ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 87 за 2019 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Аронов П.С., Родин А.С.

Математическое моделирование контактного взаимодействия двух упругих тел с криво-линейными границами на несогласованных сетках

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Аронов П.С., Родин А.С. Математическое моделирование контактного взаимодействия двух упругих тел с криво-линейными границами на несогласованных сетках // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 87. 27 с. doi:**10.20948/prepr-2019-87**
URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-87**

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. Келдыша
Российской академии наук

П. С. Аронов, А. С. Родин

Математическое моделирование контактного взаимодействия двух упругих тел с криволинейными границами на несогласованных сетках

Москва — 2019

Аронов П. С., Родин А. С.
Математическое моделирование контактного взаимодействия двух упругих тел с криволинейными границами на несогласованных сетках

Рассмотрены алгоритмы решения двумерных контактных задач теории упругости с помощью mortar-метода и метода декомпозиции области. Для mortar-метода исследовано влияние выбора активного (master) и пассивного (slave) тел на распределение нормальных перемещений и напряжений на линии контакта на примере решения тестовых задач с криволинейными границами. Обсужден вопрос влияния геометрии контактных границ и выбора активного тела на амплитуду колебаний значений перемещений и напряжений при использовании несогласованных сеток.

Ключевые слова: контактная задача теории упругости, метод конечных элементов, mortar-метод, метод декомпозиции области, метод верхней релаксации.

Aronov P. S., Rodin A. S.
Mathematical modeling of the contact problem for two elastic bodies with curvilinear boundaries on mismatched grids

Algorithms for solving two-dimensional contact problems of the elasticity theory using mortar-method and domain decomposition method are considered. For the mortar-method the influence of the choice of master and slave bodies on the distribution of normal displacements and stresses on the contact line is investigated using the test problems with curvilinear boundaries. The influence of the contact boundaries geometry and the choice of the active body on the oscillations amplitude of displacements and stresses at using mismatched grids is discussed.

Key words: contact problem of the elasticity theory; finite element method; mortar-method; domain decomposition method; successive over-relaxation method.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты № 18-01-00252 и № 18-31-20020).

1. Введение

Расчет прочности и надежности элементов конструкций, функциональных узлов оборудования является обязательным этапом проектирования. Многие из этих элементов имеют выраженный контакт в пределах некоторой поверхности. Наиболее перспективным и часто используемым способом исследования контактного взаимодействия тел являются численные методы, ведущее место среди которых занимает метод конечных элементов. При взаимодействии нескольких тел контактное взаимодействие зачастую осуществляется по криволинейной границе, и возможность использовать согласованные сетки отсутствует. Численное решение подобных задач можно осуществлять с помощью метода декомпозиции областей, обеспечивающего поочередное выполнение на контактной границе кинематических и силовых условий (см., например, [1, 2]). Также возможно использование метода штрафа [3], различных вариантов метода множителей Лагранжа [4, 5], в частности mortar-метода [6, 7].

В данной работе представлена реализация алгоритмов численного решения контактных задач теории упругости с помощью mortar-метода и метода декомпозиции области. Рассмотрены случаи различных криволинейных контактных границ для двумерной тестовой задачи.

2. Математическая постановка задачи

Рассмотрим в двумерном пространстве $\mathbb{R}^2$ два упругих контактирующих тела, занимающих в пространстве области G_1 и G_2, ограниченные кусочно-гладкими границами ∂G_1 и ∂G_2 (рис. 1). При решении контактной задачи на поверхностях контакта тел должны быть выполнены условия контактного взаимодействия по перемещениям и напряжениям.

Математическая формулировка контактной задачи теории упругости для случая, когда объемные силы отсутствуют, включает в себя следующие соотношения [8] для каждого тела $G_\alpha \subset \mathbb{R}^2$, участвующего в контакте, $\alpha \in \{1, 2\}$:

- уравнения равновесия

$$\sigma_{ji,j}(\boldsymbol{u}) = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad \boldsymbol{x} \in G_\alpha; \tag{1}$$

- кинематические граничные условия

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u_0}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in S'; \tag{2}$$

- силовые граничные условия

$$\sigma_{ji}(\boldsymbol{u})n_j = g_i(\boldsymbol{x}), \quad i, j = 1, 2, \quad \boldsymbol{x} \in S_3; \tag{3}$$

- соотношения Коши

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\left(u_{i,j}(\boldsymbol{x}) + u_{j,i}(\boldsymbol{x})\right), \quad i,j = 1,2, \quad \boldsymbol{x} \in G_\alpha; \tag{4}$$

- определяющие уравнения (закон Гука)

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) = C_{ijkl}\left(\varepsilon_{kl}(\boldsymbol{x}) - \varepsilon^0_{kl}(\boldsymbol{x})\right), \quad i,j = 1,2, \quad \boldsymbol{x} \in G_\alpha; \tag{5}$$

- кинематическое контактное условие

$$u^1_n(\boldsymbol{x}) = -u^2_n(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in S_1; \tag{6}$$

- силовое контактное условие

$$\sigma^1_n(\boldsymbol{x}) = \sigma^2_n(\boldsymbol{x}) \leqslant 0, \quad \boldsymbol{x} \in S_1, \tag{7}$$

где x_i — координаты вектора $x \in G_\alpha$; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; ε_{kl} — компоненты тензора деформации; ε^0_{kl} — компоненты тензора начальной деформации; u_i — компоненты вектора перемещения; C_{ijkl} — компоненты тензора упругих постоянных; g_i — компоненты вектора поверхностных сил; n_j — компоненты вектора внешней нормали к соответствующей поверхности S_i; u^α_n — проекции векторов перемещений граничных точек на направление внешней нормали n к границе тела α; σ^i_n — проекции векторов напряжений на направления внешних нормалей n_i, $S' = S_2 \cup S_4 \cup S_5 \cup S_6 \cup S_7$, $S_i \subset \partial G_1 \cup \partial G_2$, трение между телами G_1 и G_2 отсутствует.

Для рассматриваемого двумерного случая векторы напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и перемещений $\boldsymbol{u}$ записываются следующим образом:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}. \tag{8}$$

Решение задачи (1)–(7) эквивалентно [11] минимизации функционала

$$\Pi = \frac{1}{2}\int\limits_G \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}\, dG - \int\limits_{S'} \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{g}\, dS + \int\limits_{S_1} \lambda_n \left(u^2_n(\boldsymbol{x}) - u^1_n(\boldsymbol{x})\right) dS \tag{9}$$

при выполнении кинематических граничных условий (2), где $G = G_1 \cup G_2$, λ_n — множители Лагранжа, являющиеся проекциями векторов напряжений на направления внешних нормалей, $u_n = u_1 n_1 + u_2 n_2$.

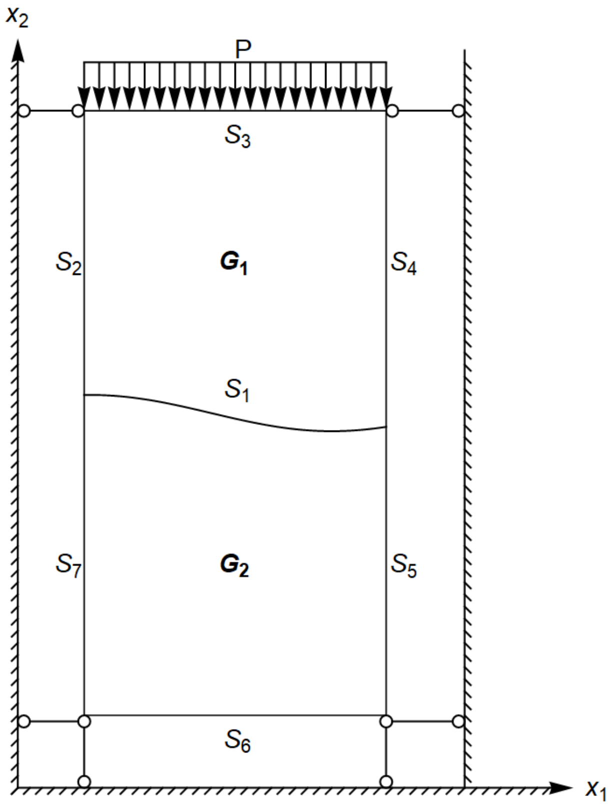


Рис. 1. Схема контактного взаимодействия двух тел

3. Основные матричные соотношения метода конечных элементов

Для численного решения задачи (1)–(7) будем использовать метод конечных элементов. Конечно-элементная сетка состоит из четырехугольных элементов второго порядка.

Компоненты $u_1^{(e)}$, $u_2^{(e)}$ вектора перемещения $\boldsymbol{u}$ внутри конечного элемента с номером e определяются с помощью зависимости

$$\begin{Bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \end{Bmatrix} = [N]^{(e)}\{u\}^{(e)}, \tag{10}$$

где $[N]^{(e)}$ — матрица функций формы конечного элемента [12] с номером e, а $\{u\}^{(e)}$ — объединенный вектор компонентов перемещения во всех узлах конечного элемента с номером e.

Соотношения между деформациями и перемещениями записываются следующим образом [12]:

$$\{\varepsilon\}^{(e)} = [B]^{(e)}\{u\}^{(e)}, \tag{11}$$

где $[B]^{(e)}$ — матрица градиентов конечного элемента [12] с номером e.

Напряжения выражаются через деформации с помощью закона Гука:

$$\{\sigma\}^{(e)} = [D_\alpha]^{(e)}\{\varepsilon\}^{(e)}, \tag{12}$$

или, с учетом (11),

$$\{\sigma\}^{(e)} = [D_\alpha]^{(e)}[B]^{(e)}\{u\}^{(e)}, \tag{13}$$

где $[D_\alpha]^{(e)}$ — локальные матрицы упругости конечного элемента с номером e для тела с номером α.

4. Применение mortar-метода для решения контактных задач

Mortar-метод решения контактных задач теории упругости основан на независимой конечно-элементной дискретизации непересекающихся подобластей. Сетки на этих подобластях являются, вообще говоря, несогласованными на линии контакта, а непрерывность решения достигается за счет использования множителей Лагранжа [13]. Среди основных преимуществ mortar-метода можно отметить возможность независимого выбора различных типов конечных элементов и функций формы как на границах контактирующих тел, так и при интегрировании вдоль линии контакта.

