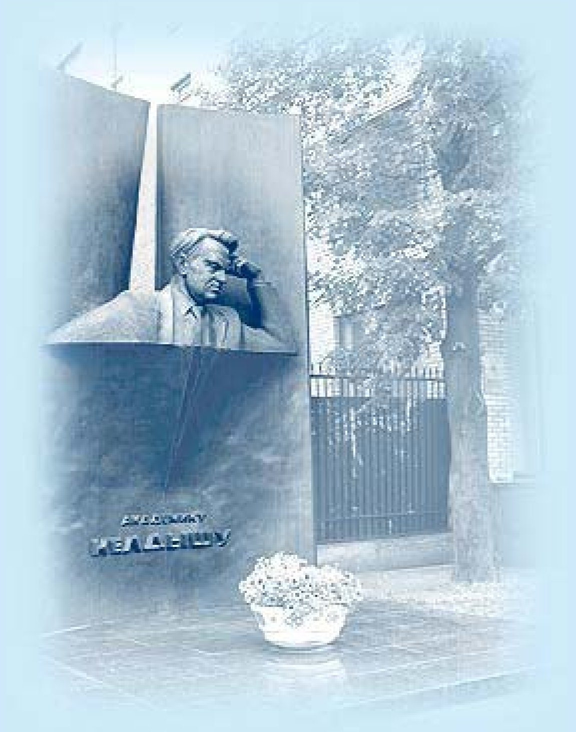
[ИПМ им.М.В.Келдыша РАН](https://keldysh.ru) • [Электронная библиотека](https://library.keldysh.ru)

[Препринты ИПМ](https://library.keldysh.ru/prep_vw.asp) • [Препринт № 105 за 2020 г.](https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-105)



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

А.В. Колесниченко, М.Я. Маров

Сценарий ускоренного расширения Вселенной под воздействием энтропийных сил, связанных с энтропиями Тсаллиса-Чирто и Барроу

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Колесниченко А.В., Маров М.Я. Сценарий ускоренного расширения Вселенной под воздействием энтропийных сил, связанных с энтропиями Тсаллиса-Чирто и Барроу // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 105. 38 с.
https://doi.org/10.20948/prepr-2020-105
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-105

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

А.В. Колесниченко, М.Я. Маров

Сценарий ускоренного расширения Вселенной под воздействием энтропийных сил, связанных с энтропиями Тсаллиса–Чирто и Барроу

Москва — 2020

Колесниченко А.В., Маров М.Я.

Сценарий ускоренного расширения Вселенной под воздействием энтропийных сил, связанных с энтропиями Тсаллиса–Чирто и Барроу.

В рамках «энтропийной космологии» рассмотрен сценарий космологического ускоренного расширения плоской, однородной и изотропной Вселенной под влиянием энтропийных сил без темной энергии – гипотетической среды с отрицательным давлением. В предположении, что горизонт Вселенной имеет свою температуру и энтропию, которая возникает при голографическом хранении информации на экране поверхности горизонта, сконструированы энтропийные модели Вселенной, связанные с энтропией Бекенштейна–Хокинга и с неэкстенсивными космологическими энтропиями Тсаллиса–Чирто и Барроу. Выведены как в рамках общей теории относительности Эйнштейна, так и на основе термодинамического подхода модифицированные уравнения ускорения и неразрывности Фридмана с управляющими силовыми членами, имеющими энтропийную природу, которые позволяют моделировать неадиабатическую эволюцию Вселенной. При этом модели, основанные на неэкстенсивных энтропиях, предсказывают существование как сжимающейся, так и расширяющейся с ускорением Вселенной.

***Ключевые слова*:** Энтропийная космология, энтропии Бекенштейна–Хокинга, Тсаллиса–Чирто и Барроу, ускоренное расширение Вселенной.

Aleksandr Vladimirovich Kolesnichenko, Michail Yakovlevich Marov

The scenario of the accelerated expansion of the Universe under the influence of entropic forces associated with the entropies of Tsallis-Cirto and Barrow.

In the work within the framework of "entropic cosmology", the scenario of the cosmological accelerated expansion of a flat, homogeneous and isotropic Universe under the influence of entropic forces is considered without the concept of dark energy– a hypothetical medium with negative pressure. Assuming that the horizon of the Universe has its own temperature and entropy, which arises during the holographic storage of information on the screen of the horizon surface, the entropy models of the Universe associated with the Bekenstein–Hawking entropy and the non-extensive Barrow and Tsallis–Cirto entropies are considered. The modified equations of acceleration and continuity of Friedmann with governing power terms having an entropic nature are derived both within the framework of Einstein's general theory of relativity and on the basis of a thermodynamic approach that allows modeling the non-adiabatic evolution of the Universe. At the same time, models based on nonextensive entropies predict the existence of both a decelerating and accelerating Universe.

***Key words*:** Accelerated expansion of the Universe, Entropy cosmology, Barrow, Bekenstein-Hawking and Tsallis−Cirto entropies.

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы двадцатого века (1998 г.) в космологии было сделано неожиданное открытие, связанное с ускоряющимся расширением Вселенной. В настоящее время этот факт подтвержден огромным числом наблюдательных данных и многочисленными космологическими экспериментами, касающимися микроволнового фона, крупномасштабной структуры и других измерений Вселенной (см., например, Lima, Alcaniz, 2000; Jesus, Cunha, 2009; Komatsu и др., 2011 и ссылки в них). В связи с этим современным космологическим представлениям вполне отвечает модель Фридмана–Робертсона–Уокера однородной, изотропной, почти плоской (бесконечной) и открытой Вселенной, непрерывно расширяющейся с ускорением (Мизнер и др., 1977;. Вайнберг, 2013; Gorbunov., Rubakov, 2018).

Несмотря на растущее количество наблюдательных свидетельств существования ускоренного расширения Вселенной, его природа и фундаментальное происхождение все еще остаются нерешенным вопросом. Как известно, отношение обычной (барионной) материи, темной материи и темной энергии приближенно составляет $1:10:25$. Следовательно, эволюция Вселенной полностью находится во власти холодной темной материи и темной энергии – так называемого космического вакуума (Copeland и др. 2006; Cai и др., 2010), плотность энергии которого в настоящее время связывают с космологической постоянной $\Lambda = 1.1\times 10^{-56} см^{-2}$, которая определяет антигравитацию в модифицированной[1)] общей теории относительности (ОТО) Эйнштейна (Вайнберг, 2013).

[1)] Космологическая постоянная Λ была введена А. Энштейном в ОТО, для того чтобы обеспечить соответствие условию статичности Вселенной, которое в то время (1917 г.) считалось весьма существенным. Эта постоянная служила эквивалентом силы отталкивания. Зельдович впервые предложил находить численное значение космологической постоянной из квантовых флуктуаций вакуума, $\Lambda = 8\pi G\rho_\nu$; однако полученные при этом значения Λ превышают наблюдаемую величину космологической постоянной на 120 порядков.

Космологический вакуум обладает всюду и всегда постоянной положительной плотностью $\rho_V = \Lambda c^2 / 8\pi G$ и отрицательным давлением $P_V = -c^2 \rho_V$. Согласно фридмановской космологии однородной и изотропной Вселенной, тяготение создается не только плотностью материальной среды, но и ее давлением в комбинации $\rho + 3P / c^2$. Вакуум вызывает антигравитацию именно потому, что его эффективная гравитирующая энергия $\rho_G = \rho_V + 3P_V / c^2 = -2\rho_V$ отрицательна при положительной плотности. Поскольку плотность вакуума (темной энергии) превышает суммарную плотность всех остальных видов космической энергии, то антитяготение сильнее тяготения. При таком условии космологическое расширение обязано происходить с ускорением (см. Черепащук, Чернин, 2004). Таким образом, космологическое ускоренное расширение Вселенной полностью определяется параллельно действующими гравитационными и антигравитационными силами, описываемыми модифицированной ОТО.

Следует, однако, отметить, что в настоящее время существует большое множество альтернативных теорий гравитации (в частности, Стандартная модель, объединяющая четыре взаимодействия в природе, включая гравитацию, или «Теория всего» (М-теория), охватывающая все силы и частицы в природе), но ни одна из них пока не в состоянии полностью заменить ОТО (Маров, 2018).

Среди множества сценариев ускоренного расширения Вселенной большое внимание совсем недавно привлекла так называемая «энтропийная космология», согласно которой гравитация воспринимается как своего рода сила, связанная с изменением энтропии. Понятие космологической энтропийной силы предложено голландским физиком («струнным теоретиком») Эриком Верлинде, которым в статье (Verlinde, 2011) была разработана достаточно «безумная» теория, согласно которой явление гравитации объясняется через энтропию, т.е. сила гравитации по сути своей имеет термодинамическое происхождение (Padmanabhan, 2010). В этой работе автор утверждает, что центральным понятием, необходимым для возникновения гравитации, является информация (точнее количество информации, связанной с материей и ее распределением) в терминах энтропии. Наиболее важное допущение теории состоит в том, что информация, связанная с некоторой областью пространства, подчиняется голографическому принципу (см., например, Susskind, 1995) и в большóй степени опирается на физику черных дыр (Bekenstein, 1975; Hawking, 1975).

В цитируемой статье было показано, что в рамках голографического принципа образования пространства [2)] неизбежно возникает гравитация, которая отождествляется с энтропийной силой, обусловленной изменениями информации[3)], связанными с ростом площади, занимаемой материальными телами. Согласно голографической картине мира энтропия хранится на голографических экранах, а пространство возникает между двумя подобными экранами. При таком подходе гравитационная сила в пространстве определяется градиентом энтропии, или так называемой энтропийной силой.

