ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 10 за 2020 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Зипунова Е.В., Савенков Е.Б.

Применение метода проекции ближайшей точки для решения уравнений гидродинамики в приближении смазочного слоя

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Зипунова Е.В., Савенков Е.Б. Применение метода проекции ближайшей точки для решения уравнений гидродинамики в приближении смазочного слоя // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 10. 32 с. http://doi.org/10.20948/prepr-2020-10
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-10

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. КЕЛДЫША

Е.В. Зипунова, Е.Б. Савенков

Применение метода проекции ближайшей точки для решения уравнений гидродинамики в приближении смазочного слоя

Москва, 2020

Е.В. Зипунова, Е.Б. Савенков, Применение метода проекции ближайшей точки для решения уравнений гидродинамики в приближении смазочного слоя

Аннотация. В работе рассмотрено применение метода проекции ближайшей точки для решения уравнений смазочного слоя. Основным приложением является течение жидкости в трещине гидроразрыва пласта. В качестве тестовых примеров рассмотрены модельные задачи для уравнения теплопроводности и задачи расчета течения в приближении смазочного слоя в плоских и неплоских трещинах с переменным раскрытием, в том числе зависящим от давления в трещине. Целью работы является апробация метода проекции ближайшей точки для решения задач рассматриваемого класса.

Ключевые слова: метод проекции ближайшей точки, метод конечных элементов, трещина гидроразрыва пласта, приближение смазочного слоя.

E.V. Zipunova, E.B. Savenkov, Solving Reynolds lubrication equations using closest point projection method

Abstract. In this paper we consider application of the closest point projection method to solution of Reynolds lubrication equation. The main application is thin film flow simulation in fracture during hydraulic fracturing procedure. The problems considered in the paper include model heat tranport equation, fracture flow in planar and non-planar fractures with pressure independent and pressure dependent opening. The goal of the paper is a ganeral testing of the approach for the considered class of problems.

Key words and phrases: closest point projection method, finite element method, hydraulic fracture, Reynolds lubrication equations

1 Введение

В работах [Ruuth2008, Merriman2007, Macdonald2008, Macdonald2009, Macdonald2011] был предложен оригинальный метод решения уравнений на поверхностях, основанный на представлении поверхности с помощью оператора проекции ближайшей точки. Суть метода заключается в том, что сначала с помощью оператора проекции ближайшей точки, строится продолжение уравнения с поверхности в трехмерное пространство. Далее «продолженная» задача аппроксимируется подходящим разностным методом на сетке, не согласованной с геометрией поверхности. В качестве решения исходной задачи на поверхности рассматривается след решения продолженной трехмерной задачи на ней. Одновременно с этим оператор проекции ближайшей точки используется для аппроксимации граничных условий Дирихле (и Неймана) на границе как исходной поверхности, так и трехмерной области, в которой рассматривается продолженное уравнение.

Особенностью этого метода является то, что он естественным (в отличие от ряда других методов, см. [Савенков2020a]) образом позволяет решать уравнения на поверхностях с *краем* — а также в областях, являющихся объединением многообразий различной (ко)размерности, вложенных в трехмерное пространство.

Целью настоящей работы является апробация метода проекции ближайшей точки для решения ряда модельных задач и задачи о течении жидкости в тонком слое применительно к трещине гидроразрыва пласта.

В настоящее время гидравлический разрыв пласта (гидроразрыв пласта, ГРП) является одним из самых распространенных методов увеличения нефтеотдачи, используемых при промышленной разработке нефтегазовых месторождений. Сущность технологии ГРП заключается в закачке в нефтеносный пласт специальной жидкости разрыва с целью создания искусственной (техногенной) трещины значительной протяженности (длина $\sim$ 100 м, высота $\sim$ 10 м, среднее раскрытие $\sim$ 5–10 мм). Созданная трещина заполняется проппантом (калиброванным искусственным или естественным «песком»). В результате создается соединенный со скважиной искусственный канал с большой площадью притока, имеющий высокую (на порядки превышающую пластовую) проницаемость. Это обеспечивает значительное увеличение притока пластового флюида к скважине. Инженерные аспекты технологии рассмотрены, например, в [Экономидес2007, Салимов2013]. Физико–математическое описание динамики трещины ГРП в ходе ее развития сводится к решению сложной связанной задачи, включающей в себя (помимо других групп уравнений) уравнения течения (обычно неньютоновской) жидкости разрыва в эволюционирующей трещине.

При этом считается, что:

- геометрически трещина описывается своей срединной поверхностью с заданным в каждой ее точке раскрытием;
- срединная поверхность трещины является произвольной, но заданной поверхностью с краем;
- в фиксированной точке срединной поверхности раскрытие является заданной известной функцией.

Необходимость разработки эффективных и робастных численных методов решения этой задачи связанна прежде всего с тем, что:

- в ходе процедуры ГРП трещина эволюционирует, причем точный характер этой эволюции заранее неизвестен (другим словами, область решения задачи меняется с течением времени);
- срединная поверхность трещины не является плоской — трещина может «поворачивать», причем направление ее развития может быть различным в разных точках ее фронта.

Работа содержит краткое описание используемой математической модели. В общем случае она предполагает, что раскрытие трещины зависит от положения точки на ее срединной поверхности и давления в ней. В порядке возрастания сложности рассмотрены следующие постановки:

- уравнения Лапласа на поверхности;
- уравнения смазочного слоя для трещины с переменным по пространству и не зависящим от давления (как следствие, и от времени) раскрытием;
- уравнения смазочного слоя для трещины с переменным по пространству и зависящим от давления раскрытием.

Рассматривается только случай трещины со стационарной (не зависящей от времени) срединной поверхностью. Случай трещины с эволюционирующей поверхностью будет рассмотрен в отдельной работе.

В отличие от цитированных в начале этого раздела работ, для построения аппроксимаций задачи используется метод конечных элементов. В силу того, что в работе используется целый ряд постановок, их описание и особенности используемых вычислительных алгоритмов представлены в соответствующих разделах с результатами расчетов. Основные построения метода проекции ближайшей точки проиллюстрированы на примере уравнения теплопроводности для трещины со стационарной геометрией.

2 Метод проекции «ближайшей точки» (closest point method)

В настоящем разделе коротко описаны основные идеи метода решения уравнений на поверхностях, предложенного и развитого в работах [Ruuth2008, Merriman2007, Macdonald2011, Macdonald2008, Macdonald2009]. Метод использует неявное представление поверхности и продолжение уравнения на поверхности во вмещающее ее пространство, однако использует с этой целью не распространенный метод множеств уровня (см. обзор в [Савенков2020a]), а метод проекции ближайшей точки.

Рассмотрение будем вести на примере модельной краевой задачи для параболического уравнения с оператором оператора Лапласа–Бельтрами (см., например, [Дубровин1986]) на криволинейной поверхности $\mathcal{F}$ с краем:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_{\mathcal{F}} u = 0, \tag{1}$$

дополненного граничным условием нужного вида.

Будем считать, что поверхность $\mathcal{F}$ целиком расположена внутри пространственной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Пусть для произвольной точки $\boldsymbol{x} \in \Omega$ точка $\boldsymbol{x}_{\text{cp}}$ — ближайшая к ней точка на поверхности $\mathcal{F}$,

$$\boldsymbol{x}_{\text{cp}} = \operatorname*{arg\,min}_{\boldsymbol{y} \in \mathcal{F}} \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\|,$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^3$. Точку $\boldsymbol{x}_{\text{cp}}$ будем называть проекцией точки $\boldsymbol{x}$ на поверхность $\mathcal{F}$, а соответствующий оператор будем обозначать $\mathbf{P}$,

$$\boldsymbol{x}_{\text{cp}} = \mathbf{P}\,\boldsymbol{x}.$$

Оператор $\mathbf{P}$ является векторнозначным: он отображает область Ω на поверхность $\mathcal{F}$, рассматриваемую как подмножество в $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Если для поверхности $\mathcal{F}$ можно задать функцию знакового расстояния $d_{\mathcal{F}}(\boldsymbol{x})$ (например, если $\mathcal{F}$ — ориентированная поверхность без края), то для оператора $\mathbf{P}$ справедливо представление:

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - d_{\mathcal{F}}(\boldsymbol{x}) \nabla d_{\mathcal{F}}(\boldsymbol{x}), \quad d(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x} - \mathbf{P}\,\boldsymbol{x}\|.$$

Так же, как и функция знакового расстояния (или пара таких функций, в случае поверхности с краем), проектор $\mathbf{P}$ однозначно описывает поверхность $\mathcal{F}$,

$$\mathcal{F} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \Omega : \quad \boldsymbol{x} = \mathbf{P}\,\boldsymbol{x} \right\}.$$

Однако последний способ является более общим: он позволяет описывать геометрию поверхности с краем, неориентируемые многообразия или многообразия коразмерности больше единицы (то есть, в случае трехмерной области, кривые (коразмерность 2) и точки (коразмерность 3)), — а также объединение объектов различной коразмерности [Macdonald2011].

С помощью проектора $\mathbf{P}$ легко построить продолжение произвольной функции, заданной на поверхности, во всю область Ω: для произвольной функции u, заданной на поверхности, ее продолжение $\mathcal{E}[u]$ в Ω определим как

$$\mathcal{E}[u](\boldsymbol{x}) = u(\mathbf{P}\,\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega.$$

Таким способом построенный оператор продолжения может быть определен для произвольных функций, заданных в *пространстве*. А именно, любая функция, заданная в пространстве, однозначно определяет функцию на поверхности как свой собственный след на ней. Поэтому для функций, заданных в пространстве, определим оператор $\mathcal{E}$ следующим образом:

$$\mathcal{E}[u](\boldsymbol{x}) = u(\mathbf{P}\,\boldsymbol{x}).$$

В обоих случаях оператор $\mathcal{E}$ является проектором в том смысле, что $\mathcal{E}^2 = I$, где I — тождественный оператор.

Отметим, что:

- для произвольной функции в Ω, постоянной в направлении нормали к $\mathcal{F}$

$$(\nabla u)\,|_{\mathcal{F}} = \nabla_{\mathcal{F}}\,(u|_{\mathcal{F}})\,;$$

- для произвольного векторного поля в Ω, касательного к поверхности $\mathcal{F}$

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{q})\,|_{\mathcal{F}} = \nabla_{\mathcal{F}} \cdot (q|_{\mathcal{F}})\,.$$

Тогда в силу свойств проектора $\mathbf{P}$ и оператора продолжения $\mathcal{E}$ имеем:

$$\nabla \mathcal{E}[u](\boldsymbol{x}) = \nabla u(\mathbf{P}\,\boldsymbol{x}) = \nabla_{\mathcal{F}} u.$$

В силу того, что восполнение $\mathcal{E}[u](\boldsymbol{x})$ постоянно вдоль направлений, нормальных к поверхности, векторное поле $\nabla \mathcal{E}[u](\boldsymbol{x})$ является касательным к $\mathcal{F}$. Отсюда следует, что

$$\nabla \cdot [\nabla \mathcal{E}[u](\boldsymbol{x})] = \nabla \cdot [\nabla u(\mathbf{P}\,\boldsymbol{x})] = \nabla_{\mathcal{F}} \cdot \nabla_{\mathcal{F}} u.$$

Аналогичные продолжения можно построить и для более сложных эллиптических операторов дивергентного типа, см. [März2012].

Таким образом, исходное уравнение (1) может быть продолжено во всю область Ω. Далее продолженное уравнение аппроксимируется подходящим разностным методом на трехмерной сетке, введенной в области Ω и не согласованной с геометрией поверхности. Решение исходной задачи на поверхности восстанавливается как след решения трехмерной задачи на поверхности. Строгое обоснование описанных выше построений представлено в работе [März2012]. Детали метода подробно изложены в работах, цитированных в данном разделе выше.