Пусть тело G_1 является активным (master), а тело G_2 — пассивным (slave). Линию контакта со стороны тела G_1 обозначим через Γ_m, а со стороны тела G_2 — Γ_s. Рассмотрим одномерные конечные элементы второго порядка на линиях контакта Γ_m и Γ_s. Из узлов этих элементов на линии контакта Γ_m проведем нормали на линию контакта Γ_s. По образованным при пересечении нормалей и Γ_s конечным элементам будем вести дальнейшее интегрирование, считая их также одномерными квадратичными элементами с аналогичными функциями формы. Деление тел на master/slave во многом является условным и неочевидным, но в конечном счете этот выбор определяет дискретизацию множителей Лагранжа.

Рассмотрим следующий интеграл:

$$\int\limits_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda}^T(\boldsymbol{u_m} - \boldsymbol{u_s})\, d\gamma = \sum_{i=1}^{k_m} \int\limits_{\Gamma_{mi}} \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{u_m}\, d\gamma - \sum_{i=1}^{k_s} \int\limits_{\Gamma_{si}} \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{u_s}\, d\gamma, \tag{14}$$

где $\Gamma = \Gamma_m \cup \Gamma_s$, k_m и k_s — общее число конечных элементов, на которые разбиты линии контакта Γ_m и Γ_s соответственно, векторы $\boldsymbol{u_m}$ и $\boldsymbol{u_s}$ состоят из нормальных компонент векторов перемещений узлов конечного элемента на линиях контакта Γ_m и Γ_s, а вектор $\boldsymbol{\lambda}$ состоит из множителей Лагранжа, соответствующих проекциям векторов напряжений на направления внешних нормалей на линии контакта Γ_s. Внутри конечного элемента с номером (e) значения λ_n, u_s и u_m выражаются следующим образом:

$$\lambda_n = [N_\lambda]^{(e)}\{\lambda\}^{(e)}, \tag{15}$$
$$u_s = [N_s]^{(e)}\{u_s\}^{(e)}, \tag{16}$$
$$u_m = [N_m]^{(e)}\{u_m\}^{(e)}, \tag{17}$$

где $[N_\lambda]^{(e)}$, $[N_s]^{(e)}$, $[N_s]^{(e)}$ — матрицы функций формы одномерного квадратичного элемента с номером (e).

Минимизация функционала (9) совместно с интегралом (14) приводит к формированию следующей системы линейных алгебраических уравнений [14]:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \mathbf{0} & A_{13} \\ \mathbf{0} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13}^T & A_{23}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{u_1} \\ \boldsymbol{u_2} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{R_1} \\ \boldsymbol{R_2} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \tag{18}$$

где

$$[A_{11}] = \sum_{e=1}^{k_1} [a_G]^{(e)T} \left(\int\limits_{G_1} [B]^{(e)}[D_1]^{(e)}[B]^{(e)}\, dG \right) [a_G]^{(e)}, \tag{19}$$

$$[A_{13}] = \sum_{e=1}^{k_s} [a_S]^{(e)T} \left(\int\limits_{\Gamma_s} [N]^{(e)T}[N]^{(e)}\, d\gamma \right) [a_S]^{(e)}, \tag{20}$$

$$[A_{22}] = \sum_{e=1}^{k_2} [a_G]^{(e)T} \left(\int\limits_{G_2} [B]^{(e)}[D_2]^{(e)}[B]^{(e)}\, dG \right) [a_G]^{(e)}, \tag{21}$$

$$[A_{23}] = \sum_{e=1}^{k_m} [a_S]^{(e)T} \left(\int\limits_{\Gamma_m} [N]^{(e)T}[N]^{(e)}\, d\gamma \right) [a_S]^{(e)}, \tag{22}$$

$$\{R_1\} = \sum_{e=1}^{k_1} [a_S]^{(e)T} \left(\int\limits_{S} [N]^{(e)T}[g_1]^{(e)}\, dV \right), \tag{23}$$

$$\{R_2\} = \sum_{e=1}^{k_2} [a_S]^{(e)T} \left(\int\limits_{S} [N]^{(e)T}[g_2]^{(e)}\, dV \right). \tag{24}$$

Здесь $[a_G]^{(e)}$, $[a_S]^{(e)}$ — матрицы геометрических связей конечного элемента e, $[D_\alpha]^{(e)}$ — локальные матрицы упругости конечного элемента, $\{\rho_\alpha\}^{(e)}$ и $\{g_\alpha\}^{(e)}$ — локальные векторы объемных и поверхностных сил соответственно, k_1 и k_2 — количества конечных элементов, на которые разбиты тела G_1 и G_2.

Система линейных алгебраических уравнений (18) решается с помощью модифицированного метода симметричной последовательной верхней релаксации [15]. Алгоритм и основные особенности использования метода описаны в [16].

5. Применение метода декомпозиции области для решения контактных задач

Одним из альтернативных численных методов решения контактной задачи является метод декомпозиции области (МДО) [17]. Главным преимуществом данного метода является сведение решения общей задачи контактного взаимодействия нескольких тел к последовательности решений стандартных задач механики для каждого тела по отдельности в рамках итерационного процесса. В [17] рассмотрены несколько вариантов МДО, которые отличаются друг от друга порядком постановки кинематических (Дирихле) и силовых (Неймана) условий на контактной поверхности на различных итерациях. В частности, это алгоритмы Нейман—Дирихле, Нейман—Нейман и Дирихле—Дирихле. В работе использован алгоритм Неймана—Дирихле: на k-й итерации на поверхности контакта для нижнего тела задавалось контактное давление $\sigma_n^{1(k)}$, а на поверхности контакта для верхнего тела задавались полученные нормальные перемещения $u_n^{2(k)} = -u_n^{1(k)}$. В конце итерации производился расчет нового приближения контактного давления по формуле:

$$\sigma_n^{1(k+1)} = (1 - \beta^{(k)})\sigma_n^{1(k)} + \beta^{(k)}\sigma_n^{2(k)},$$

где $\beta^{(k)}$ — некоторый итерационный параметр.

Итерационный процесс продолжался до достижения сходимости, когда и кинематическое и силовое условия на поверхности контакта выполнены с заданной точностью.

6. Результаты численного моделирования

Рассмотрим две серии тестовых задач со следующими общими характеристиками: две двумерные пластины нагружены так, как это показано на рис. 1, имеют шарнирное закрепление на поверхности S_6, а на поверхностях S_2, S_4, S_7 и S_8 задано условие симметрии. Обе пластины выполнены из одинакового материала с модулем упругости $E = 210$ ГПа и коэффициентом Пуассона $\nu =$0,3, давление на верхней границе $P(x_1) = 10$ МПа. Размеры тел G_1 и G_2 по x_1 равны 0,8 м, размеры по x_2 — 0,3 м.

Для данных тестовых задач будем анализировать графики распределений нормальных напряжений вдоль контактных границ. Нормальные напряжения вычисляются следующим образом [18]:

$$\sigma_n = \sigma_1 \sin^2 \omega + \sigma_2 \cos^2 \omega + 2\tau_{12} \sin\omega \cos\omega, \qquad (26)$$

где ω — угол между касательной к контактной линии и осью x_1. Для первой серии задач (2(a)–2(c)) значения ω постоянны на каждом из участков границы, а для второй серии задач они вычисляются в каждой точке по следующей формуле:

$$\omega(x_1) = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{-n_1(x_1)}{\sqrt{n_1(x_1)^2 + n_2(x_1)^2}}\right), \qquad (27)$$

где n_1 и n_2 — компоненты вектора нормали $\boldsymbol{n}$ =. Точкам, расположенным на границах линии контакта (x_1=0 и x_1=0,8), соответствуют нормали, сонаправленные с осью x_2, поскольку на этих участках границы заданы условия симметрии.

В mortar-методе напряжения в узлах получаются путем осреднения значений $\boldsymbol{\sigma_2}$, полученных в каждом конечном элементе, в который входит рассматриваемый узел. В методе декомпозиции областей приведенные значения контактных давлений в узлах являются независимыми величинами, которые вычисляются отдельно с помощью специальных процедур.

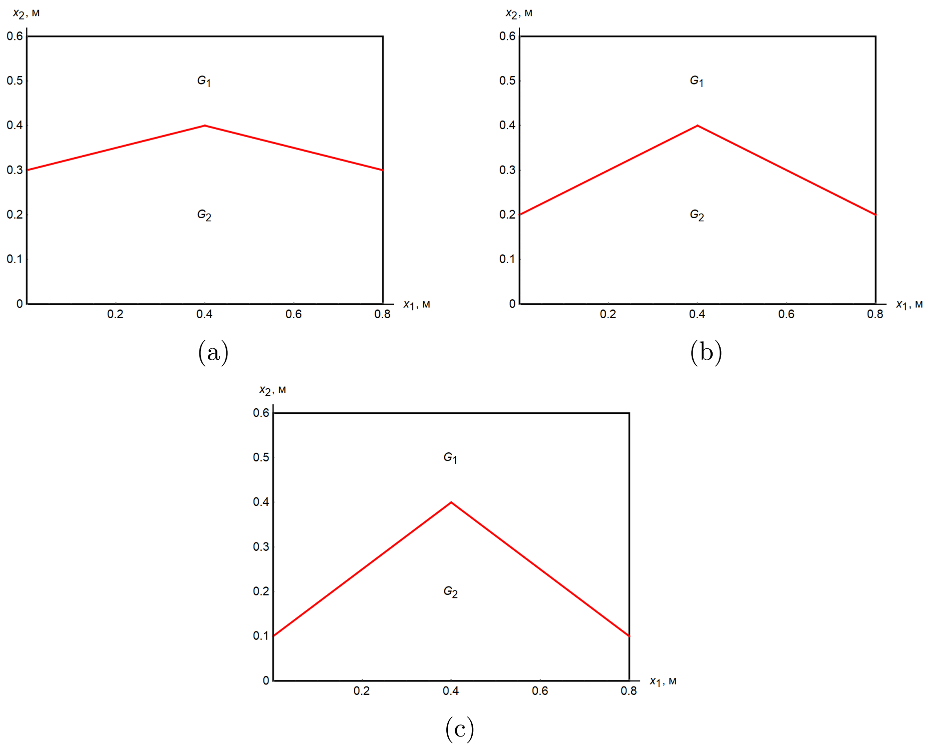


Рис. 2. Расчетные области для задач с кусочно-прямолинейной контактной границей

На рис. 2 изображены расчетные области первой серии тестовых задач. В задачах 2(a)–2(c) линиями контакта являются отрезки прямых, расположенные под разными углами к оси x_1. Для начала рассмотрим согласованные сетки, оба тела G_1 и G_2 разбиты на 80 элементов в направлении x_1.

