



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • [Электронная библиотека](#)

[Препринты ИПМ](#) • [Препринт № 102 за 2020 г.](#)



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

[Ф.Н. Воронин](#), [М.Б. Марков](#),
[С.В. Паротькин](#)

Релаксация объемного
заряда, создаваемого
потокм электронов в
воздушной среде

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Воронин Ф.Н., Марков М.Б., Паротькин С.В. Релаксация объемного заряда, создаваемого потокм электронов в воздушной среде // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 102. 20 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2020-102>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-102>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

Ф. Н. Воронин, М. Б. Марков, С. В. Паротькин

**Релаксация объемного заряда,
создаваемого потоком электронов
в воздушной среде**

Москва — 2020

Воронин Ф.Н., Марков М.Б., Паротькин С.В.

Релаксация объемного заряда, создаваемого потоком электронов в воздушной среде

Рассмотрена термализация высокоэнергетичных электронов в воздушной среде. Показано, что формирование при этом процессе объемного заряда в газе обусловлено образованием отрицательных ионов кислорода. Рассмотрены характерные времена образования и разрушения ионов. Построена математическая модель релаксации объемного заряда, основанная на оценке скорости дрейфа ионов в электрическом поле. Получено условие, при выполнении которого дрейф ионов в электрическом поле превалирует над газодинамическим разлетом ионизированного вещества в целом.

Ключевые слова: электрон, прилипание, ион, дрейф, электрическое поле

F.N. Voronin, M.B. Markov, S.V. Parotkin

Relaxation of the volume charge created by the electron flow in the air

Thermalization of high-energy electrons in the air is considered. It was shown that the formation of a volume charge in the gas during this process is due to the formation of negative oxygen ions. The characteristic times of formation and destruction of ions are considered. A mathematical model of the volume charge relaxation based on an estimate of the ion drift velocity in an electric field is constructed. A condition is obtained under which the drift of ions in an electric field prevails over the gas-dynamic expansion of the ionized substance as a whole.

Key words: electron, ion, attachment, drift, electric field

Работа поддержана РФФИ, проект № 20-01-00419

Оглавление

Введение	3
1. Постановка задачи.....	3
2. Образование и разрушение отрицательных ионов кислорода в воздушной среде	8
3. Движение отрицательных ионов кислорода.....	11
4. Динамика ионизированного газа	16
5. Модельная задача	19
Заключение.....	20
Список литературы.....	21

Введение

Рассмотрим формирование электромагнитного поля в газовой среде импульсным потоком электронов высокой энергии внутри аппаратного блока. Электроны эмитируются с внутренней поверхности корпуса блока и внешних поверхностей его внутренних элементов. Эмиссию вызывает воздействие тормозного излучения ускорителя электронов [1] или рентгеновской диагностической установки. Распространение электронов и формирование электромагнитного поля в газовой среде описывается моделью, сформулированной в работах авторов, например, в [2]. Модель основана на следующих уравнениях. Кинетическое уравнение описывает функцию распределения электронов эмиссии в фазовом пространстве координат и импульсов. Плотность тока вторичных заряженных частиц, возникающих при ударной ионизации воздуха электронами эмиссии, рассматривается в приближении радиационной проводимости среды. Ионизационный баланс вторичных заряженных частиц описывается однородными по пространственным координатам уравнениями химической кинетики. Самосогласованное электромагнитное поле, генерируемое сторонним током электронов эмиссии и током проводимости, моделируется уравнениями Максвелла.

Импульс плотности тока электронов эмиссии по времени повторяет импульс эмиссии с учетом задержки, обусловленной конечной скоростью распространения электронов. Если давление воздуха превышает атмосферное, то импульс проводимости, в свою очередь, повторяет импульс плотности тока. Если характерный размер воздушной полости превышает тормозной путь электронов эмиссии, то напряженность электрического поля по окончании импульса плотности тока устанавливается на стационарном ненулевом значении [3].

Достижение электрическим полем стационарного значения объясняется формированием объемного заряда электронами эмиссии в газовой среде. Эмиссия «оставляет» на эмитирующей поверхности положительный электрический заряд. Электроны, которые полностью теряют энергию при взаимодействии с воздушной средой и термализуются в ее объеме, не возвращаются на поверхность. Ударная ионизация приводит к образованию равного количества вторичных электронов и положительных ионов. Добавление к ним термализованных электронов эмиссии нарушает квазинейтральность ионизованного воздуха и формирует объемный заряд. Механизмов компенсации заряда рассмотренная выше модель не учитывает.

Целью данной работы является построение математической модели релаксации объемного заряда, образующегося при термализации электронов эмиссии в воздушной среде.

1. Постановка задачи

Рассмотрим формирование электромагнитного поля потоком электронов, эмитируемых в воздушную среду. Распространение электронов в данной среде описывается кинетическим уравнением

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{v}f_e) + e \text{div}_p \left[\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{H}] \right) f_e \right] + \text{St}[f_e] = Q_e, \quad (1)$$

где $f_e = f_e(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ – функция распределения электронов в фазовом пространстве координат \mathbf{r} и импульсов \mathbf{p} , \mathbf{v} – скорость, c – скорость света, e – заряд электрона, $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t, \mathbf{r})$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}(t, \mathbf{r})$ – векторы напряженности электрического и магнитного полей.

Источник электронов $Q_e = Q_e(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ определяет интенсивность их эмиссии с внутренней поверхности корпуса и внешних поверхностей элементов блока.