Отдельной задачей в рамках рассмотренного подхода является учет граничных условий на границе $\partial\mathcal{F}$ поверхности $\mathcal{F}$. В работе [Macdonald2011] предложен удобный вариант способа их задания, основанный на использовании специального вида оператора продолжения с поверхности в пространство.

3 Постановка задачи и вычислительный алгоритм

В настоящем разделе представлено краткое описание использованного алгоритма.

Рассмотрим одностороннюю поверхность $\bar{\mathcal{F}}$ с краем $\partial\mathcal{F}$, погруженную в трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$. Тогда

$$\bar{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cup \partial\mathcal{F},$$

где открытая область $\mathcal{F}$ — внутренняя часть поверхности, $\partial\mathcal{F}$ — ее граница. В некоторых случаях, когда это не будет вызывать неоднозначности, будем отождествлять обозначения $\mathcal{F}$ и $\bar{\mathcal{F}}$. Будем считать, что $\mathcal{F}$ и ее край имеют требуемую гладкость.

Поверхность $\bar{\mathcal{F}}$ будем считать расположенной внутри пространственной области Ω. Пусть Ω такова, что в каждой ее точке однозначно определены значения проектора ближайшей точки $\mathbf{P}$ на $\bar{\mathcal{F}}$ (см. раздел 2).

В зависимости от расположения точки в пространстве, ее проекция на $\bar{\mathcal{F}}$ принадлежит либо $\mathcal{F}$, либо $\partial\mathcal{F}$. Это позволяет представить область Ω в виде объединения

$$\Omega = \Omega_{\mathcal{F}} \cup \Omega_{\partial\mathcal{F}},$$

где

$$\Omega_{\mathcal{F}} = \{\boldsymbol{x} \in \Omega :\ \mathbf{P}\,\boldsymbol{x} \in \mathcal{F}\}, \quad \Omega_{\partial\mathcal{F}} = \{\boldsymbol{x} \in \Omega :\ \mathbf{P}\,\boldsymbol{x} \in \partial\mathcal{F}\}.$$

Границу $\partial\Omega_{\mathcal{F}}$ области $\Omega_{\mathcal{F}}$ представим в виде

$$\partial\Omega_{\mathcal{F}} = \Gamma_{\mathcal{F}} \cup \Gamma_{\partial\mathcal{F}}, \quad \Gamma_{\mathcal{F}} = \partial\Omega_{\mathcal{F}} \cap \partial\Omega, \quad \Gamma_{\partial\mathcal{F}} = \partial\Omega_{\mathcal{F}} \setminus \Gamma_{\mathcal{F}}.$$

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу: определить заданную в $\bar{\mathcal{F}}$ функцию $u = u(\boldsymbol{x}, t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla_{\mathcal{F}} \cdot (-\nabla_{\mathcal{F}} u) = f, \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{F}, \tag{2}$$
$$u|_{\partial \mathcal{F}} = g, \quad \boldsymbol{x} \in \partial \mathcal{F},$$

с начальным условием $u(\boldsymbol{x}, t = 0) = u_0(\boldsymbol{x})$.

В соответствии со способом, предложенным в [Macdonald2011] и кратко описанным выше в разделе 2, рассмотрим продолжение уравнения (2) в пространственную область $\Omega_{\mathcal{F}}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (\nabla \mathcal{E}[u]) = \mathcal{E}[f], \quad \boldsymbol{x} \in \Omega_{\mathcal{F}}. \tag{3}$$

След решения этого уравнения на $\mathcal{F}$ является решением уравнения (2).

Относительно области Ω считается, что она (а) мала в том смысле, что в каждой ее точке однозначно определена проекция точки области (то есть значения оператора $\mathbf{P}$) на поверхность и ее край и (б) область Ω включает в себя поверхность $\mathcal{F}$, $\Omega \supset \mathcal{F}$, причем расстояние от граничных точек области до поверхности положительно. Другими словами, все точки поверхности являются внутренними точками области.

В том случае, если поверхность $\mathcal{F}$ является поверхностью без края, значение решения $u(t, \boldsymbol{x})$ последней задачи в точках, лежащих на поверхности $\mathcal{F}$, будет совпадать с решением исходной задачи на поверхности (в этом случае $\mathcal{F} = \emptyset$ и задача (2) является задачей Коши).

Граничные условия для уравнения (3) на «боковой» границе $\Gamma_{\partial\mathcal{F}}$ области $\Omega_{\mathcal{F}}$ могут быть построены как продолжение граничных условий на $\partial\mathcal{F}$ исходной задачи (2):

$$u|_{\Gamma_{\partial\mathcal{F}}} = \mathcal{E}[u|_{\partial\mathcal{F}}] = \mathcal{E}[g], \tag{4}$$

или, что то же,

$$u(\boldsymbol{x}) = g(\mathbf{P}\,\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}_{\text{ср}}), \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma_{\partial\mathcal{F}}, \;\; \boldsymbol{x}_{\text{ср}} = \mathbf{P}\,\boldsymbol{x} \in \partial\mathcal{F}.$$

Отметим, что значения решения задачи (3) на части границы $\Gamma_{\mathcal{F}}$ полностью определяются как продолжение u из внутренних точек поверхности $\mathcal{F}$. По этой причине граничные условия для (3) на этой участи границы не ставятся.

Опишем коротко способ построения аппроксимаций. Пусть $\mathcal{T}_h = \mathcal{T}_h(\Omega)$ — заданное в области Ω ее правильное разбиение на треугольные конечные элементы ω (другими словами, два конечных элемента либо имеют пустое пересечение, либо общее ребро, либо общий узел). Будем считать, что

$$\Omega_h = \bigcup_{\omega \in \mathcal{T}_h} \omega = \Omega,$$

то есть область Ω и ее граница аппроксимируются точно.

Пусть $\mathcal{N}$ — множество узлов триангуляции, с каждым из которых связана базисная функция $\varphi_i = \varphi_i(\boldsymbol{x})$, $i \in \mathcal{N}$. Далее можно считать, что используются простейшие непрерывные кусочно-линейные конечные элементы Куранта. Тогда конечномерное пространство $V_h(\Omega) \subset V(\Omega)$ может быть определено как

$$V_h(\Omega) = \operatorname*{span}_{i \in \mathcal{N}} \varphi_i(\boldsymbol{x}). \tag{5}$$

Напомним, что граница Γ области Ω аппроксимируется расчетной сеткой точно, то есть образована ребрами конечных элементов. Пусть $\mathcal{N} = \mathcal{N}_\Omega \cup \mathcal{N}_\Gamma$, $\mathcal{N}_\Omega$ и $\mathcal{N}_\Gamma$ — множество узлов внутри области Ω и на ее границе Γ соответственно. Тогда элементы пространства $V_h = V_h(\Omega)$ имеют вид

$$v_h(\boldsymbol{x}) = \sum_{i \in \mathcal{N}_\Omega \cup \mathcal{N}_\Gamma} v_i \varphi_i(\boldsymbol{x}).$$

Вектор $\boldsymbol{v}_h$ с компонентами $[\boldsymbol{v}_h]_i = v_i$, $i \in \mathcal{N}$ будем иногда называть вектором степеней свободы решения.

Сначала построим дискретную аппроксимацию $\mathbf{P}_h$ оператора проектора ближайшей точки $\mathbf{P}$ (подробно этот вопрос рассматривается в [Иванов2017]).

В дискретном случае оператор проектирования $\mathbf{P}_h$ задается своими значениями $\mathbf{P}_{h,i}$ в узлах сетки. При этом проекция узла $\boldsymbol{x}_i$ узла сетки Ω_h, вообще говоря, не совпадает ни с каким другим узлом сетки (равно как и с ребром или гранью).

Опишем способ построения дискретной аппроксимации оператора продолжения. Рассмотрим произвольный узел $\boldsymbol{x}_i$ сетки Ω_h. Пусть $\boldsymbol{x}_i^{\text{ср}}$ — его проекция, ω_i — тетраэдр сетки, в котором расположена точка проекции. Оператор продолжения определяет значение продолженной функции в узле $\boldsymbol{x}_i$ как $u_h(\mathbf{P}_h\, \boldsymbol{x}_i)$. Это значение может быть вычислено с помощью линейной интерполяции по значениям решения u_k, $k \in \omega_i$, в узлах тетраэдра ω_i, внутри которого расположена проекция узла $\boldsymbol{x}_i$. В результате, значение u_h^{ext} конечномерной аппроксимации $\mathbf{E}_h$ оператора продолжения имеет вид:

$$u_h^{\text{ext}} = \mathbf{E}_h \boldsymbol{u}_h,$$

где $\mathbf{E}_h$ — квадратная матрица, ненулевые строки которой имеют вид

$$\mathbf{E}_h(i, [k_1, k_2, k_3, k_4]) = [\xi_1(\omega_i), \xi_2(\omega_i), \xi_3(\omega_i), \xi_4(\omega_i)],$$

где $\xi_\alpha(\omega_i)$ — барицентрические координаты точки $\mathbf{P}(\boldsymbol{x}_i)$, относящиеся к узлам тетраэдра ω_i.

С учетом этого аппроксимации метода конечных элементов для уравнения (3) (для случая однородных граничных условий Неймана) имеют вид:

$$\mathbf{M}_h \frac{\hat{\boldsymbol{u}}_h - \boldsymbol{u}_h}{\Delta t} = \mathbf{A}_h \mathbf{E}_h \boldsymbol{u}_h + \mathbf{E}_h \mathbf{f}_h,$$

где $\mathbf{M}_h$ — матрица масс, $\boldsymbol{u}_h = \boldsymbol{u}_h(t)$ — вектор степеней свободы решения в момент времени t, $\hat{\boldsymbol{u}}_h = \boldsymbol{u}_h(t+\Delta t)$ — вектор степеней свободы решения в момент времени $t+\Delta t$, $\mathbf{f}_h$ — правая часть конечномерной задачи, $\mathbf{A}$ — ее матрица жесткости,

$$[\mathbf{M}_h]_{ij} = \int\limits_{\Omega} \phi_i \phi_j \, d\Omega, \quad [\mathbf{A}_h]_{ij} = \int\limits_{\Omega} \nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_j \, d\Omega, \quad [\mathbf{f}_h]_i = \int\limits_{\Omega} f\phi_i \, d\Omega, \quad i,j \in \mathcal{N}.$$

Как показывают результаты работы [Macdonald2009], таким образом построенные аппроксимации оператора могут быть неустойчивы в силу того, что матрица $\mathbf{B} = \mathbf{AE}$ может иметь собственные числа как с положительной, так и с отрицательной действительной частью. В той же работе предлагается модификация, устраняющая этот эффект, а именно

$$\tilde{\mathbf{B}}_h = \operatorname{diag}\mathbf{A}_h + (\mathbf{A}_h - \operatorname{diag}\mathbf{A}_h)\mathbf{E}_h.$$

Такая же модификация используется в настоящей работе.

Результирующая система линейных алгебраических уравнений для определения вектора степеней свободы решения имеет вид:

$$(\mathbf{M}_h - \Delta t\mathbf{B}_h)\hat{\boldsymbol{u}}_h = \Delta t\mathbf{E}_h\boldsymbol{f}_h + \mathbf{M}_h\boldsymbol{u}_h.$$

Для учета граничных условий в дискретной задаче для продолженного уравнения могут использоваться различные способы. В настоящей работе используется простейший из них, а именно, значениям решения в узлах расчетной сетки, которые проектируются на край поверхности, приписываются соответствующие значения, заданные на границе. Технически это осуществляется стандартным способом, путем модификации нужных строк последней системы уравнений выше.