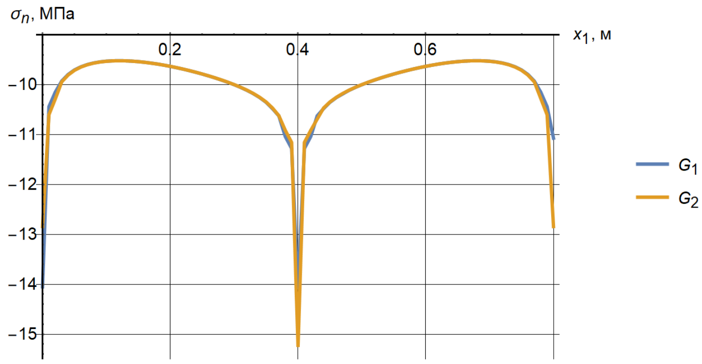


Рис. 3. Зависимости нормального напряжения $\boldsymbol{\sigma_n(x_1)}$ в узлах элементов для задачи 2(a), G_1 — master, G_2 — slave, 80x80 элементов

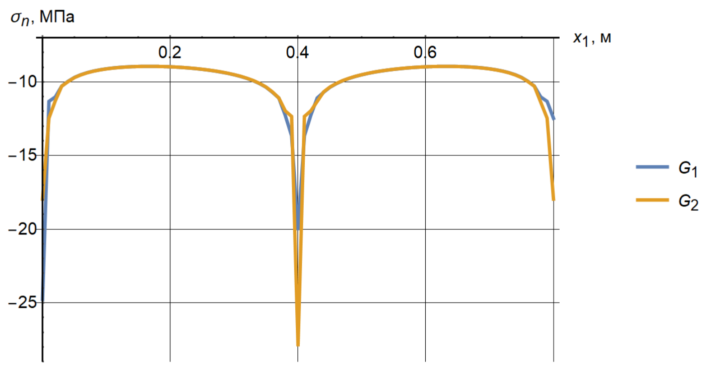


Рис. 4. Зависимости нормального напряжения $\boldsymbol{\sigma_n(x_1)}$ в узлах элементов для задачи 2(b), G_1 — master, G_2 — slave, 80x80 элементов

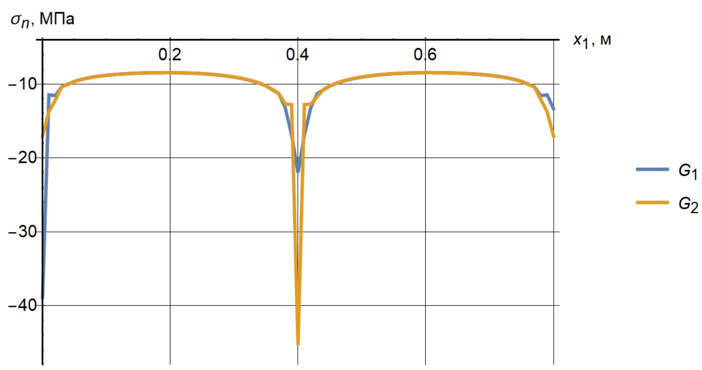


Рис. 5. Зависимости нормального напряжения $\boldsymbol{\sigma_n(x_1)}$ в узлах элементов для задачи 2(c), G_1 — master, G_2 — slave, 80x80 элементов

На рис. 3–5 приведены графики распределений нормальных напряжений для двух тел на контактной границе для задач 2(a)–2(c). Во всех трех случаях графики визуально неотличимы и совпадают всюду, кроме окрестностей угловых точек. Осцилляций не наблюдается. Также видно, что при увеличении угла наклона линии контакта к оси x_1 увеличиваются нормальные напряжения в граничных точках и точках перегиба.

Далее будем рассматривать несогласованные сетки, верхнее тело G_1 разбито на 80 элементов в направлении x_1, нижнее — на 100 элементов. Результаты, получаемые при разбиении верхнего тела G_1 на 100 элементов в направлении x_1, а нижнего G_2 — на 50 элементов, аналогичны рассматриваемым с точностью до выбора активного и пассивного тел, поэтому в дальнейшем ограничимся такой комбинацией сеток.

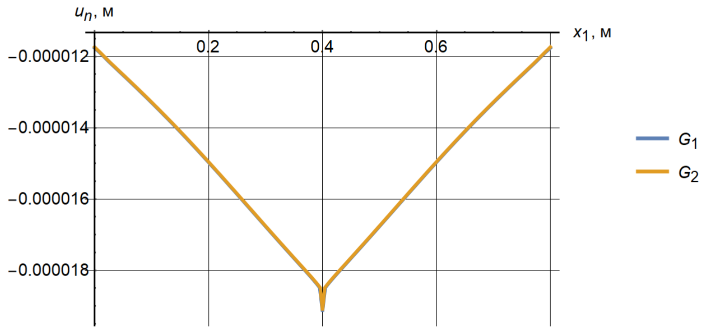


Рис. 6. Зависимости нормального перемещения $\boldsymbol{u_n(x_1)}$ в узлах элементов для задачи 2(a), G_1 — master, G_2 — slave, 80x100 элементов

На рис. 6 показаны распределения нормальных компонент перемещений для двух тел на линии контакта для задачи 2(a) в случае несогласованных сеток. Для данной задачи, как и для всех последующих, осцилляции нормальных перемещений визуально неразличимы, поэтому в дальнейшем будем рассматривать распределения нормальных напряжений.

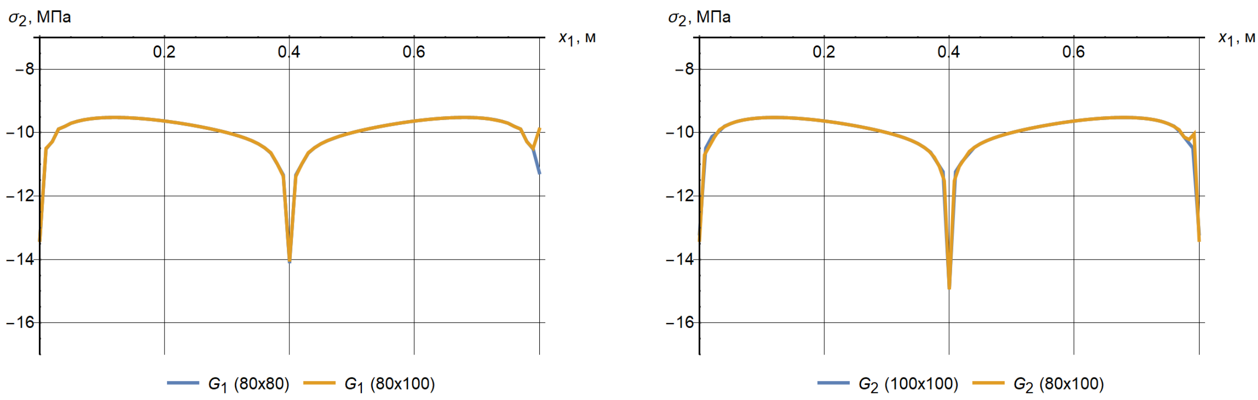
Сравним распределения нормальных напряжений на контактных границах каждого тела для случаев согласованных и несогласованных сеток.

На рис. 7–9 приведены фрагменты выполненных в одинаковом масштабе графиков распределений нормальных напряжений для двух тел в узлах конечных элементов на контактной границе для задач 2(a)–2(c). На приведенных графиках видно, что осцилляции практически отсутствуют за исключением точек, принадлежащих конечным элементам на границах области, их амплитуда не зависит от угла наклона линии контакта к оси x_1.

Для того чтобы численно оценить амплитуду колебаний, проведены серии расчетов на согласованных сетках требуемого размера и вычислены следующие значения:

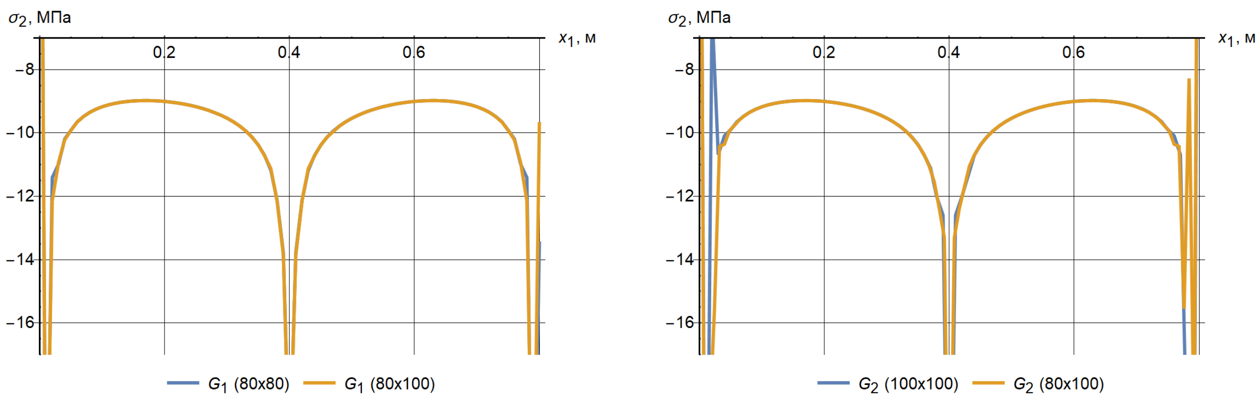
$$\delta(x_1) = \left| \frac{\sigma_2(x_1) - \hat{\sigma}_2(x_1)}{\hat{\sigma}_2(x_1)} \right|, \tag{28}$$