Незамедлительно в том же году в рамках гипотезы Верлинде в работе (Easson и др. 2011) была развита эвристическая теория ускоренного расширения Вселенной, базирующаяся на энтропийной силе. Авторами этой работы было продемонстрировано, что ускоренное расширение – это неизбежное следствие роста энтропии, связанной с хранением голографической информации на поверхностном экране, расположенном на горизонте событий (области пространства-времени) Вселенной. В результате, при таком подходе, физическое понимание процесса ускоренного расширения Вселенной достигается за счет энтропийных сил, без представления о темной энергии – гипотетической среде с отрицательным давлением.

[2)] Здесь под голографией понимается информация о Вселенной, закодированная на экране, который трактуется как двумерная поверхность Вселенной.

[3)] Согласно голографическому принципу рост информации, связанный с увеличением поверхности Вселенной, занимаемой материальными телами, приводит к увеличению энтропии; отсюда возникновение градиента энтропии (энтропийной силы), направленного против увеличения радиуса указанной площади поверхности. А это и есть гравитация.

Другими словами, вопреки общераспространенному объяснению наблюдаемого ускоренного расширения Вселенной, состоящему в наличии движущей силы (в уравнениях Фридмана), обусловленной темной энергией, в данной статье предложена альтернативная интерпретация подобной силы как энтропийной силы, связанной с энтропией и температурой горизонта Вселенной, которые возникают при хранении информации на экране поверхности горизонта.

Наконец, в целом ряде последующих работ (см., например, Koivisto и др., 2011; Myung, 2011; Cai и др., 2010a; Cai, Saridakis, 2011; Qiu, Saridakis, 2012; Basilakos и др., 2012; Easson и др., 2012; Komatsu, Kimura, 2013a,b, 2014; Wissner-Gross, Freer, 2013; Keul и др., 2018; Komatsu, 2017, 2019), посвященных энтропийной космологии, был рассмотрен сценарий ускоренного расширения Вселенной под влиянием энтропийных сил различной природы, предполагающий, что горизонт Вселенной (подобно горизонту событий черной дыры) имеет свою энтропию и температуру. Во всех этих исследованиях наряду с температурой де Ситтера (de Sitter, 1917) используются различные энтропии (в частности, энтропия Бекенштейна–Хокинга (Bekenstein, 1975), неэкстенсивная энтропия Тсаллиса–Чирто (Tsallis, Cirto, 2013), модифицированная (равнораспределенная) энтропия Реньи (Czinner, Iguchi, 2016) и др.), а вместо космологической постоянной Λ в уравнениях общей теории относительности Эйнштейна добавляется дополнительный так называемый управляющий член, связанный с энтропией и температурой горизонта событий Вселенной. С помощью модифицированных уравнений Фридмана показано, что подобные модели объясняют нынешнее ускоряющее расширение Вселенной и хорошо согласуются с данными по сверхновым звездам. Важно отметить, что найденное при этом космологическое ускорение (рассматриваемое как следствия энтропийной силы) получается сравнительно небольшим (порядка постоянной Хаббла), в отличие от приводящего в замешательство большинство космологов огромного значения ускоренного расширения, предсказываемого квантовой теорией поля в сочетании с общей теорией относительности[4)].

Таким образом, изучение влияния энтропийных сил на ускоренное расширение Вселенной представляет безусловный интерес, поскольку из-за антигравитационного действия именно эти силы могут сыграть роль таинственной темной энергии как в форме космологической постоянной, так и в форме скалярных полей (Вайнберг, 2008). В энтропийной космологии предполагается, что горизонт Вселенной имеет связанные температуру и энтропию из-за информации, хранящейся на поверхности горизонта событий голографически.

Приведем элементарные соображения, позволяющие показать, каким образом энтропийная сила, имеющая термодинамическую природу, связана с энтропией большого тела. Используем для этого второй закон термодинамики для макроскопического тела, записанный в виде соотношения Гиббса $dE = TdS - PdV$. Поскольку для очень большого тела при изменении его объема (обусловленного перемещением границы dr) площадь поверхности A и внутренняя энергия E практически не изменяются, то можно написать $0 = TdS - P(Adr)$. Отсюда следует, что если энтропия меняется в связи с ростом радиуса объема dr, то возникает сила $F_S = PA = TdS / dr$. Поскольку зависящая от пространства-времени энтропия, эволюционируя во времени (и достигая максимума в конечном тепловом состоянии), расширяется в пространстве, то имеет место ее градиент, который интерпретируется как энтропийная сила.

---

[4]) Отождествление космологической постоянной с энергией вакуума не позволяет, к сожалению, проникнуть в существо темной энергии и приводит к пока неразрешимой проблеме, которая заключается в том, что наблюдаемое значение плотности тёмной энергии $\rho_{\Lambda_{obs}} \approx (10^{-3} eV)^4$ и ее теоретически предсказанное значение, $\rho_{\Lambda_{th}} \approx 10^{18} (GeV)^4$ отличаются на 120 порядков (здесь $V = V(\varphi)$ − потенциал скалярного поля φ (инфлатона) (см. Вайнберг, 2013)).

В представленной работе, имеющей отношение к моделированию ускоренного расширения плоской, однородной и изотропной Вселенной, получены модифицированные уравнения Фридмана, в которых вместо космологической постоянной Λ фигурирует дополнительный управляющий член (движущая сила), связанный с изменениями энтропии и температуры на хаббловском горизонте Вселенной. Площадь поверхности Вселенной – ключевая характеристика, которая определяет ее энтропию и информативность. Наряду с традиционной энтропией Бекенштейна–Хокинга (Easson и др. 2011), пропорциональной площади хаббловского горизонта, в работе рассмотрены также неаддитивная энтропия Тсаллиса–Чирто (Tsallis, Cirto, 2013), которая пропорциональна объему горизонта, и неаддитивная энтропия Барроу (Anagnostopoulos и др., 2005; Barrow, 2020; Saridakis, 2020), учитывающая фрактальную структуру хаббловского горизонта. Для этих энтропий сконструированы модифицированные уравнения Фридмана, позволяющие объяснить космологическое расширение Вселенной без темной энергии. При этом соответствующие энтропийные силы предопределяют как замедление, так и ускоренное расширение Вселенной. Важно отметить, что построение новых моделей эволюции Вселенной ведется в работе на основе недавно введенной в рассмотрение неаддитивной энтропии Барроу, представляющей собой новую голографическую модель энтропии, связанную с модификацией горизонта поверхности Вселенной за счет квантовых гравитационных эффектов.

1. НЕКОТОРЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ КЛАССИЧЕСКОЙ КОСМОЛОГИИ

1.1 Уравнения гравитационного поля

Далее мы будем рассматривать плоскую эволюционную модель Вселенной, которая является бесконечной в пространстве, однородной, изотропной и расширяющейся. При этом Вселенная моделируется некоторой космологической жидкостью, частицы которой суть галактики. На этом уровне крупномасштабного усреднения структура Вселенной симметрична и не имеет особенностей. В классической космологии модели эволюционирующей Вселенной конструируют на основе уравнений общей теории относительности Эйнштейна (см., например, Толмен, 2009; Вайнберг, 2013).

Расширением Вселенной управляют уравнения гравитационного поля, которые имеют следующий общий вид (Мизнер и др., 1977; Вайнберг, 2012):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \Lambda(t) g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (1)$$

Здесь $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ – четырехмерный пространственно-временной интервал в ОТО, $g_{\mu\nu}$ – метрический тензор, $g_{\mu\nu} g^{\nu\beta} = \delta^\beta_\mu$; $R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta}$ – тензор Риччи; $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ – тензор Римана–Кристоффеля, составленный из произведений первых производных $(\partial g_{p\nu}/\partial x_\alpha)\cdot(\partial g_{\beta\mu}/\partial x_p)$ и вторых производных $\partial^2 g_{\mu\nu}/\partial x_\alpha \partial x_\beta$ метрического тензора; $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ – скалярная кривизна четырехмерного пространства; $\kappa = 8\pi G / c^4$ – эйнштейновская гравитационная постоянная $T_{\mu\nu}$ – тензор энергии-импульса, играющий роль источника гравитационного поля; с – скорость света в вакууме, Λ – введенная Эйнштейном космологическая «постоянная», которую часто опускают; G – гравитационная постоянная.

В плоском гиперпространстве пространственно-временной линейный интервал имеет вид $ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2)$, которому соответствует метрический тензор с галилеевыми компонентами[5)]

$$g_{00} = c^2;\ g_{11} = g_{22} = g_{33} = -a(t)^2;\ g_{\mu\nu} = 0 \ \textit{при}\ \mu \neq \nu;\ g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}, \quad (2)$$

[5)] Почти вся современная космология основана на этой метрике Робертсона–Уокера.

где t — космическая временная координата; $a(t)$ — коэффициент расширения (масштабный фактор Робертсона–Уокера (см. Вайнберг, 2012)).

