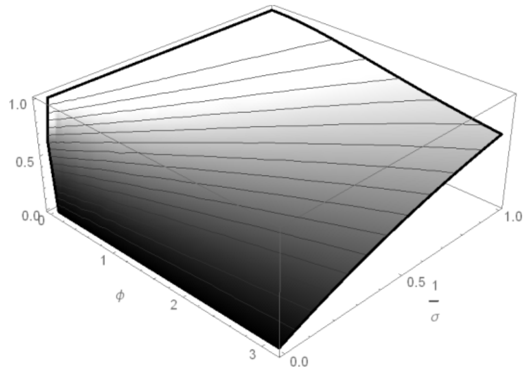
а) физический корень
(шаг линий уровня 0,0625)

б) паразитный корень
(шаг линий уровня 0,0625)

Рис. 7. Временной множитель амплитуды $\left|e^{\lambda\tau}\right|$ в зависимости от обратного числа Куранта $0 \le q = \sigma^{-1} \le 1$ и безразмерного волнового числа $0 \le kh \le \pi$ для CIP(3,3).

На рис. 8 изображена зависимость отношения a^*/a в зависимости от угла и обратного числа Куранта для схемы CIP(3,3) и BiC(4,2). Чтобы избежать перехода с ветви на ветвь для аргумента от выражения (28), выражение (28) умножается на –1, после чего из аргумента вычитается π.





а) CIP(3,3) (шаг линий уровня 0,0625) *б)* BiC(4,2) (шаг линий уровня 0,0625)

Рис. 8. Зависимость отношения a^{*}/a скорости переноса гармоники с безразмерным волновым числом $0\le\phi\le\pi$ к точной скорости переноса, равной a, в зависимости от обратного числа Куранта для эрмитовой характеристической схемы и дискретной бикомпактной схемы Рогова.

Выводы

Существует огромное число схем для численного решения уравнения переноса. Приложение этих схем к реальным задачам делится на два больших класса: решение нелинейных систем уравнений типа уравнений газовой динамики или решение уравнения переноса излучения и/или нейтральных частиц. Специфика каждого класса задач предъявляет свои требования к качеству используемых разностных схем. Для решения задач высокотемпературной радиационной газовой динамики требуются схемы, позволяющие строить аппроксимацию уравнения переноса излучения в пределах одной ячейки. Это значительно упрощает ситуацию около внешних границ и контактных разрывов решения.

В приложении к задачам переноса излучения, где присутствуют диссипативные процессы поглощения излучения, наиболее важным свойством схемы является малая дисперсия. Консервативная модификация метода CIP показывает экстрамалую дисперсию по сравнению с другими рассмотренными схемами. Последнее свойство важно в задачах переноса излучений и частиц, поскольку значительно уменьшает амплитуду паразитных колебаний на границах раздела сред.

Все рассмотренные консервативные схемы построены на минимальном двухточечном шаблоне. Все они показывают неплохие диссипативно-дисперсионные свойства. Схема Головизнина-Четверушкина проста в реализации, что делает ее очень привлекательной в глазах вычислителей. Бикомпактные схемы при симметричной временной аппроксимацией обладают нулевой диссипацией, что бесценно при рассмотрении задач аэроакустики. Предлагаемая в работе [16] модификация CIP метода допускает обобщение на неоднородное уравнение переноса и неструктурированные сетки.

Использование характеристик сближает модификацию CIP метода со схемой Головизнина-Четверушкина, а использование формулы Эйлера-Маклорена – с бикомпактной схемой Рогова.

Библиографический список

1. Б.В. Рогов, М.Н. Михайловская, Бикомпактные схемы четвертого порядка аппроксимации для гиперболических уравнений // ДАН, 2010, т.430, №4, с.470-474.

B.V. Rogov and M.N. Mikhailovskaya. Fourth_Order Accurate Bicompact Schemes for Hyperbolic Equations // Doklady Mathematics, 2010, Vol. 81, No. 1, P.146–150.

2. Б.В. Рогов, М.Н. Михайловская, Монотонные бикомпактные схемы для линейного уравнения переноса // Матем. моделирование, 23:6 (2011), 98–110.

B. V. Rogov and M. N. Mikhailovskaya, Monotonic bicompact schemes for linear transport equations // Math. Models Comput. Simul. 4 (1), 92–100 (2012).

3. Б.В. Рогов, М.Н. Михайловская, Монотонные компактные схемы бегущего счета для систем уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 52:4 (2012), 672–695.

M. N. Mikhailovskaya and B. V. Rogov, Monotone compact running schemes for systems of hyperbolic equations // Comput. Math. Math. Phys. 52 (4), 578–600 (2012).

4. Е.Н.Аристова, Б.В.Рогов. О реализации граничных условий в бикомпактных схемах для линейного уравнения переноса // Матем. моделирование, 24:10 (2012), 3–14.

E. N. Aristova and B. V. Rogov, Boundary conditions implementation in bicompact schemes for the linear transport equation // Math. Models Comput. Simul. 5 (3), 199–208 (2013).

5. E. N. Aristova and B. V. Rogov, Bicompact scheme for the multidimensional stationary linear transport equation // Appl. Numer. Math. 93, 3–14 (2015).

6. Е. Н. Аристова, Б. В. Рогов, А. В. Чикиткин, Оптимальная монотонизация высокоточной бикомпактной схемы для нестационарного многомерного уравнения переноса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 56:6 (2016), 973–988.