где $\hat{\sigma}_2(x_1)$ — значение в узлах или центрах конечных элементов для расчета на согласованных сетках. Для вычисления значений δ, относящихся к контактным границам тел G_1 и G_2, использовались согласованные сетки с разбиениями на 80 и 100 элементов в направлении x_1 соответственно. В таблицах 1–3 приведены средние по x_1 значения δ для различных видов линий контакта, комбинаций пар master/slave и шагов сеток. При вычислении этих



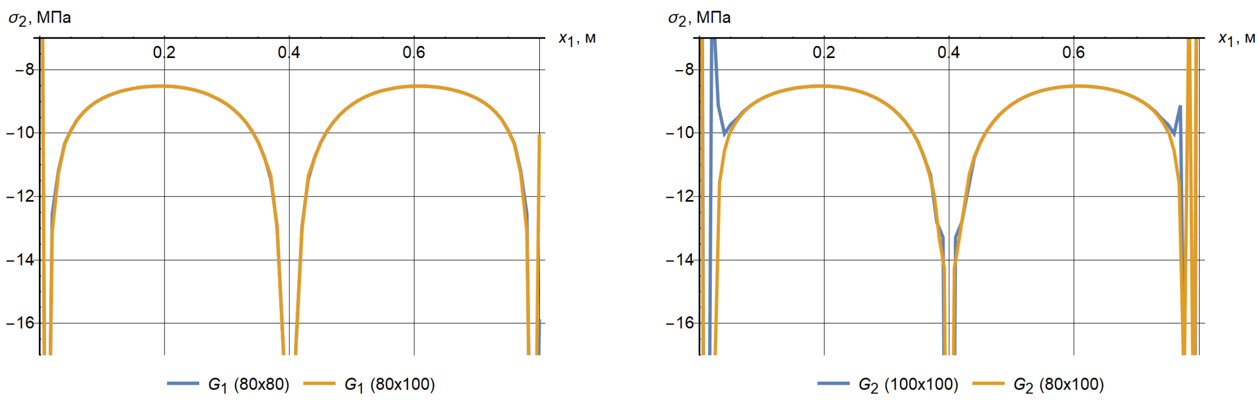
(a) (b)

Рис. 7. Зависимости нормального напряжения $\boldsymbol{\sigma_n(x_1)}$ в узлах элементов для задачи 2(a), G_1 — slave, G_2 — master



(a) (b)

Рис. 8. Зависимости нормального напряжения $\boldsymbol{\sigma_n(x_1)}$ в узлах элементов для задачи 2(b), G_1 — slave, G_2 — master



(a) (b)

Рис. 9. Зависимости нормального напряжения $\boldsymbol{\sigma_n(x_1)}$ в узлах элементов для задачи 2(c), G_1 — slave, G_2 — master значений не учитывались узлы, принадлежащие близким к границе элементам, так как в них δ на несколько порядков больше, чем в остальных узлах. Эти данные демонстрируют, что вне зависимости от выбора активного тела значения δ становятся больше по мере увеличения угла наклона контактной границы к оси x_1. Также видно, что амплитуда колебаний несколько уменьшается при увеличении числа конечных элементов.

Таблица 1. Узлы элементов (40x50 элементов)

Контактная граница	G_1 — master, G_2 — slave		G_1 — slave, G_2 — master	
	G_1	G_2	G_1	G_2
Задача 2(a)	0.00746285	0.00760225	0.00560897	0.00558498
Задача 2(b)	0.00938193	0.0133883	0.0133049	0.0169577
Задача 2(c)	0.00950844	0.0267106	0.0220507	0.0314268

Таблица 2. Узлы элементов (80x100 элементов)

Контактная граница	G_1 — master, G_2 — slave		G_1 — slave, G_2 — master	
	G_1	G_2	G_1	G_2
Задача 2(a)	0.000293074	0.00183156	0.000249121	0.00152819
Задача 2(b)	0.000752147	0.00527738	0.000372403	0.00888727
Задача 2(c)	0.000925545	0.0106227	0.000925545	0.0106227

Таблица 3. Узлы элементов (160x200 элементов)

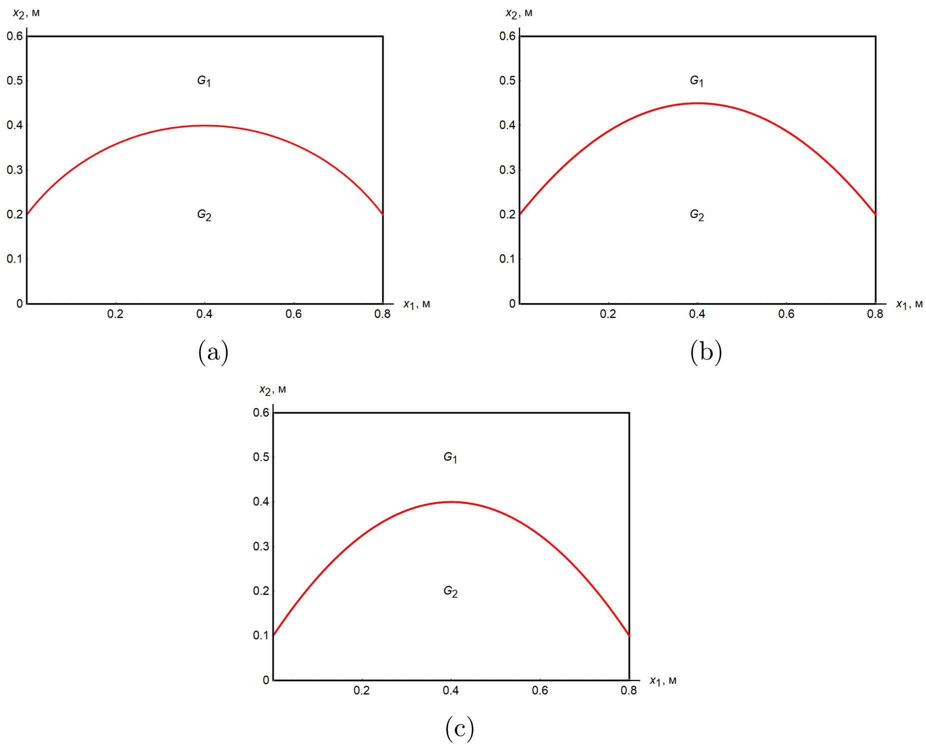
Контактная граница	G_1 — master, G_2 — slave		G_1 — slave, G_2 — master	
	G_1	G_2	G_1	G_2
Задача 2(a)	0.000712544	0.00168579	0.000108796	0.000989451
Задача 2(b)	0.000329897	0.00242079	0.0020623	0.00490957
Задача 2(c)	0.000495423	0.0047612	0.00400235	0.00838128

Рассмотрим вторую серию задач с криволинейными контактными границами (рис. 10). В задаче 10(a) линией контакта является дуга окружности, в задачах 10(b)–10(c) — параболы (см. табл. 4). В дальнейшем будем использовать обозначения парабола № 1 и парабола № 2. Окружность и парабола № 1 проходят через точки $(0, 0.2), (0.4, 0.4)$ и $(0.8, 0.2)$, а парабола № 2 — через точки $(0, 0.1), (0.4, 0.4)$ и $(0.8, 0.1)$. Отметим, что контактные границы задач 10(a)–10(c) являются кривыми второго порядка, как и стороны используемых конечных элементов.

Для начала рассмотрим согласованные сетки, оба тела G_1 и G_2 разбиты на 40 элементов в направлении x_1.

Таблица 4. Функции, описывающие линии контакта для задач 10(a)–10(c)

Окружность	$x_2 = 0.1\left(\sqrt{9+80x_1-100x_1^2}-1\right)$
Парабола № 1	$x_2 = -\dfrac{1}{0.64}x_1^2 + \dfrac{5}{4}x_1 + 0.2$
Парабола № 2	$x_2 = -\dfrac{3}{1.6}x_1^2 + \dfrac{3}{2}x_1 + 0.1$



(a) (b) (c)

Рис. 10. Расчетные области задач с криволинейной контактной границей

На рис. 11–13 приведены графики распределений нормальных напряжений на контактной границе для задач 10(a)–10(c). Во всех трех случаях графики визуально неотличимы и совпадают всюду, кроме окрестностей угловых точек, где имеются осцилляции. В других местах осцилляций не наблюдается.

Далее сравним распределения нормальных напряжений на контактных границах каждого тела для случаев согласованных и несогласованных сеток.

На рис. 14–15 приведены графики распределений нормальных напряжений для двух тел на контактной границе для задачи 10(c). Они демонстрируют, что амплитуда колебаний напряжений значительно уменьшается, когда активным является тело G_2 (с более мелкой сеткой). Данная особенность характерна и для всех последующих задач, поэтому в дальнейшем для несогласованных сеток приводятся графики только при комбинации G_1 — slave, G_2 — master.