4 Результаты расчетов

4.1 Уравнение теплопроводности

В настоящем разделе расматривается применение метода проекции ближайшей точки для решения простейшей задачи — краевой задачи Коши для уравнения теплопроводности. На примере этой задачи будут рассмотрены основные особенности реализации метода проекции ближайшей точки.

Постановка задачи имеет вид: определить определенное в цилиндре $\mathcal{F} \times [0,T]$ функцию $u = u(\boldsymbol{x}, t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_{\mathcal{F}} u + f \tag{6}$$

и начальным и граничным условиям

$$u(\boldsymbol{x}, t=0) = u_{\text{ini}}(\boldsymbol{x}), \quad u|_{\partial\mathcal{F}} = u_{\partial\mathcal{F}}.$$

Поверхность $\mathcal{F}$ является гладкой поверхностью с краем (границей) $\partial\mathcal{F}$, вложенной в трехмерное пространство.

Основные этапы численного решения включают в себя следующие:

1. Задается пространственная область Ω, содержащая в себе поверхность $\mathcal{F}$ с краем $\partial\mathcal{F}$, $\bar{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cup \partial\mathcal{F} \subset \Omega$. Ниже область Ω всегда имеет форму куба с ребром длины l. В этой области задается сетка Ω_h из тетраэдров, которая строится следующим образом: сначала в Ω вводится равномерная сетка из $N_x \times N_y \times N_z$ кубов меньшего размера, каждый из которых далее разбивается на пять тетраэдров. В дальнейшем всегда $N_x = N_y = N_z = N$. Под шагом сетки понимается величина $h = l/N$. Не предполагается, что поверхность $\mathcal{F}$ и построенная сетка согласованны (другими словами, поверхность $\mathcal{F}$ нельзя представить как объединение граней сетки).

   Построенная сеточная область Ω_h в расчетах непосредственно не используется, однако служит для построения сеточной области $\Omega^h_{\mathcal{F}}$, в которой определяются решения продолжения уравнения (6) в пространство.

2. В соответствии с рассматриваемым подходом задача решается в сеточной области $\Omega_{\mathcal{F}}$, которая является «подсеткой» сетки Ω^h так, что расстояние (в смысле проекции ближайшей точки) от всех узлов сетки в области $\Omega^h_{\mathcal{F}}$ до поверхности не превышает заданную величину δ. Во всех расчетах ниже эта величина выбирается как $\delta = N_\delta h$, где $N_\delta = 4$.

   Далее области Ω и Ω^h (а также $\Omega^h_{\mathcal{F}}$ и $\Omega_{\mathcal{F}}$) отождествляются и верхний индекс h не используется, если это не мешает пониманию.

3. В области $\Omega_{\mathcal{F}}$ применяется ранее описанный вариант метода. Граничные условия задаются простейшим способом, в соответствии с разделом 3.

   Численное исследование других вариантов метода (см. [Савенков2020b]) здесь не рассматривается и является предметом отдельной работы.

4. В ряде рассматриваемых ниже случаев требуется задавать граничное условие в центре трещины. В этом случае считается, что заданным является значение решения в небольшой окрестности $\mathcal{F}^h_{\text{bc}}$ центра трещины, которая имеет форму круга радиусом R, лежащего в плоскости трещины и центр которого совпадает с ее центром. В этом случае уравнение (6) формально решается в области $\mathcal{F} \setminus \Omega_{\text{bc}}$.

Для рассматриваемого в настоящем разделе примера поверхность $\mathcal{F}$ имеет форму плоского диска диаметром $L = 1$. Диск расположен в плоскости $\mathcal{O}xy$ с центром в начале координат. Вмещающая диск область Ω имеет форму куба с ребром длины $l = 1.5$.

На каждом ребре куба Ω задается $N = 31$ узел сетки. Таким образом, в рассматриваемом случае характерный шаг четки $h = 0.05$. Шаг по времени $\Delta t = 10^{-7}$.

Отметим, что длина ребра l куба Ω и радиус диска L меняются в зависимости от постановки задачи, однако число узлов N на ребре куба остается неизменным во всех описанных ниже вариантах расчета.

Правая часть уравнения (6) $f = 0$. Граничные и начальные условия определяются функциями

$$u_{\mathrm{ini}}(\boldsymbol{x}) = 0, \quad u_{\partial\mathcal{F}}(\boldsymbol{x}, t) = 1.$$

В соответствии с алгоритмом метода ближайшей точки уравнение, являющееся продолжением уравнения (6), решается в пространственной области $\Omega_{\mathcal{F}} \subset \Omega$. Область $\Omega_{\mathcal{F}}$ состоит из тех конечных элементов, все узлы которых удалены от $\mathcal{F}$ на расстояние не более $\delta = 0.2$. Таким образом, «толщина» «облака» (множества узлов сеточной области $\Omega_{\mathcal{F}}$) равняется $2\delta = 0.4$ (≈ 8 узлов сетки). Наибольший диаметр облака равняется 1.4 (≈ 28 узлов сетки).

На примере рассматриваемой задачи проиллюстрируем основные геометрические построения метода проекции ближайшей точки.

На рисунке 1 синими сферами обозначены точки облака (узлы области $\Omega_{\mathcal{F}}$), сетка из красных линий показывает поверхность $\mathcal{F}$. Эта сетка является исключительно визуализационной и не используется в расчетах.

На рисунке 2 изображено сечение области Ω плоскостью, проходящей через центр диска $\mathcal{F}$ и перпендикулярной его плоскости. Сетка красного цвета показывает поверхность $\mathcal{F}$, красные сферы — узлы в области $\Omega_{\mathcal{F}}$ («облаке»).

На рисунке 3 изображены сечения расчетной области плоскостями $\mathcal{O}xy$ и $\mathcal{O}yz$. Красными сферами обозначены узлы области $\Omega_{\mathcal{F}}$, проекции которых принадлежат краю $\partial\mathcal{F}$ поверхности. Белые сферы — узлы в $\Omega_{\mathcal{F}}$, проекции которых являются внутренними точками поверхности $\mathcal{F}$. Синими линиями обозначена сетка, заданная в области Ω.

Дискретный оператор проектора ближайшей точки определен только для узлов, расположенных в области $\Omega_{\mathcal{F}}$. На рисунке 4 изображены вектора, соединяющие узлы сетки $\boldsymbol{x}$ с их проекциями $\mathbf{P}(\boldsymbol{x})$ на $\mathcal{F}$. Цвет каждого вектора соответствует его длине.

На рисунке 5 показана поверхность $\mathcal{F}$ и проекции на нее всех узлов области $\Omega_{\mathcal{F}}$. Маркеры, обозначающие проекции узлов, расположенных во внутренней части области $\mathcal{F}$ и на ее границе, показаны разным цветом (синим и красным соответственно).

Численное решение уравнения (6) через 1 и 10 шагов по времени показано на рисунке 6. В левом столбце рисунков показан след решения трехмерной

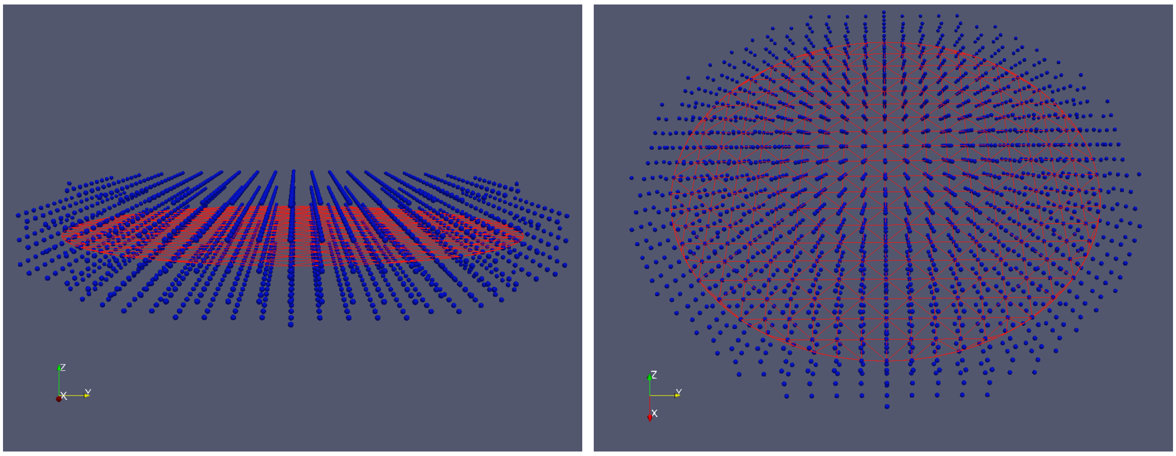

Рис. 1. Поверхность $\mathcal{F}$ (красная сетка) и узлы трехмерной сетки (синие маркеры) в области $\Omega_{\mathcal{F}}$.

задачи на поверхности $\mathcal{F}$ (отметим, что именно так определяется решение исходной задачи на поверхности). В правом — след решения трехмерной задачи на плоскости, перпендикулярной поверхности $\mathcal{F}$ и проходящей через ее центр.

Обратим внимание на следующий факт. Для точного решения рассматриваемой задачи линии уровня решения являются окружностями. Однако на приведенных выше рисунках линии уровня решения вблизи границы расчетной области имеют характерные «уголки». Это аппроксимационный эффект, связанный с тем, что рассматриваемая расчетная сетка является недостаточно мелкой. По существу, он связан с тем, что минимальное расстояние от проекции узла, расположенной вблизи границы, до непосредственно границы, имеющей форму окружности, меняется в пределах шага расчетной сетки. Другими словами, для ряда узлов расстояние от их проекции до границы области практически равно нулю. Однако сами эти узлы не являются «граничными» в том смысле, что при решении конечномерной задачи в них задается аппроксимация уравнения, а не аппроксимация граничного условия.

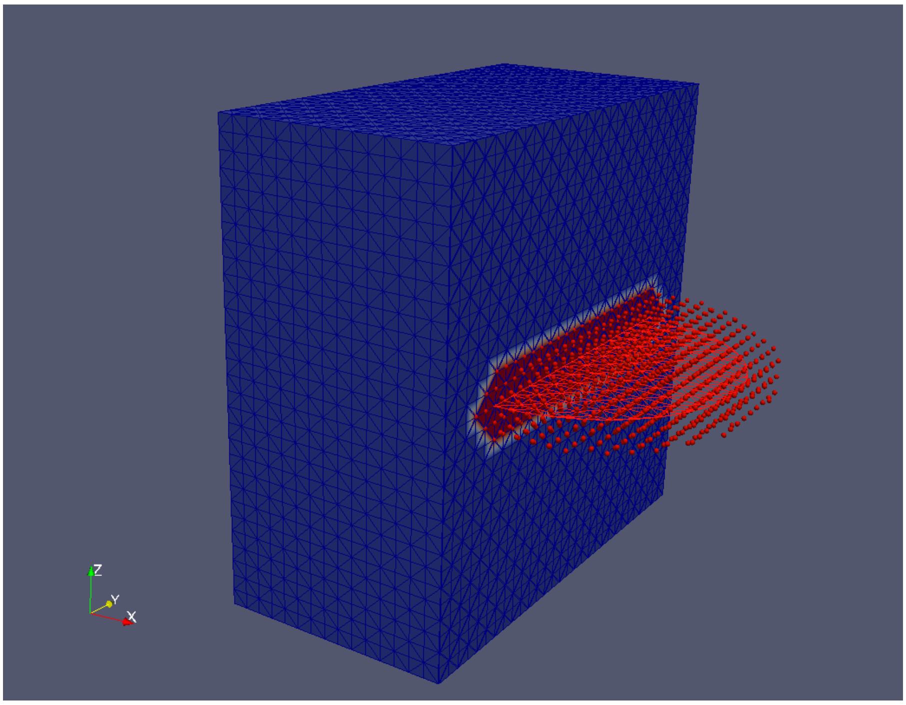

Рис. 2. Сечение области Ω, поверхность (красная сетка) и узлы сетки в области $\Omega_{\mathcal{F}}$ (красные маркеры).