Пусть характерная энергия электронов составляет величину порядка 50 кэВ. Такое значение энергии соответствует верхней границе спектра передвижных рентгенодиагностических установок. Тормозной путь электронов λ_e с такой энергией в воздухе атмосферного давления составляет примерно 4.1 см, время жизни τ_e до полной потери энергии – $2.4 \cdot 10^9$ 1/с. Амплитуда источника электронов эмиссии определяется интенсивностью потока фотонов и составляет величину $N_e = 3 \cdot 10^{16}$ 1/(см с), длительность импульса – 10 нс. Плазменная частота электронов с энергиями порядка 50 кэВ в потоке такой интенсивности составляет величину $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 N_e / m} \sim 10^8$ 1/с, дебаевский радиус – $r_d = v / \omega_p \sim 10^2$ см. Здесь m – масса электрона.

Интеграл столкновений $\text{St}[f_e]$ в уравнении (1) учитывает упругое рассеяние электронов эмиссии, ударную ионизацию и возбуждение ими атомов среды [4-6]. Предполагается малая потеря энергии электронами при столкновениях [7,8]. Интеграл столкновений рассматривается в приближении однородного рассеяния электронов на траектории [9].

Решение уравнения (1) рассматривается в пространстве финитных обобщенных функций на основном пространстве бесконечно дифференцируемых функций [9]:

$$f_e(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = \int_0^t d\tilde{t} \int d\tilde{\mathbf{r}} \int d\tilde{\mathbf{p}} Q_e(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^s(t, \tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}})) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}^s(t, \tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}})),$$

где функции $\mathbf{r}^s(t, \tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}})$ и $\mathbf{p}^s(t, \tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}})$ являются решениями уравнений движения

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}^s = \mathbf{v}^s, \quad \frac{d}{dt}\mathbf{p}^s = -e\left(\mathbf{E}^s + \frac{1}{c}[\mathbf{v}^s, \mathbf{H}^s]\right) - \kappa(p^s)\frac{\mathbf{p}^s}{p^s}$$

с начальными условиями

$$\mathbf{r}^s(t, \tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}})\Big|_{t=\tilde{t}} = \tilde{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{p}^s(t, \tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}})\Big|_{t=\tilde{t}} = \tilde{\mathbf{p}}.$$

Здесь $\kappa(p)$ – тормозная способность электронов [4].

Плотность тока электронов эмиссии $\mathbf{j}_{ext} = \mathbf{j}_{ext}(t, \mathbf{r})$ определяется как действие обобщенного решения (1) на функцию $\mathbf{v}W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \Delta)$ из основного пространства. Функция $W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \Delta)$, $\mathbf{r}' \in \mathbb{R}_r^3, \Delta > 0$ удовлетворяет условиям $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}_r^3} d\mathbf{r}W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \Delta)\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \varphi(\mathbf{r}', \mathbf{p}), \int_{\mathbb{R}_r^3} W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \Delta)d\mathbf{r}' = 1$, для любой бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ из основного пространства.

Ударная ионизация молекул кислорода и азота электронами эмиссии приводит к образованию в непрерывном спектре вторичных электронов. Дифференциальное сечение ударной ионизации обратно пропорционально переданной энергии, поэтому наиболее вероятны столкновения с малой передачей импульса [7,8]. В результате в рассеивающей среде образуется большое количество медленных вторичных электронов так называемого ионизационного спектра. Данный спектр деградируют к равновесному распределению примерно за 0.3 нс [10] в воздушной среде нормальной плотности.

Рассмотрим ток вторичных электронов в приближении проводимости слабоионизованного газа. Данное приближение предполагает, что частота столкновений вторичных электронов существенно превосходит их плазменную частоту. С учетом плотности тока, создаваемой дрейфом ионов, радиационная проводимость $\sigma = \sigma(t, \mathbf{r})$ вычисляется по следующей формуле:

$$\sigma = e(n_e k_e + n_i k_i), \quad (2)$$

где n_e, n_i – концентрации вторичных электронов и ионов, k_e, k_i , – равновесная подвижность электронов и ионов в воздухе [13].

Концентрации вторичных электронов и ионов определяются из уравнений химической кинетики:

$$\begin{aligned}\frac{\partial n_e}{\partial t} &= \nu_{ion} n_e - \nu_{att} n_e - \beta_{ei} (n_i + n_e) n_e + Q_\delta(t, \mathbf{r}), \\ \frac{\partial n_i}{\partial t} &= \nu_{att} n_e - \beta_{ii} (n_i + n_e) n_i.\end{aligned}\quad (3)$$

Длительность существования проводящей среды определяется интенсивностью генерации и временем жизни заряженных частиц. Формулы (4,6) предполагают выполнение условия квазинейтральности системы вторичных электронов, ионов и нейтральных молекул.

Интенсивность ионизации воздуха $Q_\delta = Q_\delta(t, \mathbf{r})$ вычисляется как отношение потерь энергии электронами эмиссии при столкновениях к цене ионизации:

$$Q_\delta(t, \mathbf{r}) = \int d\mathbf{p} \frac{\kappa(p)}{\varepsilon_{ion}} \nu \int d\mathbf{r}' W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \Delta) f_e(t, \mathbf{r}', \mathbf{p}), \quad (4)$$

где ε_{ion} – средняя цена ионизации молекул воздуха.

Энергия части вторичных электронов превышает порог ионизации молекул воздуха. Поэтому деградация их спектра также сопровождается ударной ионизацией. В уравнениях (3) вторичную ударную ионизацию описывает коэффициент $\nu_{ion} = \alpha_{ion} k_e E$ – частота ионизации, где α_{ion} – коэффициент Таунсенда.