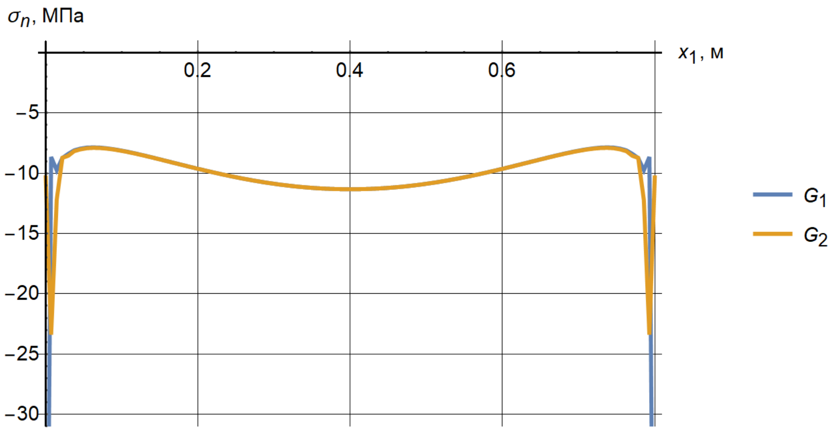


Рис. 11. Зависимости нормального напряжения $\boldsymbol{\sigma_n(x_1)}$ в узлах элементов для задачи 10(a), G_1 — master, G_2 — slave, 80x80 элементов

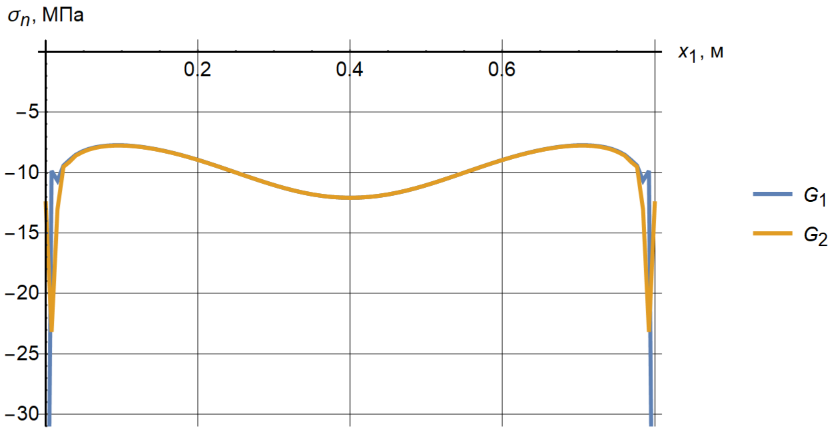


Рис. 12. Зависимости нормального напряжения $\boldsymbol{\sigma_n(x_1)}$ в узлах элементов для задачи 10(b), G_1 — master, G_2 — slave, 80x80 элементов

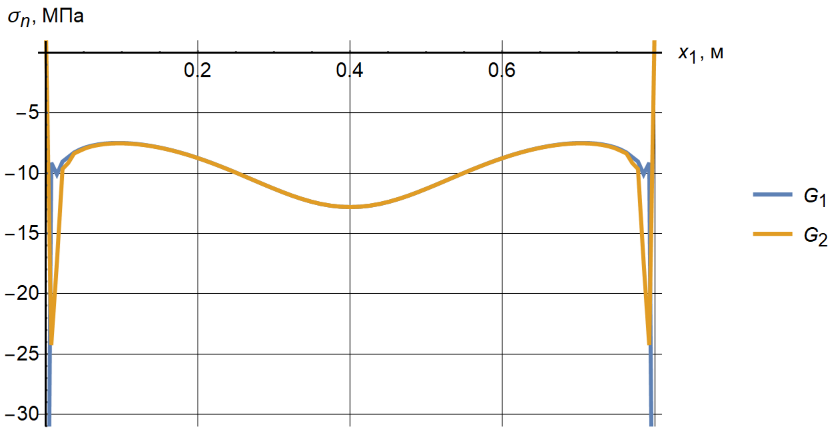


Рис. 13. Зависимости нормального напряжения $\boldsymbol{\sigma_n(x_1)}$ в узлах элементов для задачи 10(c), G_1 — master, G_2 — slave, 80x80 элементов

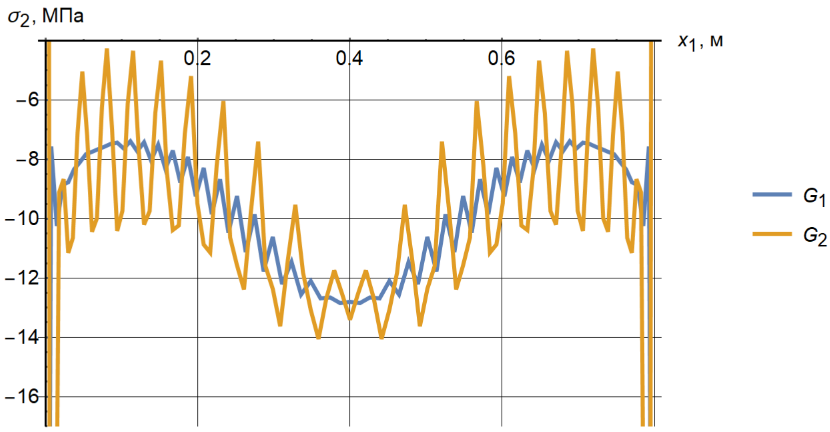


Рис. 14. Зависимости нормального напряжения $\boldsymbol{\sigma_n(x_1)}$ в узлах элементов для задачи 10(c), G_1 — master, G_2 — slave, 80x100 элементов

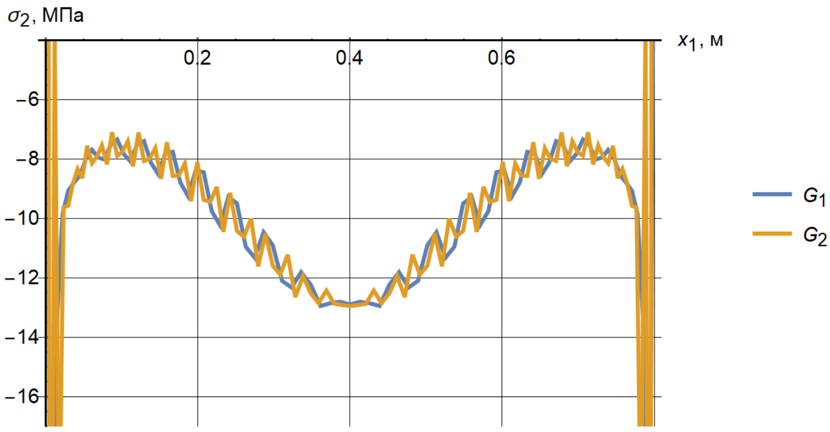
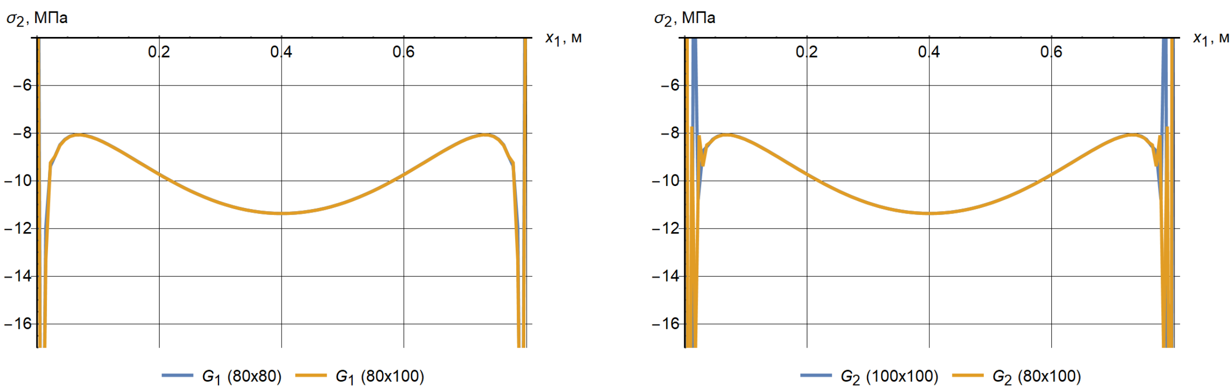
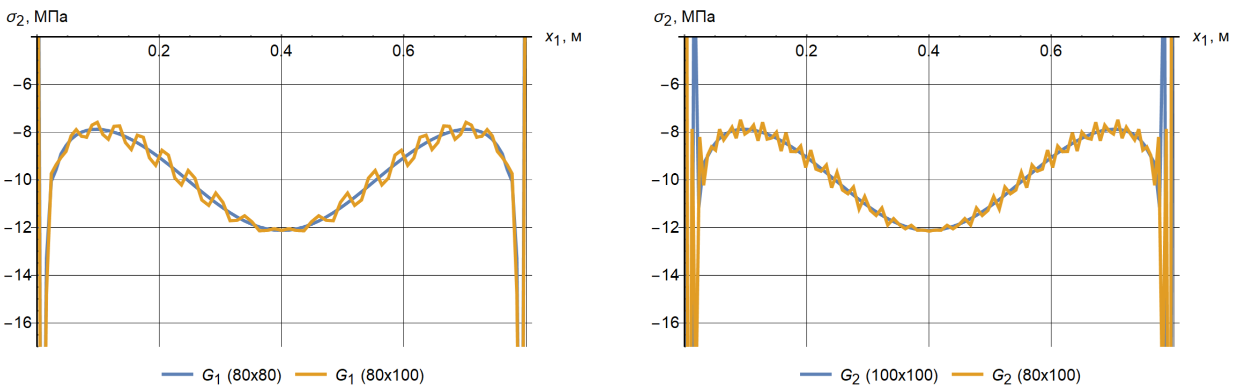


Рис. 15. Зависимости нормального напряжения $\boldsymbol{\sigma_n(x_1)}$ в узлах элементов для задачи 10(c), G_1 — slave, G_2 — master, 80x100 элементов



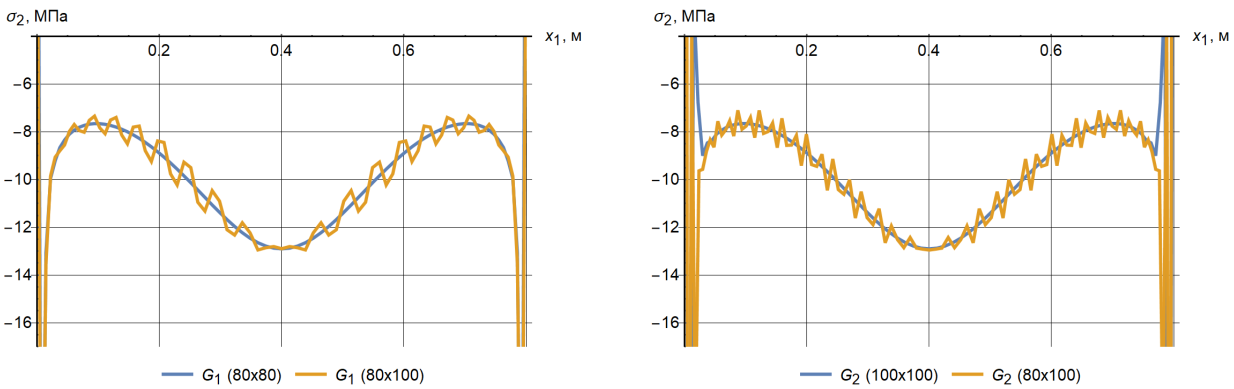
(a) (b)