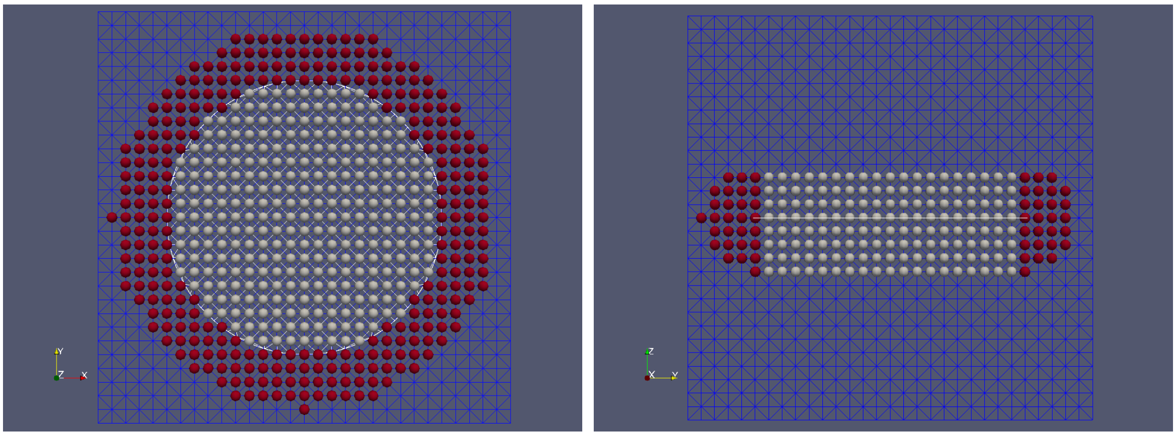

Рис. 3. Белые сферы — узлы, проецирующиеся внутрь $\mathcal{F}$, красные — на ее край $\partial\mathcal{F}$. Синими линиями обозначена расчетная сетка.

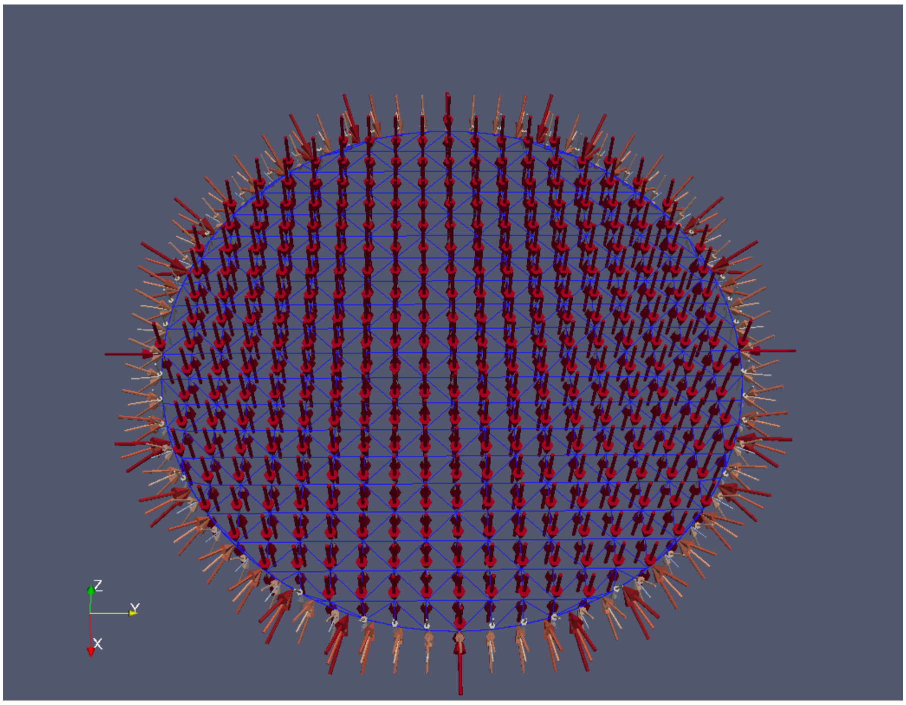

Рис. 4. Вектора проекции узлов области $\Omega_{\mathcal{F}}$ на $\mathcal{F}$.

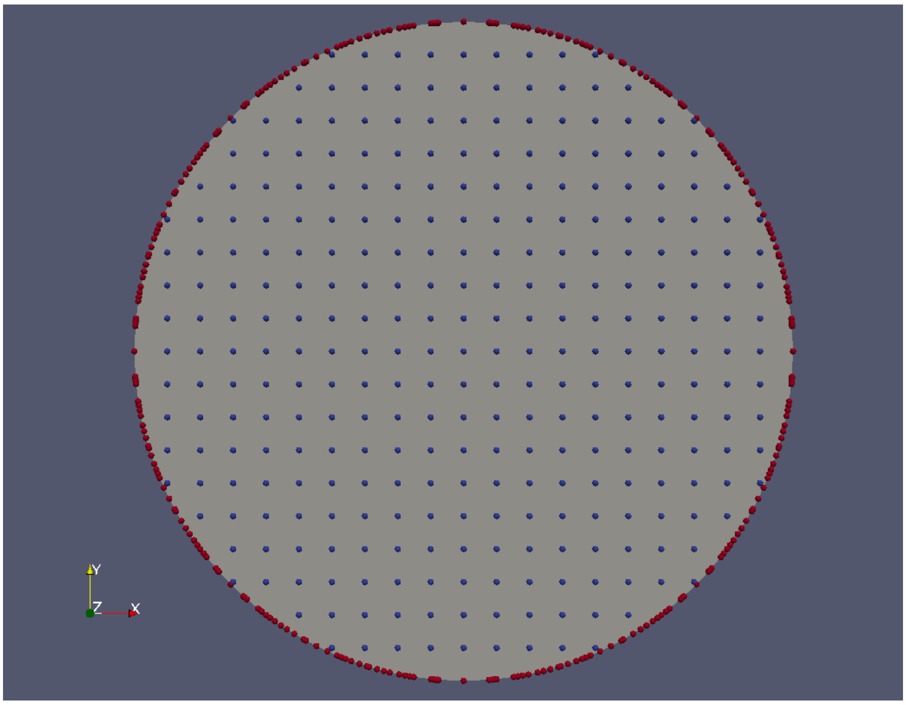

Рис. 5. Проекции точек облака внутрь поверхности $\mathcal{F}$ — синие сферы, на ее край $\partial\mathcal{F}$ — красные сферы. Поверхность $\mathcal{F}$ показана серым цветом.

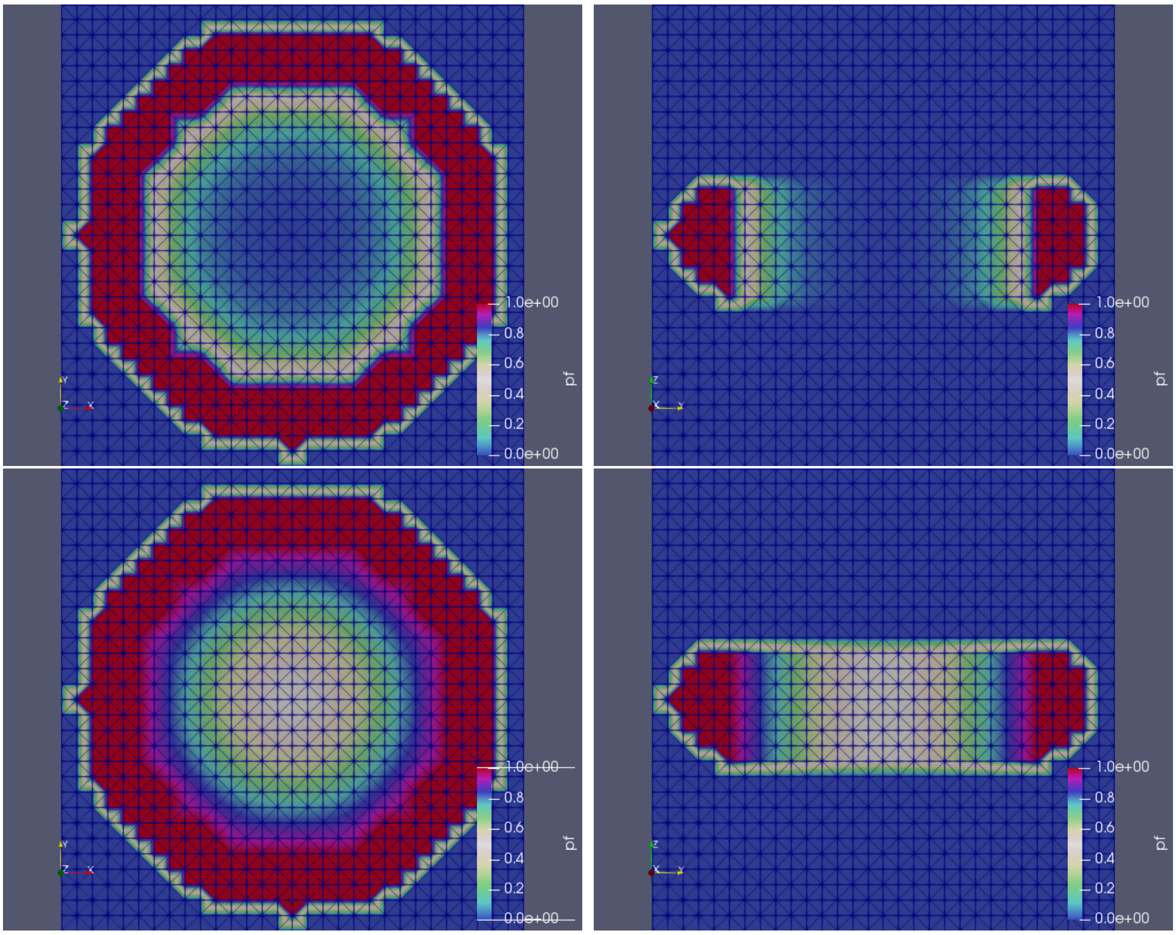

Рис. 6. Численное решение после одного шага по времени (вверху) и десяти шагов по времени (внизу). Слева: след решения продолжения уравнения (6) на плоскости, содержащей поверхность $\mathcal{F}$. Справа: след решения продолжения уравнения (6) на плоскости, перпендикулярной $\mathcal{F}$.

4.2 Течение в трещине с постоянным раскрытием (I)

В настоящем разделе приведены результаты расчета модельной задачи о течении в трещине с заданным и не зависящим от давления (но зависящим от точки срединной поверхности трещины) раскрытием. Задача решается в размерных переменных.

Уравнение течения в трещине имеет вид:

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} + \operatorname{div}\left(-\frac{1}{12\nu}\rho w^3 \nabla p\right) = f_{\mathrm{m}}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{F}, \tag{7}$$

где ρ — плотность жидкости; $w = w(\boldsymbol{x})$ — раскрытие трещины, $\boldsymbol{x} \in \mathcal{F}$ — точка срединной поверхности трещины $\mathcal{F}$; ν — вязкость жидкости, $p = p(\boldsymbol{x})$ — ее давление, f_{m} — массовая мощность внешних источников.