E. N. Aristova, B. V. Rogov, and A. V. Chikitkin, Optimal Monotonization of a High-Order Accurate Bicompact Scheme for the Nonstationary Multidimensional Transport Equation // Comput. Math. Math. Phys., 56 (6), 962–976 (2016).

7. A.V.Chikitkin, B.V. Rogov, Family of central bicompact schemes with spectral resolution property for hyperbolic equations // Applied Numerical Mathematics, 2019, Vol. 142, P. 151–170.

8. B.V. Rogov, Dispersive and dissipative properties of the fully discrete bicompact schemes of the fourth order of spatial approximation for hyperbolic equations // Applied Numerical Mathematics, 2019, Vol. 139, P. 136–155.
9. Б. В. Рогов, А. В. Чикиткин, О сходимости и точности метода итерируемой приближенной факторизации операторов многомерных высокоточных бикомпактных схем // Матем. моделирование, 31:12 (2019), 119–144.
10. И.Л. Цветкова, А.В. Шильков, Осреднение уравнения переноса в резонансно поглощающей среде // Математ. Моделирование, 1989, Т. 1, № 1, С. 91-100.
11. А.В. Шильков Методы осреднения сечений и энергетического спектра в задачах переноса нейтронов // Математ. Моделирование, 1991, Т. 3, № 2, С. 63-81.
12. A.V. Shilkov Generalized Multigroup Approximation and Lebesgue Averaging Method in Particle Transport Problems // Transp. Theory and Stat. Physics. 1994, V. 23, No 6, p. 781-814.
13. А.В. Шильков, М.Н. Герцев, Верификация метода лебеговского осреднения // Математ. моделирование, 2015, Т. 27 № 8, С. 13-31.
A. V. Shilkov, M. N. Gerthev, Verification of the Lebesgue averaging method // Math. Models Comput. Simul., 8:2 (2016), 93–107
14. Е. Н. Аристова, М. Н. Герцев, А. В. Шильков, Метод лебеговского осреднения в серийных расчетах атмосферной радиации // ЖВМ и МФ, 2017, т. 57, No. 6, с. 1033–1047.
E. N. Aristova, M. N. Gertsev, and A. V. Shilkov, "Lebesgue Averaging Method in Serial Computations of Atmospheric Radiation", Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2017, Vol. 57, No. 6, pp. 1022–1035.
15. А. В. Шильков, Метод лебеговых моментов для решения уравнения переноса нейтронов // Матем. моделирование, 32(5), 59–94, (2020).
16. Е.Н.Аристова, Г.И.Овчаров. Эрмитова характеристическая схема для неоднородного линейного уравнения переноса // Матем. моделирование, 32(3) 3-18, (2020).
E. N. Aristova and G. I. Ovcharov, Hermitian Characteristic Scheme for a Linear Inhomogeneous Transfer Equation // Mathematical Models and Computer Simulations, 12(6), 845–855, (2020).
17. В. М. Головизнин, Б. Н. Четверушкин, Алгоритмы нового поколения в вычислительной гидродинамике // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 58:8 (2018), 20–29; Comput. Math. Math. Phys., 58:8 (2018), 1217–1225.
V.M. Goloviznin, B.N. Chetverushkin, New generation algorithms for computational fluid dynamics // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 58 (2018), 1217-1225.

18. T. Yabe, T. Aoki, G. Sakaguchi, et al. The compact CIP (cubic-interpolated pseudo-particle) method as a general hyperbolic solver // Computers & Fluids 19(3/4), 421-431 (1991).
19. T.–L. Tsai, S.–W. Chiang, , and J.–G. Yang, Characteristics method with cubic–spline interpolation for open channel flow computation // Int. J. Numerical Methods in Fluids 46, 663–683(2004).
20. T. Yabe, F. Xiao, T. Utsumi, The constrained interpolation profile method for multiphase analysis // Journal of Computational Physics 169(2), 556–593 (2001)
21. T. Aoki, Stability and accuracy of the cubic interpolated propagation scheme // Comput. Phys. Commun. 101(1-2), 9-20, (1997).
22. В.И. Голубев, И.Б. Петров, Н.И. Хохлов. Компактные сеточно-характеристические схемы повышенного порядка точности для трехмерного линейного уравнения переноса // Математическое моделирование, (2016), т. 28, № 2, с. 123-132.
V. I. Golubev, I. B. Petrov, N. I. Khokhlov. Compact grid-characteristic schemes of higher orders for 3D linear transport equation // Mathematical models and computer simulations, 8:5 (2016), 577–584
23. А. В. Фаворская, И. Б. Петров. Численное моделирование волновых процессов в скальных массивах сеточно-характеристическим методом // Матем. моделирование, т.30, №3, (2018), с. 37–51.
A. V. Favorskaya, I. B. Petrov. Numerical modeling of wave processes in Rocks by Grid-Characteristic method // Mathematical models and computer simulations, 10(5), 639-647, (2018).
24. И. Б. Петров, А. В. Фаворская, Н. И. Хохлов. Сеточно-характеристический метод на системах вложенных иерархических сеток и его применение для исследования сейсмических волн // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 57(11), 1804–1811, (2017).
I. B. Petrov, A. V. Favorskaya, N. I. Khokhlov. Grid-characteristic method on embedded hierarchical grids and its application in the study of seismic wave // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 57(11), 1771–1777, (2017).