Для случая идеальной космологической жидкости[6)] тензор энергии-импульса в локально инерциальной декартовой системе координат имеет вид $T_{\mu\nu} = (\rho c^2 + P)u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu}$, где $\rho = \rho(t)$, $P = P(\rho)$ — соответственно плотность и скалярное давление космологической жидкости (включающей материю и излучение) в момент времени t. Здесь введена четырехмерная скорость $u_\mu = \partial x_\mu / \partial s$, которая определена условием, что в сопутствующей локально инерциальной декартовой системе координат ее компоненты равны $u_0 = 1$ и $u_{\mu\neq 0} = 0$. Таким образом, в состоянии покоя компоненты тензора $T_{\mu\nu}$ имеют следующий вид (Мизнер и др., 1977):

$$T_{00} = \rho c^2; \quad T_{11} = T_{22} = T_{33} = -P; \quad T_{\mu\nu} = 0 \ \textit{при} \ \mu \neq \nu. \tag{3}$$

Заметим, что в плоской модели Вселенной трехмерная кривизна является нулевой, однако четырехмерное пространство остается кривым.

1.2. Космологическая модель Фридмана

Рассмотрим стандартную модель Фридмана для плоской открытой Вселенной[7)]. Из уравнений Эйнштейна (1) в сделанных выше предположениях следуют два уравнения Фридмана для масштабного фактора $a(t)$ (см., Мизнер и др., 1977)

[6)] Идеальная жидкость определяется как среда, для которой в каждой точке существует локально инерциальная декартова система отсчета, движущаяся вместе с жидкостью, в которой сама жидкость выглядит одинаковой по всем направлениям.

[7)] Пространство плоское тольков том случае, если отношение $\Omega := \rho / \rho_{cr} \cong 1$, где $\rho_{cr} := 3H^2 / 8\pi G$ – критическая массовая плотность (вещество + излучение), $\rho_{cr} = 10^{-29}\, г / см^3$ По современным наблюдательным данным величина $\Omega = 1.02 \pm 0.02$.

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \equiv H(t)^2 = \left(8\pi G/3\right)\rho(t) + \underset{опускают}{\Lambda/3}\ , \tag{4}$$

$$\frac{1}{a(t)}\ddot{a} \equiv \left[\frac{dH(t)}{dt} + H(t)^2\right] = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho(t) + \frac{3P(t)}{c^2}\right) + \underset{опускают}{\Lambda/3}\ , \tag{5}$$

описывающих расширение Вселенной. Здесь точкой обозначены производные по времени; $H(t) := \dot{a}/a$ — параметр Хаббла, или хаббловская скорость расширения Вселенной (в современный период $H_0 = 2.2\times 10^{-18} c^{-1}$); $\rho = \rho_m + \rho_\gamma$ – общая плотность вещества и радиации. Уравнения (4) и (5) включают дополнительный управляющий параметр $\Lambda/3$, который при надлежащем определении может объяснить ускоренное расширение поздней Вселенной (Weinberg, 1989).

Из уравнений (4) и (5) легко получить следующее уравнение неразрывности – «закон сохранения энергии»

$$\dot{\rho}(t) + 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\left[\rho(t) + \frac{P(t)}{c^2}\right] = 0. \tag{6}$$

Для этого необходимо продифференцировать (4) и результат скомбинировать с соотношением (5), которому удовлетворяет давление. Заметим, что уравнение (6) может быть выведено также непосредственно из первого закона термодинамики, если рассматривать Вселенную как термодинамическую систему, ограниченную видимым горизонтом и расширяющуюся адиабатически (Ryden, 2003; см. также пункт 4.1. настоящей работы).

Уравнение (6) можно записать в виде $a\,d\rho/da = -3(\rho + P/c^2)$, или, что то же самое,

$$d(\rho a^3)/da = -3Pc^{-2}a^2. \tag{7}$$

Если зависимость давления $P(t)$ от $a(t)$ известна, можно, решив уравнение (4) (при $\Lambda = 0$), определить $a(t)$ для всех моментов времени. Таким образом, фундаментальными уравнениями динамической космологии являются уравнения Эйнштейна (4), уравнение сохранения энергии (6) и уравнение состояния. Основанные на метрике Робертсона─Уокера космологические модели, в которых $a(t)$ определяется из указанных уравнений, называются моделями Фридмана (Friedmann, 1922).

Заметим, что полученное таким способом решение $a(t)$ автоматически удовлетворяет уравнению (5), так как, дифференцируя (4) по времени и используя (7), получаем

$$2\dot{a}\ddot{a} = \frac{8\pi G}{3a}\dot{a}\left[-\rho a^2 + \frac{d}{da}(\rho a^3)\right] = \frac{8\pi G}{3a}\dot{a}\left(-\rho a^2 - 3\frac{P}{c^2}a^2\right)$$

что эквивалентно уравнению (5).

Уравнение (7) можно легко решить в случае уравнения состояния вида $P = w\rho$ с не зависящим от времени коэффициентом w. В этом случае уравнение (6) приводит к решению $P \sim a^{-3-3w}$, которое, в частности, применимо в следующих часто встречающихся предельных случаях:

─ если основной вклад в плотность энергии Вселенной дает нерелятивистское вещество с пренебрежимо малым давлением, то из (7) следует, что

$$\rho(t) \sim a(t)^{-3} \text{ при } P << \rho; \tag{8}$$

─ если в плотности энергии преобладает вклад релятивистских частиц, таких как фотоны, то $P = \rho/3$, и из (7) получаем

$$\rho(t) \sim a(t)^{-4} \text{ при } P = \rho/3; \tag{9}$$

─ в случае космологического вакуума, когда $P = -c^2\rho$, уравнение (7) имеет решение в виде постоянного ρ, известного (с точностью до общепринятых численных множителей) как космологическая постоянная Λ, или плотность вакуума.

Известные на сегодня наблюдения ускоряющегося расширения Вселенной согласуются с существованием постоянной энергии вакуума, равной ρc^2. Само наличие ускоряющегося расширения, в соответствии с уравнением (5), требует, чтобы значительная часть плотности энергии Вселенной находилась в такой форме, для которой $\rho + 3P / c^2 < 0$, в отличие от обычной материи и излучения. Эта форма получила в космологии название темной энергии (Вайнберг, 2012).

2. УСКОРЕННОЕ РАСШИРЕНИЕ ВСЕЛЕННОЙ

2.1.Энтропийная сила, связанная с энтропией Бекенштейна–Хокинга

В настоящей работе, для объяснения ускоренного расширения Вселенной будем использовать другой подход (без темной энергии), при котором центральную роль играют идеи информации, голографии, энтропии и температуры (см. Verlinde, 2011; Easson и др., 2011; Anagnostopoulos и др., 2019). Рассмотрение энтропийной силы на голографическом горизонте расширяющейся плоской Вселенной, имеющем ассоциированную энтропию и температуру, приводит к так называемой энтропийной космологии, которая предполагает, что именно энтропийная сила, действующая на хаббловском горизонте и направленная наружу к горизонту, ответственна за явление ускоренного расширения. По этой причине неоднозначная составляющая темной энергии в космологических уравнениях отсутствует.

При таком подходе, по аналогии с термодинамическими характеристиками хаббловского горизонта черной дыры, описываемой своими температурой и энтропией, в энтропийной космологии предполагается, что область расширяющейся плоской Вселенной (совпадающая с горизонтом Хаббла) имеет температуру, пропорциональную температуре $T_S = \hbar H / 2\pi k_B$ де Ситтера (de Sitter, 1917) и связанную с ней ассоциированную энтропию Бекенштейна–Хокинга S_{BH} (Easson и др., 2011). В этом случае проблема связи космологической постоянной с энтропийной силой решается естественным образом (Verlinde, 2011).

В энтропийной космологии горизонт (радиус) Хаббла R_H и температура космологического горизонта Вселенной $T_H \simeq \gamma T_S$ определяются выражениями (Easson и др., 2011).

$$R_H = cH^{-1} \tag{10}$$

$$T_H = \gamma \frac{\hbar}{2\pi k_B} H = \frac{\hbar}{2\pi k_B} \frac{c}{R_H}, \tag{11}$$

где k_B и $\hbar = h / 2\pi$ – постоянная Больцмана и приведенная постоянная Дирака соответственно; γ – неотрицательный свободный параметр порядка $O(1)$ (обычно $\gamma \sim 1/2$ или $3/2\pi$, что соответствует параметру для температуры экрана, полученному в работе (Easson и др., 2011)).

Температуру горизонта Вселенной, тесно связанную с температурой де Ситтера $T_S = \hbar H / 2\pi k_B$, можно оценить как

$$T_H \simeq \frac{\hbar H}{2\pi k_B} \times \mathcal{O}(1) \sim 3 \times 10^{-30} K, \tag{12}$$

что намного ниже температуры космического микроволнового фона, $T = 2.73K$.

Связанная с горизонтом Вселенной энтропия задается следующим соотношением Бекенштейна–Хокинга (Bekenstein, 1973)

$$S_{BH} = k_B \left(\frac{A_H}{A_{Pl}} \right) = k_B \frac{c^3}{\hbar G} A_H, \tag{13}$$

где A_H – величина площади стандартного горизонта (площадь поверхности области хаббловского радиуса R_H); $A_{Pl} = \hbar G / c^3 \approx 2.612 \times 10^{-70} м^2$ – площадь Планка. При подстановке величины $A_H = \pi R_H^2 = \pi c^2 H^{-2}$ в соотношение (13) получим

$$S_{BH} = k_B \left(\frac{c^3}{\hbar G} \right) \pi R_H^2 = \left(\frac{k_B \pi c^5}{\hbar G} \right) \frac{1}{H^2} \equiv \frac{K}{H^2} \sim (2.6 \pm 0.3) \times 10^{122} k_B . \qquad (14)$$

Здесь введена положительная константа

$$K := \frac{\pi k_B c^5}{\hbar G} = \frac{\pi k_B c^2}{L_{Pl}^2} = \frac{\pi k_B c^2}{A_{Pl}} > 0 , \qquad (15)$$

где $L_{Pl} = \sqrt{\hbar G / c^3}$ – длина Планка.