Будем считать, что плотность жидкости линейно зависит от давления, то есть

$$\rho = \rho_0[1 + c_{\mathrm{f}}(p - p_0)]$$

— плотность жидкости как функция давления, ρ_0 и p_0 — опорные значения плотности и давления, c_{f} — коэффициент сжимаемости жидкости.

Считая, что жидкость является слабосжимаемой, и используя стандартные в данном случае допущения, уравнение (7) может быть сведено к следующему:

$$c_{\mathrm{f}} w \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}\left(-\frac{1}{12\nu} w^3 \nabla p\right) = f, \tag{8}$$

где f — объемная мощность источника. При выводе уравнения (8) использовался тот факт, что в случае слабосжимаемой жидкости в выражении для потока массы плотность жидкости можно принять равной ρ_0.

Уравнения (7) и (8) должны быть дополнены начальным и граничным условием вида

$$p(\boldsymbol{x}, t = 0) = p_{\mathrm{ini}}(\boldsymbol{x}), \quad p|_{\partial\mathcal{F}} = p_{\partial\mathcal{F}}.$$

Трещина (как трехмерная область со срединной поверхностью $\mathcal{F}$) имеет вид двухосного эллипсоида, у которого длина w_0 меньшей оси равна максимальному раскрытию трещины, длина L большей — является параметром, который будет уточнен позже.

Пусть $\boldsymbol{x}_{\mathrm{c}}$ — центр трещины, $\boldsymbol{x}_{\mathrm{cp}} = \mathbf{P}(\boldsymbol{x})$ — проекция точки $\boldsymbol{x}$ пространства на срединную поверхность трещины, d — расстояние от центра трещины до проекции точки на трещину:

$$d = d(\boldsymbol{x}) = \|\vec{x}_{\mathrm{c}} - \vec{x}_{\mathrm{cp}}\|,$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^3$.

Тогда уравнение «боковой» поверхности трещины имеет вид

$$\frac{w(\boldsymbol{x})^2}{w_0^2} + \frac{d(\boldsymbol{x})^2}{L_0^2} = 1.$$

Соответственно, раскрытие как функция точки срединной поверхности трещины выражается как

$$w(\boldsymbol{x}) = w_0 \sqrt{\left(1 - \frac{\|\vec{x}_{\mathrm{c}} - \vec{x}_{\mathrm{cp}}\|^2}{L_0^2}\right)}. \tag{9}$$

Для того чтобы раскрытие трещины на ее фронте не равнялось нулю (в этом случае уравнения смазочного слоя (7) и (8) вырождаются на фронте трещины), далее считается, что рассмотренный выше эллипсоид вращения имеет радиус $L_0 = (1+\epsilon)L$, больший, чем радиус трещины. Здесь $0 < \epsilon \ll L$ — малый параметр.

Область Ω является кубом с ребром $l = 1.5$ м, шаг сетки $h = 0.05$ м. Шаг по времени $\Delta t = 2.5 \cdot 10^{-5}$. Радиус диска $\mathcal{F}$ равен $L = 0.5$ м.

Все узлы расчетной области $\Omega_{\mathcal{F}}$ удалены от срединной поверхности на расстояние, не превышающее $\delta = 0.2$.

Максимальное раскрытие $w_0 = 30$ мм, радиус трещины $L = 1$ м, параметр $\epsilon = 0.1$ (таким образом, $L_0 = 1.1L$). Как и ранее, срединная поверхность трещины лежит в плоскости, параллельной координатной плоскости $\mathcal{O}xy$, ее центр совпадает с началом координат.

Физические параметры задачи имеют следующие значения: кинематическая вязкость жидкости $\nu = 1004 \cdot 10^{-6}$ Па·с, величина опорного давления $p_0 = 300$ бар, сжимаемость жидкости $c_{\mathrm{f}} = 4.16 \cdot 10^{-10}$ Па$^{-1}$, плотность $\rho_0 = 1000$ кг/м^3.

Граничные и начальные условия определяются функциями

$$p_{\mathrm{ini}}(\boldsymbol{x}) = 0, \quad p_{\partial\mathcal{F}}(\boldsymbol{x}, t) = p_0.$$

В центре трещины, в круге Ω_{bc}^h радиусом $R = h$, где h — характерный шаг сетки, задается постоянное по времени давление равное p_0.

Решение задачи для пяти временных слоев приведено на рисунке 7.

4.3 Течение в трещине с постоянным раскрытием (II)

Постановка задачи в этом разделе в целом совпадает с предыдущей.

Область Ω является кубом со стороной $l = 30$ м, шаг сетки $h = 1$ м. Уравнение решается в сеточной области $\Omega_{\mathcal{F}}$, все узлы которой находятся на расстоянии не более $\delta = 2$ м метров от срединной поверхности. Шаг по времени равен $\Delta t = 3 \cdot 10^{-8}$ с.

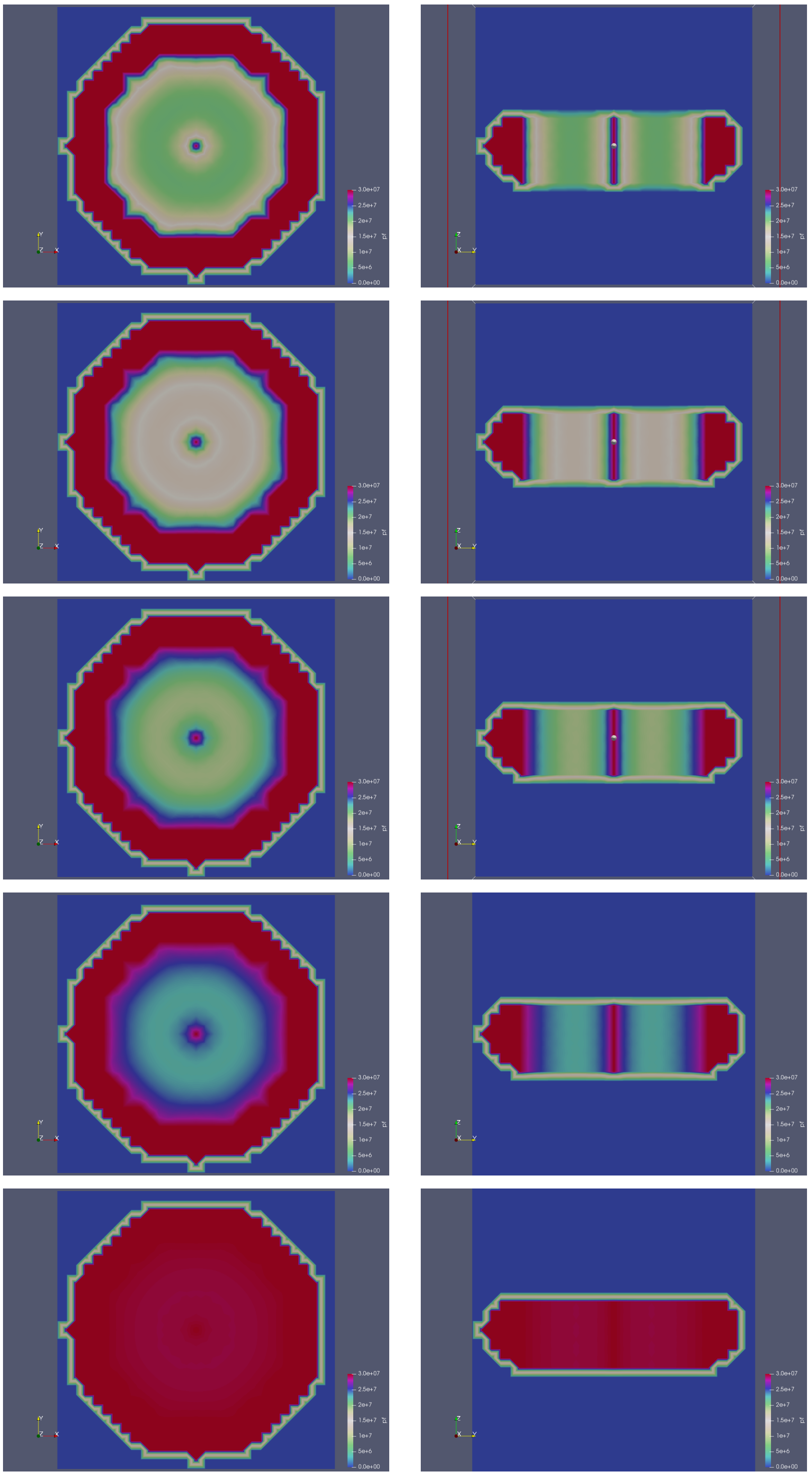

Рис. 7. Распределение давления при $t \in (1, 2, 3, 4, 11)\Delta t$ (снизу вверх). Слева: след решения продолжения уравнения на плоскости, содержащей поверхность $\mathcal{F}$. Справа: след решения продолжения уравнения (6) на плоскости, перпендикулярной $\mathcal{F}$.

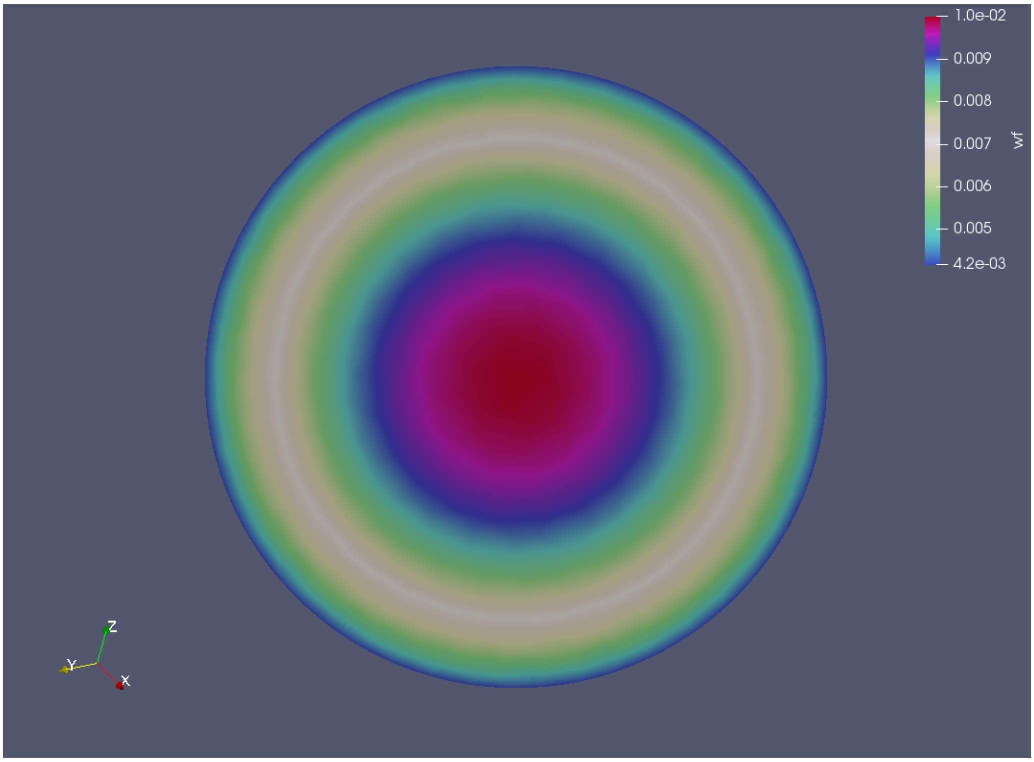

Рис. 8. Распределение раскрытия по срединной поверхности трещины.