Рис. 16. Зависимости нормального напряжения $\boldsymbol{\sigma_n(x_1)}$ в узлах элементов для задачи 10(a), G_1 — slave, G_2 — master



(a) (b)

Рис. 17. Зависимости нормального напряжения $\boldsymbol{\sigma_n(x_1)}$ в узлах элементов для задачи 10(b), G_1 — slave, G_2 — master



(a) (b)

Рис. 18. Зависимости нормального напряжения $\boldsymbol{\sigma_n(x_1)}$ в узлах элементов для задачи 10(c), G_1 — slave, G_2 — master

На рис. 16–18 приведены графики распределений нормальных напряжений в узлах конечных элементов на контактной границе для задач 10(a)–10(c). Осцилляции напряжений в узлах конечных элементов существенно увеличиваются в случае, когда линией контакта является парабола (рис. 17–18).

На рис. 19–20 приведены графики распределений нормальных напряжений для двух тел на контактной границе для задачи 10(b) при использовании более грубых сеток (40x50 элементов). Видно, что амплитуда колебаний увеличивается по сравнению со случаем более мелких сеток (см. таблицы 5–7).

Далее для второй серии задач (с криволинейной контактной границей) рассмотрим распределения нормальных напряжений в центрах конечных элементов, граничащих с линией контакта, и оценим, изменится ли амплитуда их колебаний.

На рис. 21–23 показаны графики распределений нормальных напряжений в центрах примыкающих к контактной линии элементов для задач 10(a)–10(c).

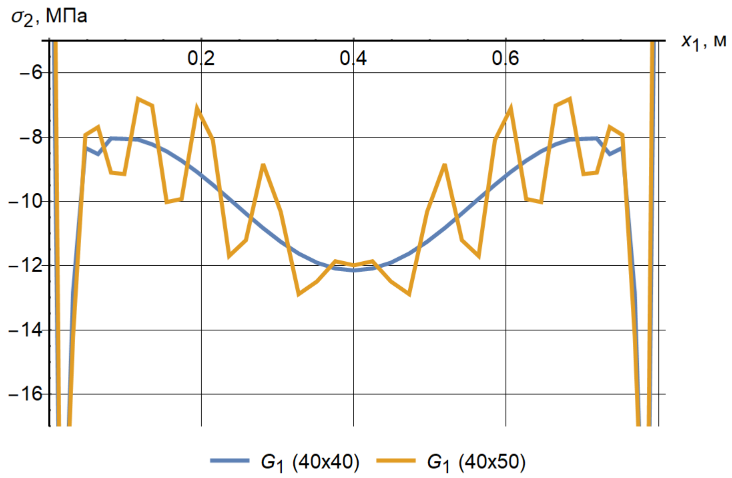


Рис. 19. Зависимости нормального напряжения $\boldsymbol{\sigma_n(x_1)}$ в узлах элементов для задачи 10(b), G_1 — slave, G_2 — master

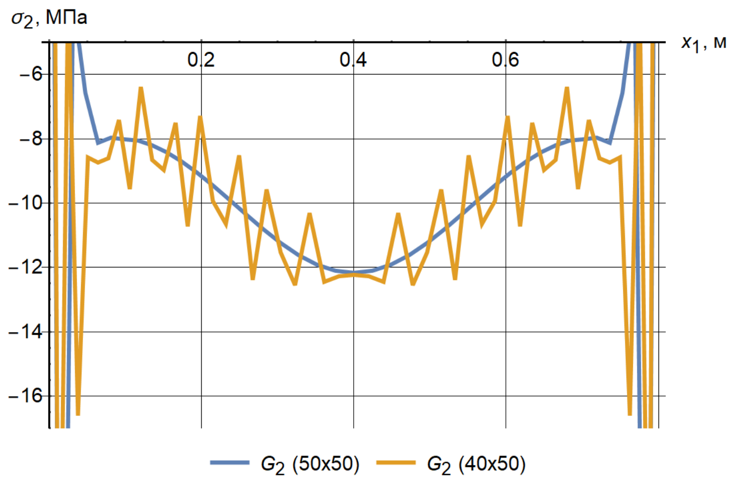


Рис. 20. Зависимости нормального напряжения $\boldsymbol{\sigma_n(x_1)}$ в узлах элементов для задачи 10(b), G_1 — slave, G_2 — master

На приведенных графиках видно, что амплитуда колебаний напряжений в центрах элементов несколько уменьшается. В таблицах 5–7 приведены средние по x_1 значения δ для различных видов линий контакта, комбинаций пар master/slave и шагов сеток. Эти данные демонстрируют, что наименьшие осцилляции как для узлов, так и для центров элементов наблюдаются в случае, когда линией контакта является дуга окружности, однако для центров элементов колебания всегда меньше. Также приведенные данные (как и графики) показывают, что для нижнего тела амплитуда колебаний в несколько раз меньше по сравнению с верхним телом. При увеличении числа конечных элементов амплитуда осцилляций существенно уменьшается, особенно этот эффект проявляется для нижнего тела G_2 в том случае, когда оно является активным.

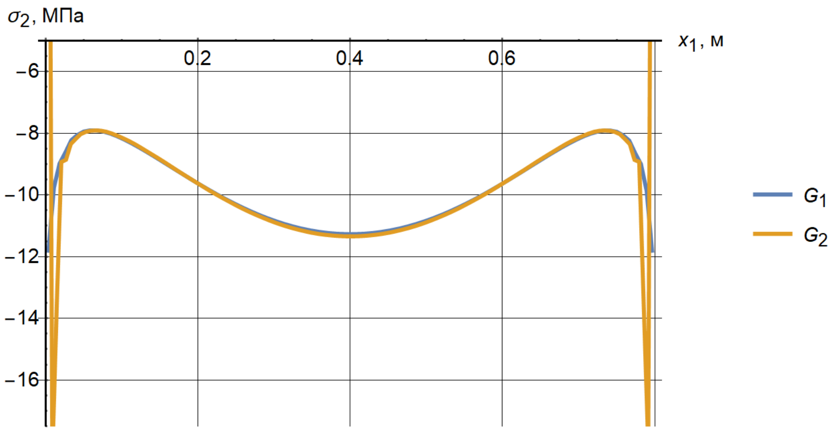


Рис. 21. Зависимости нормального напряжения $\boldsymbol{\sigma_n(x_1)}$ в центрах элементов для задачи 10(a), G_1 — slave, G_2 — master, 80x100 элементов

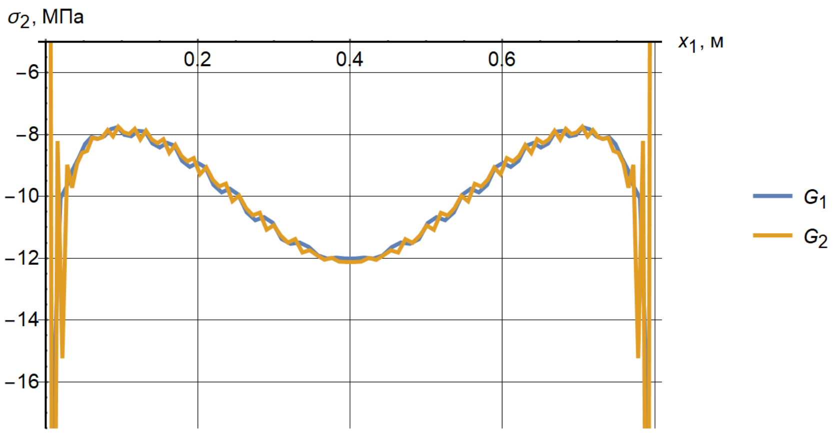


Рис. 22. Зависимости нормального напряжения $\boldsymbol{\sigma_n(x_1)}$ в центрах элементов для задачи 10(b), G_1 — slave, G_2 — master, 80x100 элементов

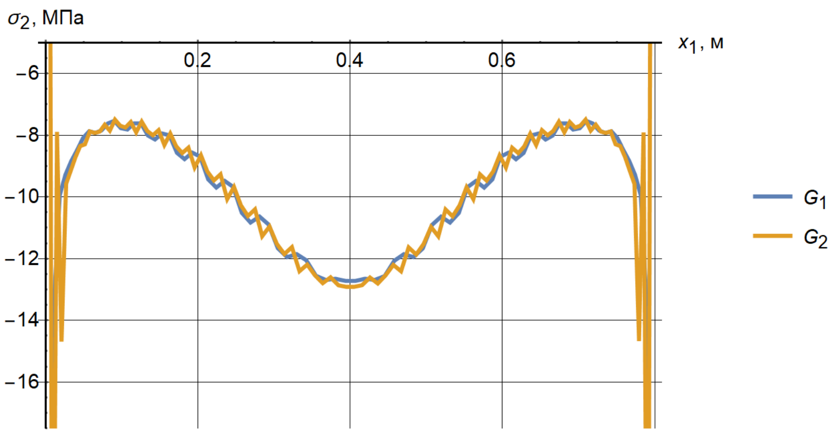


Рис. 23. Зависимости нормального напряжения $\boldsymbol{\sigma_n(x_1)}$ в центрах элементов для задачи 10(c), G_1 — slave, G_2 — master, 80x100 элементов

Таблица 5. Узлы элементов (40x50 элементов)