Увеличение радиуса R_H на dR_H увеличивает энтропию S_{BH} на dS_{BH} в соответствии с

$$dS_{BH} = \left(\frac{k_B c^3}{\hbar G} \right) 2\pi R_H dR_H =$$

$$= \left(\frac{k_B c^3}{\hbar G} \right) 2\pi \left(\frac{c}{H} \right) dR_H \sim (2.6 \pm 0.3) \times 10^{122} k_B \frac{dR_H}{R_H} .$$

Энтропийная сила F_{BH}, отвечающая росту энтропии Бекенштейна–Хокинга, может быть определена как

$$F_{BH} = -T_H \frac{dS_{BH}}{dr_H} . \qquad (16)$$

Здесь знак минус указывает направление увеличения энтропии или экран, которым в данном случае является горизонт событий (Easson и др. 2011).

Подставляя теперь соотношения (11) и (13) в (16) и используя формулу для площади A_H стандартного горизонта, получим следующее выражение для энтропийной силы

$$F_{BH} = -T_H \frac{dS_{BH}}{dR_H} = -\gamma \frac{\hbar H}{2\pi k_B} \times \frac{d}{dr_H} \left[\frac{K}{H^2} \right] = \frac{2\hbar H}{2\pi k_B} \frac{K}{H^3} \frac{dH}{dr_H} =$$

$$=\gamma \frac{1}{H^2}\frac{c^5}{G}\frac{dH}{dR_H}=-\gamma \frac{1}{H^2}\frac{c^6}{G}\frac{1}{R_H^2}=-\gamma \frac{c^4}{G}. \qquad (17)$$

Давление P_{BH} этой силы на космологический горизонт Вселенной определяется формулой

$$P_{BH}=\frac{F_{BH}}{4A_H}=-\gamma \frac{c^4}{G}\frac{1}{4\pi R_H^2}=-\gamma \frac{c^2}{4\pi G}H^2=-\gamma \frac{2\rho_{cr}}{3}c^2 \qquad (18)$$

(где $\rho_{cr}:=3H^2/8\pi G$ – критическая массовая плотность вещества и радиации). Это значение близко к измеренному отрицательному давлению (натяжению) темной энергии в форме космологической постоянной (Вайнберг, 2012). Таким образом, в голографическом подходе давление возникает не за счет отрицательного давления темной энергии, а за счет энтропийного натяжения, обязанного энтропийному содержанию на горизонте Вселенной. Наличие такого натяжения эквивалентно направленному вовне космическому ускорению[8]. Другими словами, ускорение Вселенной возникает как естественное следствие энтропии на горизонте Вселенной.

2.2. Ускоренное расширение Вселенной под воздействием энтропийной силы Бекенштейна–Хокинга

Будем теперь предполагать, что в энтропийной космологии эффективное давление P'_{BH}, основанное на энтропии Бекенштейна–Хокинга, определяется соотношением

$$P'_{BH}=P+P_{BH}=P-\gamma \frac{c^2}{4\pi G}H^2 . \qquad (19)$$

8) Заметим, что из возможности описания космического ускорения Вселенной энтропийной силой не следует, что гравитация сама по себе является энтропийной силой (см. Verlinde, 2011).

При использовании P'_{BH}, уравнения (5) и (6) принимают следующий вид:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho(t) + \frac{3P(t)}{c^2}\right) + \gamma H(t)^2, \qquad (20)$$

$$\dot{\rho} + 3H(t)\left[\rho(t) + \frac{P}{c^2}\right] = \gamma \frac{3}{4\pi G} H(t)^3. \qquad (21)$$

Эти уравнения можно рассматривать как модифицированные уравнения ускорения (5) и непрерывности (6) для энтропийной космологии, полученные с использованием энтропии Бекенштейна–Хокинга. Величина H^2 в этих уравнениях связана с энтропийной силой, которая может объяснить ускоренное расширение Вселенной без введения понятия темной энергии – космического вакуума (связанного с космологической постоянной), плотность энергии которого отрицательна. Заметим, что энтропия Бекенштейна–Хокинга пропорциональна площади космологического горизонта Вселенной, благодаря чему модель, основанная на этой энтропии, предсказывает только расширяющуюся с равномерным ускорением Вселенную. Эта модель ускоренного расширения Вселенной способна обеспечить хорошее соответствие данным по сверхновым звездам (см. Easson и др., 2011).

3. ЭНТРОПИЙНАЯ СИЛА, СВЯЗАННАЯ С НЕАДДИТИВНОЙ ЭНТРОПИЕЙ БАРРОУ И ТСАЛЛИСА–ЧИРТО

Недавно в работе (Barrow, 2020) была предложена модель квантовой гравитационной пены пространства-времени для оценки энтропии черных дыр и Вселенной, поверхность которых может иметь сложную фрактальную структуру космологического горизонта вплоть до сколь угодно малых масштабов (до шкалы порядка планковской длины) из-за квантово-гравитационных эффектов. Введение фрактальной структуры горизонта (области пространства-времени) Вселенной приводит к увеличению площади ее поверхности. Как известно, площадь поверхности Вселенной – это ключевая характеристика, которая определяет ее энтропию и информативность.

Сложная фрактальная структура горизонта Вселенной приводит к конечному объему, но с бесконечной (или конечной) площадью (см. Barrow, 2020). Согласно термодинамике черных дыр возможные эффекты квантово-гравитационной пены пространства-времени в области космологического горизонта приводят к новому определению энтропии Вселенной – к неаддитивной энтропии Барроу S_B (Barrow, 2020), связанной с аддитивной энтропией Бекенштейна–Хокинга следующим образом: $S_B / k_B = \left(S_{BH} / k_B\right)^{1+D/2}$ При подстановке величин S_{BH} и k_B в это соотношение получим $S_B \sim 10^{120(1+D/2)}$. Здесь параметр D $(0 \leq D \leq 1)$ является фрактальной массовой размерностью квантово-гравитационной пены, количественно определяющей деформацию структуры горизонта Вселенной[9)].

Легко показать, что энтропия Барроу подчиняется следующему псевдоаддитивному закону для двух независимых систем N и M:

$$\frac{S_B(\mathrm{N}+\mathrm{M})}{k_B} = \left(\left[\frac{S_B(\mathrm{N})}{k_B}\right]^{\frac{2}{2+D}} + \left[\frac{S_B(\mathrm{M})}{k_B}\right]^{\frac{2}{2+D}} \right)^{\frac{2+D}{2}}.$$

Энтропию S_B можно записать в следующем виде:

[9)] Следует отметить, что при определении энтропии Барроу сложная фрактальная структура космологического горизонта моделируется аналогом сферической «снежинки Коха», использующим бесконечную убывающую иерархию соприкасающихся сфер вокруг горизонта событий Шварцшильда. Тем не менее, эта простая модель возможных проявлений квантово-гравитационной эффектов, имеет важные последствия для оценок энтропии Вселенной, которая обычно несколько больше чем в базовом сценарии.

$$S_B = k_B\left(\frac{A_H}{A_{Pl}}\right)^{1+D/2} = k_B\left(\frac{\pi R_H^2}{A_{Pl}}\right)^{1+D/2} = \frac{k_B\pi c^3}{\hbar G}R_H^2\left(\frac{\pi R_H^2}{A_{Pl}}\right)^{D/2} =$$

$$= Kc^{-2}R_H^2\left(\frac{\pi R_H^2}{A_{Pl}}\right)^{D/2} = Kc^{-2}R_H^2\left(\frac{K}{k_B}R_H^2\right)^{D/2} = \left(\frac{K^{1+D/2}}{c^2 k_B^{D/2}}\right)R_H^{2+D}. \qquad (22)$$

Здесь $A_{Pl} = \hbar G / c^3 \approx 2.612\times 10^{-70}\,м^2$ – площадь Планка; A_H – величина площади стандартного горизонта; $K := \pi k_B c^2 / A_{Pl} > 0$. В случае $D = 0$, который соответствует простейшей структуре космологического горизонта Вселенной, восстанавливается стандартная энтропия $S_B \equiv S_{BH} = k_B\left(A_H/A_{Pl}\right)$ Бекенштейна–Хокинга, рассмотренная выше.

Когда $D = 1$, то имеет место гладкая пространственно-временная структура горизонта Вселенной, при которой $S_B \equiv S_{TC} = k_B\left(\frac{A_H}{A_{Pl}}\right)^{3/2}$. В этом случае формула (22) аналогична формуле для неаддитивной энтропии Тсаллиса и Чирто (Tsallis., Cirto, 2013), введенной этими авторами в рассмотрение при исследовании эволюции черной дыры на основе совершенно других физических принципов, отличных от фрактальной интерпретации (см. Torres и др., 1997; Aditya и др., 2019; Wilk, Wlodarczyk, 2020; Waheed, 2020).

С целью получения модифицированных космологических уравнений применим рассмотренную в предыдущем разделе процедуру вывода выражения для энтропийной силы, но теперь уже с энтропией Барроу (22). Ясно, что в общем случае среды с фрактальной размерности $(0 < D \le 1)$, эти уравнения, в отличие от уравнений Фридмана (20) и (21), будут содержать новые дополнительные члены, позволяющие моделировать космологическое поведение Вселенной (Saridakis, Basilako, 2020; Saridakis, 2020 Anagnostopoulos и др., 2020).