Срединная поверхность $\mathcal{F}$ имеет форму диска радиусом $L = 10$ м с центром в начале координат. Максимальное раскрытие трещины $w_0 = 1$ см. В отличие от предыдущих случаев, срединная поверхность трещины ориентирована нормалью $(1, 1, 1)^T$. На рисунке 8 показано распределение раскрытия по срединной поверхности трещины.

В центре трещины, в круге Ω^h_{bc} радиусом $R = h$, где h — характерный шаг сетки, задается постоянное по времени давление, равное p_0.

Физические параметры жидкости и параметры уравнения состояния такие же, как и в предыдущем разделе.

Граничные и начальные условия определяются функциями

$$p_{\mathrm{ini}}(\boldsymbol{x}) = 0, \quad p_{\partial\mathcal{F}}(\boldsymbol{x}, t) = p_0.$$

Результаты моделирования представлены на рисунке 9.

4.4 Нелинейная задача

В настоящем разделе рассмотрен пример решения более сложной задачи. Уравнения модели имеют вид (7). Однако на этот раз раскрытие трещины зависит от давления. Соответствующая зависимость является линейной и имеет вид

$$w(\boldsymbol{x}) = \mathcal{W}(\boldsymbol{x}; p(\boldsymbol{x})), \quad \mathcal{W}(\boldsymbol{x}; p) = w_{\mathrm{ref}}(\boldsymbol{x}) \left(1 + c_{\mathrm{w}}[p(\boldsymbol{x}) - p_{\mathrm{ref}}]\right),$$

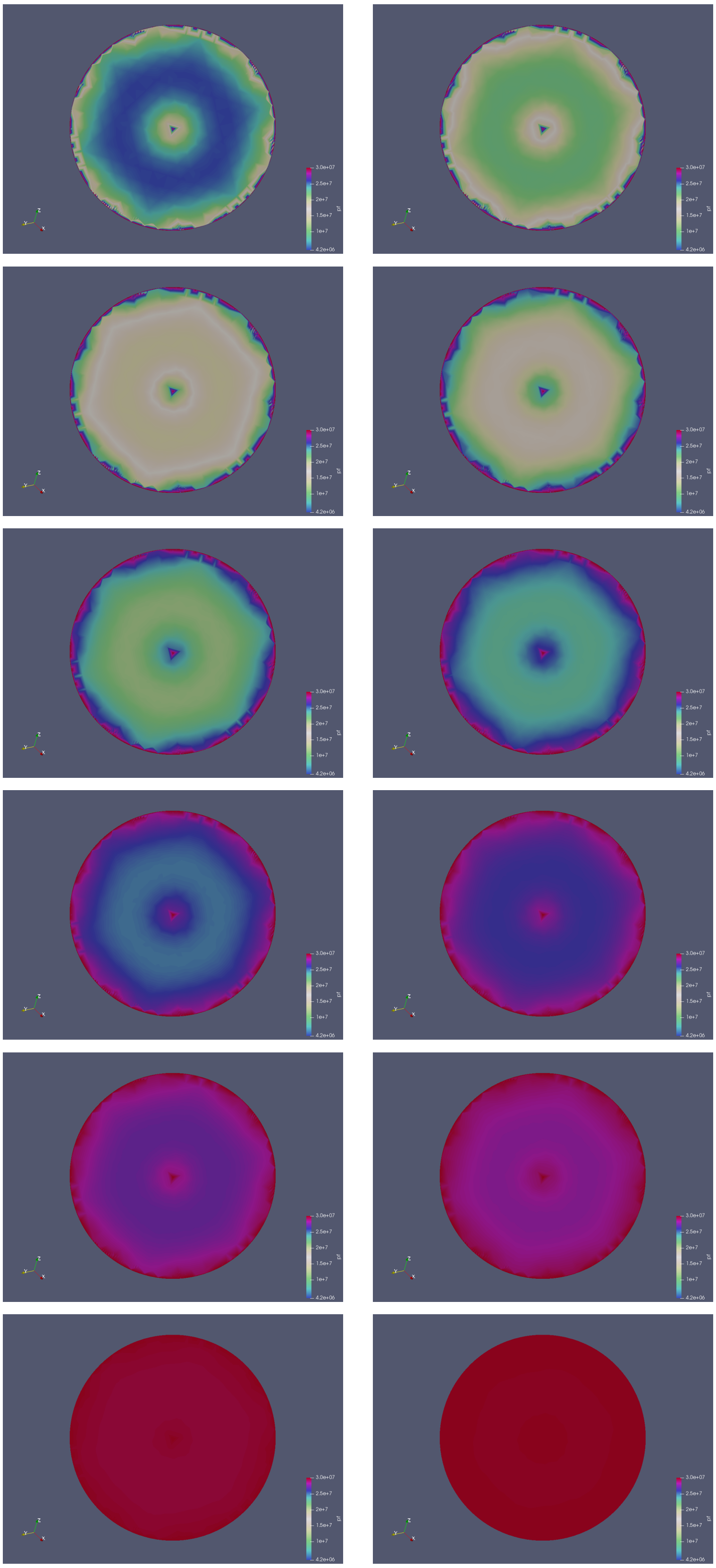

Рис. 9. Распределение давления (слева) и раскрытия (справа) в моменты времени $t \in (1, 2, \ldots, 10, 15, 20)\Delta t$ (сверху вниз).

где $w_{\text{ref}}(\boldsymbol{x})$ — раскрытие трещины при заданном постоянном опорном значении давления p_{ref}, c_{w} — коэффициент, описывающий «сжимаемость» трещины (точнее, вмещающей трещину среды). Зависимость «опорного» раскрытия от точки срединной поверхности определяется согласно уравнению (9).

Аппроксимации задачи по пространству и по времени строятся аналогично предыдущим разделам.

При использовании неявных аппроксимаций по времени задача сводится к решению на каждом временном слое нелинейного (относительно давления) уравнения. Для его решения используется метод простой итерации. Опишем коротко соответствующий алгоритм.

Пусть $f = f(t)$ — значение зависящей от времени величины f в момент времени t, $\hat{f} = f(t + \Delta t)$ — в момент времени $t + \Delta t$, Δt — шаг по времени.

Рассмотрим только временные аппроксимации задачи. Пространственные аппроксимации на каждом временном шаге строятся аналогично предыдущим разделам. Тогда определение решения на очередном временном шаге сводится к решению нелинейного уравнения вида:

$$\frac{1}{\Delta t}\big(\rho(\hat{p})w(\hat{p}) - \rho(p)w(p)\big) + \operatorname{div}\left(-\frac{1}{12\nu}\rho_0 w^3(\hat{p})\nabla\hat{p}\right) = f.$$

На каждом временном шаге решение последней системы уравнений определяется методом простой итерации. Пусть f_i — значение какой-либо величины f на i-ой итерации метода.

Алгоритм перехода от текущего состояния $\{p, \rho, w\}$ в момент t к состоянию $\{\hat{p}, \hat{\rho}, \hat{w}\}$ в очередной момент времени $t + \Delta t$ применительно к рассматриваемой задаче имеет следующий вид:

1. При $i = 0$ положить $\hat{p}_i = p$.

2. Вычислить $\hat{w}_{i+1}$ как
$$\hat{w}_{i+1}(\boldsymbol{x}) = \mathcal{W}(\boldsymbol{x}; \hat{p}_i).$$

3. Определить $\hat{p}_{i+1}$ как решение уравнения:
$$\frac{1}{\Delta t}\big(\rho(\hat{p}_{i+1})\hat{w}_{i+1} - \rho w\big) + \operatorname{div}\left(-\frac{1}{12\nu}\rho_0 \hat{w}^3_{i+1}\nabla\hat{p}_{i+1}\right) = f.$$

4. Проверить выполнения критерия остановки итераций.

   В случае, если требуемая точность не достигнута, положить $i := i + 1$ и перейти к шагу 2.

   В случае, если требуемая точность достигнута, положить
   $$\{\hat{p}, \hat{\rho}, \hat{w}\} := \{\hat{p}_{i+1}, \rho(\hat{p}_{i+1}), \mathcal{W}(\hat{p}_{i+1})\}$$
   и завершить расчет временного шага.

В приведенном выше алгоритме считается, что решение получено с требуемой точностью, если равномерная норма приращения давления на итерации меньше заданного порогового значения ϵ_{iter}:

$$\left\| \frac{p_i^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}}{p_0} \right\|_\infty < \epsilon_{\text{iter}}.$$

В начальный момент времени давление постоянно по срединной поверхности трещины и равно p_0 (опорному значению давления). Опорное распределение $w_0(\boldsymbol{x})$ раскрытия — такое же, как и в предыдущих разделах. Граничные условия на фронте трещины:

$$p_{\partial\mathcal{F}} = p_{\partial\mathcal{F}}(\boldsymbol{x}) = p_0 \left(1 + \gamma \frac{x - x_{\text{c}}}{L}\right), \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{F},$$

где $\gamma = 0.1$ — параметр, x — проекция вектора $\boldsymbol{x}$ на ось $\mathcal{O}x$.

Расчетная область является кубом со стороной $l = 30$ м, шаг сетки $h = 1$ м. Уравнение решается в сеточной области $\Omega_{\mathcal{F}}$, состоящей из тетраэдров, все узлы которых удалены от трещины на расстояние не превышающее $\delta = 2$ м. Шаг по времени $\Delta t = 0.5 \cdot 10^{-7}$ с.

Радиус трещины $L = 10$ м, трещина лежит в плоскости $\mathcal{O}xy$ с центром в начале координат.

В центре трещины, в круге Ω_{bc}^h радиусом $R = h$, где h — характерный шаг сетки, задается постоянное по времени давление, равное $1.1p_0$.

Параметр точности в критерии останова итераций равнялся $\epsilon_{\text{iter}} = 1.0 \cdot 10^{-6}$, максимальное число итераций равнялось $N_{\text{iter}}^{\max} = 10$.

Физические параметры жидкости такие же, как в предыдущем разделе. Параметры уравнения (9) $c_{\text{w}} = 1/p_0$, $p_{\text{ref}} = p_0$.

Результаты расчетов представлены на рисунках 10 и 11. На рисунке 10 показана зависимость относительного изменения решения в зависимости от номера итерации для разных временных слоев. В целом для достижения требуемой точности требуется не более 10 итераций на каждом временном слое. Как и следует ожидать, число итераций существенно уменьшается с течением времени. На рисунке 11 показано непосредственно решение: распределение поля давления в трещине и ее раскрытие.

4.5 Задача для трещины сложной формы

В предыдущих разделах срединная поверхность трещины всегда являлась плоским диском. В настоящем разделе рассмотрен пример решения задачи для трещины, срединная поверхность которой плоской не является.

Постановка задачи имеет следующий вид.