Прилипание электронов к молекулам кислорода с образованием отрицательных ионов с частотой ν_{att} , а также ион-ионная рекомбинация с коэффициентом β_{ii} будут рассмотрены ниже.

Высокочастотное электромагнитное поле, генерируемое сторонним током электронов эмиссии и током проводимости вторичных электронов и ионов, описывается уравнениями Максвелла [14]:

$$\text{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (\sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}_{ext}), \quad \text{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (5)$$

Уравнения (1-5) в совокупности с однородными начальными условиями образуют задачу Коши для компонент электромагнитного поля.

После окончания электронной эмиссии и завершения процессов рекомбинации сохраняются отрицательные ионы кислорода. В процессе ионизации газа их количество превышает количество положительных ионов ровно на число термализованных электронов эмиссии. Эти электроны прилипают к молекулам кислорода так же, как и вторичные. Остаточные отрицательные ионы должны

компенсировать избыточный положительный заряд на эмитирующей поверхности. Для этого им необходимо достичь этой поверхности под действием электрического поля. Но механизмов движения ионов под действием электрического поля модель, ограниченная уравнениями (1-5), не учитывает. Действительно, уравнения химической кинетики (3) построены в приближении локальной пространственной однородности ионизованной среды. Смещением заряженных частиц относительно координат их образования уравнения (3) пренебрегают по сравнению с рекомбинацией. Такое приближение остается справедливым до тех пор, пока ионизованный газ близок к квазинейтральности. Но когда все положительные ионы рекомбинируют, избыточные отрицательные ионы автоматически создают избыточный постоянный отрицательный заряд и, в совокупности с положительным зарядом эмитирующей поверхности, электрическое поле.

Моделирование релаксации заряда и поля в рассматриваемой системе требует учета движения вторичных заряженных частиц. Для этого необходимо рассмотреть количественные характеристики процесса прилипания.

2. Образование и разрушение отрицательных ионов кислорода в воздушной среде

Поглощение электронов в реакциях прилипания к кислороду с образованием отрицательно заряженных молекулярных ионов происходит в основном при энергиях электрона, меньших 100 эВ [15, 16].

Рассмотрим данные о частоте прилипания, которые можно использовать для оценки интенсивности генерации отрицательных ионов кислорода равновесным распределением вторичных электронов. Используются следующие эмпирические формулы для средней частоты прилипания:

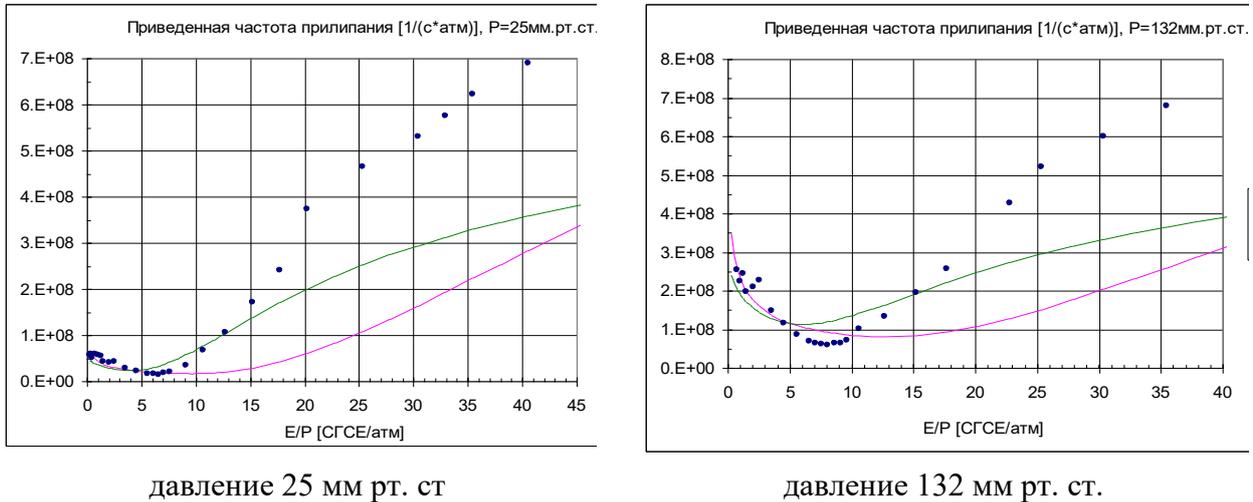
$$v_{att}(p, E/p) = \frac{0.623 \cdot 10^8 \cdot p^2}{\sqrt{E/p + 0.351}} + 3.06 \cdot 10^8 \cdot p \cdot \exp\left\{-\frac{69.6}{E/p}\right\}, \quad (6)$$

$$v_{att}(p, E/p) = \frac{0.63 \cdot 10^8 \cdot p^2}{\sqrt{E/p + 1.055}} + 1.3 \cdot 10^8 \cdot p \cdot \exp\left\{-\frac{25}{(E/p + 10^{-4}/p)}\right\}. \quad (7)$$

Формула (6) приведена в работе [13], формула (7) – в работе [17].

Графики зависимостей приведенных частот прилипания v_{att}/p от отношения E/p , вычисленных по формулам (6,7) и полученных экспериментально [18], представлены на рисунке 1. Необходимо отметить, что результаты эксперимента соответствуют давлениям 25 мм рт. ст. и 132 мм рт. ст. в чистом кислороде, а эмпирические формулы (6,7) подбирались для воздуха. Поскольку

трехчастичным прилипанием с участием молекулы азота можно пренебречь, формулами (6,7) можно пользоваться и для чистого кислорода с соответственно измененным давлением. А именно, в воздухе при давлении 1 атм. парциальное давление кислорода составляет 0.2·760 мм рт. ст. Отсюда определяется давление воздуха, соответствующее давлению кислорода 25 и 132 мм рт. ст



давление 25 мм рт. ст

давление 132 мм рт. ст.