Контактная граница	G_1 — master, G_2 — slave		G_1 — slave, G_2 — master	
	G_1	G_2	G_1	G_2
Окружность	0.0169233	0.0171271	0.00171537	0.00426727
Парабола № 1	0.156673	0.321829	0.115996	0.112976
Парабола № 2	0.226411	0.39716	0.160306	0.169971

Таблица 6. Узлы элементов (80x100 элементов)

Контактная граница	G_1 — master, G_2 — slave		G_1 — slave, G_2 — master	
	G_1	G_2	G_1	G_2
Окружность	0.0111089	0.0119229	0.000611734	0.00226262
Парабола № 1	0.0237559	0.134299	0.0294357	0.027015
Парабола № 2	0.0438286	0.190678	0.0367798	0.0418275

Таблица 7. Узлы элементов (160x200 элементов)

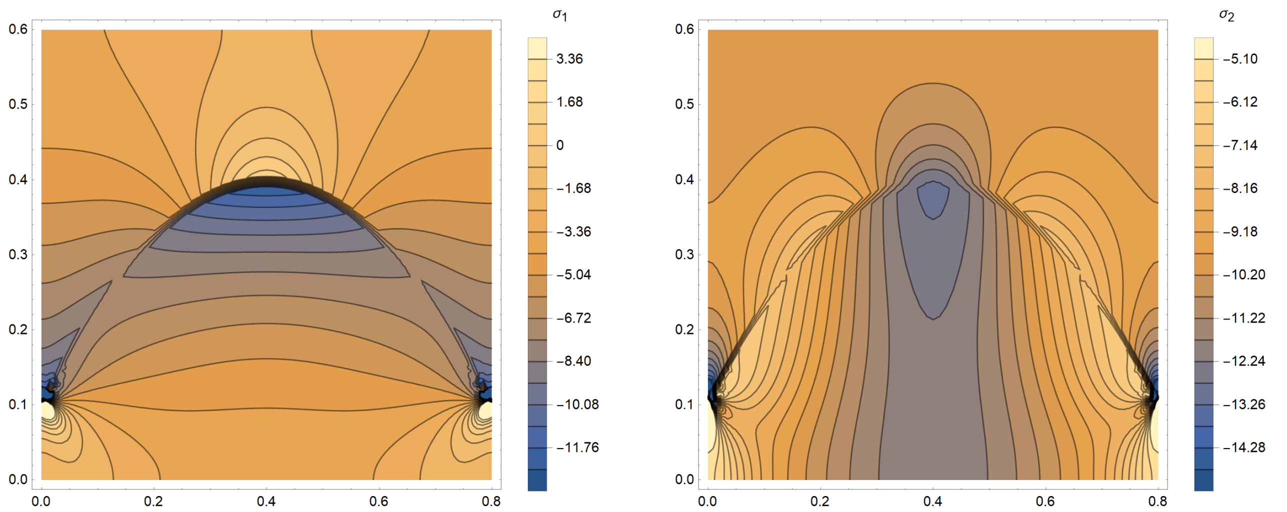
Контактная граница	G_1 — master, G_2 — slave		G_1 — slave, G_2 — master	
	G_1	G_2	G_1	G_2
Окружность	0.0089085	0.0096256	0.000606639	0.00166298
Парабола № 1	0.00901559	0.0466588	0.00668723	0.00758493
Парабола № 2	0.0116931	0.06973124	0.00894612	0.011774

В таблице 8 приведены средние по x_1 значения δ, вычисленные в центрах конечных элементов, граничащих с линией контакта для различных видов линий контакта и комбинаций пар master/slave в случае, когда верхнее тело G_1 разбито на 80 элементов, нижнее G_2 — на 100 элементов. Данные демонстрируют, что значения δ в центрах элементов примерно в два раза меньше, чем в узлах элементов для аналогичных задач (см. таблицу 6).

Таблица 8. Центры элементов (80x100 элементов)

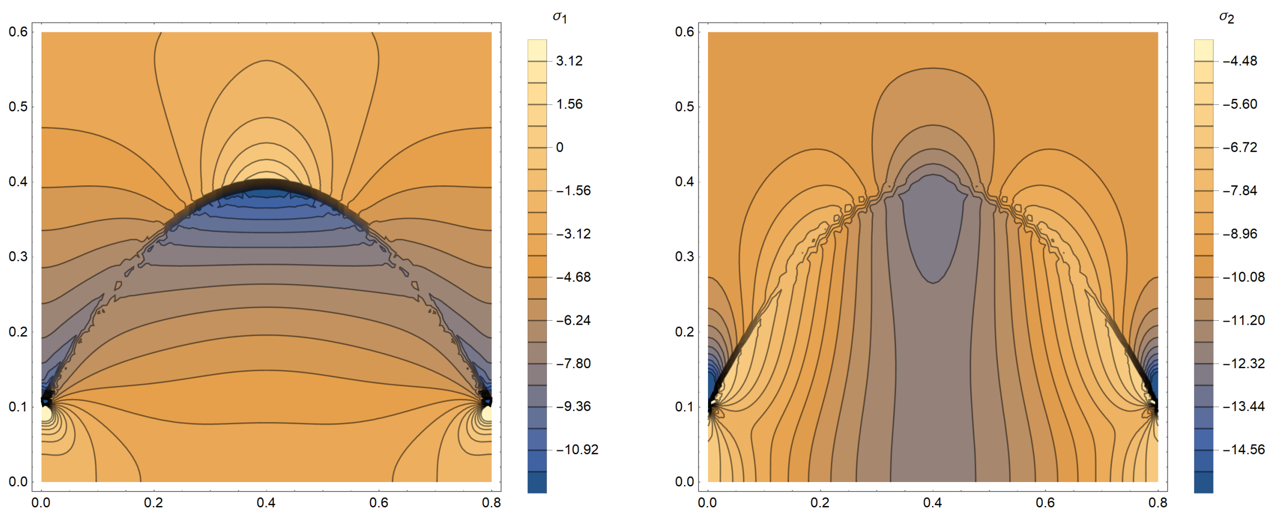
Контактная граница	G_1 — master, G_2 — slave		G_1 — slave, G_2 — master	
	G_1	G_2	G_1	G_2
Окружность	0.0137973	0.0127416	0.00187502	0.00138903
Парабола № 1	0.0391676	0.0619473	0.0197827	0.0184123
Парабола № 2	0.101346	0.0239393	0.0252457	0.0239393

Для задачи 10(c) построим двумерные распределения значений $\sigma_{11}(\boldsymbol{x})$ и $\sigma_{22}(\boldsymbol{x})$ во всех точках расчетной области. Рассмотрим случаи согласованных (80x80 элементов) и несогласованных (80x100) сеток. На рис. 24–25 приведены двумерные распределения напряжений в направлениях x_1 и x_2. Линии уровня у контактной границы не совпадают, поскольку показаны распределения $\sigma_{11}(\boldsymbol{x})$ и $\sigma_{22}(\boldsymbol{x})$, а при решении задач требуется выполнение равенства нормальных напряжений. При использовании несогласованных сеток осцилляции значений напряжений наблюдаются и на двумерном распределении (рис. 25(a)).



(a) (b)

Рис. 24. Двумерное распределение напряжений $\boldsymbol{\sigma_{11}(x)}$ и $\boldsymbol{\sigma_{22}(x)}$ в узлах элементов для задачи 10(c), G_1 — master, G_2 — slave, 80x80 элементов



(a) (b)

Рис. 25. Двумерное распределение напряжений $\boldsymbol{\sigma_{11}(x)}$ и $\boldsymbol{\sigma_{22}(x)}$ в узлах элементов для задачи 10(c), G_1 — master, G_2 — slave, 80x100 элементов

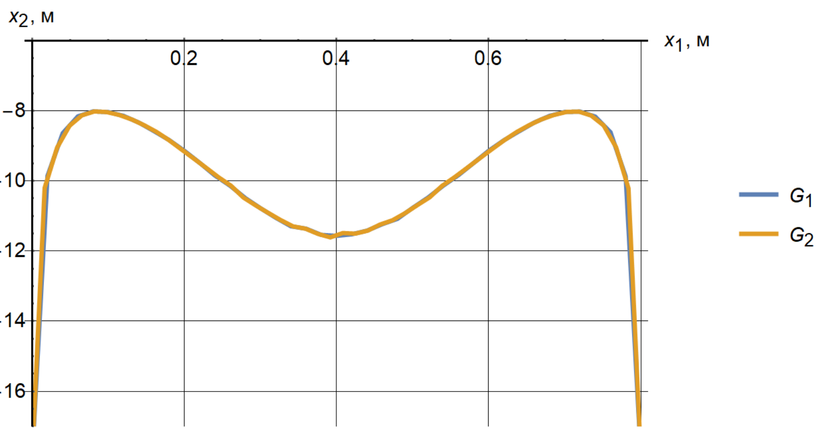


Рис. 26. Зависимости контактного давления в узлах элементов для задачи 10(b), 41x50 элементов

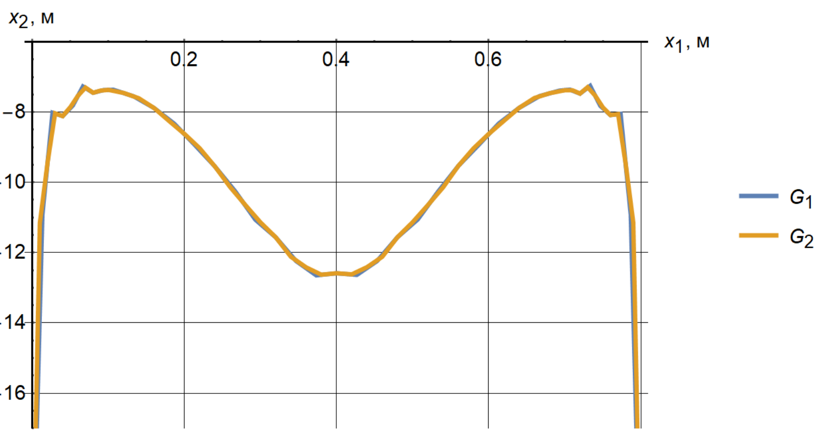


Рис. 27. Зависимости контактного давления в узлах элементов для задачи 10(c), 39x51 элемент