3.1.Энтропийная сила, связанная с энтропией Барроу

В этом пункте мы рассмотрим возможность ускоренного космологического расширения Вселенной, но при использовании для ее горизонта энтропии Барроу. Энтропия Барроу возникает, в частности, из-за того, что поверхность горизонта Вселенной может деформироваться из-за квантово-гравитационных эффектов, а ее отклонение от энтропии Бекенштейна–Хокинга количественно определяется показателем фрактальной размерности D.

Увеличение радиуса R_H на dR_H увеличивает энтропию S_B на dS_B в соответствии с выражением

$$dS_B(D) = k_B(2+D)\frac{\pi}{A_{Pl}}\left(\frac{\pi}{A_{Pl}}\right)^{D/2} R_H^{1+D} dR_H. \tag{23}$$

Тогда для энтропийной силы F_B, возникающей из-за модификации горизонта Вселенной, связанной с квантово-гравитационными эффектами, будем иметь:

$$F_B = -T_H\frac{dS_B}{dR_H} = -\gamma\left(\frac{\hbar c}{2\pi k_B R_H}\right)k_B\frac{\pi c^3}{\hbar G}\left(\frac{\pi}{A_{Pl}}\right)^{D/2}(2+D)R_H^{1+D} =$$

$$= -\gamma\frac{2+D}{2}\frac{c^4}{G}\left(\frac{\pi}{A_{Pl}}\right)^{D/2} R_H^D = -\gamma\frac{(2+D)}{2}\frac{c^{4+D}}{G}\left(\frac{K}{k_B}\right)^{D/2} H^{-D}. \tag{24}$$

Соответственно, давление P_B этой силы на космологический горизонт Вселенной определяется формулой

$$P_B = \frac{F_B}{4A_H} = -\gamma\frac{c^4}{4\pi G}\left(\frac{K}{k_B}\right)^{D/2}\frac{(2+D)}{2}R_H^{D-2} =$$

$$= \gamma\frac{(2+D)}{2}\frac{c^{2+D}}{4\pi G}\left(\frac{K}{k_B}\right)^{D/2} H^{2-D}. \tag{25}$$

Далее будем предполагать, что в энтропийной космологии эффективное давление P'_B, основанное на энтропии Барроу, определяется соотношением

$$P'_B = P + P_B = P - \gamma \frac{(2+D)}{2} \frac{c^{2+D}}{4\pi G} \left(\frac{K}{k_B} \right)^{\Delta/2} H^{2-D}. \qquad (26)$$

При использовании P'_B уравнения ускорения (5) и неразрывности (6) принимают вид

$$\frac{1}{a(t)} \ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho(t) + \frac{3}{c^2} P(t) \right) + \gamma \frac{(2+D)}{2} c^D \left(\frac{K}{k_B} \right)^{D/2} H(t)^{2-D}, \qquad (27)$$

$$\dot{\rho}(t) + 3H(t) \left[\rho(t) + \frac{P(t)}{c^2} \right] = \gamma \frac{3}{4\pi G} \frac{2+D}{2} c^D \left(\frac{K}{k_B} \right)^{D/2} H(t)^{3-D}. \qquad (28)$$

Важно отметить, что в случае фрактальной размерности $D=0$ эти уравнения будут совпадать с модифицированными уравнениями Фридмана (20) и (21), т.е., деформация голографической энтропии Бекенштейна–Хокинга измеряется новым показателем D, и случай нулевой деформации ($D=0$) соответствует энтропийной силе Барроу, которая полностью соответствует стандартной энтропийной силе, рассмотренной в работе (Easson и др., 2011). Вместе с тем, авторы работы (Anagnostopoulos и др., 2020), опираясь на данные наблюдений из выборки коллекции (SNIa) сверхновых звезд и используя прямые измерения параметра Хаббла космическими хронометрами, показали, что этому случаю лучше соответствует значение параметра деформации, равное D=0,094, т.е. ими допускается, что небольшое отклонение от стандартной голографической энтропии Бекенштейна–Хокинга является более предпочтительным.

Случай $D=1$ соответствует максимальной деформации, связанной с космологической энтропией Тсаллиса–Чирто (Tsallis., Cirto, 2013). Сценарий проявления этой энтропии предсказывает как замедление, так и ускоренное расширение Вселенной (см. Basilakosи др.,2009).

В общем случае, когда $0 < D < 1$ мы имеем новый космологический сценарий проявления энтропийной силы, основанный на энтропии Барроу, связанной с квантово-гравитационными эффектами горизонта Вселенной. Этот сценарий позволяет моделировать космологическое поведение Вселенной для случая различных модификаций управляющей гравитационной силы Барроу (см. Saridaki, 2020).

3.2. Энтропийная сила, связанная с энтропией Тсаллиса–Чирто

Рассмотрим теперь энтропийную космологию в предположении, что космологический горизонт Вселенной имеет температуру

$$T_H = \gamma \frac{\hbar}{2\pi k_B} \frac{c}{R_H} = \gamma \frac{\hbar}{2\pi k_B} H$$

и неаддитивную энтропию Тсаллиса–Чирто, которая определяется следующим образом (Tsallis., Cirto, 2013)

$$S_{TC} = S_B(1) := k_B \left(\frac{A_H}{A_{Pl}} \right)^{3/2} = k_B \left(\frac{\pi R_H^2}{A_{Pl}} \right)^{3/2} = \frac{k_B \pi c^3}{\hbar G} R_H^2 \left(\frac{\pi R_H^2}{A_{Pl}} \right)^{1/2} =$$

$$= K c^{-2} \left(\frac{\pi}{A_{Pl}} \right)^{1/2} R_H^3 = \left(\frac{K^3}{k_B c^4} \right)^{1/2} R_H^3 = cK \left(\frac{K}{k_B} \right)^{1/2} \frac{1}{H^3}. \qquad (29)$$

Из формулы (29) видно, что неаддитивная энтропия S_{TC} пропорциональна объему горизонта Вселенной, в отличие от энтропии Бекенштейна–Хокинга (14), которая пропорциональна его площади.

Увеличение радиуса R_H на dR_H увеличивает энтропию Тсаллиса–Чирто на dS_{TC} в соответствии с соотношением

$$dS_{TC} = 3 \left(K^3 / k_B c^4 \right)^{1/2} R_H^2 dR_H. \qquad (30)$$

Используя (30), получим следующие выражения для энтропийной силы и давления на космический горизонт Вселенной, соответствующие энтропии Тсаллиса–Чирто:

$$F_{TC} = -T_H \frac{dS_B}{dR_H} = -\gamma \frac{3}{2} \frac{c^4}{G} \left(\frac{\pi}{A_{Pl}} \right)^{1/2} R_H =$$

$$= -\gamma \frac{3}{2} \left(\frac{\hbar}{\pi k_B c} \right) \left(\frac{K^3}{k_B} \right)^{1/2} R_H = -\gamma \frac{3}{2} \left(\frac{c^4}{KG} \right) \left(\frac{K^3}{k_B} \right)^{1/2} R_H, \tag{31}$$

$$P_{TC} = \frac{F_{TC}}{4\pi R_H^2} = -\frac{3}{2} \gamma \frac{c^4}{4\pi G} \left(\frac{K}{k_B} \right)^{1/2} R_H^{-1} = -\gamma \frac{c^2}{4\pi G} \frac{3c}{2} \left(\frac{K}{k_B} \right)^{1/2} H. \tag{32}$$

Предполагая, как и прежде, что в энтропийной космологии эффективное давление P'_{TC}, основанное на энтропии Тсаллиса–Чирто, определяется соотношением $P'_{TC} = P + P_{TC}$, подставим P'_{TC} в уравнения ускорения (5) и неразрывности (6); в результате будем иметь:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho(t) + \frac{3P(t)}{c^2} \right) + \frac{3c}{2} \left(\frac{K}{k_B} \right)^{1/2} \gamma H(t), \tag{33}$$

$$\dot{\rho} + 3H(t) \left[\rho(t) + \frac{P(t)}{c^2} \right] = \frac{3}{4\pi G} \frac{3c}{2} \left(\frac{K}{k_B} \right)^{1/2} \gamma H(t)^2. \tag{34}$$

Уравнения (33) и (34) можно рассматривать как модифицированные уравнения ускорения и непрерывности, основанные на обобщенной энтропии Тсаллиса–Чирто. Из уравнения (33) следует, что управляющий силовой член в этой модели пропорционален хаббловской скорости расширения Вселенной H, в отличие от аналогичного энтропийного силового члена в модели Бекенштейна–Хокинга, который пропорционален H^2.

Следует отметить, что космологические уравнения, подобные уравнениям (33) и (34), неоднократно обсуждались в литературе при моделировании эволюции Вселенной, основанной на различных аппроксимациях переменного космологического члена (см., например, (Basilakosи др.,2009). С другой стороны, полученная из обобщенной энтропии Тсаллиса–Чирто энтропийная сила (31) ведет себя так же, как и движущая сила вязкой космологической жидкости с объемной вязкостью η, с использованием которой в моделях вязкой космологии объясняется ускоренное расширение Вселенной. Действительно, выражение для эффективного давления $P'_{TC}(t) = P(t) - \frac{3c^3}{8\pi G}\left(\frac{K}{k_B}\right)^{1/2} H(t)$ в уравнении (34), аналогично выражению $P'(t) = P(t) - 3\eta H(t)$ для давления в моделях вязкой космологии, предназначенных для моделирования темной материи. В моделях этого типа предполагается, что Вселенная заполнена космологической жидкостью с объемной вязкостью η, которая может генерировать энтропию однородной и изотропной Вселенной (см. Padmanabhan, Chitre, 1987; Li, Barrow, 2009; Avelino,. Nucamendi, 2010; Meng, Dou 2009; Dou, Meng, 2011). Приведенное сходство стало возможным по причине того, что введенная на основе голографического принципа неаддитивная энтропия Тсаллиса–Чирто ведет себя так, как если бы это была классическая энтропия однородной и изотропной Вселенной, порожденная объемным вязким напряжением космологической жидкости (Gron, 1990**;** Brevik, Gorbunova, 2005**;** Li, Barrow, 2009; Sebastian, 2010).