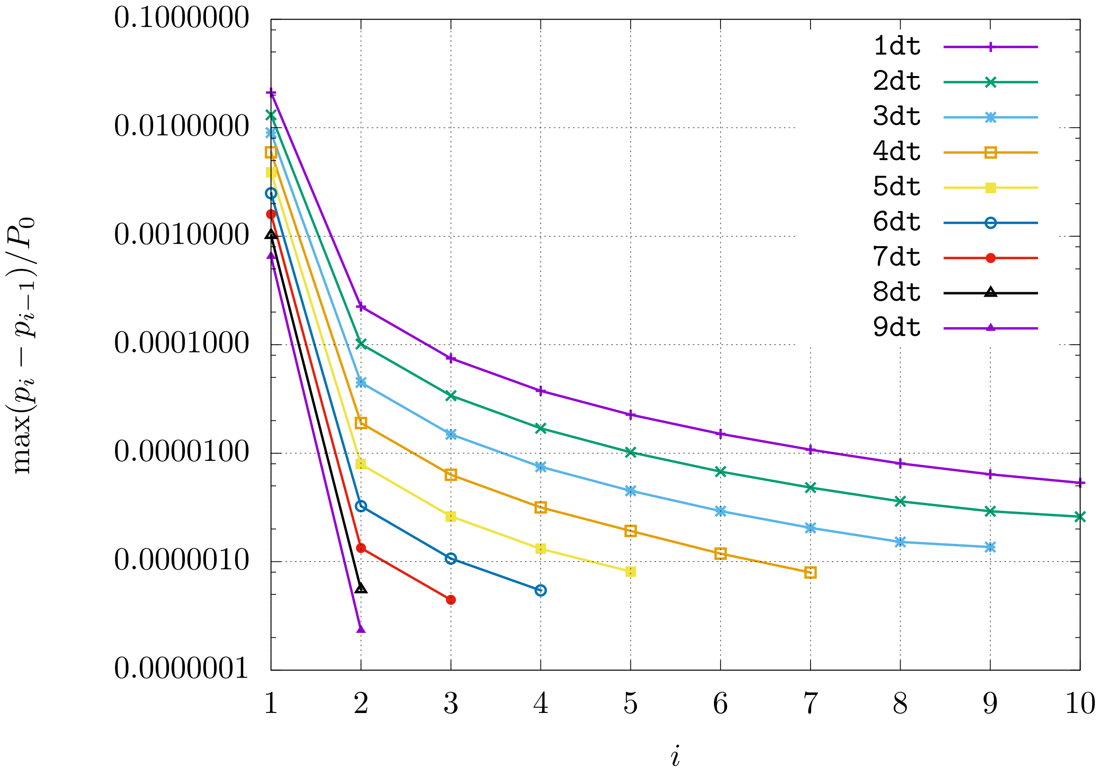

Рис. 10. Зависимость относительного изменения давления от номера итерации для последовательных временных слоев.

В начальный момент времени давление постоянно по срединной поверхности трещины и равно p_0 (опорному значению давления). В начальный момент времени раскрытие трещины постоянно по срединной поверхности трещины и равно w_0 (опорное значение раскрытия). Зависимость раскрытия трещины от давления задается аналогично предыдущему разделу с $w_{\mathrm{ref}}(\boldsymbol{x}) = w_0 = \mathrm{const}$.

Расчетная область является кубом со стороной $l = 50$ м, шаг сетки $h = 1$ м. Уравнение решается в сеточной области $\Omega_{\mathcal{F}}$, состоящей из тетраэдров, все узлы которых удалены от трещины на расстояние, не превышающее $\delta = 2$ м. Шаг по времени $\Delta t = 0.00024$ с.

Параметр точности в критерии останова итераций равнялся $\epsilon_{\mathrm{iter}} = 1.0 \cdot 10^{-6}$, максимальное число итераций равнялось $N_{\mathrm{iter}}^{\max} = 3$.

Физические параметры жидкости: кинематическая вязкость $\nu = 1 \cdot 10^{-3}$ Па·с, величина опорного давления $p_0 = 300$ бар, опорное раскрытие $w_0 = 1$ см, сжимаемость $c_{\mathrm{f}} = 1 \cdot 10^{-6}$ Па$^{-1}$, плотность $\rho_0 = 1000$ кг/м^3.

Параметры уравнения (9) $c_{\mathrm{w}} = 1/p_0$, $p_{\mathrm{ref}} = p_0$.

Расчеты проводились для трещины трех разных форм.

- Срединная поверхность является эллипсом с малой полуосью 10 м и большой полуосью 20 м. В центре трещины, в круге Ω_{bc}^h радиусом $R = h$,

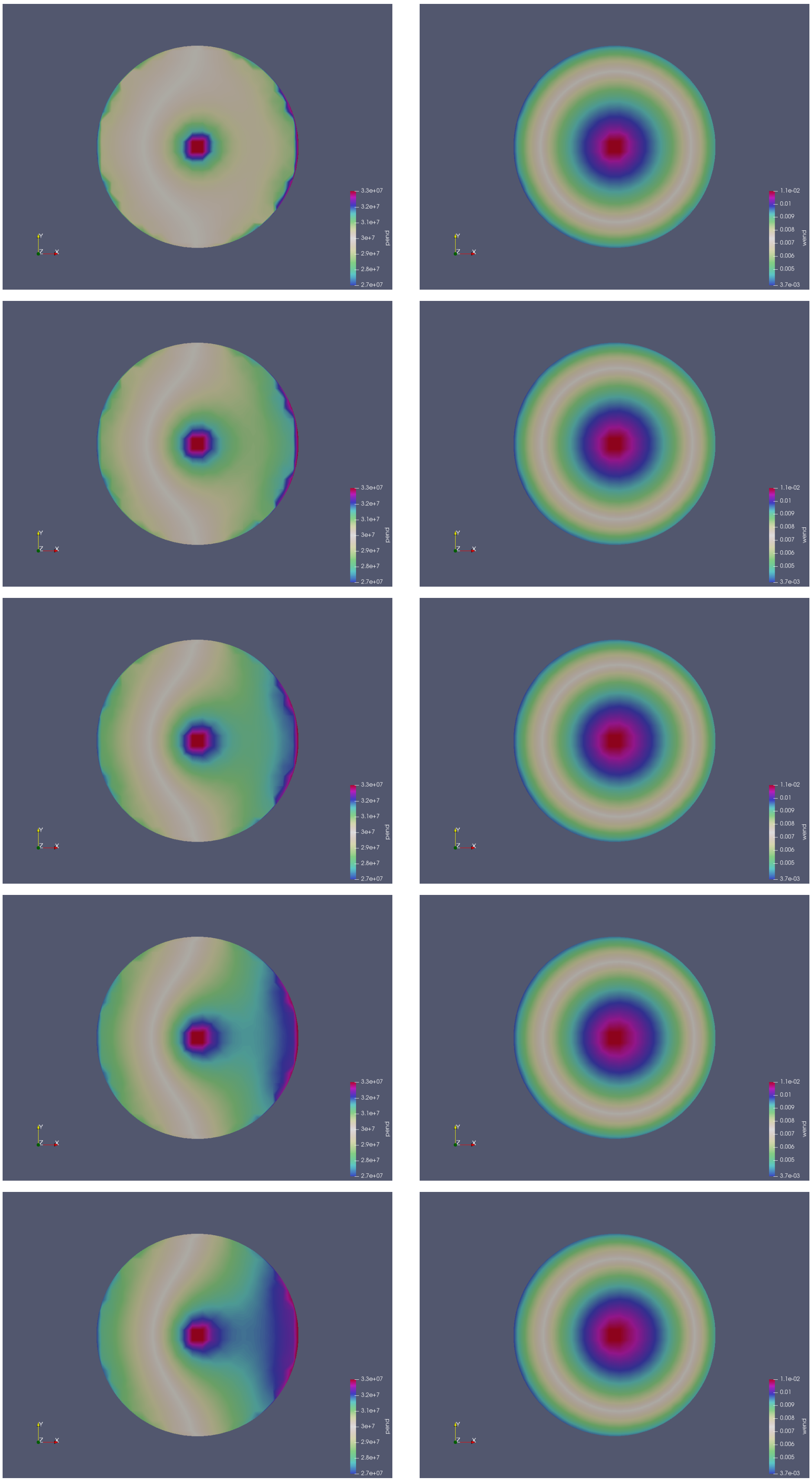

Рис. 11. Распределение давления (слева) и раскрытия (справа) в моменты времени $t \in (1, 2, 3, 4, 5)\Delta t$ (сверху вниз).

где h — характерный шаг сетки, задается постоянное по времени давление, равное $1.1p_0$. Результаты расчетов представлены на рисунке 12.

- Срединная поверхность является «следом» движения диска радиусом 5 м вдоль четверти окружности радиусом 12.5 м. В центре «изначального» диска, в круге Ω_{bc}^h радиусом $R = 2h$, где h — характерный шаг сетки, задается постоянное по времени давление, равное $1.1p_0$. Результаты расчетов представлены на рисунке 13.

- Срединная поверхность является частью параболоида высотой 3 м и радиусом в нижней точке 4 м. В верхней точке параболоида, в круге Ω_{bc}^h радиусом $R = h$, где h — характерный шаг сетки, задается постоянное по времени давление, равное $1.1p_0$. Результаты расчетов представлены на рисунке 14.

5 Заключение

Настоящая работа посвящена исследованию применимости метода проекции ближайшей точки для решения уравнения смазочного слоя, описывающего течение жидкости в флюидонаполненной трещине. Рассматриваются модельные постановки и постановки на основе уравнений смазочного слоя для случаев, в том числе, когда раскрытие трещины зависит от давления жидкости в ней. В последнем случае для решения возникающей системы нелинейных алгебраических уравнений применяется метод простой итерации. Приведено подробное описание как непосредственно метода проекции ближайшей точки, так и особенности реализации использованных вычислительных алгоритмов. Для рассмотренных постановок метод показал высокую надежность и аккуратность численного решения, в том числе при использовании сравнительно грубых расчетных сеток.

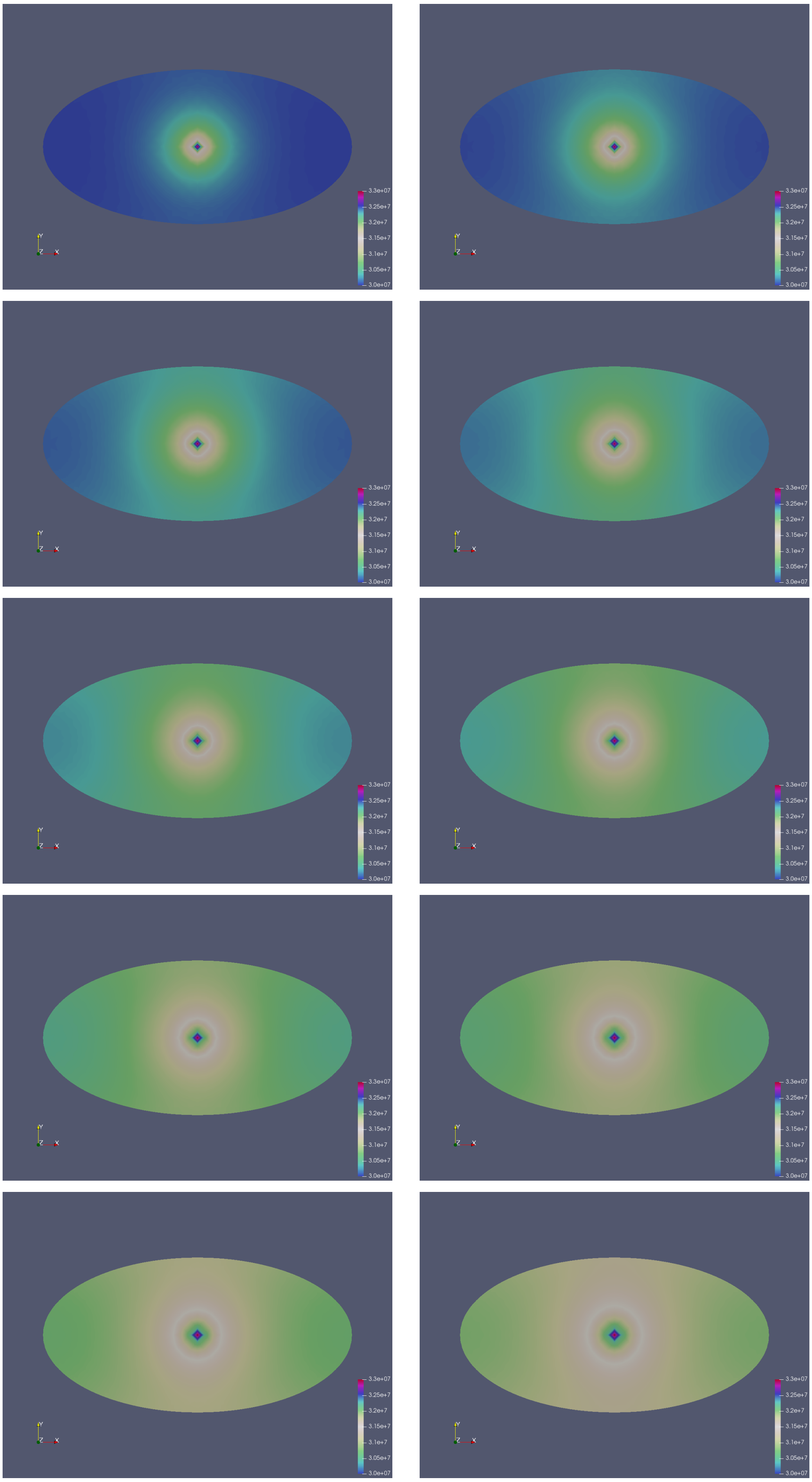

Рис. 12. Распределение давления (слева) и раскрытия (справа) в моменты времени $t \in (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)\Delta t$ (сверху вниз).