Рис. 1. Зависимости приведенных частот прилипания от отношения напряженности электрического поля к давлению: красная линия – [13], зеленая – [17], точки – [18]

Отрицательные ионы рекомбинируют с положительными ионами, образующимися при ударной ионизации вместе со вторичными электронами. Интенсивность рекомбинации учитывается коэффициентом ион-ионной рекомбинации β_{ii} [см³/с]. Для его вычисления используются следующие эмпирические формулы:

$$\beta_{ii} = 2 \cdot 10^{-7} (1 + 21p),$$

$$\beta_{ii} = 2 \cdot 10^{-7} \sqrt{300/T} \left[1 + 27p(300/T)^2 \right],$$

где T – температура воздуха в К. Данные формулы приведены в работах [19,20].

Отрицательные ионы могут разрушаться при столкновениях с нейтральными молекулами. Парциальные частоты разрушения в столкновениях с молекулами кислорода $O_2^- + O_2 \rightarrow e + 2O_2$ и азота $O_2^- + N_2 \rightarrow e + O_2 + N_2$ нормируются на одну молекулу [21]:

$$\gamma_{O_2} = 2.7 \cdot 10^{-10} (T/300)^{\frac{1}{2}} \exp\{-5590/T\} \text{ см}^3/\text{с}, \quad (8)$$

$$\gamma_{N_2} = 1.9 \cdot 10^{-12} (T/300)^{\frac{3}{2}} \exp\{-4990/T\} \text{ см}^3/\text{с}, \quad (9)$$

где N_{N_2} – концентрация молекул азота.

Полная частота разрушения молекул вычисляется следующим образом:

$$\gamma_d = \gamma_{O_2} N_{O_2} + \gamma_{N_2} N_{N_2} \text{ 1/с}. \quad (10)$$

Некоторые данные о частотах разрушения отрицательных ионов кислорода приведены в монографиях [22] и [23]. Почерпнутые из них и полученные по формулам (8-10) константы отлипания в зависимости от температуры T представлены в таблице 1. Для первой реакции данные источников более или менее совпадают. Для второй имеют место существенные различия.

Таблица 1

Парциальные частоты разрушения отрицательных ионов

$T, \text{ К}$	γ_{O_2} [21]	γ_{O_2} [22]	γ_{O_2} [23]	γ_{N_2} [21]	γ_{N_2} [23]
300	2.18E-18	1.60E-18	2.20E-18	1.13E-19	
600	3.43E-14	3.44E-14	3.00E-14	1.31E-15	1.80E-16
900	9.39E-13	8.74E-13		3.86E-14	
1200	5.12E-12	4.12E-12		2.38E-13	
1500	1.45E-11	1.00E-11		7.63E-13	

Значения частот отлипания, вычисленные по формулам $\gamma_d = N_L (0.2\gamma_{O_2} + 0.8\gamma_{N_2})$ и $\gamma_d = N_L 0.2\gamma_{O_2}$, приведены в таблице 2.

Таблица 2

Полные частоты разрушения отрицательных ионов

$T, \text{ К}$	Формула	$\gamma_d, [22], [23]$	$T, \text{ К}$	$\gamma_d, [22], [23]$
600	$N_L (0.2\gamma_{O_2} + 0.8\gamma_{N_2})$	1.90E+05	300	1.42E+01
600	$N_L 0.2\gamma_{O_2}$	1.86E+05	300	1.18E+01

Видно, что реакция $O_2^- + N_2 \rightarrow e + O_2 + N_2$ слабо влияет на значение полной частоты разрушения отрицательных ионов.

Представленные в данном разделе сведения о частотах образования и разрушения отрицательных ионов кислорода позволяют сделать следующие выводы. В ионизованном газе нормального давления характерное время жизни вторичных электронов до образования отрицательных ионов составляет величину порядка 10^{-8} с. Оно существенно превосходит время деградации ионизационного спектра вторичных электронов и совпадает по порядку величины с длительностью эмиссии. Время разрушения ионов в воздухе нормальной температуры существенно превосходит время их образования. Поэтому разрушением отрицательных ионов можно пренебречь – все высвободившиеся электроны мгновенно прилипают обратно.

3. Движение отрицательных ионов кислорода

Рассмотрим кинетическое уравнение для функции распределения $f_i = f_i(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ отрицательных ионов кислорода:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{v}f_i) + e \text{div}_p(\mathbf{E}f_i) + \text{St}[f_i] = Q_i, \quad (11)$$

где $Q_i = Q_i(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ – интенсивность образования отрицательных ионов в фазовом пространстве.

Начальное распределение ионов по импульсу считается изотропным. Электрическое поле дает им направленную скорость. Получим оценку дрейфовой скорости. Для этого проинтегрируем уравнение (11) по импульсу с весом \mathbf{v} :

$$\frac{\partial \mathbf{j}_i}{\partial t} + \int \mathbf{v} \text{div}(\mathbf{v}f_i) d\mathbf{p} - e \mathbf{E}n_i + \int \mathbf{v} \text{St}[f_i] d\mathbf{p} = 0, \quad (12)$$

где $n_i = n_i(t, \mathbf{r})$ – концентрация, а $\mathbf{j}_i = \mathbf{j}_i(t, \mathbf{r})$ – плотность потока ионов.