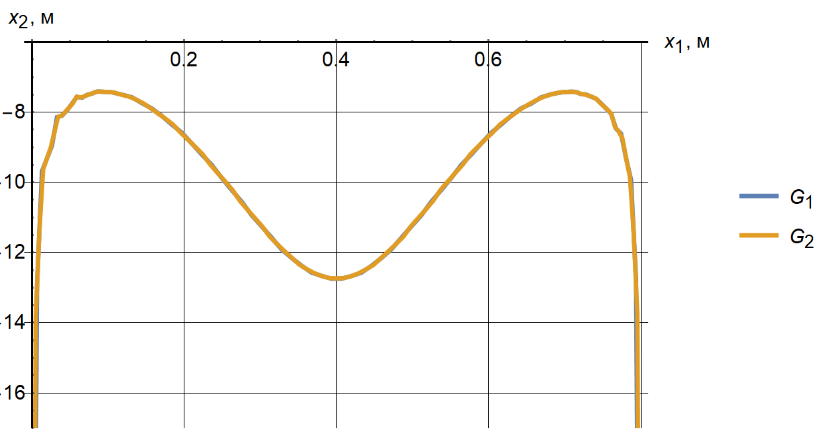


Рис. 28. Зависимости контактного давления в узлах элементов для задачи 10(c), 76x101 элемент

На рис. 26–28 показаны графики распределений контактных давлений для двух тел, вычисленных с помощью метода декомпозиции области. Конечно-элементная сетка состоит из треугольных элементов первого порядка. Графики визуально неотличимы, амплитуда осцилляций существенно меньше по сравнению с результатами, полученными mortar-методом.

В заключение рассмотрим еще одну тестовую задачу (см. рис. 29), в которой контактной границей является линия, описываемая следующей функцией:

$$x_2(x_1) = 0.1\cos\left(\frac{\pi(x+0.4)}{0.2}\right) + 0.3, \tag{29}$$

а закрепление на поверхностях S_4 и S_5 отсутствует. Будем использовать согласованную сетку: оба тела разбиты на 80 конечных элементов в направлении x_1. Остальные характеристики аналогичны предыдущим задачам.

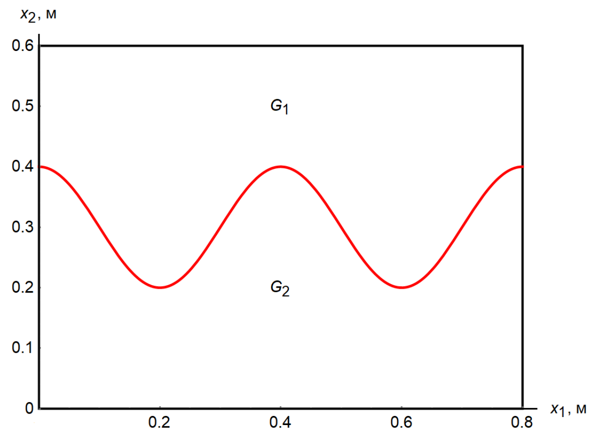


Рис. 29. Расчетная область задачи с синусоидальной контактной границей

На рис. 30 показаны распределения нормальных перемещений, а на рис. 31 — распределения нормальных напряжений в узлах конечных элементов для двух тел на линии контакта. Видно, что при использовании согласованных сеток графики визуально практически неотличимы. Однако в результатах есть следующая особенность: так как поверхности S_4 и S_5 являются свободными, в узлах нескольких элементов около правой границы расчетной области наблюдаются близкие к нулевым нормальные напряжения и отличающиеся для разных контактных границ нормальные перемещения, что соответствует выходу из контактного взаимодействия на этом участке.

Так как контактная линия (29) не является кривой второго порядка, при использовании несогласованных сеток возникает несовпадение между узлами конечных элементов и их проекциями на контактную границу противолежащего тела. В связи с этим в начальной конфигурации задачи возникает зазор, сопоставимый по величине с нормальными перемещениями узлов, вследствие чего решение задачи описанным вариантом mortar-метода приводит к получению результатов с большими относительными ошибками.

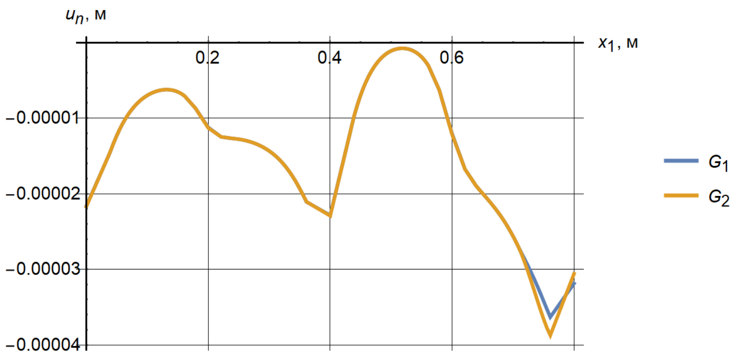


Рис. 30. Зависимости нормального перемещения $\boldsymbol{u_n(x_1)}$ в узлах элементов, G_1 — master, G_2 — slave

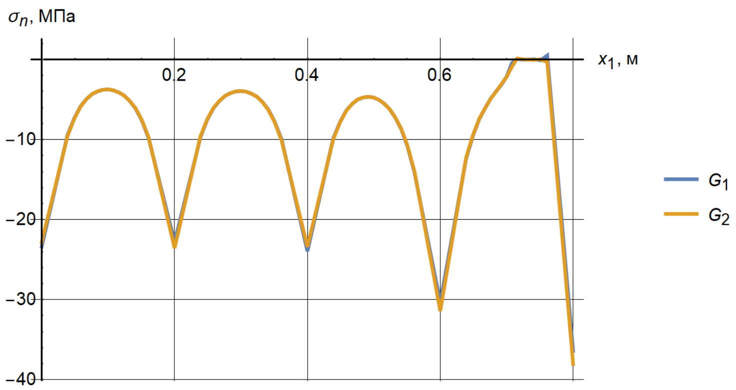


Рис. 31. Зависимости нормального напряжения $\boldsymbol{\sigma_n(x_1)}$ в узлах элементов, G_1 — master, G_2 — slave

7. Заключение

В работе представлены результаты численной реализации алгоритмов решения двумерных контактных задач теории упругости с помощью mortar-метода и метода декомпозиции области. Исследовано влияние выбора активного (master) и пассивного (slave) тел на распределение перемещений и напряжений на линии контакта. Результаты представлены на примере серий тестовых задач с различными видами линий контакта и комбинациями master/slave. В случае кусочно-прямолинейных контактных границ колебания практически отсутствуют вне зависимости от угла наклона прямых. При рассмотрении криволинейных границ амплитуды колебаний нормальных напряжений увеличиваются, однако они зависят от вида контактной линии и выбора активного и пассивного тел. В случае выбора активным тела с более мелкой сеткой осцилляции существенно уменьшаются. Также колебания становятся меньше в центрах прилегающих к контактной границе элементов. При использовании метода декомпозиции областей на несогласованных сетках колебания перемещений и напряжений существенно меньше, чем в расчетах с использованием mortar-метода.

Список литературы

[1] Галанин М. П., Крупкин А. В., Кузнецов В. И., Лукин В. В., Новиков В. В., Родин А. С., Станкевич И. В. Моделирование контактного взаимодействия системы термоупругих тел методом Шварца для многомерного случая // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2016. № 12. С. 9–20.

[2] Станкевич И. В., Яковлев М. Е., Си Ту Хтет. Разработка алгоритма контактного взаимодействия на основе альтернирующего метода Шварца // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2011. Спец. вып. Прикладная математика. С. 134–141.

[3] Babuska I. The finite element method with penalty // Mathematics of Computation. 1973. Vol. 27. P. 221–228.

[4] Le Tallec P., Sassi T. Domain decomposition with nonmatching grids: augmented Lagrangian approach // Mathematics of Computation. 1995. Vol. 64. P. 1367–1396.

[5] Галанин М. П., Глизнуцина П. В., Лукин В. В., Родин А. С. Варианты реализации метода множителей Лагранжа для решения двумерных контактных задач // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2015. № 89. 27 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-89

[6] Wriggers P. Computational Contact Mechanics. Berlin-Heidelberg: Speinger-Verlag. 2006. 520 p.

[7] Lamichhane B. P. Higher Order Mortar Finite Elements with Dual Largange Multiplier Spaces and Applications. Stuttgart: Universitat Stuttgart. 2006. 190 p.

[8] Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2008. 512 с.

[9] Котович А. В., Станкевич И. В. Решение задач теории упругости методом конечных элементов. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2012. 112 с.

[10] Розин Л. А. Метод конечных элементов в применении к упругим системам. М.: Стройиздат, 1977. 129 с.

[11] Розин Л. А. Вариационные постановки задач для упругих систем. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1978. 222 с.

[12] Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986. 318 с.

[13] Wohlmuth B. I. A mortar finite element method using dual spaces for the Lagrange multiplier // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2000. Vol. 38. (No. 3). P.989–1012.

[14] Станкевич И. В., Аронов П. С. Математическое моделирование контактного взаимодействия двух упругих тел с помощью mortar-метода // Математика и математическое моделирование. 2018. № 3. С. 26–44.

[15] Быченков Ю. В., Чижонков Е. В. Итерационные методы решения седловых задач. М.: БИНОМ, 2010. 349 с.

[16] Аронов П. С., Галанин М. П., Родин А. С., Станкевич И. В. Решение задачи контакта двух упругих тел mortar-методом и методом Шварца на несогласованных сетках // Таврический вестник информатики и математики. 2019. №1(42). С. 24–42.

[17] Toselli A., Widlund O. Domain Decomposition methods — Algorithms and Theory. Springer Berlin Heidelberg New York. 2005. 450 p.

[18] Бажанов В. Л. и др. Пластинки и оболочки из стеклопластиков. М.: Высшая школа, 1970. 480 с.

Содержание