Таким образом, с использованием голографического принципа, с которым связано существование энтропии Барроу на горизонте Вселенной, в настоящей работе рассмотрены две модели энтропийной силы – модель (17), основанная на энтропии Бекенштейна–Хокинга, и модель (31), основанная на неаддитивной энтропии Тсаллиса–Чирто. Эти модели описывают эволюцию ускоряющейся Вселенной без использования понятия космологической постоянной, или темной энергии. При этом модель энтропийной силы Бекенштейна–Хокинга предсказывает равномерно ускоряющуюся Вселенную, тогда как модель Тсаллиса–Чирто предсказывает как замедление, так и ускоренное расширение Вселенной (см. Basilakos и др., 2009).

4. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ВЫВОДУ УРАВНЕНИЯ СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

Перейдем теперь к рассмотрению неадиабатического расширения Вселенной, вызванного космологической энтропией Барроу на хаббловском горизонте. С этой целью выведем обобщенное уравнение энергии (6), модифицируя термодинамический подход, развитый в монографии (Ryden, 2017).

4.1.Адиабатическое расширение Вселенной

Согласно первому закону термодинамики, принцип сохранения полной энергии для неаддитивных систем можно записать в виде $dQ/dt = dE/dt + PdV/dt$ или в виде соотношения Гиббса (Колесниченко, 2018, 2019)

$$TdS/dt = dQ/dt = dE/dt + PdV/dt, \tag{35}$$

выражающего скорость TdS/Dt изменения энтропии S при движении элемента неаддитивной среды вдоль его траектории. Здесь dQ − теплота, переносимая через границу из окружающей среды в элемент среды, dE и dV − изменения внутренней энергии и объема области вещества и излучения соответственно. Соотношение (35) может быть переписано в виде

$$TdS = dQ = T\frac{dS}{dt}dt = \frac{dE + PdV}{dt}dt = (\dot{E} + P\dot{V})dt\,. \tag{36}$$

Рассмотрим теперь сферу начального радиуса $\hat{r}_S$, расширяющуюся вместе с универсальным расширением Вселенной, так что ее собственный радиус $R_H(t)$ в момент времени t определяется выражением $R_H = a(t)\hat{r}_S$. Тогда объем $V(t)$ сферы равен

$$V(t) = (4\pi / 3)\hat{r}_s^3 a(t)^3 \ . \tag{37}$$

Отсюда

$$\dot{V} = \frac{4\pi}{3}\hat{r}_s^3(3a^2\dot{a}) = V\left(3\frac{\dot{a}}{a}\right) = 3VH\,, \quad (\dot{a}/a = H)\ . \tag{38}$$

Для внутренней энергии сферы имеем $E(t) = \varepsilon(t)V(t)$, где $\varepsilon(t)$ −плотность внутренней энергии, определяемая соотношением $\varepsilon(t) = \rho(t)c^2$. Отсюда скорость изменения внутренней энергии сферы $E(t)$ определяется как

$$\dot{E} = \dot{\varepsilon}V + \varepsilon\dot{V} = \left(\dot{\varepsilon} + 3H\varepsilon\right)V \tag{39}$$

Подставляя уравнения (38) и (39) в $\dot{E} + P\dot{V}$, получим

$$\dot{E} + P\dot{V} = \left(\dot{\varepsilon} + 3H\varepsilon\right)V + 3PVH = \left(\dot{\varepsilon} + 3H(\varepsilon + P)\right)V =$$

$$= \left[\dot{\rho} + 3H\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right)\right]c^2 V\,. \tag{40}$$

Наконец, подставив соотношения (37) и (39) в уравнение (36), получим первый закон термодинамики для расширяющейся или сжимающейся Вселенной:

$$T\frac{dS}{dt} = (\dot{E} + P\dot{V}) = \left[\dot{\rho} + 3H\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right)\right]c^2 V =$$

$$= \left[\dot{\rho} + 3H\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right)\right]c^2\left(\frac{4\pi}{3}R_H^3\right). \tag{41}$$

Рассмотрим сначала такие движения космического вещества, для которых энтропия каждой частицы среды остается в первом приближении постоянной на протяжении всего пути элемента среды, т.е. $dS / dt = 0$. Подобные обратимые и адиабатические движения являются изоэнтропическими. Для них уравнение (41) сводится к ранее полученному уравнению неразрывности (6) для адиабатического расширения Вселенной

$$\dot{\rho}(t) + 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\left[\rho(t) + \frac{P(t)}{c^2}\right] = 0.$$

4.2. Модифицированное энергетическое уравнение для моделирования неадиабатического расширения Вселенной

Если моделировать эволюцию Вселенной в рамках неадиабатической энтропийной космологии, то $dS/dt \neq 0$ (см.Frolov, Kofman, 2003; Cai, Kim, 2005; Akbar, Cai, 2007). Для вычисления TdS/dt в уравнении (41) будем использовать формулу (24), связанную с энтропией Барроу (Barrow, 2020), как наиболее общую в рассматриваемом здесь случае. В результате будем иметь

$$T_H \frac{dS_B}{dt} = \gamma\left(\frac{\hbar c}{2\pi k_B R_H}\right) k_B \frac{\pi c^3}{\hbar G}\left(\frac{\pi}{A_{Pl}}\right)^{D/2} (2+D) R_H^{1+D} \frac{dR_H}{dt} =$$

$$= \gamma \frac{2+D}{2} \frac{c^4}{G}\left(\frac{\pi}{A_{Pl}}\right)^{D/2} R_H^D \frac{dR_H}{dt} = -\gamma \frac{(2+D)}{2} \frac{c^{5+D}}{G}\left(\frac{K}{k_B}\right)^{D/2} H^{-D-2}\dot{H}. \qquad (42)$$

С учетом выражения (42) энергетическое уравнение (41)

$$\left[\dot{\rho} + 3H\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right)\right] = T_H \frac{dS_B}{dt} c^{-2}\left(\frac{3}{4\pi} R_H^{-3}\right)$$

для неадиабатического расширения Вселенной под воздействием движущей энтропийной силы (связанной с энтропией Барроу) принимает вид

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) = -\frac{D+2}{2} c^{2D}\left(\frac{K}{k_B}\right)^{D/2}\left(\frac{3}{4\pi G}\right)\gamma H^{1-D}\dot{H}. \qquad (43)$$

Это модифицированное уравнение неразрывности, полученное из первого закона термодинамики в предположении неадиабатического расширения Вселенной. Правая часть уравнения (43) связана с неадиабатическим процессом. Если $H = 0$ или если $H = const$, то уравнение (43) сводится к уравнению неразрывности для адиабатического расширения Вселенной. Заметим, что аналогичное видоизменение уравнения неразрывности для энтропийной космологии изучалось и для других космологических моделей расширения Вселенной (см. например, Cai и др, 2010a ; Cai, Saridakis, 2011).

Используя уравнение (43), можно получить следующие уравнения неразрывности в случае неадиабатического расширения Вселенной под воздействием энтропийных сил Бекештейна–Хокинга и Тсаллис–Чирто:

$$\dot{\rho}+3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho+\frac{P}{c^2}\right)=-\gamma\left(\frac{3}{4\pi G}\right)H\dot{H}\,,\quad (D=0)\,, \tag{44}$$

$$\dot{\rho}+3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho+\frac{P}{c^2}\right)=-\gamma\frac{3c^2}{2}\left(\frac{K}{k_B}\right)^{1/2}\left(\frac{3}{4\pi G}\right)\dot{H}\,,\quad (D=1)\,. \tag{45}$$

4.3.Простые модели неадиабатического расширения Вселенной

В этом подразделе, используя модифицированное уравнение неразрывности (43), сформулируем два обобщенных уравнения Фридмана (4) и (5) для масштабного фактора $a(t)$ в случае неадиабатического расширения Вселенной под воздействием энтропийной силы Барроу.