Основным столкновительным процессом, препятствующим набору направленной скорости ионами и возвращающим их распределение в изотропное состояние, является упругое рассеяние. Рассмотрим оценки

$$\int \mathbf{v} \text{St}[f_i] d\mathbf{p} \approx v_i n_i / \tau_i, \quad \left| \int \mathbf{v} \text{div}(\mathbf{v}f_i) d\mathbf{p} \right| \approx n_i v_i^2 / \lambda_e,$$

где τ_i – время транспортного пробега иона относительно упругого рассеяния, v_i по порядку величины соответствует средней скорости ионов. Величина $\tau_i = 1/(nv'\sigma_{ir})$ связана с транспортным сечением упругого рассеяния σ_{ir} , которое для азота имеет вид [23]:

$$\sigma_{ir} = 2\sqrt{2}\pi a_0^2 \sqrt{\frac{\alpha R}{a_0^3 \varepsilon'}}.$$

Здесь n – концентрация нейтральных молекул, v' , ε' – скорость и энергия относительного движения иона и молекулы, $R = 13,6$ эВ – постоянная Ридберга, a_0 – радиус первой борховской орбиты ($\pi a_0^2 = 0,88 \cdot 10^{-16}$ см²), α – поляризуемость молекулы ($\alpha/a_0^3 = 11,8$ для азота). Отметим, что время транспортного пробега τ_i не зависит от энергии иона. При нормальных условиях оно оказывается равным $0,5 \cdot 10^{-10}/p$ с. Средняя скорость ионов мала по сравнению со среднеквадратичной, имеющей порядок $5 \cdot 10^4$ см/с [23]. Тогда отношение второго и четвертого членов в уравнении (12) можно оценить величиной $v_i \tau_i / \lambda_e < 0,5 \cdot 10^{-6}$. Оценки предполагают, что ионы распределяются в газовой среде на расстояниях порядка тормозного пути электрона λ_e . Тогда слагаемым $e \int \mathbf{v} \operatorname{div}(\mathbf{v} f_i) d\mathbf{p}$ в уравнении (12) можно пренебречь по сравнению с $\int \mathbf{v} \operatorname{St}[f_i] d\mathbf{p}$.

Рассмотрим первый момент интеграла столкновений ионов [24]:

$$\int \mathbf{v} \operatorname{St}[f_i] d\mathbf{p} = n_i \frac{M'}{M_i} \frac{\mathbf{v}_i - \mathbf{v}}{\tau_i},$$

где $\mathbf{v}_i = \mathbf{j}_i/n_i$ – дрейфовая (гидродинамическая) скорость ионов, \mathbf{v} – гидродинамическая скорость нейтральных молекул, $M_i = 5,3 \cdot 10^{-23}$ г – масса иона кислорода, M' – приведенная масса иона и молекулы. Будем считать, что масса молекулы $M = M_i$. Тогда $M' = M/2$.

Учитывая выражение для момента интеграла столкновений ионов, в соответствии с (12) получим:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + \frac{e\mathbf{E}}{M_i} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{v}_i - \mathbf{v}}{\tau_i} = 0. \quad (13)$$

Рассмотрим нейтральные молекулы. Для их гидродинамической скорости можно построить уравнение, аналогичное (13):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\text{grad } p}{nM} + \frac{1}{2} \frac{n_i}{n} \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_i}{\tau_i} = 0,$$

где $p = p(t, \mathbf{r})$ – давление в газе, создаваемое, в том числе, выделением энергии при рассеянии электронов эмиссии.

Рассмотрим уравнение для разности скоростей:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}) + \left(\frac{e\mathbf{E}}{M_i} - \frac{\text{grad } p}{nM} \right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{n_i}{n} \right) \frac{\mathbf{v}_i - \mathbf{v}}{\tau_i} = 0.$$

Полагая начальное условие однородным, получим решение задачи Коши для данного уравнения:

$$\mathbf{v}_i - \mathbf{v} = - \int_0^t dt' \left[\frac{e\mathbf{E}(t')}{M_i} - \frac{\text{grad } p(t')}{n(t')M} \right] \exp \left\{ - \frac{1}{2\tau_i} \int_{t'}^t dt'' \left(1 + \frac{n_i(t'')}{n(t'')} \right) \right\}.$$

Используя это соотношение, получим решение задачи Коши для (13):

$$\mathbf{v}_i = - \int_0^t dt' \frac{e\mathbf{E}(t')}{M_i} + \int_0^t \frac{dt'}{2\tau_i} \left[\frac{e\mathbf{E}(t')}{M_i} - \frac{\text{grad } p(t')}{n(t')M} \right] \int_{t'}^t dt'' \exp \left\{ - \int_{t'}^{t''} \frac{dt'''}{2\tau_i} \left(1 + \frac{n_i(t''')}{n(t''')} \right) \right\}.$$

Далее будет показано, что $n_i/n \ll 1$. Тогда

$$\mathbf{v}_i = - \int_0^t dt' \frac{e\mathbf{E}(t')}{M_i} - \int_0^t dt' \left[\frac{e\mathbf{E}(t')}{M_i} - \frac{\text{grad } p(t')}{n(t')M} \right] \left(\exp \left\{ - \frac{t-t'}{2\tau_i} \right\} - 1 \right).$$

Характерное время изменения $\mathbf{E}(t)$ и $n_i(t)$ существенно превосходит τ_i . В этом приближении:

$$\mathbf{v}_i = -2\tau_i \left(\frac{e\mathbf{E}}{M_i} - \frac{\text{grad } p}{nM} \right) \left(1 - \exp \left\{ - \frac{t}{2\tau_i} \right\} \right) - \int_0^t dt' \frac{\text{grad } p(t')}{n(t')M}. \quad (14)$$