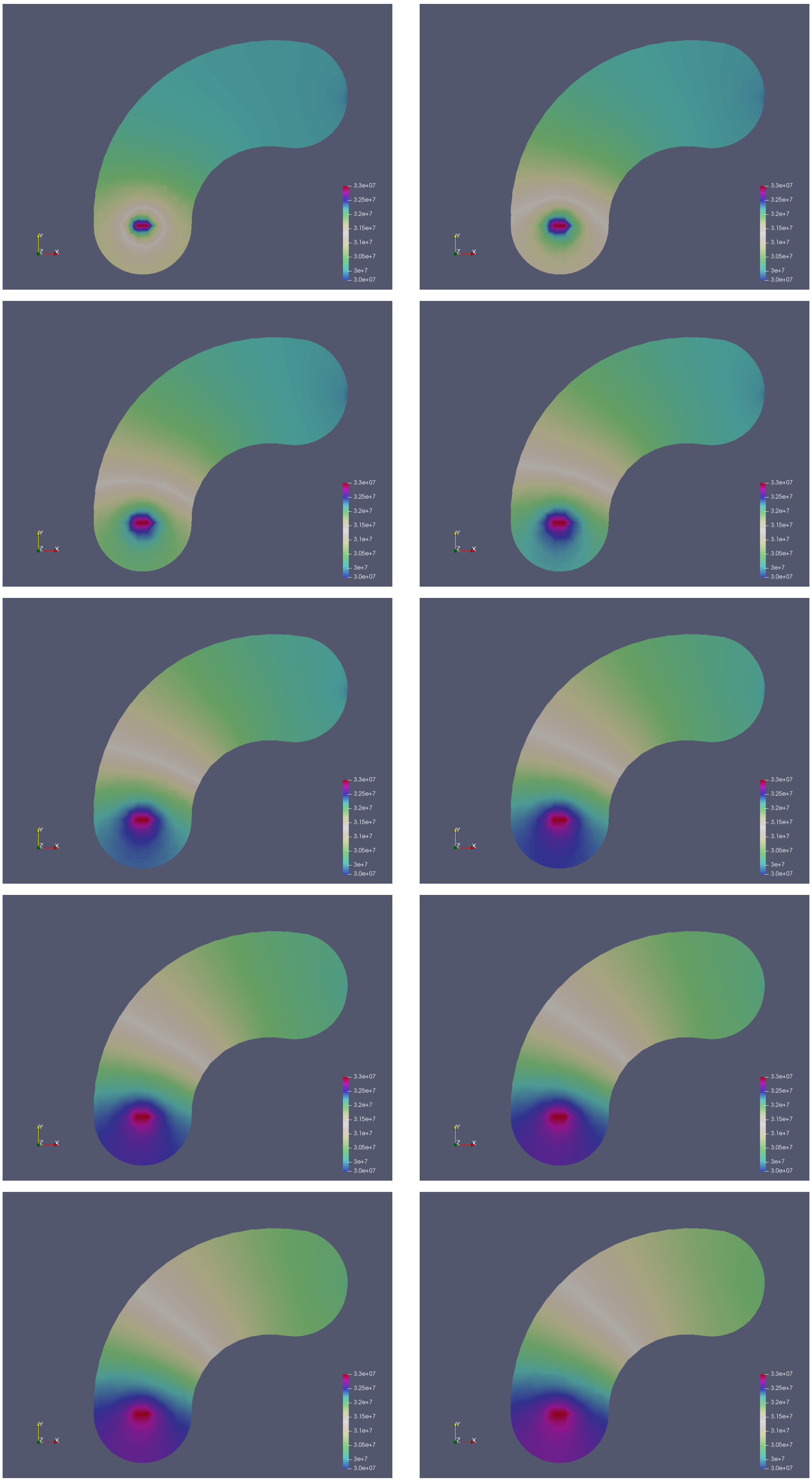

Рис. 13. Распределение давления (слева) и раскрытия (справа) в моменты времени $t \in (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)\Delta t$ (сверху вниз).

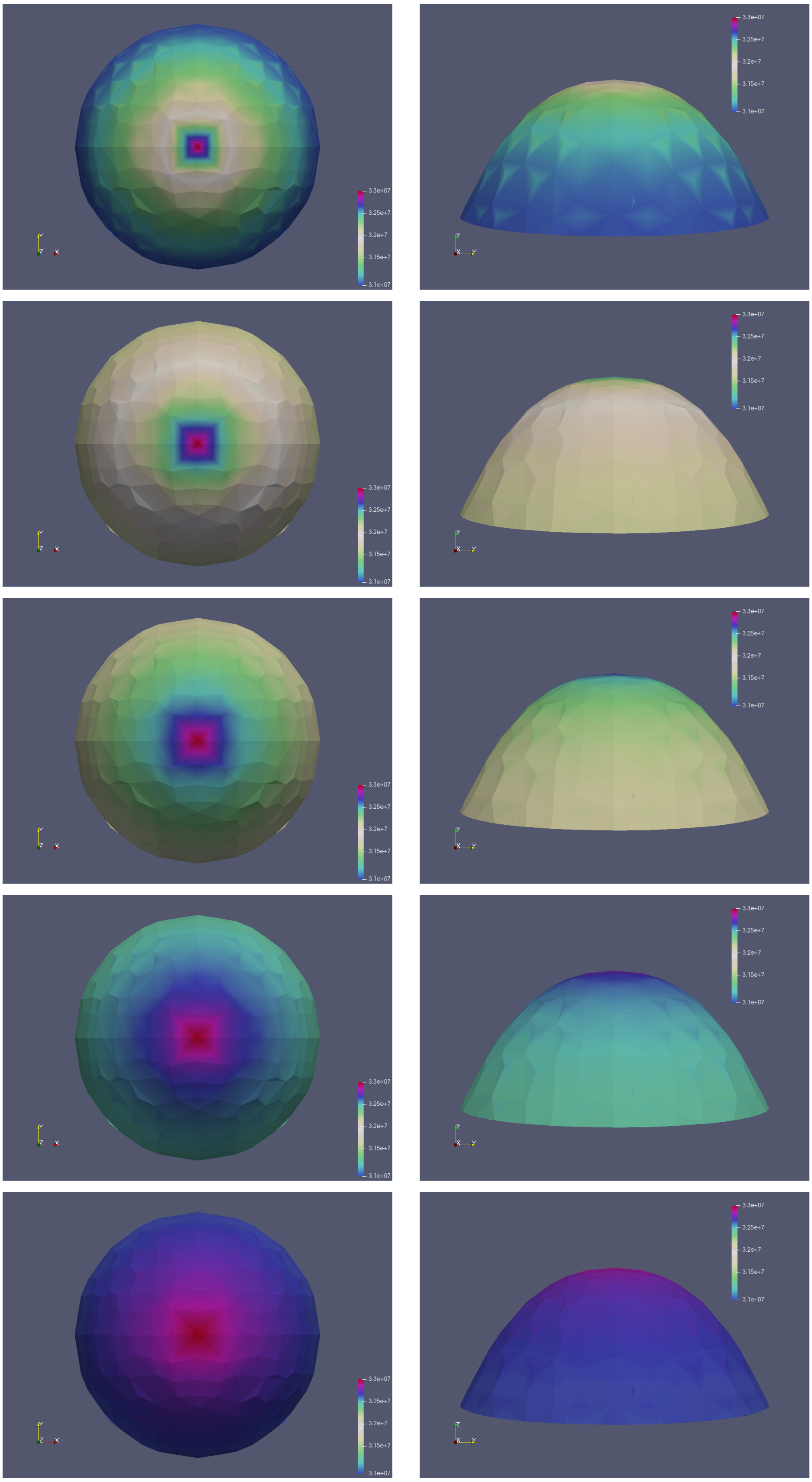

Рис. 14. Распределение давления в моменты времени $t \in (1, 2, 3, 4, 5)\Delta t$ (сверху вниз).

Список литературы

[Дубровин1986] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия: методы и приложения, М.: Наука, 1986. 760 с.

[Иванов2017] Иванов А.В. , Савенков Е.Б. Моделирование и визуальное представление динамики поверхности с подвижным краем на стационарной неструктурированной сетке // Научная визуализация. 2017, том 9, № 2, с. 64-81.

[Савенков2020a] Савенков Е.Б. Решение уравнений в частных производных на поверхностях: обзор алгоритмов // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2020. № 5. 18 с.

[Савенков2020b] Савенков Е.Б. Конечноэлементный вариант метода проекции ближайшей точки для решения уравнений на поверхностях с краем // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2020. № 8. 36 с.

[Салимов2013] Салимов В.Г., Ибрагимов Н.Г., Насыбуллин А.В., Салимов О.В. Гидравлический разрыв карбонатных пластов. М.: Нефтяное хозяйство, 2013. 471 с.

[Экономидес2007] Экономидес М., Олини Р., Валько П. Унифицированный дизайн гидроразрыва пласта. От теории к практике. М.: Институт компьютерных исследований, 2007. 236 с.

[Macdonald2008] Macdonald, C.B., Ruuth, S.J. Level set equations on surfaces via the Closest Point Method // J. Sci. Comput., 35 (2008), pp. 219–240.

[Macdonald2009] Macdonald, C.B., Ruuth, S.J. The implicit Closest Point Method for the numerical solution of partial differential equations on surfaces // SIAM J. Sci. Comput., 31 (2009), pp. 4330–4350.

[Macdonald2011] Macdonald, C.B., Brandman, J., Ruuth, S.J. Solving eigenvalue problems on curved surfaces using the Closest Point Method // J. Comput. Phys., 230 (2011), pp. 7944–7956.

[März2012] März, T., Macdonald, C.B. Calculus on Surfaces with General Closest Point Functions // SIAM J. Numer. Anal., 50(6), 3303–3328.

[Merriman2007] Merriman, B., Ruuth, S.J. Diffusion generated motion of curves on surfaces // Journal of Computational Physics 225 (2007) pp. 2267–2282.

[Ruuth2008] Ruuth, S.J., Merriman, B. A simple embedding method for solving partial differential equations on surfaces // Journal of Computational Physics, 227, pp. 1943–1961, 2008.

Содержание