Для этой цели запишем уравнение (4) в виде

$$\dot{a}^2=\frac{8\pi G}{3}\rho a^2+f(t)a^2\,, \tag{46}$$

где $f(t)$ – зависящая от вида энтропийной силы функция, включая поправки высокого порядка. Дифференцируя это уравнение по t, получим

$$2\dot{a}\,\ddot{a}=\frac{8\pi G}{3}\left(\dot{\rho}a^2+2\rho a\dot{a}\right)+\dot{f}a^2+2fa\dot{a}\,,$$

или, после деления на $2a\dot{a}$,

$$\frac{\ddot{a}}{a}=\frac{4\pi G}{3}\left(\frac{1}{H}\dot{\rho}+2\rho\right)+\frac{1}{2H}\dot{f}+f\,. \tag{47}$$

Умножая теперь энергетическое уравнение (43) на $a/\dot{a}=1/H$, в результате будем иметь

$$\frac{\dot{\rho}}{H}=-3(1+w)\rho-\frac{D+2}{2}c^{2D}\left(\frac{K}{k_B}\right)^{D/2}\left(\frac{3}{4\pi G}\right)\gamma H^{-D}\dot{H}\,. \tag{48}$$

где введено обозначение $w := P/\rho c^2$. При подстановке соотношения (48) в уравнение (47) окончательно получим

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(1+3w)\rho - \frac{D+2}{2}c^{2D}\left(\frac{K}{k_B}\right)^{D/2}\gamma H^{-D}\dot{H} + \frac{1}{2H}\dot{f} + f\,. \qquad (49)$$

Далее при моделировании будем следовать работе (Easson и др. 2011), в которой было сделано предположение, что член, связанный с энтропийной силой не зависит от производной по времени от параметра Хаббла. Следуя этому предположению определим функции $f(t)$ таким образом, чтобы в уравнении (49) отсутствовал член с $\dot{H}$. Если положить

$$f(t) = \gamma\frac{2+D}{2-D}c^{2D}\left(\frac{K}{k_B}\right)^{D/2} H(t)^{2-D}, \qquad (50)$$

то мы получаем следующую простую систему самосогласованных уравнений, состоящую из модифицированных уравнений Фридмана, ускорения и неразрывности:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 + \gamma\frac{2+D}{2-D}c^{2D}\left(\frac{K}{k_B}\right)^{D/2} H^{2-D}, \qquad (51)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(1+3w)\rho + \gamma\frac{2+D}{2-D}c^{2D}\left(\frac{K}{k_B}\right)^{D/2} H^{2-D}, \qquad (52)$$

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) = -\frac{D+2}{2}c^{2D}\left(\frac{K}{k_B}\right)^{D/2}\left(\frac{3}{4\pi G}\right)\gamma H^{1-D}\dot{H}\,. \qquad (53)$$

Эта система уравнений позволяет моделировать новый сценарий эволюции Вселенной, если рассматривать ее как ограниченную видимым горизонтом термодинамическую систему, которая расширяется неадиабатически под влиянием энтропийной силы, связанной с неаддитивной энтропией Барроу.

Используя систему уравнений (51)-(53) можно получить целый ряд моделей, описывающих неадиабатическую эволюцию Вселенной без использования понятия космологической постоянной, или темной энергии. К таким моделям относятся, в частности, неадиабатическая модель, основанная на энтропии Бекенштейна–Хокинга и неадиабатическая модель, основанная на неаддитивной энтропии Тсаллиса–Чирто.

Если считать, что в формуле (50) параметр $D=0$, то для функции $f(t)$ будем иметь $f(t)=\gamma H(t)^2$. В этом случае простая энтропийная модель неадиабатического расширения Вселенной, основанная на энтропии Бекенштейна–Хокинга принимает вид

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 + \gamma H^2, \tag{54}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(1+3w)\rho + \gamma H^2, \tag{55}$$

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) = -\gamma\left(\frac{3}{4\pi G}\right)H\dot{H}. \tag{56}$$

Энтропийная сила $f=\gamma H^2$ в уравнении. (54) совпадает с соответствующим членом в формуле (55). Модифицированные уравнения Фридмана (54) и (55) соответствуют уравнениям (4) и (5) космологической модели Фридмана. Используя эту систему, можно установить целый ряд свойств неадиабатически расширяющейся Вселенной (см., например, Komatsu, Kimura, 2011).

Если в формуле (50) положить $D=1$, то для функции $f(t)$ получим следующее выражение

$$f = 3\gamma c^2\left(\frac{K}{k_B}\right)^{1/2} H, \tag{57}$$

с учетом которого система (51)-(53) принимает вид

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 + \gamma 3c^2\left(\frac{K}{k_B}\right)^{1/2} H, \tag{58}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(1+3w)\rho + \gamma 3c^2\left(\frac{K}{k_B}\right)^{1/2} H, \tag{59}$$

$$\dot{\rho}+3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho+\frac{P}{c^2}\right)=-\gamma\frac{3c^2}{2}\left(\frac{K}{k_B}\right)^{1/2}\left(\frac{3}{4\pi G}\right)\dot{H}\,. \tag{60}$$

Эта система уравнений лежит в основе моделирования эволюции неадиабатически расширяется Вселенной под влиянием энтропийной силы Тсаллиса-Чирто (Tsallis, Cirto, 2013).

Таким образом, энтропийная космология с помощью процедуры «гравитационной термодинамики» при использовании энтропии Барроу является достаточно эффективной для конструирования целого ряда моделей описывающих эволюцию Вселенной и позволяющих найти количественные оценки неадиабатического ускоренного расширения Вселенной в соответствии с данными наблюдений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Современные космологические данные свидетельствуют о том, что Вселенная расширяется с ускорением. К сожалению, простая модифицированная ОТО, включающая ключевой параметр, характеризующий расширение − космологическую постоянную Λ, не может достаточно точно описать этот феномен. Поэтому возникает необходимость в поиске подходов, с помощью которых можно достаточно надежно количественно описать ускоренное расширение Вселенной.

Одно из направлений на этом пути состоит в построении модифицированной теории гравитации, согласно которой в основе ускоренного расширения Вселенной лежит энтропийная сила. Возникновение этой силы является неизбежным следствием роста энтропии на постинфляционной стадии квантовой канвы пространства-времени, которую можно связать с хранением голографической информации на «поверхностном экране Вселенной», подобном в определенном смысле горизонту событий черной дыры.

Следует заметить, что голографический принцип был выдвинут уже при изучении физики черных дыр в качестве важного свойство квантовой гравитации, утверждающей, что свойства пространства закодированы на его границе (на гравитационном горизонте событий). Исходя из этого принципа Верлинде предложил расширенную голографическую картину, в которой гравитация Эйнштейна возникает из статистического эффекта голографического экрана. Такой подход оказался эффективным для количественного описания ускоренного расширения Вселенной. Рядом авторов были проведены обобщения базового сценария эволюции Вселенной, основанные на использовании энтропийных сил различной природы, в предположении, что горизонт Вселенной, подобно горизонту событий черной дыры, имеет свою энтропию и температуру.

Недавно Барроу была предложена модель квантовой гравитационной канвы пространства-времени для оценки энтропии черных дыр и Вселенной, поверхность которых может иметь сложную фрактальную структуру космологического горизонта вплоть до сколь угодно малых масштабов (порядка планковской длины) из-за квантово-гравитационных эффектов. Как известно, многие решения классических уравнений Эйнштейна, в частности, изотропная однородная космологическая модель Фридмана–Робертсона–Уокера, содержат особенности и не могут быть аналитически продолжены за их пределы. В связи с этим возникает фундаментальная проблема современной космологии: что обусловило рост флуктуаций и возникновение фрагмента пространства-времени на бесконечной квантовой канве Вселенной, сосредоточившего в себе громадную энергию («энергию вакуума») с последовавшей вслед за тем инфляцией (фазой де Ситтера), следствием которой стал Большой взрыв и его наблюдаемый отголосок в виде микроволнового фонового излучения. Так или иначе, основой такого сценария, породившего последующие события рождения Вселенной, являются квантово-гравитационные эффекты (Starobinsky, 1980).

В данной работе предпринята попытка лучше понять физический механизм ускоренного расширения плоской, однородной и изотропной Вселенной.

Получены модифицированные космологические уравнения, содержащие новые дополнительные члены, совпадающие с базовыми уравнениями Фридмана в случае, когда показатель деформации Барроу отвечает фрактальной размерности $D = 0$. Однако в общем случае $0 < D \leq 1$ появляются новые управляющие члены, связанные с изменениями энтропии Барроу на хаббловском горизонте Вселенной, значительно превышающем ее возраст, которые влияют на эволюцию основных космологических критериев, таких как масштабный фактор, параметр замедления, плотность вещества (видимой и темной материи, радиации, нейтрино и др.) и рост линейных возмущений материи. Это должно приводить к новому феноменологическому описанию тепловой истории Вселенной. Основанием для такого вывода служит результат данной работы, в которой для энтропии Барроу исследована справедливость использования обобщенного второго закона термодинамики и на его основе получены модифицированные уравнения Фридмана, позволяющие объяснить неадиабатическое расширение Вселенной в терминах энтропии, без привлечения гипотетической темной энергии как фактуры (ткани) самого расширяющегося космоса. Представляется разумным найти в этом приближении решение модифицированных уравнений Эйнштейна с квантовыми поправками и установить, существует ли среди них физически интересные неособые решения.

Как видим, энтропийная космология, исходя из представлений «гравитационной термодинамики» с использованием энтропии Барроу, может оказаться достаточно эффективной для количественной оценки неадиабатического ускоренного расширения Вселенной и его возможного изменения со временем. Результаты анализа возможных решений приведенных в статье космологических уравнений будут представлены в следующих публикациях авторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Вайнберг С. Космология. М.: УРСС: Книжный дом «ЛИБРОКОМ». 2013. 608 с.

Колесниченко А.В. К построению неаддитивной термодинамики сложных систем на основе статистики Курадо-Тсаллиса // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. № 25. 40 с.

Колесниченко А.В. Статистическая механика и термодинамика Тсаллиса неаддитивных систем. Введение в теорию и приложения. М.: ЛЕНАНД (Синергетика: от прошлого к будущему. № 87) 2019. 360 с.

Маров М.Я. Космос: От Солнечной системы вглубь Вселенной. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2018. 544 с.

Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. Том 2. Изд-во «Мир». 1977. 525 с.

Толмен Р. Относительность, термодинамика и космология. М.: УРСС: Книжный дом «ЛИБРОКОМ». 2009. 520 с.

Черепащук А.М., Чернин А.Д. Вселенная, жизнь, черные дыры. − Фрязино: «Век 2». 2004. 320 с.