Рассмотрим оценки градиента давления и силы Лоренца $e\mathbf{E}$ в случае потока электронов эмиссии с энергией $\varepsilon_e = 50$ кэВ, интенсивностью порядка

$N_e = 3 \cdot 10^{16}$ 1/(см с) и длительностью импульса $\tau_p = 10$ нс в воздухе при нормальных условиях. Предполагая, что вся энергия электронов эмиссии выделяется в слое воздуха толщиной, равной длине пробега электрона эмиссии $\lambda_e = 4.1$ см, получим оценки плотности энерговыделения w и градиента давления

$$w \sim \varepsilon_e N_e \tau_p / \lambda_e = 5.856 \text{ эрг/см}^3, \text{ grad } p \sim w / \lambda_e \sim 1.43 \text{ дин/см}^3.$$

Оценим концентрацию отрицательных ионов и объемную силу Лоренца F при тех же исходных данных о потоке электронов эмиссии. Выше отмечено, что в реакции прилипания к кислороду с образованием отрицательно заряженных молекулярных ионов вступают электроны с энергией менее 100 эв. [15, 16]. Таких энергий электроны эмиссии достигают в конце своей траектории. Для завышения оценки предположим, что термализованные электроны эмиссии прилипают к молекулам кислорода в слое толщиной $0.1\lambda_e$. Тогда:

$$n_i \sim N_e \tau_p / (0.1\lambda_e) = 0.7 \cdot 10^9 \text{ 1/см}^3, F \sim en_i E = 0.35E \text{ дин/см}^3,$$

$$E < 4\pi e N_e \tau_p = 1,8 \text{ СГС}.$$

Таким образом, градиент давления превосходит силу Лоренца. Дополнительным следствием данных оценок является обоснование использованного ранее приближения $n_i/n \ll 1$.

Градиент давления приводит в движение всю массу газа, включая ионы и нейтральные молекулы. Электрическое поле разгоняет только заряженные ионы. Скорость иона под действием электрического поля увеличивается до столкновения с молекулой, то есть в течение времени τ_i . При этом на отрезке времени, сопоставимом с τ_i , разгон иона в составе всего газа за счет градиента давления ничтожен.

Это выражается в том, что в (14) $e\mathbf{E} \gg \text{grad } p/n$. Учитывая это обстоятельство, а также предполагая, что рассматриваемые процессы образования и релаксации объемного заряда происходят на временах, существенно превышающих

τ_i , упростим формулу (14) следующим образом:

$$\mathbf{v}_i = -2\tau_i \frac{e\mathbf{E}}{M_i} - \int_0^t dt' \frac{\text{grad } p(t')}{n(t')M}.$$

Рассмотренные оценки позволяют установить время релаксации объемного заряда. Оно оценивается отношением длины пробега электрона эмиссии и скорости дрейфа отрицательных ионов, придаваемой им электрическим полем – примерно $2 \cdot 10^{-3}$ с в воздухе нормального давления. За время порядка τ_i ионы набирают скорость порядка $2 \cdot 10^3$ см/с. Максимальная скорость, которую ионы могут набрать за такое время за счет градиента давления, оказывается меньше на три порядка. Условие этого выражается следующим неравенством:

$$2\tau_i \frac{e\mathbf{E}}{M_i} \gg \frac{\text{grad } p}{nM} \tau_h,$$

где $\tau_h = \lambda_e M_i / (2\tau_i e\mathbf{E})$ – характерное гидродинамическое время релаксации отрицательных ионов.

Таким образом, на временах, характерных для релаксации объемного заряда, при рассмотренных параметрах эмиссии справедлива следующая формула для скорости дрейфа отрицательных ионов кислорода:

$$\mathbf{v}_i = -k_i \mathbf{E}(t), \quad (15)$$

где $k_i = 2e\tau_i / M_i$ – подвижность иона.

4. Динамика ионизованного газа

Рассмотрим уравнения динамики газа, ионизованного электронами эмиссии, на временах, когда рекомбинационные процессы закончены, а объемный заряд целиком определяется распределением отрицательных ионов кислорода. Газ состоит из нейтральных молекул с плотностью $\rho = \rho(t, \mathbf{r}) = Mn$ и дрейфовой скоростью $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ и отрицательных ионов с плотностью $\rho_i = \rho_i(t, \mathbf{r}) = M_i n_i$ и дрейфовой скоростью $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i(t, \mathbf{r})$. Уравнения для системы, включающей поток частиц, ионизованное вещество и электромагнитное поле, сформулированы в работе [25]. Приведем уравнения Эйлера, моделирующие движение сплошной среды, пренебрегая действием магнитного поля на движение ионов:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \mathbf{v} = 0, \quad (16)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{2} \frac{n_i}{n} \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_i}{\tau_i} \right) = -\text{grad} p, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \text{div} \rho_i \mathbf{v}_i = M_i \int d\mathbf{p} Q_i, \quad (18)$$

$$\rho_i \left(\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + (\mathbf{v}_i \nabla) \mathbf{v}_i + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{v}_i - \mathbf{v}}{\tau_i} \right) = -en_i \mathbf{E}. \quad (19)$$

Уравнения (16-19) описывают динамику двухкомпонентного газа. Компоненты – нейтральные молекулы и ионы – взаимодействуют между собой посредством трения с коэффициентом $1/(2\tau_i)$.

Рассмотрим уравнения (16-19) на характерных временах релаксации заряда, то есть порядка 10^{-3} с. Это время велико по сравнению с τ_i и мало по сравнению с временем, потребным для разгона среды под действием градиента давления. Учитывая, что $n_i \ll n$, для таких времен можно пренебречь движением нейтрального газа. Рассмотрим уравнения Эйлера для ионов:

$$\frac{\partial n_i M_i}{\partial t} + \text{div} n_i M_i \mathbf{v} = M_i \int d\mathbf{p} Q_i,$$

$$n_i M_i \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right) + \frac{n_i M_i}{2\tau_i} \mathbf{v} = -en_i \mathbf{E}.$$

Отсюда:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \text{div}(n_i \mathbf{v}) = \int d\mathbf{p} Q_i, \quad (20)$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right) + \frac{1}{2\tau_i} \mathbf{v} = -\frac{e}{M_i} \mathbf{E}. \quad (21)$$

Поскольку τ_i много меньше времени релаксации поля, то из (21) следует:

$$\mathbf{v} = -\frac{2e\tau_i}{M_i} \mathbf{E}. \quad (22)$$

Уравнение (22) в точности совпадает с (15). Тогда из (20) следует:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} - \operatorname{div}(k_i n_i \mathbf{E}) = \int d\mathbf{p} Q_i(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}). \quad (23)$$

Уравнения Максвелла (5) дополняются плотностью тока отрицательных ионов:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (\sigma \mathbf{E} + \mathbf{j} - ek_i n_i \mathbf{E}), \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (24)$$

Следует отметить, что величина $ek_i n_i \mathbf{E}$ в правой части уравнения (24) представляет собой конвекционный ток ионизованной среды. Дело в том, что в области, занятой термализованными электронами эмиссии, не выполняется необходимое для проводимости условие квазинейтральности среды.

Источник ионов в уравнении (16) строится как свертка финитных обобщенных функций $f_e(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ и $\sigma_{att}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{p}, \mathbf{p}') = v_{att} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \Theta(p_{att} - p')$. Функцию σ_{att} можно рассматривать как дифференциальное сечение образования отрицательных ионов при прилипанию термализованных электронов эмиссии к молекулам кислорода. Оно предполагает, что к молекуле кислорода прилипают электроны с энергией ниже некоторого порога $\varepsilon(p_{att})$.

$$Q_i(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{V_{att}}{p_{att}} \int d\mathbf{r}' \int d\mathbf{p}' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \Theta(p_{att} - p') f_e(t, \mathbf{r}', \mathbf{p}').$$

Тогда правая часть уравнения (23) $Q(t, \mathbf{r}) \equiv \int d\mathbf{p} Q_i(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ выражается следующим образом:

$$Q(t, \mathbf{r}) = \frac{V_{att}}{p_{att}} \int_0^t d\tilde{t} \int d\tilde{\mathbf{r}} \int d\tilde{\mathbf{p}} \Theta(p_{att} - p^s(t, \tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}})) Q_e(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^s(t, \tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}})). \quad (25)$$

Уравнения (23-25) в совокупности с уравнениями (1-4) и однородными начальными данными образуют задачу Коши, моделирующую процесс форми-

рования электромагнитного поля потоком электронов эмиссии, включая как высокочастотные, так и длиннопериодные процессы. Но время образования отрицательных ионов, создающих объемный заряд, при рассматриваемых исходных данных задачи не превышает десятков наносекунд. При этом время релаксации объемного заряда составляет величину порядка миллисекунды. Имеет место резкое различие в масштабах задачи. Это затрудняет реализацию численного алгоритма. Целесообразно завершить моделирование высокочастотной составляющей электромагнитного поля в момент времени $t = t_0$, когда импульсы стороннего тока и тока проводимости завершаются, а электрическое поле выходит на стационарное значение $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(t_0, \mathbf{r})$.

С этого момента действие источника ионов прекращается. Их результирующую концентрацию $n_i^0 = n_i(t_0, \mathbf{r})$ можно определить из закона Кулона:

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = -4\pi e n_i^0$$

или вычислять по ходу решения задачи для высокочастотной компоненты электромагнитного поля.

Задача моделирования релаксации отрицательных ионов и вычисления длиннопериодной компоненты электромагнитного поля после такой редукции принимает следующий вид:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} - \operatorname{div}(k_i n_i \mathbf{E}) = 0,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} e k_i n_i \mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

с начальными условиями $n_i|_{t=t_0} = n_i^0$, $\mathbf{E}|_{t=t_0} = \mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}|_{t=t_0} = 0$.

5. Модельная задача

Рассмотрим модельную задачу. Пусть монохроматический поток электронов с флюенсом ξ_0 эмитируется с поверхности $z = 0$. Энергия электронов такова, что их тормозной путь равен z_0 . К моменту времени $t = t_0$ на плоскости $z = z_0$ накапливаются отрицательные ионы с поверхностной плотностью ξ_0 . Устанавливается электрическое поле $E = E_0 = 4\pi e \xi_0 \Theta(z_0 - z) \Theta(z)$ «конденсатора», образованного положительно заряженной плоскостью эмиссии и отрицательными ионами. Рассмотрим уравнения (33-35) в одномерной постановке:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}(k_i E_z n_i) = \xi_0 \delta(t - t_0) \delta(z - z_0),$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} - 4\pi e k_i n_i E_z = 0.$$

Решение уравнения движения имеет вид:

$$z^s(t, \tilde{t}, \tilde{z}) = \tilde{z} - k_i E_z (t - \tilde{t}).$$

Тогда концентрация ионов вычисляется следующим образом:

$$n_i = \xi_0 \delta(z - z_0 + k_i E_z (t - t_0)).$$

Электрическое поле:

$$E_z = 4\pi e \xi_0 \Theta(z) \Theta(z_0 - 4\pi e \xi_0 k_i (t - t_0) - z). \quad (26)$$

Такое электрическое поле соответствует бесконечному плоскому конденсатору с подвижной границей. Поверхностный заряд обеих пластин равен $e\xi_0$ и противоположен по знаку. Левая граница сдвигается вправо со скоростью $4\pi e \xi_0 k_i$.