Aditya Y., Mandal S., Sahoo P., Reddy D. Observational constraint on interacting Tsallis holographic dark energy in logarithmic BransDicke theory // Eur. Phys. J. 2019. V. 79. №.12. P. 1020) [arXiv:1910.12456].

Akbar M.,. Cai R. G. Thermodynamic Behavior of Friedmann Equations at Apparent Horizon of FRW Universe // Phys. Rev. D 2007. V.75, P.084003 [arXiv:hep-th/0609128].

Anagnostopoulos F.K., Basilakos S., Saridakis E.N. Observational constraints on Barrow holographic dark energy // Eur. Phys. J. C. 2020. V.80. P. 826 (1-9).

Anagnostopoulos F. K., Basilakos S., Kofinas G., Zarikas V. Constraining the Asymptotically Safe Cosmology: cosmic acceleration without dark energy // JCAP. 2019. V. 053 [arXiv:1806.10580].

Avelino A., Nucamendi U. Exploring a matter-dominated model with bulk viscosity to drive the accelerated expansion of the Universe // Journal of Cosmology and Astroparticle Physic. 2010. V. 2010. №. 8, article no. 009.

Basilakos S., Sola J. Entropic-force dark energy reconsidered //Phys. Rev. D. 2014. V. 90. №2. P. 023008.

Basilakos S., Polarski D., Sola J. Generalizing the running vacuum energy model and comparing with the entropic-force models // Phys. Rev. D 2012. V.86. № 4. P. 043010

Basilakos S., Plionis M., Sola J. Hubble expansion and structure formation in time varying vacuum models // Phys. Rev. D. 2009. V. 80. №8. P 083511 **DOI:** 10.1103/PhysRevD.80.083511.

Barrow J. D .The area of a rough black hole // Physics Letters B. 2020. V. 808. P 135643. Doi:10.1016/j.physletb.2020.135643

Bekenstein J.D. Black Holes and Entropy//Phys. Rev. D. 1975. V.7. № 8. P. 2333-2346. Doi: 10.1103/PhysRevD.7.2333.

Brevik I., Gorbunova. O. G. Dark energy and viscous cosmology // General Relativity and Gravitation. 2005. V. 37. P. 2039-2045.

Cai Y.-F., Saridakis E. N., Setare M. R., Xia J-Q. Quintom Cosmology: Theoretical implications and observations // Phys. Rept. 2010. V. 493. P. 1-60 [arXiv:0909.2776].

Cai Y.-F., Liu J., Li H. Entropic cosmology: A unified model of inflation and late-time acceleration // Physics Letters B. 2010a. V. 690. P. 213-219.

Cai Y.-F.,. Saridakis E. Inflation in entropic cosmology: Primordial perturbations and non-Gaussianities // Physics Letters B. 2011. V. 697. P. 280-287.

Cai R. G., Kim S. P. First law of thermodynamics and Friedmann equations of Friedmann-Robertson-Walker universe //, JHEP. 2005. V. 0502. P. 050 [arXiv: hep-th/0501055].

Czinner V. G., Iguchi H. Rényi entropy and the thermodynamic stability of black holes // Phys. Lett. B. 2016. V. 752. P. 306-310.

Copeland E. J., Sami M., Tsujikawa S. Dynamics of dark energy // Int. J. Mod. Phys. D. 2006. V. 15, P. 1753 [arXiv:hep-th/0603057].

Dou X., Meng., X.-H. Bulk Viscous Cosmology: Unified Dark Matter // Adv. Astron. 2011. V. 2011 P. 829340. Doi:10.1155/2011/829340.

Easson D. A., Frampton P. H., Smoot, G. F. Entropic accelerating universe // Physics Letters B. 2011. V. 696. № 3, P. 273-*277./* arXiv.1002.427 v3[hep.-th.] 24 Oct 2010.

Easson D. A., Frampton P. H., Smoot, G. F. Entropic Inflation // arXiv.1003.1528 v3[hep.-th.] 13Apr 2012.

Frolov A. V., Kofman L. Inflation and de Sitter thermodynamics // JCAP. 2003. V. 0305. P. 009 [arXiv:hep-th/0212327].

Friedmann A. Über die Krümmung des Raumes // Zeitschrift für Physik. 1922. V. 10, P. 377-386.

Gorbunov D. S., Rubakov V. A. Introduction to the theory of the early universe: hot big bang theory. British Library Cataloguing-in-Publication Data. 2018. 577 p.

Gron O. Viscous inflationary universe models // Astrophysics and Space Science.1990. V. 173. P. 191-225.

Hawking S. W. Particle Creation By Black Holes // Commun Math. Phys. 1975. V. 43. 199-220.

Keul N.D., Oruganty K., Bergman E.T.S., Beattie N.R., McDonald W.E., Kadirvelraj R., Gross M.L., Phillips R.S., Harvey S.C., Wood Z.A. The entropic force generated by intrinsically disordered segments tunes protein function // Nature. 2018. V.563. P. 584-588.

Komatsu E., et al. Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation // Astrophys. J. Suppl. Ser. 2011. V. 192. №2. article id. 18, 47 pp. Doi:10.1088/0067-0049/192/2/1

Komatsu N., Kimura S. Entropic cosmology for a generalized black-hole entropy // Physical Review D. 2013b. V. 88. P. 083534

Komatsu N., Kimura S. Evolution of the universe in entropic cosmologies via different formulations //Physical Review D,. 2014. V. 89. № 12. P.123501.

Komatsu N., Kimura S. Non-adiabatic-like accelerated expansion of the late universe in entropic cosmology // Phys. Rev. D . 2013a. V.87, P. 043531.

Komatsu N. Generalized thermodynamic constraints on holographic-principle-based cosmological scenarios //Physical Review D. 2019. V. 99. P. 043523.

Komatsu N. Thermodynamic constraints on a varying cosmological-constant-like term from the holographic equipartition law with a power-law corrected entropy // Physical Review D. 2017. V. 96. P. 103507 (2017)

Koivisto T.S., Mota D. F., Zumalacárregui M. Constraining entropic cosmology // J. Cosmol.Astropart. Phys. 2011. № 02. id.027;

Li B., Barrow J. Does bulk viscosity create a viable unified dark matter model? // Physical Review D, 2009. V. 79. № 10. P. id. 103521

Lima J. A. S., Alcaniz J. S. Constraining the cosmic equation of state from old galaxies at high redshift // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2000. V.317. P. 893-896

Meng X.-H., Dou X. Friedmann cosmology with bulk viscosity: a concrete model for dark energy // Communicationsin Theoretical Physics. 2009. Vl. 52. № 2. P. 377-38.

Myung Y.S. Entropic force and its cosmological implications // Astrophys. Space Sci. 2011. V. 335. № 2. P. 553-559.

Padmanabhan T. Thermodynamical Aspects of Gravity: New insights // Rept. Prog. Phys. 2010. V.73. № 4. P.046901 (44pp) [arXiv:0911.5004].

Padmanabhan T., Chitre S. M. Viscous universes. Physics Letters A, 1987. V. 120. №. 9. P. 433-436.

Qiu T., Saridakis E. N. Entropic force scenarios and eternal inflation // Phys. Rev. D . 2012. V.85. P. 043504.

Ryden B. Introduction to Cosmology. Cambridge University Press. 2017. 279 p.

Saridakis E.N.,. Basilakos S. The generalized second law of thermodynamics with Barrow entropy.2020 arXiv:2005. 08258.

Saridakis E. N. Modified cosmology through spacetime thermodynamics and Barrow horizon entropy // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. 2020. P. 1-10. doi.org/10.1088/1475-7516/2020/07/031.

de Sitter W. On the relativity of inertia. Remarks concerning Einstein's latest hypothesis //Proc. Roy. Acad. Sci. (Amsterdam). 1917. V. 19. P. 1217-1225.

Sebastian, L. Dark viscous fluid coupled with dark matter and future singularity // European Physical Journal C. 2010. V. 69. P. 547-553.

Susskind L. The World as a hologram // J. Math. Phys. 1995. V. 36. № 11 P. 6377-6396.

Starobinsky A.A. A new type of isotropic cosmological models without singularity // Physics Letters. 1980. V. 91B. № 1. P. 99-103.

Torres D.F., Vucetich H., Plastino A. Early Universe Test of Nonextensive Statistics // Phys. Rev. Lett. 1997. V.79. № 9. P. 1588-1590.

Tsallis C., Cirto L. J.L. Black hole thermodynamical entropy // Eur. Phys. J. C. 2013. V. 73. P.2487 / Doi: 10.1140/epjc/s10052-013-2487-6.

Verlinde E. On the origin of gravity and the laws of Newton // J. High Energy Phys. 2011. V. 4. P. 1-26. doi:10.1007/ JHEP04(2011)029.

Weinberg S. The cosmological constant problem **//** Reviews of Modern Physics. 1989. V. 61. № 1. P.1-23.

Waheed S. Reconstruction paradigm in a class of extended teleparallel theories using Tsallis holographic dark energy // Eur. Phys. J. Plus. 2020. V. 135. № 1. P. 11.

Wilk G., Wlodarczyk Z. On the interpretation of nonextensive parameter *q* in Tsallis statistics and Levy distributions // Phys. Rev. Lett. 2000. V.84. P. 2770 [hep-ph/9908459] [INSPIRE]

Wissner-Gross A.D., Freer C.E. Causal entropy forces // Phys. Rev. Lett. 2013, V.110, 168702. OhysRevLett.110.168702.

ОГЛАВЛЕНИЕ