Заметим следующее. Дифференцируя электрическое поле (26) по координате z , получим плотность заряда:

$$\rho_i = e\xi_0 \left[\delta(z) \Theta(z_0 - 4\pi e \xi_0 k_i (t - t_0) - z) - \Theta(z) \delta(z_0 - 4\pi e \xi_0 k_i (t - t_0) - z) \right].$$

При $t = t_0$ плотность заряда соответствует упомянутому выше плоскому конденсатору.

Заключение

Термализация быстрых электронов в воздушной среде сопровождается образованием объемного электрического заряда. Заряд создается пространственным распределением отрицательных молекулярных ионов, образующихся в процессе прилипания термализованных электронов к молекулам кислорода.

Характерные частоты образования ионов существенно превосходят частоты их распада при столкновениях с нейтральными молекулами. Релаксация объемного заряда обусловлена дрейфом отрицательных ионов под действием созданного ими самосогласованного электрического поля и газодинамическим разлетом ионизованного вещества в целом. Несмотря на то что градиент давления, создаваемого при рассеянии электронного пучка в газе, превышает объемную силу Лоренца, действующую на ионизованное вещество, дрейф превалирует над разлетом.

Математическая модель релаксации объемного заряда отрицательных ионов основывается на уравнениях динамики газа отрицательных ионов под действием самосогласованного электрического поля в неподвижной среде нейтральных молекул. Скорость дрейфа ионов строится как момент функции распределения ионов путем анализа кинетического уравнения.

Список литературы

1. Ковалев В.П. Вторичные излучения ускорителей электронов. – М.: Атомиздат, 1979. 200 с.
2. Марков М.Б., Паротькин С.В., Сысенко А.В. Метод частиц для модели электромагнитного поля потока электронов в газе // Матем. моделирование, **20**:5 (2008), с.35–54.
3. Березин А.В., Жуков Д.А., Жуковский М.Е., Конюков В.В., Крайнюков В.И., Марков М.Б., Помазан Ю.В., Потапенко А.И. Моделирование электромагнитных эффектов в сложных конструкциях при воздействии импульсных излучений // Мат. моделир. и числ. методы, 2015, 6, с. 58–72.
4. Официальный сайт National Institute of Standarts and Technology <http://www.phys.nist.gov/>.
5. Mott N.F., Massey H.S.W. The theory of atomic collisions. – Oxford: Clarendon Press., 1965, p. 858.
6. Massey H.S.W., Burhop E.H.S. Electronic And Ionic Impact Phenomena. – Oxford: Clarendon Press., 1969, p.684.
7. Kim Yong-Ki, Rudd M.E. Theory for Ionization of Molecules by Electrons // Phys. Rev. 1994, v. 50, p. 3954-3967.
8. Kim Yong-Ki, Hwang W., Weinberger N.M. Electron-impact ionization cross sections of atmospheric molecules // J. Chem. Phys. 1997, 106 (3), p. 1026-1033.
9. Markov M.B. The approximation of homogeneous electron's scattering on trajectories // Matem. Mod., **21**:10 (2009), p.85-93.
10. Markov M.B., Parot'kin S. V. The kinetic model of the gas radiational conductivity // Math. Models Comput. Simul., **3**:6 (2011), p.712–722.
11. Смирнов Б. М. Физика слабоионизованного газа: В задачах с решениями. – М.: Наука, 1985.

12. Мак Даниэль И. Процессы столкновений в ионизированных газах. – М.: Мир, 1964.
13. Замышляев Б.В., Маслин Е.П., Лоборев В.М., Шилобреев Б.А. Физика ядерного взрыва В 2 т. Том 1. Наука. –М.:Физматлит, 1997.
14. Landau L.D., Lifshitz E.M. The Classical Theory of Fields. Vol. 2 (4th ed.). – Butterworth–Heinemann, 1975, p.402.
15. Rapp D., Briglia D.D. // J. Chem. Phys., 1965, **43**:5(1965), p.1480.
16. Александров Н.Л. Трехчастичное прилипание электрона к молекуле // УФН, **154**:2 (1988), с. 177.
17. Messier M.A., Hamilton R.M. DNA 3923T, 1975.
18. Grunberg R., Zs. Naturforsch, 24a, 1039 (1969).
19. Marks J.A., Pine V.W. AFWL-TR-73-286, 1973.
20. Шейкин Е.Г. Расчет параметров воздушной плазмы в канале МГД-генератора с неравновесной проводимостью, создаваемой электронным пучком // ЖТФ, **77**:5(2007).
21. Григорьев В.П., Томашова О.В. Моделирование процессов ионизации в атмосфере, инициируемых радиоактивными выбросами // Известия Томского политехнического университета. **306**:5 (2003).
22. Базелян Э. М., Райзер Ю. П. Искровой разряд. – М.: Изд-во МФТИ. 1997.
23. Райзер Ю. П. Физика газового разряда. – М.: Наука, 1992.
24. Голант В.Е., Жилинский А.П., Сахаров И.Е. Основы физики плазмы – М., Атомиздат, 1977.
25. Voronin F. N., Inozemtseva K. K., Markov M. B. The electromagnetic and termomechanical effect of electron beam on the solid barrier // Math. Models Comput. Simul., **10**:4 (2018), p.407–417.